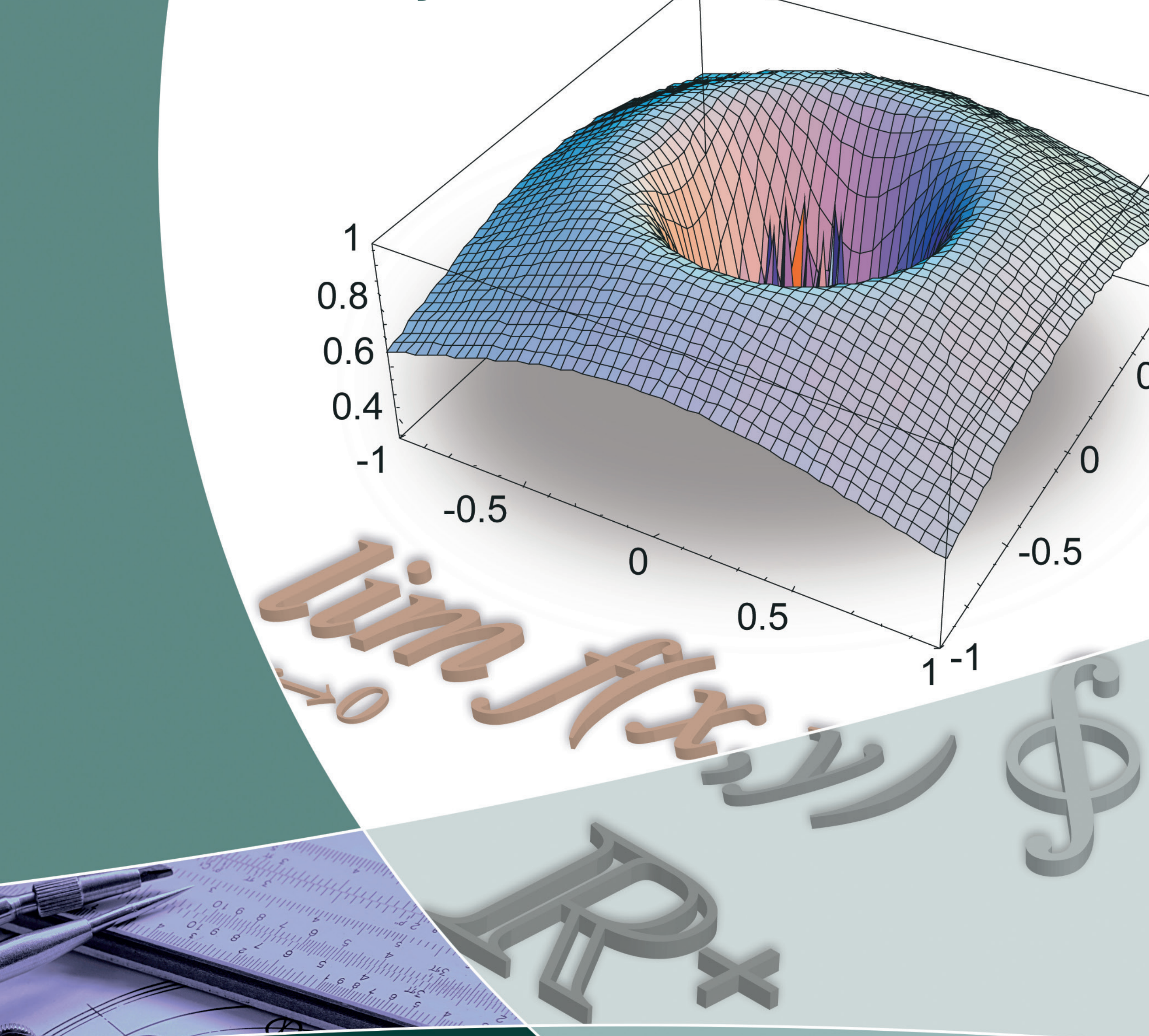
Introducción al cálculo

Emilio Checa Martínez
Elena Alemany Martínez



académica

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

Emilio Checa Martínez   Elena Alemany Martínez

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento ….. de la UPV

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: CHECA MARTÍNEZ, EMILIO; ALEMANY MARTÍNEZ, ELENA (2013) *Introducción al cálculo.* Valencia: Universitat Politècnica

Primera edición, 2013

Distribución: Telf. 963 877 012/ http://www.lalibreria.upv.es / Ref.: 229

Imprime: Byprint percom, sl.

ISBN: 978-84-9048-118-9
Impreso bajo demanda

Impreso en España

Introducción

La elaboración de este libro se ha llevado a cabo pensando en un curso de iniciación sobre cálculo tanto diferencial como integral para funciones de una y varias variables, aunque la mayor parte se desarrolla para funciones de varias variables teniendo en cuenta que el estudiante conoce lo esencial de las funciones de una variable. Puede utilizarse como texto de apoyo en los primeros cursos de las Ingenierías y de carreras de Ciencias y nos hemos basado en un texto de cálculo diferencial de los autores en el que se han incorporado nuevas partes del cálculo, como el cálculo integral y nuevos ejercicios de las distintas partes tratadas, suprimiendo y transformando algunos puntos que hemos considerado poco tratados en las clases.

En este texto se omiten muchas demostraciones teóricas y se desarrolla desde un punto de vista práctico, resolviendo de forma continua ejercicios, dejando otros planteados con y sin solución para que el estudiante pueda comprobar hasta qué punto ha adquirido los conocimientos suficientes.

Evitamos en todo momento y estamos atentos, para que el enfoque anterior no se convierta en la resolución mecánica de ejercicios que no conduce a ninguna parte y que puede apagar el rigor en el razonamiento que se puede aplicar en los ejercicios previamente seleccionados.

