

Javier F. Urchueguía Schölzel
José Fco. Martínez-Canales
Juan Carlos Moreno Esteve

Electromagnetismo para la ingeniería

Programa adaptado a los nuevos grados

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Primera edición, 2011 ▪ Reimpresión 2015

© Javier F. Urchueguía Schölzel
José Fco. Martínez-Canales
Juan Carlos Moreno Esteve

© de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València
Distribución: Telf. 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref. 0961_03_01_04

Imprime: Byprint Percom, sl.

ISBN: 978-84-8363-778-4
Impreso bajo demanda

Queda prohibida la reproducción, la distribución, la comercialización, la transformación y, en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de la totalidad o de cualquier parte de esta obra sin autorización expresa y por escrito de los autores.

Impreso en España

Prólogo

Decía Aristóteles que la necesidad de saber es consustancial al hombre, es decir, se ajusta a su misma naturaleza, a su esencia. Cuando las supuestas certezas que sirven para sostener el día a día se tambalean, comenzamos a cuestionarnos los principios que sustentan nuestra comprensión de la propia Naturaleza y las respuestas que se intentan alcanzar son el resultado de un proceso de análisis objetivo, sistemático y crítico, que evita partir de convenciones preestablecidas.

Esta forma de proceder, que llamamos *Ciencia*, puede entenderse como una manera de aproximarse al mundo y a la vida, aunque proporciona sólo respuestas parciales a los problemas acotados que trata, fijándose únicamente en porciones de la realidad. Carece de categoría de certeza radical o global y conlleva una permanente actitud crítica que, a lo largo de la historia, ha llevado a muchos pensadores a sufrimientos terribles e incluso la muerte.

La Ciencia que conocemos es el resultado de las ideas y experimentación de muchas personas que en su día intentaron, dentro de sus marcos históricos, paradigmas ideológicos y contextos personales, responder a las cuestiones que consideraban importantes. Lo hicieron teniendo en cuenta los postulados de anteriores científicos y bajo la premisa de que el tal saber no constituye un dogma, pues una vez apprehendido lo que otros pensaron, cada cual es libre de aceptarlo, rechazarlo o formular sus propios pensamientos.

No cabe duda de que la construcción del Electromagnetismo representa una extraordinaria aventura y ejemplo de este *paradigma*. Quienes la protagonizaron nos dejaron caminos nuevos con los que no se había contado, y proporcionaron respuestas a cuestiones que siempre nos habíamos formu-

lado. Contribuyeron a colmar nuestra curiosidad y nuestro asombro ante el mundo que nos rodea. De paso, nos legaron muchas de los instrumentos tecnológicos que han hecho del mundo actual lo que es; para bien y para mal.

Con la exposición que se presenta intentamos cumplir el reto de mantener la ilusión e interés por la Ciencia de nuestros estudiantes. El programa que proponemos, ciertamente exigente, se compagina con una transmisión que quiere resultar motivadora y garantizar el éxito de aquellos lectores que demuestren dedicación y constancia. Los diferentes temas y capítulos no fueron redactados como una avanzadilla en la investigación de la materia, sino con la pretensión de expresar la lógica, complejidad y belleza del Electromagnetismo Clásico como parte fundamental de la formación en Física de nuestros futuros Ingenieros.

Sobre nuestras propias motivaciones para iniciar la escritura de este libro, conviene destacar el contexto docente en que nos hallamos inmersos. Las nuevas titulaciones de Grado que – a partir de las políticas que emanan del Tratado Bolonia – están siendo implantadas en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Valencia (ETSII), suponen – también para las asignaturas de Física – un importante reto metodológico y docente. La docencia en Grados como los de Ingeniería Técnica Industrial (G.I.T.I.), Ingeniero de la Energía (G.I.E.), Ingeniero en Organización Industrial (G.I.O.I.) e Ingeniero Químico (G.I.Q.), supone la necesidad de seleccionar, especializar, enfocar y exponer de manera diferente a cómo se ha venido haciendo hasta el momento, los contenidos de las diferentes área de la Física Aplicada, de manera que los nuevos estudiantes puedan visualizar la relevancia específica de cada materia para sus respectivas disciplinas. Con este proyecto hemos querido facilitar a profesores y alumnos esta necesaria puesta al día del programa de Electromagnetismo, permitiendo una mejor adaptación al entorno de los nuevos Grados.

