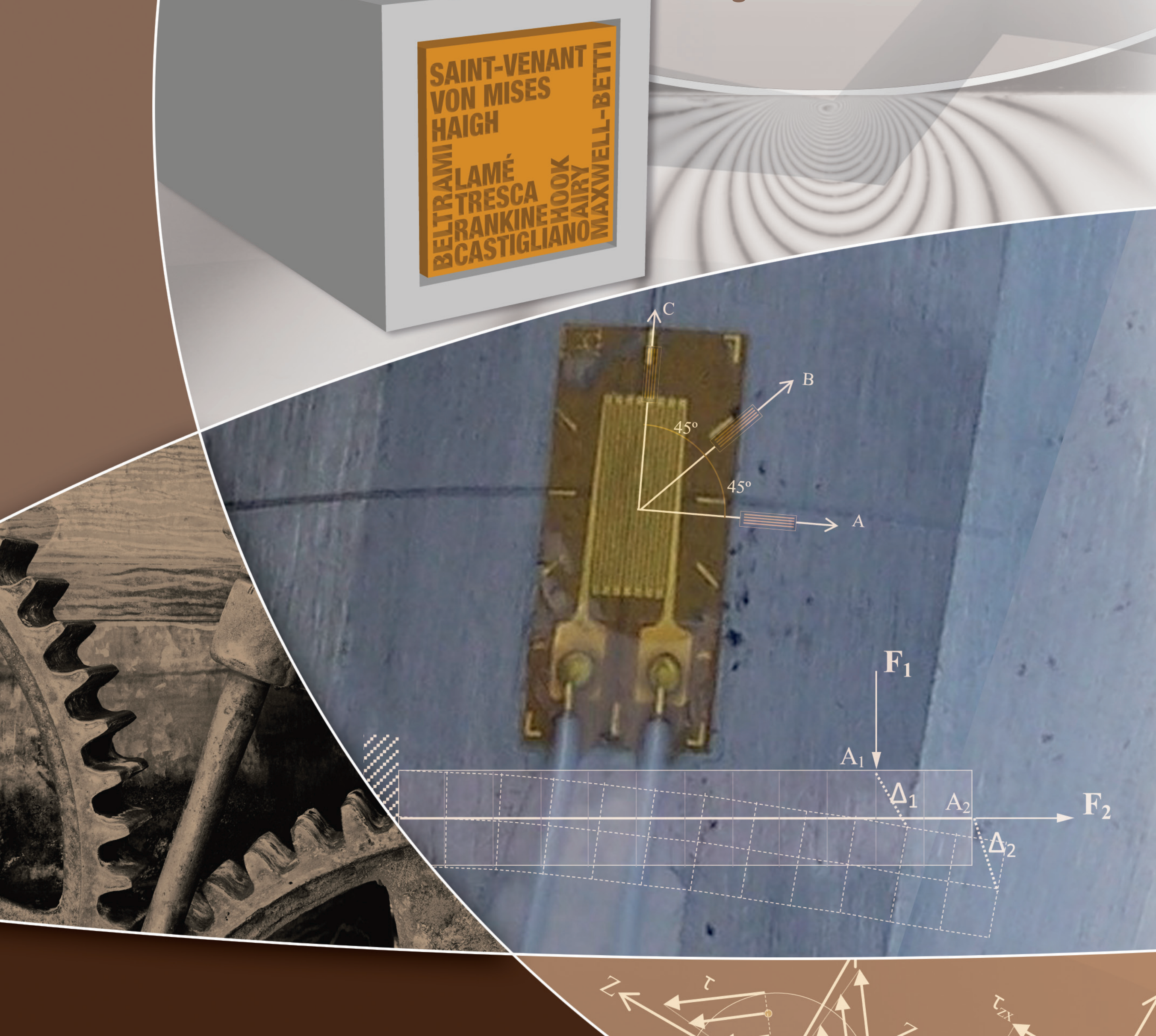
Elasticidad

Manuel Gasch Salvador
Isabel Gasch Molina
José Luis Galdón Ribes
Pedro Efrén Martín Concepción
Ignacio Ferrer Ballester



EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ÍNDICE

CAPÍTULO 1.
ESTADO TENSIONAL EN UN PUNTO DEL SÓLIDO ELÁSTICO

1.1. EL SÓLIDO ELÁSTICO

El estudio del comportamiento de los sólidos deformables frente a la actuación de acciones externas es fundamental para el diseño de sistemas estructurales de cualquier tipo y material

En la Mecánica se considera el sólido como un *sólido rígido*. Esto implica que no se considera ningún tipo de deformación ante cualquier acción exterior que actúe sobre dicho sólido.