Debemos comentar que la forma de presentar el material es la que se utiliza en algunos libros clásicos y también en otros más modernos que figuran en la bibliografía que presentamos y que nos sirven de referencia continua.

Es importante no sólo elaborar una lista de ejercicios resueltos al final de algunos capítulos, sino también plantear problemas con solución y otros sin solución donde el alumno arriesgue en la resolución. Uno de los objetivos que se persigue con este planteamiento es el comprobar los conocimientos adquiridos y afianzarlos.

El desarrollo de los ejercicios en este texto lo estructuramos en dos partes, la primera compuesta de tres bloques sobre cálculo diferencial para funciones de una y sobre todo varias variables y la segunda parte se estructura en dos bloques sobre integración de funciones reales también de una y varias variables haciendo hincapié en las aplicaciones.

El **primer bloque de la primera parte** se dedica al estudio de las funciones reales de variable real, pero se tiene en cuenta que el estudiante ya tiene en teoría unos conocimientos mínimos adquiridos antes de su ingreso en el grado correspondiente. De cualquier forma y ante la realidad observada durante años, hemos optado por ofrecer esos mínimos necesarios para poder seguir el curso de cálculo para funciones de varias variables que presentamos. Los mínimos incluyen a grandes rasgos entre otros, conceptos y propiedades básicas referentes a los límites, a la continuidad y derivabilidad, así como algunas propiedades básicas y aplicaciones.

En un **segundo bloque** nos introducimos en el cálculo diferencial para funciones de varias variables estableciendo la relación con los conceptos de las funciones del bloque 1 anterior. Por tanto extendemos el concepto de límite para funciones de dos variables así como el de continuidad y el de derivada, lo que nos lleva al tratamiento de las derivadas parciales pues aparecen distintas direcciones que podemos tomar según los ejes.

Generalizamos el concepto anterior de pendiente según la dirección de los ejes, pero siguiendo una dirección cualquiera lo que plantea el estudio del concepto de derivada direccional. Luego se aborda el sentido de la diferencial para funciones de varias variables lo que muestra una buena herramienta para realizar cálculos aproximados en funciones analizando aquí una serie de ejemplos a título de aplicación.

Se introduce también el concepto de vector gradiente y algunas propiedades esenciales, así como la relación que guardan todos los conceptos anteriores.

Hacemos uso de la diferencial de las funciones de varias variables pero también a valores vectoriales lo que conduce al concepto de matriz jacobiana, y esto nos ofrece un instrumento de cálculo efectivo para la diferencial en el caso general de funciones vectoriales de variable vectorial.

En el **bloque tercero** se estudia la fórmula de Taylor y alguna de sus aplicaciones a cálculos aproximados. Más tarde aplicamos algunos de los conceptos de los bloques anteriores para desarrollar la teoría de máximos y mínimos tanto locales como absolutos. Si además las variables cumplen condiciones adicionales se estudia el problema mediante el método de los multiplicadores de Lagrange que ayuda a resolver parcial o totalmente algunos problemas de optimización.

Por último en la **segunda parte estructurada en los bloques cuarto y quinto** desarrollamos el concepto de función integrable Riemann para funciones de una variable , aunque no profundizamos en métodos de cálculo en general; sólo repasamos los métodos de sustitución e integración por partes, así como la regla de Barrow y aplicaciones básicas para cálculo de áreas, longitudes, volúmenes, etc. Esto nos permite plantear la noción de función integrable para funciones de varias variables, centrándonos en nuestro caso sobre todo en dos y tres variables, junto con algunas aplicaciones. En ocasiones ante la dificultad de integrar en ciertos recintos, conviene aplicar cambios de variable en la integral. Aquí destacamos el cambio de coordenadas a polares para funciones de dos variables y el cambio a coordenadas esféricas y cilíndricas para funciones de tres variables. Todo ello se expone con resolución continua de ejercicios.

Agradecimientos: En la ardua tarea de la realización de un texto contribuyen no sólo los autores sino también otras personas que no son visibles. Desde aquí nuestro agradecimiento a Paqui , Quique y nuestras hijas por todo su apoyo y comprensión. También nuestro reconocimiento a la profesora Josefa Marín Molina por haber estado siempre dispuesta a ayudar desinteresadamente en el logro del resultado final de este texto.

Índice general

Parte I

Cálculo Diferencial

Capítulo 1

Función real de variable real

En este apartado, desarrollamos una exposición no detallada de los conceptos que intervienen en el estudio de las funciones reales de variable real, pues nos interesa más un tratamiento general que facilite el estudio de ciertas partes del cálculo diferencial para funciones de varias variables.

Es importante considerar que el estudiante tiene algún conocimiento previo de algunos conceptos generales relacionados con este tipo de funciones. Si el estudiante observa que no tiene base suficiente puede trabajar esta parte del texto.

Las ideas que abordaremos en este apartado sobre función real de variable real son: breve repaso de la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de funciones, haciendo especial hincapié en las interpretaciones geométricas, así como en algunas aplicaciones como las relacionadas con la aproximación funcional mediante polinomios, e incidiremos en la teoría y práctica de los máximos y mínimos relativos y absolutos de una función.

A continuación nos planteamos un cuestionario general con preguntas más o menos elementales que exponemos para su discusión en clase o en grupos reducidos. De estas cuestiones unas están resueltas y otras quedan propuestas con solución para su discusión en clase.

Si se observa que muchas de estas preguntas no están claras, sería recomendable repasar ciertos conceptos relacionados con el cálculo que inciden sobre temas como el de inecuaciones, subconjuntos de números reales, dominio de funciones, representación de funciones, límites, continuidad, derivabilidad, etc.

Este elemento puede ser importante también para darse cuenta el profesorado del nivel al inicio del curso.