Nuestro fin – que no es otro que el de exponer al lector de forma completa y coherente los principios que rigen los fenómenos electromagnéticos, incidiendo también en muchos de sus aspectos tecnológicos – se orienta en este libro a una más sencilla adaptación a los descriptores ya establecidos para las asignaturas de Física II y Física III de las nuevas titulaciones. En este sentido ha de tenerse en cuenta que existen, entre las especialidades,

diferencias notables en la profundidad y alcance de los contenidos a tratar en el ámbito del Electromagnetismo.

Por ello hemos querido ofrecer no sólo una visión autocontenida y coherente de la materia – que ya tiene referentes en libros magníficos de autores que nos han precedido –, sino aportar una cierta actualización, adaptación y selección de los contenidos, procurando escribir con estilo directo, seleccionando el nivel matemático – formal apropiado y tratando de ofrecer abundantes ejemplos y problemas resueltos, que – consideramos – son un elemento fundamental para profundizar en el aprendizaje de un programa orientado a estudiantes de Ingeniería.

El libro se divide en dos bloques. El primero se estructura en torno a una discusión fundamental de la electrostática y magnetostática, encajando bien con la asignatura Física II de la titulación G.I.T.I. o G.I.E. (de segundo cuatrimestre de primer curso). Puede también constituir un “programa de mínimos” para titulaciones, como G.I.O.I., en la que no se imparte la asignatura de Física III. El segundo bloque consta de capítulos a los que, según la titulación, puede asignárseles mayor o menor peso. Así, tradicionalmente se ha concedido gran relevancia a materias como la teoría de circuitos y las relacionadas con los materiales eléctricos y magnéticos en la formación de los Ingenieros Industriales. Para perfiles como el de Ingeniero de la Energía, deberían posiblemente valorarse más aspectos como el tratamiento de la radiación electromagnética. Mediante el símbolo “ \square ” hemos querido señalar aquellos apartados que, si bien necesarios desde el punto de vista de la coherencia conceptual de la materia, pueden considerarse laterales en el desarrollo del programa, en consideración de las limitaciones de tiempo.

Como requisito previo es importante que el lector, además de conocimientos de álgebra y trigonometría, posea nociones sólidas de cálculo diferencial e integral, así como de álgebra vectorial, hasta el nivel equivalente a un programa básico de Teoría de Campos. Mediante los apéndices hemos querido, no obstante, recoger y agrupar algunos de estos contenidos, a fin de facilitar la comprensión del texto.

Nos ha parecido importante incluir también, en cada capítulo, un breve comentario sobre la evolución del pensamiento relevante en cada etapa y sobre aquellos investigadores quienes contribuyeron a los diferentes desarrollos, como, entre otros, Coulomb, Ampère, Faraday, Maxwell, Hertz y Tes-

la. Servirá ello también como homenaje a aquellos gigantes, cuyo talento y determinación contribuyó a dar forma a nuestra Ciencia y nuestro Mundo.

Esta obra no hubiese sido posible sin el apoyo, aliento y ayuda de muchos. Sin las muchas horas robadas a Raquel y a la pequeña Eva. De forma muy especial nos gustaría destacar el tesón, esfuerzo y dedicación de María Muelas, inpagable coordinadora de la edición del manuscrito. Su paciencia y sonrisa fueron una verdadera inspiración para nosotros. Juan Carlos Castro, de la Universidad de Pinar de Río, Cuba, puso su mejor empeño y saber hacer en muchas de las figuras. Agradecemos a nuestra Institución, la Universidad Politécnica de Valencia, el apoyo recibido desde muchos frentes, comenzando por nuestra Escuela, la ETSII, que da sentido a nuestro esfuerzo, la Editorial UPV o al propio grupo de L^AT_EX de la Universidad, que tan amablemente nos ha prestado su apoyo con los formatos y plantillas. La labor de nuestro Departamento de Física Aplicada, con su minuciosa revisión del manuscrito, ha sido también destacable.