Desde este punto de vista, la fuerza **F** que actúa en el centro de la barra representada en la Figura 1.1, podría crecer indefinidamente puesto que el conjunto siempre se mantiene en equilibrio

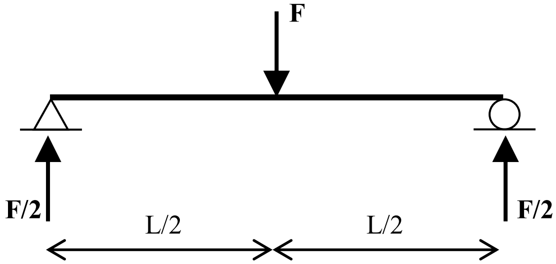


Figura 1.1

Del mismo modo, bajo el concepto de sólido rígido, el comportamiento de la barra representada en la Figura 1.2 sería siempre el mismo.

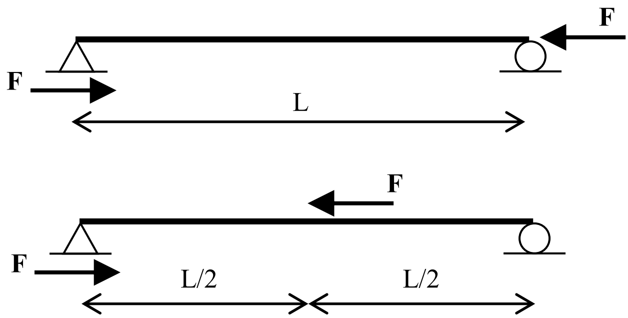


Figura 1.2

La experiencia demuestra que ambos supuestos son falsos. En el primer caso llegado a un valor de **F** la barra se rompe, y en el segundo caso, al realizar la experiencia, se observa que la barra tiene un comportamiento diferente para cada uno de los supuestos representados.

El análisis del comportamiento de los sólidos considerando su deformación es tratado por la Teoría de la Elasticidad que toma el sólido como un *sólido elástico*, que se deforma al actuar sobre él una acción exterior, y es capaz de recuperar su forma original cuando aquella desaparece.

Por otra parte, la Resistencia de Materiales estudia el mismo tipo de sólido elástico bajo algunas hipótesis que simplifican el problema.

El sólido elástico se supone que posee idéntica composición y características en todas sus partes (homogeneidad), sin huecos entre las partículas (continuidad), y cuyas propiedades físicas son independientes de la dirección de observación (isotropía).

1.2. CONCEPTO DE TENSIÓN

Supóngase que el sólido elástico de la Figura 1.3 está sometido a un sistema de acciones en equilibrio estático y, mediante un plano cualquiera, se divide dicho sólido en dos zonas A y B.

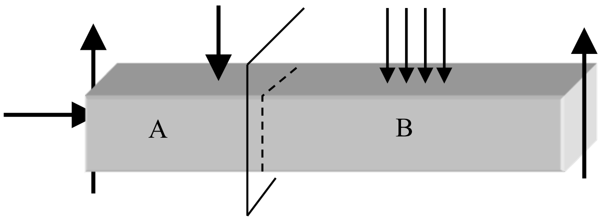


Figura 1.3

Cada una de las partes, A por ejemplo, puede considerarse, a su vez, como un sólido que ha de estar en equilibrio bajo las acciones externas que actúan sobre dicha parte A y las fuerzas interiores que en el plano de corte transmite la parte suprimida B.

En cada punto P de la sección perteneciente al plano de corte, se puede definir una superficie diferencial, $d\Omega$, sobre la que actúa una fuerza uniformemente repartida **df** producida por la parte eliminada. Se define la *tensión* en P como

$$\frac{\overrightarrow{df}}{d\Omega} = \vec{\Phi} \tag{1.1}$$

La tensión así definida, que se representa por **Φ**, es un vector colineal con **df** cuyo módulo indica la magnitud de la fuerza ejercida en la sección Ω por unidad de superficie (Figura 1.4).

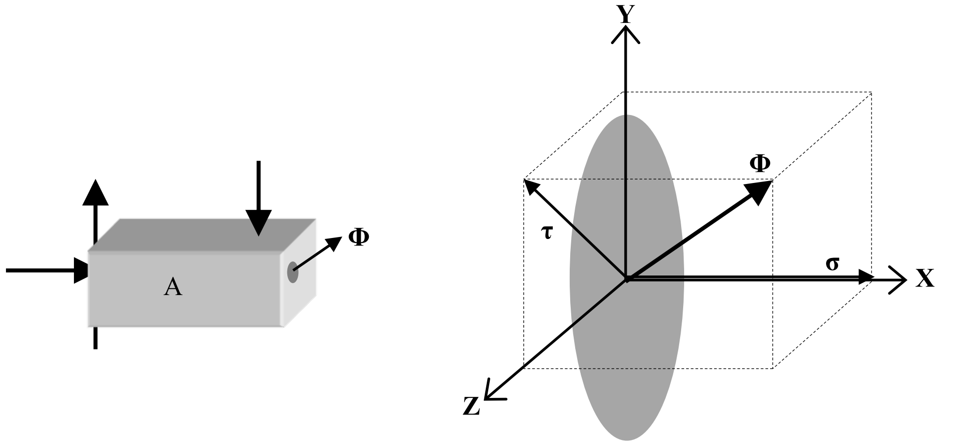


Figura 1.4

Puesto que el concepto de tensión está ligado a un área, sólo se podrán agrupar vectorialmente las tensiones que estén referidas a una misma área.