1.1. Cuestionario básico resuelto

1.- Dibujad las siguientes regiones
a) $x^2 > 3$, b) $-2 < x - 5$ c) $x \leq 5$ d) $|x + 3| > 15$

SOL. Mostramos el recinto de los cuatro apartados indicando que el asterisco significa que ese punto sí entra en el conjunto definido.

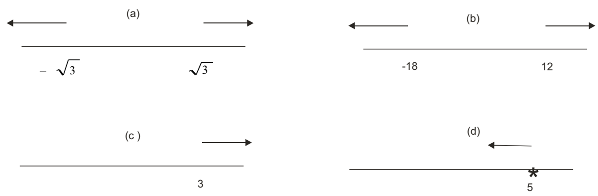


Figura 1.1:

2.- Indicar, en la recta real, cuáles son los siguientes conjuntos:
a) $(-2, 3) \cup (5, +\infty)$ b) $(-\infty, 12) \cup (15, 16)$ c)$[-1, 2] \cup (3, 5]$

SOL. El recinto para los tres apartados es

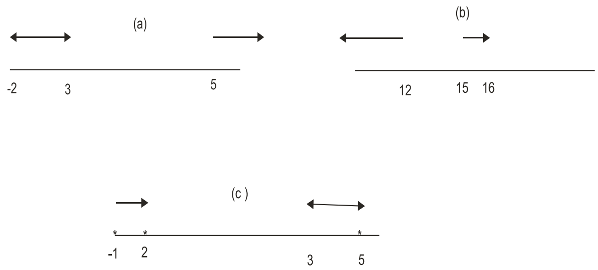


Figura 1.2:

donde los asteriscos indican que esos elementos sí entran en el conjunto.

3.- De los siguientes conjuntos dar, si existen, cotas superiores e inferiores. Pensar también si existe la menor de las cotas superiores y la mayor de las inferiores.

a) $\{2, 4, 6, 8, ...\}$
b) $\{\frac{1}{n},\ n \in N\}$
c) Q (números racionales)
d) I (números irracionales)
e) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 8\}$
f) $\{x \in\ Q :\ x^2 < 2\}$

SOL. a) Es evidente que no existe cota superior pues dado cualquier número por grande que sea siempre existe uno del conjunto que lo supera. en este caso tampoco existe la menor de las cotas superiores.

En relación a las cotas inferiores todos los números menores que 2 verifican que son cotas inferiores y en este caso la mayor de las cotas inferiores claramente es el 2 por lo que es ínfimo y al ser del conjunto mínimo.

b) Esta sucesión de números está claro que empieza en 1 y sus valores cuando n crece tienden a valer 0, aunque este valor no pertenece al conjunto ya que no existe ningún número natural n tal que $\frac{1}{n} = 0$. Cotas superiores sirven todos los valores mayores que 1, siendo este valor la menor de las cotas superiores , o sea el supremo y al estar en el conjunto es máximo. Por otro lado 0 es la mayor de las cotas inferiores y al no estar en el conjunto es ínfimo pero no mínimo.

c) El conjunto de los números racionales está claro que no tiene cotas superiores ni inferiores, ni supremo ni ínfimo ya que Q por ejemplo contiene a los números enteros $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$.

d) Sucede algo análogo al caso anterior pues dado cualquier número positivo siempre hay un número irracional que lo supera y si es negativo siempre hay un irracional que es menor. Por tanto no existen cotas superiores ni inferiores y por supuesto no hay ni supremo ni ínfimo.

e) Este conjunto en realidad está formado por todos los números reales $x < 2\sqrt{2}$ el cual claramente no tiene cota inferior ni ínfimo ya que el conjunto se puede expresar como $(-\infty, 2\sqrt{2})$. Ahora bien cotas superiores sí tiene por ejemplo $2\sqrt{2}, 27, 12045$, y en general todos los números reales que son mayores o iguales que $2\sqrt{2}$. La menor de las cotas superiores es $2\sqrt{2}$ y este valor es el supremo pero no es máximo al no pertenecer al conjunto.

f) Este conjunto se puede expresar así $\{x \in \ Q : \ x < \sqrt{2}\}$ es decir todos los números racionales cuyo cuadrado sea menor que raíz de 2.

4.- ¿Sabrías demostrar que la suma de dos números racionales r_1 y r_2 es un número racional?. Inténtalo

SOL. Es conocido que un número racional x, es aquel que se puede expresar como $x = \frac{a}{b}$ siendo $a, b \in \mathbb{Z}$, es decir a y b números enteros. Por tanto si r_1, r_2 son números racionales es porque se pueden expresar ambos así $r_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $r_2 = \frac{a_2}{b_2}$ y en consecuencia $r_1 + r_2 = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2}{b_1 b_2}$, que claramente es cociente de dos números enteros, por tanto es racional la suma de números racionales.

5.- ¿Qué dirías acerca de la suma de un número racional y otro irracional?

SOL. Desde luego la suma de un número racional r_1 y de un número irracional i_1 tiene que ser necesariamente irracional pues si fuera racional, es decir si $r_1 + i_1 = r_2$, despejando quedaría $i_1 = r_2 - r_1$ que por un lado sería irracional de partida y por otro lado sería racional al ser diferencia de dos números racionales, lo cual es contradictorio. Por tanto la respuesta es que es irracional.

6.- Sabrías resolver la inecuación $x^2 - 2x + 1 > 0$?
¿Y esta otra $(x^2 - 1)(x - 3) \leq 0$? ¿Y $(x^2 - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$?

SOL. Esta primera inecuación es fácil de resolver teniendo en cuenta que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$, lo cual siempre es cierto excepto cuando $x = 1$. Luego la solución son todos los números reales excepto el 1.

Para la inecuación $(x^2 - 1)(x - 3) \leq 0$,tenemos en cuenta que $(x^2 - 1)(x - 3) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$ cuyas raíces claramente son $x = -1, 1$, y 3.