Por último – como no – recordar a nuestros maestros y profesores, aquellos que nos lo enseñaron todo y sin quienes nada seríamos, puesto que:

“No debo buscar mi dignidad en el espacio, sino en el gobierno de mi pensamiento. No tendré más aunque posea mundos. Si fuera por el espacio, el universo me rodearía y me tragaría como un átomo; pero por el pensamiento yo abrazo el mundo.”

(Blaise Pascal)

Javier Fermín Urchueguía Schölzel
Catedrático de Física Aplicada
Escuela Técnica Superior de Ingenieros
Industriales
Universidad Politécnica de Valencia

José Fco. Martínez–Canales Murcia
Ex Ingeniero Jefe de Proyectos y Obras de
la Región Este de Iberdrola Distribución
Eléctrica
Ex Profesor asociado de Física Aplicada
ETSII – UPV

Juan Carlos Moreno Esteve
Profesor Titular de Física Aplicada
ETSII – UPV

Índice general

I Electromagnetismo I

Electrostática y Magnetostática	1
1 Electroestática	7
1.1 Ley de Coulomb y campo electrostático en el vacío	7
1.2 Ley de Gauß de la electrostática	25
1.3 El potencial electrostático V	38
1.4 Ejercicios propuestos.	56
2 El campo magnético	59
2.1 Naturaleza de la corriente eléctrica	60
2.2 Campo inducción magnética, \vec{B}	68
2.3 Acciones mecánicas entre circuitos y campos magnéticos	82
2.4 Carácter solenoidal de \vec{B} y ley de Ampère – Maxwell	93
2.5 Ejercicios propuestos.	100

II Electromagnetismo II	109
3 Conductores cargados en equilibrio	115
3.1 Conductores cargados en equilibrio y presión electrostática	117
3.2 Capacidad eléctrica y condensadores	135
3.3 El problema fundamental del equilibrio electrostático \square	159
3.4 Ejercicios propuestos.	175
4 Dieléctricos	179
4.1 Polarización de la materia y sus parámetros característicos	180
4.2 La ley de Gauß generalizada	197
4.3 Energía potencial y condiciones de continuidad en medios dieléctricos	203
4.4 Campo de una distribución continua de dipolos \square	209
4.5 Ejercicios propuestos.	220
5 Campo magnético en medios materiales	225
5.1 Imantación y susceptibilidad magnética	228
5.2 Clasificación de los medios materiales magnéticos	231
5.3 Refracción de las líneas magnéticas.	242
5.4 Circuitos magnéticos.	246
5.5 Ejercicios propuestos.	255
6 Inducción electromagnética	267
6.1 Inducción y ley de Faraday	267
6.2 Inducción mutua y autoinducción	278
6.3 La ecuación general de Maxwell – Ampère para corrientes variables en el tiempo	292

6.4 Ejercicios propuestos.	298
7 Teoría de Circuitos	305
7.1 Redes de conductores y leyes de Kirchhoff	309
7.2 Circuitos de corriente alterna	322
7.3 Ejercicios propuestos.	343
8 Ondas electromagnéticas	351
8.1 Leyes de Maxwell y ondas electromagnéticas	352
8.2 Radiación electromagnética Ψ	372
8.3 Reflexión y refracción.	388
8.4 Ejercicios propuestos.	397
III Apéndices	
Números complejos, teoría de campos y unidades	403
A Teoría de Campos	405
A.1 Coordenadas curvilíneas ortogonales	405
A.2 Operadores diferenciales	406
A.3 Teorema de Gauß.	412
A.4 Teorema de Stokes	413
B Números Complejos	417

C Tabla de unidades	421
D Bibliografía	423

Parte I

Electromagnetismo I

Electrostática y Magnetostática

Introducción I

“Un cuerpo contiene las mismas cantidades de electricidad vítrea y resinosa, las cuales – bajo condiciones normales – neutralizan una a la otra.