Las dimensiones de la tensión son $F \cdot L^{-2}$, y se expresan usualmente en N/mm^2, o lo que es lo mismo, en MPa.

El vector tensión **Φ** se puede descomponer en otros dos. Uno según la dirección normal al plano y otro según una dirección tangencial a dicho plano (Figura 1.4).

La proyección sobre la dirección normal se denomina *tensión normal*. Se representa por la letra griega σ seguida de un subíndice para identificar cual es el eje de referencia perpendicular al plano en donde dicha tensión se produce.

La proyección sobre una dirección tangencial al plano se llama *tensión tangencial* y se representa por la letra griega τ. A su vez esta tensión se puede descomponer en otras dos direcciones contenidas en el plano de la superficie. Estas tensiones tangenciales se identifican mediante la letra griega τ seguida de dos subíndices, el primero que indica el eje al cual es normal la superficie y el segundo la dirección de dicha tensión tangencial.

Si se representa el punto P como un paralelepípedo diferencial de lados dl_x, dl_y, dl_z, de acuerdo con lo indicado anteriormente, las tensiones en cada una de sus caras (despreciando las fuerzas másicas) serán las indicadas en la Figura 1.5.

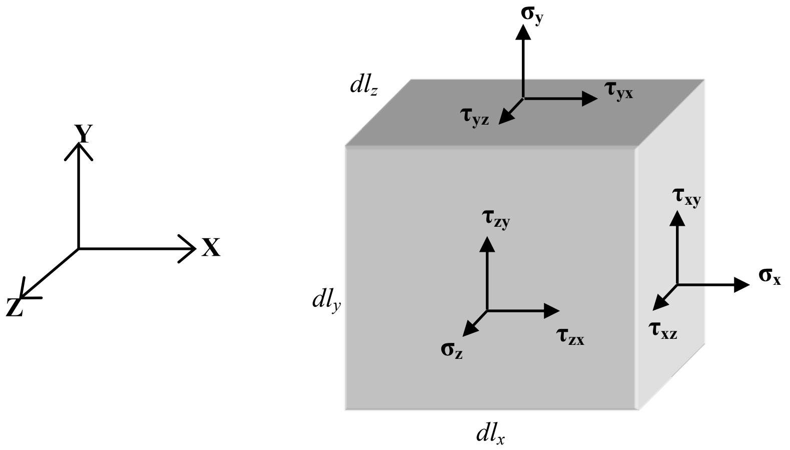


Figura 1.5

Se considera que estas tensiones son positivas cuando en las caras vistas siguen las direcciones de los ejes de referencia (Figura 1.5).

Las tensiones normales positivas se llaman tensiones de tracción y las negativas tensiones de compresión.

Si se supone que las fuerzas másicas son despreciables, para que se cumpla el equilibrio de fuerzas en el punto P, las tensiones en caras opuestas han de tener el mismo módulo y sentidos contrarios. Ahora bien, para que el momento resultante sea nulo se ha de cumplir:

$$(\tau_{xy} \cdot dl_y \cdot dl_z) \cdot dl_x - (\tau_{yx} \cdot dl_x \cdot dl_z) \cdot dl_y = 0$$

$$(\tau_{yz} \cdot dl_x \cdot dl_z) \cdot dl_y - (\tau_{zy} \cdot dl_x \cdot dl_y) \cdot dl_z = 0$$

$$(\tau_{zx} \cdot dl_x \cdot dl_y) \cdot dl_z - (\tau_{xz} \cdot dl_y \cdot dl_z) \cdot dl_x = 0$$

De donde se obtiene:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad , \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1.2}$$

Las tensiones tangenciales que actúan en planos ortogonales son de igual módulo y ambas se dirigen hacia la arista común a ambos planos, o se alejan de ella (teorema de reciprocidad de las tensiones tangenciales).

En base a ello el estado tensional del punto P estará totalmente definido si se conocen los valores de las tensiones

$$\sigma_x \quad , \quad \sigma_y \quad , \quad \sigma_z \quad , \quad \tau_{xy} \quad , \quad \tau_{yz} \quad , \quad \tau_{zx} \tag{1.3}$$

A estos seis valores se les conoce como *parámetros del estado tensional* en un punto P del sólido elástico.

1.3. EL TENSOR DE TENSIONES

Supuestos conocidos los parámetros del estado tensional en un punto del sólido elástico, se desea saber cómo se caracteriza el estado de tensiones en dicho punto. Para ello se trazan, por dicho punto, tres ejes coordenados ortogonales y se suponen conocidas las tensiones sobre los elementos de superficie situado en cada uno de los planos XY, YZ, ZX, (Figura 1.6).