Podemos utilizar unas tablas sencillas para este fin, pues se estructura con cada uno de los factores indicando el signo en cada intervalo y luego se efectúa el producto, con lo que enseguida se observa la solución de la inecuación

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$(x + 1)$	-	$+$	$+$	$+$
$(x - 1)$	-	-	$+$	$+$
$(x - 3)$	-	-	-	$+$
$(x + 1)(x - 1)(x - 3)$	-	$+$	-	$+$

Por tanto la solución de la inecuación $(x^2-1)(x-3)\leq 0$, es $x\in(-\infty,-1)\cup(1,3)$.

Para la siguiente inecuación $(x^2-1)(x-2)(x-3)>0$ podemos poner $(x^2-1)(x-2)(x-3)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$ y planteamos el cuadro correspondiente

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
$(x+1)$	-	+	+	+	+
$(x-1)$	-	-	+	+	+
$(x-2)$	-	-	-	+	+
$(x-3)$	-	-	-	-	+
$(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$	+	-	+	-	+

La solución de la inecuación planteada en este caso es $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(3,+\infty)$

7.- ¿Qué representa $x^2+(y-3)^2\leq 9$?. ¿Y $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$?. ¿Y $y^2=3x^2$?

SOL. Recordemos algunas relaciones de figuras(cónicas) estándar, como son los circunferencias y las elípses.

Así la relación $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ es una circunferencia de centro el punto de coordenadas (a,b) y radio r. La relación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, representa una elipse de semiejes a, y b. Por tanto las que tenemos en el ejercicio representan un círculo(pues es ≤ 9) de centro el punto $(0,3)$ y de radio 3, y una elipse de semiejes $a=2, b=3$. La siguiente relación $y^2=3x^2$ no debe inducir a confusión con parábolas pues aquí si se despeja $y=\pm\sqrt{3}x$ lo que representa un par de rectas

8.- Hallar en las siguientes funciones los valores $f(0)$, $f(-2)$ y $f(\frac{2}{3})$, a)$f(x)=\sqrt{x^3+1}$, b) $f(x)=|x-2|-3$ c) $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x-1}$

SOL. a) Sustituyendo en la función se tiene para $x=0,-2,\frac{2}{3}$, $f(0)=\sqrt{0^3+1}=1, f(-2)=\sqrt{(-2)^3+1}=3, f(\frac{2}{3})=\sqrt{(\frac{2}{3})^3+1}=\sqrt{\frac{8}{27}+1}=\sqrt{\frac{35}{27}}$

b) $f(0)=|0-2|-3=-1$, $f(-2)=|-2-2|-3=1, f(\frac{2}{3})=\left|\frac{2}{3}-2\right|-3=\frac{4}{3}-3=\frac{-5}{3}$

c) $f(0)=\frac{0}{-1}=0$, $f(-2)=\frac{(-2)^{\frac{2}{3}}}{-2-1}=\frac{\sqrt[3]{4}}{-3}$, $f(\frac{2}{3})=\frac{\frac{2}{3}^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}-1}=\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}{-\frac{1}{3}}=-3\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

9.- Dibujar la gráfica y establecer el dominio y el rango de las funciones siguientes

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2+x & 1 \leq x < 2 \\ x^2 & 2 \leq x < 4 \\ -1+x & 4 \leq x < \infty \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2x+3, & 0 \leq x < 2 \\ -1+x, & 2 \leq x \end{cases}$

SOL. Las gráficas respectivamente son las que se muestran

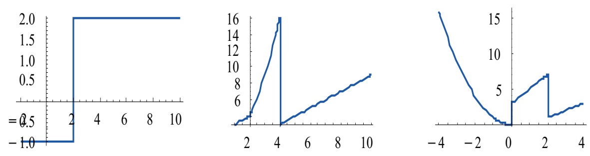


Figura 1.3:

Observando las figuras se ve claramente que los dominios son respectivamente $\mathbb{R} - \{2\}, [1, \infty)$ y $(-\infty, +\infty)$. El rango es $\{-1, 2\}, [3, +\infty)$ y $(0, \infty)$

10.- Expresar el área de un círculo en función de la longitud de su circunferencia.

SOL. Es muy conocido que el área de un círculo es $A = \pi r^2$ siendo r el radio de la circunferencia. La longitud de la circunferencia es $l = 2\pi r$, y despejando de aquí $r = \frac{l}{2\pi}$. Sustituyendo en la fórmula del área se tiene $A = \pi \frac{l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi}$

11.- Expresar el volumen de un cubo en función del área de una de sus caras.

SOL. La figura del cubo es la siguiente

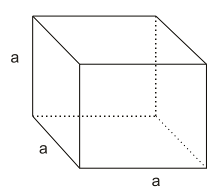


Figura 1.4:

Como el volumen del cubo es $V = a^3$ para darlo en función del área $A = a^2$, de una de sus caras se tendrá $V = a.A$

12.- Expresar el área de la superficie de un cubo en función de la longitud de la diagonal de una cara.

SOL. La superficie es $S = 6a^2$ y la diagonal de una de sus caras por el teorema de pitágoras $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$. Luego $S = 3d^2$

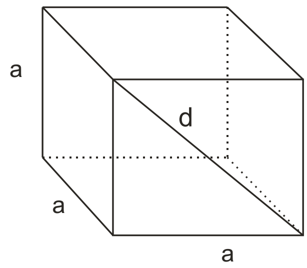


Figura 1.5:

13.- Un triángulo rectángulo está formado por los ejes de coordenadas y una recta que pasa por el punto de coordenadas $(3,4)$. Expresar el área del triángulo en función de la abcisa de corte con el eje.