La electrificación es la separación de las dos electricidades, las cuales pueden ser llamadas positiva y negativa, con la implicación de que su suma permanece constante y es cero.”

(Benjamin Franklin)

Aunque las observaciones de los fenómenos eléctricos y magnéticos se remonta a la Antigüedad – de hecho la palabra *electrón* tiene su raíz en el griego y alude al *ámbar*, sustancia que se carga electrostáticamente por fricción con cierta facilidad – el estudio de su evolución en el contexto de las modernas teorías científicas, podría comenzar con una referencia a los trabajos experimentales de Gilbert. Alrededor del siglo XVI, Gilbert realizó importantes aportes experimentales tales como construir una *terrella* – modelo a escala de la Tierra fabricado con *magnetita* – a fin de estudiar el comportamiento de agujas magnéticas colocadas en su superficie y confirmar su suposición de que la Tierra podría verse como un gigantesco imán. Ya antes, el italiano Girolamo Cardano (1501–1576) – autor del adjetivo *eléctrico* para esta tipología de fenómenos – había clasificado los cuerpos que podían *cargarse* eléctricamente por fricción e hipotetizado sobre la naturaleza de estos *efluvios* o *emanaciones*, que le recordaban a la fisiología humana. Gilbert creía que los fenómenos eléctricos se debían a una entidad de naturaleza material que, bajo acción de la fricción, se liberada del ámbar. Sus observaciones sobre el magnetismo fueron completadas por Niccolò Cabeo – entre finales del siglo XVI y principios del XVII –, periodo

en que comienzan también a desarrollarse los primeros experimentos con *máquinas electrostáticas*, como las de Otto von Guericke (1602 – 1686).

En sus máquinas, Guericke nota que éstas se electrifican y asocia cierta *virtud conservativa* a la electricidad. Advierte, sin embargo, que una pluma de ave podía ser repelida (en lugar de atraída, como en el caso del ámbar) en lo que, de alguna manera, estaría presente lo que denominó la *virtud expulsiva*. En aquella época Stephan Gray (1666 – 1736), mediante hilos de seda, tubos de vidrio y corchos, descubre que la *electricidad* viaja a través de lo desde entonces denominamos *medios conductores*. También durante aquella época logró E.G. von Kleist crear el primer *almacén de cargas* en su *botella de Leyden* – hoy lo denominaríamos *batería* –, separando lo que Charles Francois de Cisternay Dufay llamaba *electricidad resinosa* de la *vítrea*.

Fue, sin embargo, Benjamin Franklin (1706–1790), descubridor también de la inducción eléctrica, quien primero enunció con claridad el principio de conservación de la carga, tal como recoge la cita que encabeza este epígrafe.

El desarrollo de la electricidad y el magnetismo ilustra bien cómo – en el desarrollo de cualquier teoría o ciencia – se van produciendo descubrimientos y avances conceptuales que permiten la formulación de nuevas hipótesis y preguntas. Posiblemente fue la sencilla conceptualización en términos de positivo – negativo y la analogía con los hallazgos en gravitación lo que inspiró los cruciales experimentos del francés Charles de Coulomb (1736–1806), quien logró definir con exactitud la carga eléctrica y establecer, con ayuda de una balanza de torsión, las leyes fundamentales que rigen la intensidad del magnetismo y la fuerza entre cargas. A partir de Coulomb las nociones de carga y fuerza eléctrica pasarían definitivamente del dominio cualitativo al cuantitativo, pudiéndose ya ponderar, por comparación, con las magnitudes mecánicas fundamentales. También Alessandro Volta (1745–1827) con la invención de su *pila eléctrica* realizó un descubrimiento fundamental: el de la *corriente eléctrica* cuya naturaleza fue, en un principio, un total misterio.