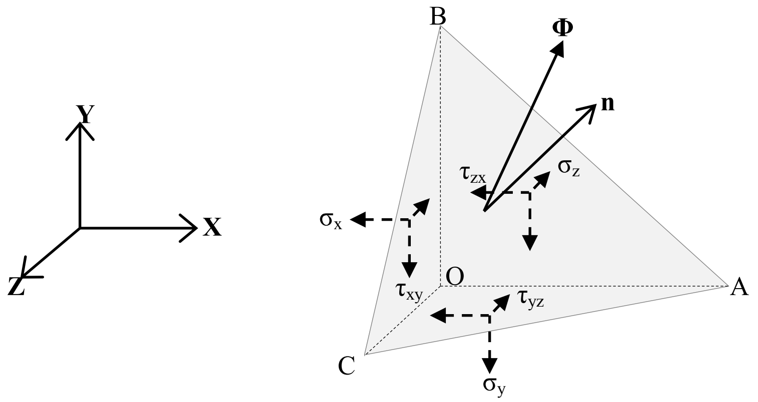


Figura 1.6

Se traza un plano infinitamente próximo al origen, cuyo versor normal es **n** ($\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$), y cuya intersección con el triedro coordenado proporciona la superficie triangular ABC de área dΩ. Se desea obtener el vector tensión **Φ** sobre dicha superficie.

Para obtener el vector tensión **Φ** se considera el tetraedro diferencial OABC y se plantea el equilibrio estático de las cuatro fuerzas que actúan en sus caras.

La condición de resultante nula de las fuerzas según el eje X es:

$$\Phi_x \cdot d\Omega - \sigma_x \cdot d\Omega_{OBC} - \tau_{xy} \cdot d\Omega_{OAC} - \tau_{zx} \cdot d\Omega_{OAB} = 0$$

Ahora bien, el área de las caras OBC, OAC, OAB, se puede obtener mediante la proyección de la cara ABC:

$$d\Omega_{OBC} = d\Omega \cdot \cos\alpha_x$$
$$d\Omega_{OAC} = d\Omega \cdot \cos\alpha_y$$
$$d\Omega_{OAB} = d\Omega \cdot \cos\alpha_z$$

Sustituyendo

$$\Phi_x \cdot d\Omega - \sigma_x \cdot d\Omega \cdot \cos\alpha_x - \tau_{xy} \cdot d\Omega \cdot \cos\alpha_y - \tau_{zx} \cdot d\Omega \cdot \cos\alpha_z = 0$$

De esta expresión se obtiene el valor de Φ_x

$$\Phi_x = \sigma_x \cdot \cos\alpha_x + \tau_{xy} \cdot \cos\alpha_y + \tau_{zx} \cdot \cos\alpha_z$$

Realizando el mismo proceso para los otros dos ejes coordenados, se obtienen las otras dos componentes del vector tensión **Φ**

$$\Phi_y = \sigma_y \cdot \cos\alpha_y + \tau_{xy} \cdot \cos\alpha_x + \tau_{yz} \cdot \cos\alpha_z$$
$$\Phi_z = \sigma_z \cdot \cos\alpha_z + \tau_{yz} \cdot \cos\alpha_y + \tau_{zx} \cdot \cos\alpha_x$$

Al ser un tetraedro de dimensiones diferenciales, se admite que la fuerza resultante en cada una de sus caras pasa por el c.d.g. de las mismas. Así mismo se desprecian las fuerzas de masa puesto que, en el desarrollo anterior, intervienen como infinitésimos de tercer orden.

Las tres ecuaciones de equilibrio se pueden escribir matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_x \\ \cos\alpha_y \\ \cos\alpha_z \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

O de forma abreviada

$$\vec{\Phi} = \mathcal{T} \cdot \vec{n} \tag{1.5}$$

La expresión anterior permite, en un punto del sólido elástico, obtener el vector tensión en una superficie cualquiera, que pase por él, en función de los valores conocidos de tres vectores tensión cuyas superficies asociadas, que contienen al punto, son perpendiculares entre sí.

La ecuación 1.5 representa un tensor de segundo orden, que se llama tensor elástico o *tensor de tensiones*.

- ✓ Es un tensor simétrico, siendo $\mathcal{T}$ su matriz asociada.

- ✓ Los elementos de la diagonal principal de la matriz son las tensiones normales que actúan en las caras perpendiculares a los ejes del sistema de referencia.
- ✓ Los elementos de la diagonal secundaria son la tensión tangencial que actúa en estas mismas caras.