SOL. El dibujo es

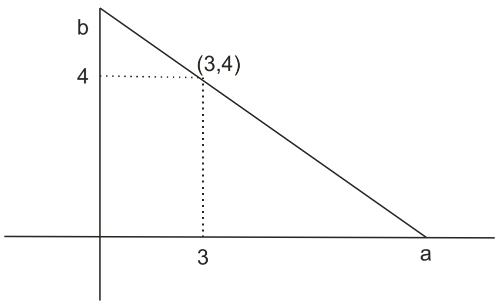


Figura 1.6:

Se supone conocida la ecuación segmentaria de la recta que es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ donde a y b son los puntos de corte con los ejes coordenados.

El área del triángulo es $A = \frac{1}{2}ab$ y lo debemos dejar todo en función de a que es la abcisa de corte. Como la recta pasa por el punto $(3,4)$ este punto debe cumplir la ecuación y así $\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1$ y de aquí despejando b se tiene $b = \frac{-4a}{3-a}$. sustituyendo conseguimos $A = -2\frac{a^2}{3-a}$ y claramente este valor es positivo pues $a > 3$.

14.- Comentar cómo se calcula el ángulo que forman dos rectas R_1 y R_2 siendo las ecuaciones de éstas respectivamente $y = m_1 x + n_1, \quad y = m_2 x + n_2$.

SOL. Esto se puede llevar a cabo de distintas formas. Para simplificar el ejercicio podemos suponer que ambas rectas pasan por el origen de coordenadas pues aunque esto no sea cierto siempre se puede efectuar una traslación de forma que queden así y esto no afecta a la resolución del ejercicio.

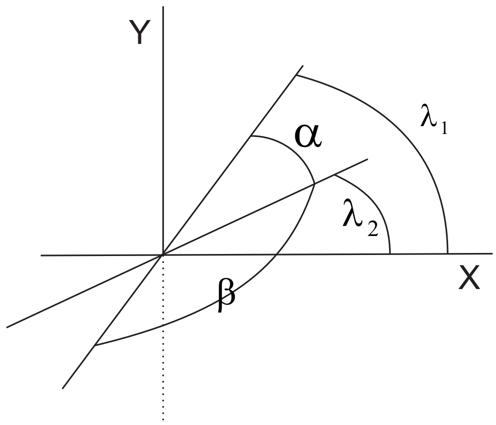


Figura 1.7:

Una primera forma de calcular el ángulo, sabiendo que $m_1 = \tan\lambda_1$, $m_2 = \tan\lambda_2$, es calcular mediante el arco tangente los ángulos λ_1, λ_2 y luego $\alpha = \lambda_1 - \lambda_2$, y $\beta = \pi - \alpha$.

También se pueden hallar los ángulos por medio de la fórmula de la tangente de la diferencia de ángulos es decir $\tan\alpha = \tan(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\tan\lambda_1 - \tan\lambda_2}{1+\tan\lambda_1 \tan\lambda_2}$ y una vez calculado este valor se obtiene el arco tangente que será α y β.

15.- Comentar el posible valor de los límites funcionales siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 2} (2x^2 + 3x - 1)$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{(x-5)}{x^2-25}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4-3x^2+2x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3-3x^2-1}{x^4-2x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5-3x^2-1}{x^3-6x+3}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4-3x^3-1}{x^4-2x+12}$

SOL. a) Sustituyendo en la función el posible valor del límite es $2.\,2^2 + 3.\,2 - 1 = 13$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{(x-5)}{x^2-25} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{11}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4-3x^2+2x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^3-3x+2)x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^3-3x+2)}{2} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2-1}{x^4-2x+3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3})}{x^3(x-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3})}{(x-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3})} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5-3x^2-1}{x^3-6x+3}$ siguiendo pasos análogos al apartado anterior se tiene que tiende a infinito.

f) Siguiendo pasos similares al apartado d) observamos que el límite puede valer 1.

16.- Construír una tabla de valores de la función $f(x) = \frac{Sen\,x}{x}$ para valores de x próximos a cero. ¿A qué valor se aproxima la función cuando $x \to 0$?.

SOL. Vamos a mostrar una tabla de valores para x que se van aproximando al cero y observaremos que los valores de la función propuesta se aproximan a 1.

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
0.9	0.8703
0.8	0.8966
0.7	0.9203
0.6	0.941
0.5	0.9588
0.4	0.9735
0.3	0.985
0.2	0.9933
0.01	0.9999

Como hemos dicho al principio del ejercicio éste límite se aproxima al valor 1 cuando la variable x tiende a 0. En cambio si la variable x tendiera a infinito el límite valdría cero pues nos encontraríamos el producto de una función acotada como es el $senx$, por otra que converge a cero como es la función $\frac{1}{x}$.

17.- Comprobar que la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ tiene en la región $0 \leq x < +\infty$ el ínfimo $m = 0$ y el supremo $M = 1$.

SOL. Observemos que esta función sus valores siempre están entre cero y uno, es decir $0 \leq f(x) < 1$ pues $x < x+1$ y cuando $x = 0$ coge el valor cero y cuando $x \to \infty$ el límite claramente vale 1 por ser cociente de funciones racionales de grado uno con coeficiente 1 en la x de mayor grado. En realidad el ínfimo es $m = 0$,que es mínimo pues se alcanza en el conjunto y el supremo es $M = 1$ y como no se alcanza no es máximo.

18.- Mostrar por medio de un ejemplo que $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ puede existir aunque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existan.

SOL. Desde luego el caso más sencillo para construír es tomar $f(x)$ y $g(x)$ iguales, pues así la diferencia será cero y sí existirá el límite de la diferencia. Sea por ejemplo $f(x) = \frac{1}{x}$, claramente esta función no tiene límite cuando $x \to 0$, y si $g(x) = f(x)$ entonces la resta sí tiene límite y es cero.

19.- Mostrar por medio de un ejemplo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ puede existir aunque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existan.