Los primeros años del siglo XVIII contemplaron el gran avance de la *electrostática*, que se plasmó fundamentalmente en el trabajo que Poisson – heredero de la cátedra de Coulomb – presentó a la Academia Francesa en

1812. En su obra logró calcular la distribución superficial de carga en ciertas configuraciones, y, sobre todo, adecuar las ecuaciones que Lagrange y Laplace habían enunciado para el movimiento de cuerpos celestes al estudio de la electrostática. En un segundo trabajo, titulado *Memoria sobre la Teoría del Magnetismo*, Poisson sentó también las bases de esta ciencia, definiendo el estado de un cuerpo magnético por su imantación, y calculando el potencial y el campo que se crea alrededor de cuerpos magnéticos.

Las investigaciones de naturaleza eléctrica y magnética debidas a Poisson, fueron generalizadas y extendidas por George Green (1793–1841) en *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, cuyo tratamiento se basa en las propiedades de la función a la que denomina *función potencial*, y quien, por medio de una formulación integral, logró establecer métodos generalizados para la resolución de problemas complejos en electrostática y magnetostática. De aquella época son también los trabajos de Ohm – sobre todo su *Teoría Matemática del Circuito Eléctrico* – quien estableció el concepto de resistencia de un conductor y describió la relación entre la corriente que atraviesa un conductor y la diferencia de *tensión* entre sus extremos.

Con lenguaje más moderno, estudiaremos – en esta primera parte del libro – las leyes y observaciones que nos legaron aquellos gigantes y que forman la base de nuestra comprensión actual de los fenómenos eléctricos y magnéticos.

Capítulo 1

Electrostática

1.1 Ley de Coulomb y campo electrostático en el vacío

La carga eléctrica es una propiedad asociada a la materia y que podemos considerar como la causa y origen – último y esencial – de las interacciones tanto eléctricas como magnéticas. La carga eléctrica permanece en el tiempo – decimos que *se conserva* – y es un hecho contrastado que, si separamos los constituyentes que forman la materia ordinaria, las partículas resultantes, los electrones, protones y neutrones, poseen una cierta cantidad de carga eléctrica exactamente definida e invariablemente asociada a cada tipo de partícula. A diferencia de otras propiedades, como la masa, la carga eléctrica se manifiesta en dos formas diferenciadas, positiva y negativa. Por otro lado, la carga eléctrica se halla *cuantificada*, lo que implica que la cantidad de carga de cualquier agrupación de materia es siempre múltiplo exacto de cierta cantidad elemental, la que posee el electrón ¹.

Si la carga ni se crea ni se destruye, la única manera de que en un volumen determinado pueda haber variación en el tiempo de la cantidad total de

¹Excepción a este principio son los llamados *quarks* (constituyentes elementales de los hadrones), y cuya carga eléctrica es una fracción racional ($\pm\frac{1}{3}$ ó $\pm\frac{2}{3}$) de la carga elemental del electrón. Los quarks, sin embargo, nunca se observan de manera individual, sino en agrupaciones que presentan una carga que es múltiplo exacto de la carga elemental.

carga eléctrica, reside en la posibilidad de que en dicho volumen entren o de él salgan cargas, es decir, que exista un flujo denominado *corriente eléctrica*. En realidad, toda corriente eléctrica es un flujo de partículas, frecuentemente electrones, que en su movimiento transportan consigo su carga eléctrica.

Interacción electromagnética

Las partículas con carga eléctrica interactúan por medio del campo electromagnético, cuya intensidad es muchos órdenes de magnitud mayor que las fuerzas de naturaleza gravitatoria debidas a sus masas. Por ello, la interacción electromagnética es la fuerza básica que subyace a muchos de los aspectos del comportamiento de la materia que conocemos, controlando desde la estructura atómica y la química hasta fenómenos como la resistencia de los materiales y el rozamiento. Por ser la interacción electromagnética tan intensa, la materia tiende al estado de neutralidad eléctrica, es decir, a la situación en que las cargas positivas igualan a las negativas y resultan en una carga neta nula. Un ejemplo de ello son los átomos, que, dotados de un núcleo eléctricamente positivo y una envoltura de electrones de carga negativa, son en conjunto neutros.