Recordando la teoría de tensores, los invariantes del tensor de tensiones son:

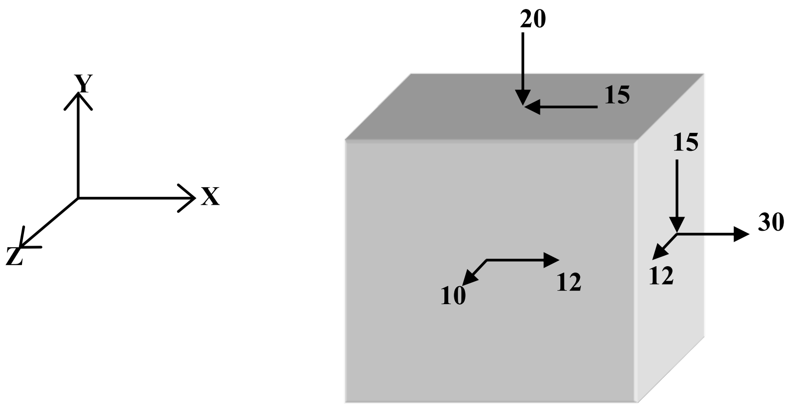
$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{1.6}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

Ejercicio 1.1

En cada una de las caras del paralelepípedo diferencial que representa el punto P de un sólido elástico, actúan las tensiones que se indican en la siguiente figura. (Valores en MPa)



Se pide, en dicho punto P:

- ***a) Parámetros del estado tensional***
- ***b) Matriz asociada al tensor de tensiones***
- ***c) Invariantes del tensor de tensiones***
- ***d) Vector tensión en un plano que contiene al eje Z y forma -30° con el horizontal***

<u>Solución</u>

a) Parámetros del estado tensional

De acuerdo con el sistema de referencia de la figura y los valores indicados en el paralelepípedo diferencial, los parámetros del estado tensional del punto P son (véase Ec. 1.3):

$$\mathbf{30}\ \ ,\mathbf{-20}\ \ ,\ \ \mathbf{10}\ \ ,\mathbf{-15}\ ,\ \ \mathbf{0}\ \ ,\ \ \mathbf{12}$$

(Valores en MPa)

b) Matriz asociada al tensor de tensiones

La matriz $\mathcal{T}$ asociada al tensor de tensiones viene dada por la expresión 1.4.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{30} & \mathbf{-15} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{-20} & \mathbf{0} \\ \mathbf{12} & \mathbf{0} & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

c) Invariantes del tensor de tensiones

El primer invariante se obtiene sustituyendo valores en la expresión 1.6.

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 30 - 20 + 10 = \mathbf{20}\ \boldsymbol{MPa}$$

El segundo invariante viene dado por la expresión 1.7.

$$J_2 = \begin{vmatrix} 30 & -15 \\ -15 & -20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 30 & 12 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -20 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = \mathbf{-869{,}00}\ (\boldsymbol{MPa})^{\mathbf{2}}$$

El tercer invariante es el determinante de la matriz del tensor (véase Ec. 1.8)

$$J_3 = \begin{vmatrix} 30 & -15 & 12 \\ -15 & -20 & 0 \\ 12 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \mathbf{-5370{,}00}\ (\boldsymbol{MPa})^{\mathbf{3}}$$

d) Vector tensión en un plano que contiene al eje Z y forma 30° con el horizontal

El versor director del plano indicado es

$$\vec{n} = [\cos 60° \quad \cos -30° \quad \cos 90°] = [0{,}500 \quad 0{,}866 \quad 0]$$

Las componentes del vector tensión en dicho plano, según los ejes de referencia, se obtienen mediante la expresión 1.4.

$$\begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -15 & 12 \\ -15 & -20 & 0 \\ 12 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}866 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2{,}01} \\ \mathbf{-24{,}82} \\ \mathbf{6{,}00} \end{bmatrix} \boldsymbol{MPa}$$

El módulo de dicho vector tensión es

$$\Phi = \sqrt{2{,}01^2 + (-24{,}82)^2 + 6{,}00^2} = 25{,}61\ MPa$$

<u>Ejercicio 1.2</u>

La matriz asociada al tensor de tensiones en un punto P de un sólido elástico es

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \boldsymbol{Mpa}$$

Determinar el valor del parámetro a de forma que exista un plano sobre el que no actúe ninguna tensión y obtener el versor director de dicho plano.

<u>Solución</u>

La condición de tensión nula en un plano significa que las componentes del vector tensión asociado a dicho plano, deben ser nulas. Por consiguiente, se ha de cumplir la siguiente relación (véase Ec. 1.4):

$$\begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que el sistema tenga solución no trivial se debe cumplir que el determinante de la matriz sea nulo, de donde se obtiene el siguiente resultado:

$$|\mathcal{T}| = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = 4{,}33\ Mpa}$$

Las componentes del versor normal del plano se obtendrán imponiendo la condición de componentes nulas del vector tensión:

$$\begin{bmatrix} 4{,}33 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar un vector cualquiera en dicha dirección, se adopta un valor de n_x=1 y se resuelve el sistema de ecuaciones, obteniendo las siguientes componentes:

$$\vec{v} = [1 \quad -5/3 \quad -1/3]$$

El versor director será

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = [\mathbf{0{,}507} \quad \mathbf{-0{,}845} \quad \mathbf{-0{,}169}]$$

1.4. COMPONENTES INTRÍNSECAS DEL VECTOR TENSIÓN

Las proyecciones del vector tensión sobre la dirección normal a la superficie en que actúa, y sobre la dirección tangencial, contenida en dicha superficie, se conocen como componentes intrínsecas del vector tensión (Figura 1.7).