SOL. Supongamos las funciones $f(x) = senx$ y $g(x) = \frac{1}{senx}$, y la variable $x \to \infty$. Claramente al ser la función seno oscilante no tiene límite cuando $x \to \infty$, y tampoco tiene límite $g(x)$. En cambio el producto $f(x)g(x) = (senx)\frac{1}{senx} = 1$ lo que evidencia que sí existe el límite del producto.

20.- Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$, ¿está definida f en $x = 2$?. Si lo está ¿tiene que ser $f(2) = 5$? ¿Se puede concluír algo acerca de los valores de f en $x = 1$?. Razonar la respuesta.

SOL. Está claro que el hecho de existir el límite de una función en un punto no implica que deba existir el valor de la función en dicho punto. Por ejemplo la función citada en ejemplos anteriores $f(x) = \frac{senx}{x}$ claramente no tiene valor en $x = 0$, en cambio como hemos comentado anteriormente $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Podemos concluír pues que la función no tiene por qué estar definida en $x = 2$. Ahora bien si está definida en $x = 2$ puede ser que $f(2) = 5$, con lo que la función sería continua en este punto o puede pasar que $f(2) \neq 5$ con lo que la función no sería continua en ese punto. Desde luego de los valores de la función en $x = 1$ no se puede concluìr nada al ser un punto disitinto del 2.

21.- ¿Qué puede decirse de la continuidad de los polinomios? ¿Y de las funciones racionales? ¿Y de las funciones trigonométricas?

SOL. Cabe recordar que las funciones polinómicas $P(x)$ o polinomios son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Por otro lado las funciones racionales, es decir funciones cocientes de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ son continuas en todos los puntos que no anulen al denominador $Q(x)$, con independencia de que en algunos casos se puedan hacer continuas en puntos que a priori no lo son. Las funciones trigonométricas $senx, \cos x$ son continuas en toda la recta real, y luego $\tan x$ al ser cociente de seno y coseno falla donde se anula el coseno es decir en $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, variando $k \in \mathbb{Z}$.

22.- La función $f(x) = \frac{senx}{x}$ definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ ¿se puede hacer continua en $x = 0$?

SOL. La respuesta es que sí, pues ya hemos comentado algo en relación a este ejercicio, pues basta redefinir $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$

23.- Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[0,3]$ y tal que $f(2) = 0$. Entonces explicar si por un teorema de Bolzano debe ser necesariamente $f(0)f(3) < 0$.

SOL. La respuesta a esta cuestión, tal como se plantea, es negativa pues el teorema de Bolzano afirma que si la función es continua en ese intervalo y si se cumple que $f(0)f(3) < 0$ entonces existe un $c \in (0,3)$ tal que $f(c) = 0$. Lo que se dice aquí es distinto y puede ocurrir que la función sea tangente en $x = 2$ al eje de abcisas y no atraviese el eje si no que continue en la misma región. Esto se observa mejor en la gráfica 1.8.

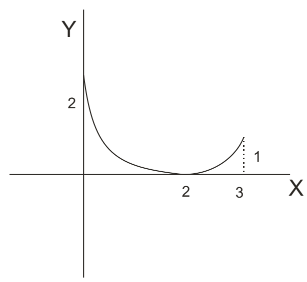


Figura 1.8:

24.- Si $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a,b) entonces ¿existe un $k>0$ tal que $|f(x)|<k$.?

SOL. En realidad lo que se está afirmando es que con las condiciones dadas la función está acotada en el conjunto abierto (a,b). Esto en general es falso pues basta considerar $f(x)=\frac{1}{x}$ en el intervalo $(0,1)$ para darse cuenta que no puede existir ese k ya que la función cuando nos aproximamos a $x=0$ tiende a tomar valores cada vez mayores superando así cualquier valor k fijado de antemano.

Desde luego si en vez de poner (a,b) se pusiera $[a,b]$ con a,b números reales, entonces sí está acotada la función, y esto es así por un teorema de Weierstrass que establece que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza el máximo y el mínimo absoluto de la función, con lo que el k existirá en este caso.

25.- Dada la función $f(x)=x^3-x^2+x$ demostrar que existe un número c tal que $f(c)=10$.

SOL. Esto es equivalente a encontrar un c tal que $x^3-x^2+x=10$, o lo que es lo mismo $x^3-x^2+x-10=0$. Si consideramos la función $g(x)=x^3-x^2+x-10$ que claramente es continua en todo $\mathbb{R}$, vemos que se cumple que $g(1)<0$ y en cambio $g(3)>0$, por tanto por el teorema de Bolzano existe un $c\in(1,3)$ tal que $g(c)=0$, lo que es lo mismo que $c^3-c^2+c=10$ y, por tanto, si existe.

26.- ¿Qué relación conoces entre el concepto de derivada y la definición de tangentes, pendientes y razones de cambio?.

SOL. El concepto de derivada de una función en un punto es, como es conocido, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es decir es el límite de la razón de cambio $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Además la recta tangente en un punto de la curva $f(x)$ con abcisa x forma un ángulo con el eje OX positivo cuya tangente es la pendiente y coincide con el valor de la derivada en la abcisa de ese punto es decir con $f'(x)$

27.- Qué significa que una función tenga un extremo local o extremo relativo en su dominio? ¿Y un valor extremo absoluto? Establecer las diferencias mediante ejemplos.

SOL. Que una función tenga un extremo relativo o local en su dominio es que existe algún valor x donde la función ahí vale más o menos que en el resto de puntos suficientemente próximos a x. En cambio el extremo absoluto es un punto x donde la función ahí vale más o menos que en el resto de puntos de **todo el dominio.**

Por ejemplo la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$ no tiene extremos relativos, pero sí tiene mínimo absoluto pues el mínimo absoluto en $x = -1$ y vale $f(-1) = -1$, y también tiene máximo absoluto en $x = 1$, y vale $f(1) = 1$.