La materia que tiene un desequilibrio de carga se denomina *cargada* o *ionizada* y en tal estado tiende a ser químicamente muy reactiva y ello precisamente con el fin de restablecer la neutralidad de carga.

Ley de Coulomb y campo electrostático

La noción abstracta de *campo eléctrico* tiene su origen en las experiencias de Coulomb y su ley sobre la fuerza entre cargas eléctricas.

Ley 1.1

(Ley de Coulomb)

Dos cargas eléctricas puntuales situadas a una determinada distancia, interactúan mediante una fuerza eléctrica de forma atractiva o repulsiva según si las cargas son de igual signo u opuesto. En particular, si en el vacío y en presencia de una carga puntual de valor q_1 situamos una segunda carga puntual de valor q_2 a una determinada distancia r , ésta segunda carga sentirá una fuerza eléctrica, \vec{F}_{12} , dada por la expresión:

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (1.1)$$

siendo \hat{r}_{12} el vector unitario – o *versor* – que señala en la dirección que une ambas cargas y con sentido desde q_1 señalando hacia q_2 y $r = \|\vec{r}\|$ su distancia. Por otro lado, K es una constante cuya magnitud es positiva y por tanto la fuerza será de naturaleza repulsiva (es decir, tiende a alejar q_2 de q_1) cuando el signo del producto $q_1 q_2$ es positivo y atractiva en caso contrario (ver figura 1.1).

Según la ley de Coulomb, la intensidad o módulo de la fuerza entre dos cargas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, de manera análoga a lo que sucede en el caso de la fuerza gravitacional entre masas.

Una forma alternativa de escribir la relación anterior consistiría en introducir un nuevo *campo vectorial*, que denominaremos *campo eléctrico* (o electrostático en el caso de que las cargas que lo originan no alteren su posición con el tiempo), \vec{E}_1 , y que se define a partir de la relación:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1. \quad (1.2)$$

En esta expresión, el subíndice “1” expresa la idea de que el campo tiene un origen en (o es creado por) la carga “1”. Para el caso de que ésta coincidiese en el origen del sistema de ejes, la expresión para \vec{E}_1 se deduce directamente de la ley 1.1 y es:

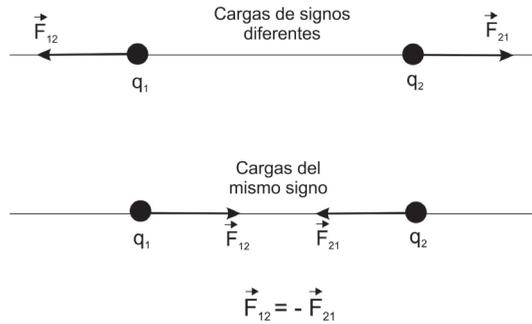


Figura 1.1: Dos cargas – que se consideran puntuales – separadas entre sí por una distancia r , ejercen una acción mutua dada por la ley de Coulomb. Esta fuerza es de repulsión si las partículas tienen cargas del mismo signo y de atracción, si las cargas son de signo contrario.

Ley 1.2

(Campo electrostático de una carga puntual q_1 situada en el origen)

$$\vec{E}_1 = K \frac{q_1}{r^2} \hat{R} = K q_1 \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1.3)$$

donde $\hat{R} = \frac{\vec{r}}{r}$ es el versor en la dirección radial en coordenadas polares esféricas en un sistema de referencia en que la carga q_1 ocupase el centro O .

El campo eléctrico posee, con arreglo a lo anterior, *simetría esférica* alrededor de la carga fuente que lo origina.

¿Es el campo eléctrico algo real?

Aunque hemos introducido la noción de campo eléctrico a través de la fuerza de Coulomb y en principio no parece un concepto necesario, a menudo una manera diferente de interpretar una misma ecuación esconde un significado más profundo. En este caso, podríamos entender que la fuerza eléctrica entre dos cargas proviene de un campo – objetivo y real – cuyo origen está en la carga q_1 , y que, en presencia de la carga (que realizaría funciones de mero *testigo*) q_2 , se pondría de manifiesto a través de la fuerza \vec{F}_{12} . La carga q_1 sentiría también una fuerza $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ (de

igual módulo y dirección y sentido opuesto) producida gracias al campo originado en q_2 .