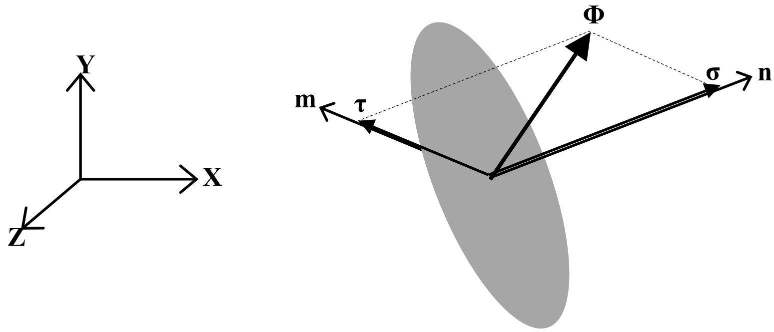


Figura 1.7

De su propia definición se deduce que para calcular el valor de la tensión normal sobre la superficie bastará con realizar el producto escalar del vector tensión **Φ** y el versor **n** ($\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$), normal a la superficie

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\Phi} = [\cos\alpha_x \quad \cos\alpha_y \quad \cos\alpha_z] \cdot \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Sustituyendo el vector tensión por su valor (véase Ec. 1.4), se obtiene *la tensión normal en una superficie*, que contiene a un punto elástico P, en función de los parámetros del estado tensional en dicho punto P.

$$\sigma_n = [\cos\alpha_x \quad \cos\alpha_y \quad \cos\alpha_z] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_x \\ \cos\alpha_y \\ \cos\alpha_z \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Tal como se aprecia en la ecuación 1.10, la tensión normal en una superficie es la *forma cuadrática* del tensor de tensiones.

La componente intrínseca tangencial corresponde a la tensión tangencial que está contenida en el plano formado por el vector **Φ** y el versor **n** y su valor se determina mediante la expresión:

$$\tau_{nm} = \sqrt{\left|\vec{\Phi}\right|^2 - \sigma_n^2} \tag{1.11}$$

El versor que indica la dirección de τ_{nm} puede obtenerse mediante un doble producto vectorial

$$\vec{m} = \frac{(\vec{n} \wedge \vec{\Phi}) \wedge \vec{n}}{\left|(\vec{n} \wedge \vec{\Phi}) \wedge \vec{n}\right|} \tag{1.12}$$

Si previamente, mediante la expresión anterior, se calcula el versor **m** ($\cos\beta_x$, $\cos\beta_y$, $\cos\beta_z$**)**, la componente intrínseca tangencial se determina mediante el producto escalar del vector tensión **Φ** y el versor **m**:

$$\tau_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{\Phi} = [\cos\beta_x \quad \cos\beta_y \quad \cos\beta_z] \cdot \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Sustituyendo el vector tensión por su valor (véase Ec. 1.4), se obtiene *la tensión tangencial en una superficie*, que contiene a un punto elástico P, en función de los parámetros del estado tensional en dicho punto P.

$$\tau_{nm} = [\cos\beta_x \quad \cos\beta_y \quad \cos\beta_z] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_x \\ \cos\alpha_y \\ \cos\alpha_z \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

La tensión tangencial en una superficie, de acuerdo con la ecuación 1.14, es la *forma bilineal* del tensor de tensiones.

<u>Ejercicio 1.3</u>

Los parámetros que definen el estado tensional en un punto P de un sólido elástico son

$$\mathbf{50 \quad , 20 \quad , -80 \quad , 30 \quad , 10 \quad , -40 \quad \mathit{Mpa}}$$

Se pide, en dicho punto P:

a) ***Vector tensión en un plano cuyo versor director es***

$$\vec{\boldsymbol{n}} = [\mathbf{0{,}800} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0{,}600}]$$

b) ***Valor de las componentes intrínsecas del vector tensión en dicho plano***

c) ***Dirección de la componente intrínseca tangencial***

Solución

a) Vector tensión en el plano

Conocidos los parámetros del estado tensional (véase Ec. 1.3), la matriz asociada al tensor es (véase Ec. 1.4)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 30 & -40 \\ 30 & 20 & 10 \\ -40 & 10 & -80 \end{bmatrix}$$

Las componentes del vector tensión en el plano indicado, de acuerdo con la expresión 1.4, son:

$$\begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 30 & -40 \\ 30 & 20 & 10 \\ -40 & 10 & -80 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}800 \\ 0 \\ 0{,}600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{16,00} \\ \mathbf{30,00} \\ \mathbf{-80,00} \end{bmatrix} \boldsymbol{MPa}$$

El módulo de dicho vector tensión es

$$\Phi = \sqrt{16{,}00^2 + 30{,}00^2 + (-80{,}00)^2} = 86{,}93\ MPa$$

b) Valor de las componentes intrínsecas del vector tensión en dicho plano

Las componentes intrínsecas del vector tensión en el plano indicado, se corresponden con la tensión normal y la tensión tangencial máxima que se producen en dicha superficie.