Si consideramos ahora la función polinómica $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, que como se puede comprobar tiene como raíces $x = 1, 2, 3$, se cumple que en todo $\mathbb{R}$ la función no tiene máximo ni mínimo absoluto pues la función cuando $x \to \infty$ crece todo lo que deseemos y cuando $x \to -\infty$ toma valores cada vez más pequeños. En cambio sí tiene un máximo y un mínimo local o relativo y los tiene como se puede comprobar en $x = \frac{12+\sqrt{12}}{6}$ (aquí tiene el máximo) y en $x = \frac{12-\sqrt{12}}{6}$ el mínimo.

Como mejor se observa todo lo anterior es con una gráfica

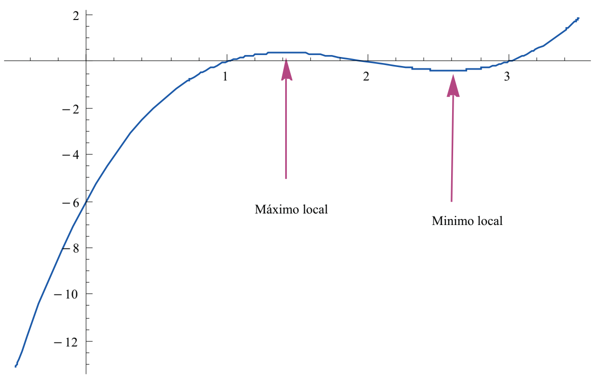


Figura 1.9:

28.- ¿Cómo hallar los valores extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado?

SOL. Supongamos el intervalo $[a, b]$ donde la función continua que se tenga esté definida. Los pasos a seguir son los siguientes:

Ver si la función es derivable en todos los puntos y si hay algunos donde la función no sea derivable, estudiarlos aparte. Donde la función sea derivable considerar los puntos interiores al intervalo dado y ver dónde están los extremos relativos aplicando los criterios de derivada primera igualada a cero y sustitución en la segunda o mejor el estudio de crecimiento y decrecimiento por medio de la derivada primera. Más tarde se considerarán los extremos del intervalo es decir las abcisas a, b. En todos los candidatos que han salido se sustituye la función y se eligen los que den mayor valor(máximo absoluto) y los que den menor valor(mínimo absoluto).

29.- ¿Qué es un punto de inflexión? Muestra algún ejemplo.

SOL. La idea intuitiva de punto de inflexión es un punto donde la función pasa de cóncava a convexa o al revés. También puede verse como que la tangente divide en dos a la curva en esa zona. Un ejemplo estándar es la función $f(x) = x^3$ que tiene un punto de inflexión con tangente horizontal(pues los puntos de inflexión en general pueden ser con tangente no horizontal) en $x = 0$.

30.- ¿Cómo se encuentra el límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$? Recuerda las tres posibilidades básicas. Ofrece ejemplos.

SOL. Aunque lo hemos aplicado en alguna cuestión veámoslo en general. La función racional será el cociente de dos polinomios.

Consideremos la función $R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$ donde $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$. Se puede demostrar que según el grado del numerador y denominador

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{si} \quad n = m \\ 0 & \text{si} \quad n < m \end{cases}$$

Basta dividir numerador y denominador entre x^k siendo $k = \max(n, m)$.

Quedará

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0x^n}{x^k} + \frac{a_1x^{n-1}}{x^k} + ... + \frac{a_n}{x^k}}{\frac{b_0x^m}{x^k} + \frac{b_1x^{m-1}+}{x^k} ...... + \frac{b_m}{x^k}} = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad k = n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{si} \quad k = n = m \\ 0 & \text{si} \quad n < m = k \end{cases}$$

Como ejemplo podemos considerar los límites siguientes

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3+2x-2}{2x-5}$ $(n = 3,\, m = 1)$
b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2-5}{2x^3-15}$ $(n = m = 3)$
c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3+2x-3}{6x^5-5x-2}$ $(n = 3, m = 5)$.

SOL. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3+2x-2}{2x-5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{2x}{x^3}-\frac{5}{x^3}} = \infty$

pues obsérvese que el numerador tiende al valor 3 mientras el denominador converge a 0

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2-5}{2x^3-15} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{5}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{15}{x^3}} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3+2x-3}{6x^5-5x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^5}+\frac{2x}{x^5}-\frac{3}{x^5}}{\frac{6x^5}{x^5}-\frac{5x}{x^5}-\frac{2}{x^5}} = 0$ pues el numerador tiende a 0 y el denominador a 5.

1.2. Cuestionario básico propuesto

1.- Decir, de los siguientes números reales, cuáles son racionales y cuáles irracionales.

a) $\frac{2}{3}$, b) $\sqrt{2}$, c) $\sqrt[3]{8}$, d) 1,33 , e) $\pi - 6$, f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (**Sol**: a) Racional, b) Irracional, c) Racional, d) Racional, e) Irracional, f) Irracional

2.- Decir qué números son los siguientes:

a) $|-5| - |8|$, b) $|-e| - |-\pi|$, c) $|-5| + |-5|$, d) $|-a| - |a|$ (**Sol:** a) -3,b) e-π, c)10, d)0)

3.- Hallar las raíces reales de los polinomios siguientes:

a) $P(x) = x^3 - 27$, b) $x^2 - 3x + 12$, c) $5x^2 - x - 2$ (**Sol**: a) 3, b) No tiene raíces reales, c) $\frac{1 \pm \sqrt{41}}{10}$)

4.- ¿Qué dirías de la suma de dos números irracionales? (**Sol:** claramente la suma puede ser racional por ejemplo $e - 1$, y $1 - e$, o irracional por ejemplo $eye - 1$)