Conocido el vector tensión, la tensión normal se obtiene mediante la expresión 1.9

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\Phi} = [0{,}800 \quad 0 \quad 0{,}600] \cdot \begin{bmatrix} 16{,}00 \\ 30{,}00 \\ -80{,}00 \end{bmatrix} = \mathbf{-35,20}\ \boldsymbol{MPa}$$

Para el cálculo de la tensión tangencial se puede utilizar la expresión 1.11

$$\tau_{nm} = \sqrt{\left|\vec{\Phi}\right|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{86{,}93^2 - (-35{,}20)^2} = \mathbf{79,48}\ \boldsymbol{MPa}$$

c) Dirección de la componente intrínseca tangencial

La dirección de la componente intrínseca tangencial es (véase Ec. 1.12)

$$\vec{m} = \frac{(\vec{n} \wedge \vec{\Phi}) \wedge \vec{n}}{\left|(\vec{n} \wedge \vec{\Phi}) \wedge \vec{n}\right|} = (0{,}556 \quad, 0{,}377 \quad, -0{,}741)$$

Se puede comprobar que si se sustituye el versor ***m*** en la ecuación 1.13 se obtiene el valor de la tensión tangencial anteriormente obtenido.

$$\tau_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{\Phi} = [0{,}556 \quad 0{,}377 \quad -0{,}741] \cdot \begin{bmatrix} 16{,}00 \\ 30{,}00 \\ -80{,}00 \end{bmatrix} = 79{,}48\ MPa$$

<u>Ejercicio 1.4</u>

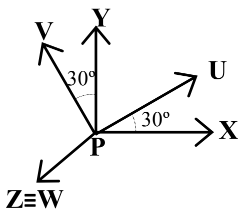
En un punto P de un sólido elástico la matriz asociada al tensor de tensiones referida a un sistema ortogonal XYZ, es

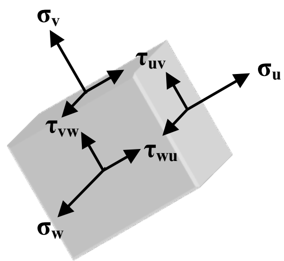
$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{9} \end{bmatrix} \boldsymbol{MPa}$$

Determinar la matriz asociada al tensor de tensiones para un sistema ortogonal UVW, tal que, los ejes U y V formen 30º con los ejes X e Y respectivamente y el eje W sea coincidente con el eje Z.

<u>Solución</u>

Se trata de obtener las componentes intrínsecas del vector tensión en sendos planos perpendiculares a los nuevos ejes





Conocidas las componentes intrínsecas en estos planos, la matriz asociada al tensor es

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{uv} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{vw} \\ \tau_{wu} & \tau_{vw} & \sigma_w \end{bmatrix}$$

Para obtener estos valores, en primer lugar se calcula el versor director asociado a cada uno de los planos

Cara perpendicular al eje U

$\vec{u} = [0{,}866 \quad 0{,}500 \quad 0]$

Cara perpendicular al eje V

$\vec{v} = [-0{,}500 \quad 0{,}866 \quad 0]$

Cara perpendicular al eje W

$\vec{w} = [0 \quad 0 \quad 1]$

Conocidos los versores directores de los tres planos, bastará con aplicar las expresiones 1.10 y 1.14 para obtener en cada plano las componentes intrínsecas.

Componentes intrínsecas en la superficie perpendicular al eje U

$$\sigma_u = [0{,}866 \quad 0{,}500 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & -6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}500 \\ 0 \end{bmatrix} = 2{,}77\ MPa$$

$$\tau_{uv} = [-0{,}500 \quad 0{,}866 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & -6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}500 \\ 0 \end{bmatrix} = -7{,}06\ MPa$$

Componentes intrínsecas en la superficie perpendicular al eje V

$$\sigma_v = [-0{,}500 \quad 0{,}866 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & -6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}500 \\ 0{,}866 \\ 0 \end{bmatrix} = -0{,}77\ MPa$$

$$\tau_{vw} = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & -6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}500 \\ 0{,}866 \\ 0 \end{bmatrix} = 4{,}06\ MPa$$

Componentes intrínsecas en la superficie perpendicular al eje W

$$\sigma_w = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & -6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 9{,}00\ MPa$$

$$\tau_{wu} = [0{,}866 \quad 0{,}500 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & -6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 6{,}96\ MPa$$