5. Resolver las siguientes desigualdades

a) $|x - 5| < 2$, b) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} > 0$ c) $\frac{2x-3}{x^2-6x+5} < 0$ d) $x^2 + \frac{1}{x^2} < 0$ (**Sol:** a)$3 < x < 7$, b)$x > 2$, o también $-2 < x < \frac{2}{3}$)

6.- Decir si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) Si a y b tienen el mismo signo entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

b) $|a - b| \leq |a| + |b|$

c) Si $a.b \geqslant 0$ entonces $|a + b| = |a| + |b|$

d) Entre dos números racionales siempre hay un número racional y otro irracional

e) Dado cualquier número real r_1 no existe un número real r_2 que esté más próximo a él que los demás(**Sol**: a)F b)V c)V d)V e)V)

7.- Calcular el (los) valor(es) de x que verifican $f(x) = 1$ si

a) $f(x) = 3x - 4$, b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, c) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ (**Sol:** a) $x = \frac{5}{3}$, b) $x = 0$, c) Todos los $x \geq 0$)

8.- Hallar el dominio y la imagen de las funciones siguientes

a) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2}$, (**Sol**: a) $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 1\}$, Imagen $Im = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ b) $D = \mathbb{R}$, Imagen $Im = \mathbb{R}$

9.- Determinar si las funciones siguientes son pares, impares o ninguna de las dos cosas.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $f(x) = Sen\, x$
d) $f(x) = Cos\, x$
e) $f(x) = \frac{x^2}{1-|x|}$
f) $f(x) = x - 6$
g) El producto de dos funciones pares
h) El producto de una función par por una impar
i) El producto de dos funciones impares
(**Sol:** a) Par, b) Impar c)Impar d)Par e)Par f)Nada g)Par h)Par)

10.- Expresar el área de un triángulo equilátero en función de la longitud de un lado. (**Sol:** $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$)

11.- Se rellena con agua un depósito en forma de cono invertido de altura h y radio de la base R. Expresar el volumen de agua del depósito en función de la altura alcanzada h_1(**Sol**:.$V = \frac{\pi R^2}{3h^2}h_1^3$)

12.- Dar un ejemplo de una función trigonométrica, una función exponencial, una función potencial , una función racional, y una función polinómica de grado impar.(**Sol:** Función trigonométrica $f(x) = \cos 3x$, función exponencial $f(x) = 7^x$, función potencial $f(x) = x^6$, función racional $f(x) = \frac{x+3}{x^2-5}$, función polinómica de grado impar $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$)

13.- Sean las funciones $f(x) = 2x^2 + 1$, y $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. Hallar los valores indicados de suma, producto y composición de funciones
a) $(f + g)(3)$, b) $(f\Delta g)(-2)$, c) $(f \circ g)(-2)$, d) $(g \circ f)(-2)$. (**Sol**: a)$\frac{85}{3}$, b) $\frac{63}{2}$, c) $\frac{51}{2}$, d)$\frac{730}{9}$)

14.- Comprobar que la función $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^6}$ está acotada en el intervalo $-\infty < x < +\infty$. (**Sol**: $\left|\frac{1+x^2}{1+x^6}\right| \leq \frac{1}{1+x^6} \leq 1$ luego está acotada)

15.- La existencia y el valor del límite de una función $f(x)$, cuando x tiende a c depende de lo que ocurra en $x = c$. Comenta esta afirmación. (**Sol:** No es cierto pues depende de si la función es continua o no en ese punto)

16.- Si una función es continua en a y $f(a) \neq 0$, existe un entorno de a en el cual el signo de la función $f(x)$ coincide con el signo de $f(a)$.(**Sol:** Efectivamente es cierto)

17.- Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[-1,2]$ y $f(-1) = 1$ y $f(2) = -3$ entonces existe un $x_0 \in (-1,2)$ tal que $f(x_0) = \frac{1}{2}$.(**Sol**: Efectivamente esto es cierto pues constituye una consecuencia de un teorema de Bolzano)

18.- Las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = Ln\, x$ son continuas en $\mathbb{R}$.(**Sol:** Para la función exponencial es correcto pero la función logaritmo neperiano sólo es continua en $\mathbb{R}^+$)

19.- Las funciones trigonómetricas $f(x) = Senx$, $g(x) = Cos\, x$ y $h(x) = Tg\, x$ son continuas en toda la recta real $\mathbb{R}$.(Sol: Las funciones seno y coseno sí con continuas en todo $\mathbb{R}$, pero para la tangente hay que excluír los valores $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$)

20.- Dadas las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$ para todo $x \in R$ y $g(3) = 2$, $g(x) = 4$ para todo $x \neq 3$ se cumple que $\lim\limits_{x \to 3} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x \to 3} g(f(x)) \neq g(\lim\limits_{x \to 3} f(x)) = g(f(3)) = (g \circ f)(3)$.(**Sol**: Efectivamente)

21.- ¿Qué relación existe entre el dominio de una función $f(x)$ y el dominio de su derivada $f'(x)$? (**Sol:** El dominio de la derivada está incluído en el dominio de la función)

22.- ¿Qué relación existe entre las derivadas laterales y el concepto de derivada? (**Sol:** si las derivadas laterales existen y coinciden , ése es el valor de la derivada)

23.- ¿Qué puedes decir sobre lo que sucede en un punto, desde el punto de vista geométrico, en relación a una función que no es derivable en ese punto? (**Sol:** Que no existe recta tangente o varias. Presenta picos)

24.- ¿Qué son la derivada segunda, la derivada tercera, y las derivadas sucesivas? (**Sol**: la derivada segunda es la derivada de la derivada primera, la derivada tercera la derivada de la derivada segunda)

25.- ¿Qué es, a grandes rasgos, la derivación implicita y cuando es necesaria? (**Sol:** es aquella donde no se despeja la función y para derivar. Es necesaria cuando no es posible despejar la función y o es sumamente complicado hacerlo.