Luego la matriz asociada al sistema de referencia UVW es

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2,77} & \mathbf{-7,06} & \mathbf{6,96} \\ \mathbf{-7,06} & \mathbf{-0,77} & \mathbf{4,06} \\ \mathbf{6,96} & \mathbf{4,06} & \mathbf{9,00} \end{bmatrix} \boldsymbol{MPa}$$

Las seis expresiones anteriores se pueden agrupar en una sola que relaciona, directamente, los parámetros de uno y otro sistema de referencia

$$\begin{bmatrix} 2{,}77 & -7{,}06 & 6{,}96 \\ -7{,}06 & -0{,}77 & 4{,}06 \\ 6{,}96 & 4{,}06 & 9{,}00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}500 & 0 \\ -0{,}500 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & -6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para un caso general, la expresión anterior es

$$\begin{bmatrix} \sigma_u & \tau_{uv} & \tau_{wu} \\ \tau_{uv} & \sigma_v & \tau_{yw} \\ \tau_{wu} & \tau_{yw} & \sigma_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\,\alpha_x & cos\,\alpha_y & cos\,\alpha_z \\ cos\,\beta_x & cos\,\beta_y & cos\,\beta_z \\ cos\,\gamma_x & cos\,\gamma_y & cos\,\gamma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\,\alpha_x & cos\,\beta_x & cos\,\gamma_x \\ cos\,\alpha_y & cos\,\beta_y & cos\,\gamma_y \\ cos\,\alpha_z & cos\,\beta_z & cos\,\gamma_z \end{bmatrix}$$

1.5. TENSIONES PRINCIPALES

La matriz asociada al tensor, deducida en los apartados anteriores, es una matriz simétrica real, y en consecuencia existe un sistema de referencia respecto del cual la matriz es diagonal

$$\mathcal{T}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

La expresión anterior implica que existen tres planos, perpendiculares entre sí, en los cuales las tensiones tangenciales son nulas (Figura 1.8).

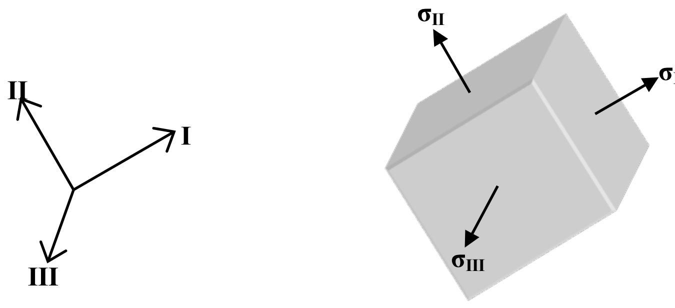


Figura 1.8

El valor de la tensión normal que se produce en cada uno de los planos se obtiene mediante la *ecuación canónica o secular* del tensor:

$$\sigma^3 - J_1 \cdot \sigma^2 + J_2 \cdot \sigma - J_3 = 0 \tag{1.16}$$

Siendo J_1, J_2 y J_3 los invariantes del tensor de tensiones (véase Ec. 1.6, 1.7, 1.8).

Puesto que la matriz del tensor es real y simétrica, las raíces de la ecuación 1.16 existen y son reales.

Los valores de la tensión normal así obtenidos, son valores extremos, es decir, son las *tensiones normales máximas o mínimas* que se producen en el punto P del sólido elástico. Se denominan *tensiones principales* y a sus direcciones, direcciones principales.

Cada uno de los valores propios, por ejemplo σ_I, cumple la siguiente condición:

$$\left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \sigma_I \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_x^I \\ \cos\alpha_y^I \\ \cos\alpha_z^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Que junto con

$$\cos^2\alpha_x^I + \cos^2\alpha_y^I + \cos^2\alpha_z^I = 1$$

Permite determinar la dirección de la tensión principal.

Si se toma como sistema de referencia las direcciones principales, la ecuación 1.4 se transforma en

$$\begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_{II} \\ \Phi_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_I \\ \cos\alpha_{II} \\ \cos\alpha_{III} \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

El versor director de cualquier plano que pasa por el punto del sólido elástico cumple:

$$\cos^2\alpha_I + \cos^2\alpha_{II} + \cos^2\alpha_{III} = 1 \tag{1.19}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 1.18, se obtiene:

$$\left(\frac{\Phi_I}{\sigma_I}\right)^2 + \left(\frac{\Phi_{II}}{\sigma_{II}}\right)^2 + \left(\frac{\Phi_{III}}{\sigma_{III}}\right)^2 = 0 \tag{1.20}$$

La ecuación anterior es un elipsoide (véase Figura 1.9), conocido como *elipsoide de Lamé,* y representa el lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión asociados a cada uno de los infinitos planos que pasan por el punto.

Para seguir leyendo haga click aquí