Pero ...¿a qué interpretación acogernos?. ¿Existe el campo electrostático aún sin presencia de la carga testigo, o más bien representa tan solo un artificio matemático que nos resulta útil para operar con las fuerzas entre cargas?

La pregunta anterior es, en realidad, parte de un debate muy antiguo, ligado a la cuestión de la existencia o no de la *acción a distancia*, es decir la posibilidad de que dos cuerpos alejados entre sí se influyan instantáneamente. Pensemos en el siguiente experimento ideal: en la configuración en que existen dos cargas q_1 y q_2 sujetas a su interacción electrostática mutua, alteramos en un instante dado la posición de la carga q_1 de manera brusca. Si el campo eléctrico no fuese más que un artificio, concluiríamos que la carga q_2 iría sintiendo una fuerza eléctrica cambiante que sería en cada instante función de su distancia a la carga q_1 . En otras palabras: la fuerza eléctrica seguiría instantáneamente las variaciones de la distancia entre q_1 y q_2 .

Aunque llevó mucho tiempo llegar a tal convicción – y sobrepasaría con creces el marco de este libro exponerlo en detalle – sabemos que en realidad esto no es lo que sucede; por el contrario, la *información* de que la carga q_1 se ha movido tarda un cierto intervalo de tiempo en llegar a la carga q_2 . Mientras tanto, la carga q_2 sigue sintiendo la misma fuerza que antes y dicha *información* – la de que algo ha cambiado – se propaga entre ambas a una gran velocidad, aunque finita, la velocidad de la luz. Tal señal, como campo electromagnético, cuya génesis y comportamiento estudiaremos en el último capítulo del libro, existe indiscutiblemente, puesto que puede transportar información y energía.

Mientras caminamos en una noche oscura observando el cielo, deberíamos reparar en que algunas de las estrellas que podemos observar habrán cambiado de posición o incluso tal vez no existen ya. Su luz ha tardado cientos o miles de años en llegar hasta nosotros. Lo que vemos es el eco de un campo electromagnético que ha viajado entre ellas y nosotros, trayéndonos la señal de un remoto pasado. Demos pues por zanjado el viejo debate para decir que:

La presencia de cargas crea una nueva *calidad* o *alteración del medio* o *vacío* que denominamos *campo eléctrico*. Este se manifiesta a través del efecto sobre otras cargas, aunque su existencia es independiente de éstas.

El valor de la constante K

En el sistema de unidades internacional, SI, la carga eléctrica constituye una nueva magnitud y su unidad posee el nombre de *Culombio* ($[C]$). El valor de C está relacionado con los antiguos experimentos de electrólisis que permitieron establecer los fundamentos de la medida de cargas. Especialmente relevante es el hecho de que la carga del electrón, q_e , vale:

$$q_e = 1,602176487(40) \cdot 10^{-19}C,$$

puesto que q_e constituye la verdadera unidad de carga fundamental en la naturaleza. En el SI, la constante K se define como:

$$K = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}. \quad (1.4)$$

El factor 4π está relacionado con la idea de *flujo*, como veremos más adelante, y en la expresión aparece una constante nueva, ϵ_0 , denominada *permitividad dieléctrica del vacío*, que establece la proporción entre la intensidad del campo y la cantidad de carga fuente presente. El valor de ϵ_0 en el SI es:

$$\epsilon_0 = 8,8541878176 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{J m}. \quad (1.5)$$

De esta manera, la expresión definitiva para el campo eléctrico originado por una cierta cantidad de carga q_1 situada en un punto, tal como se expresaría en el SI es:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{R}, \quad (1.6)$$

cuya unidad es el Newton/Culombio ($\frac{N}{C}$) y, para la fuerza de Coulomb la expresión es:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}. \quad (1.7)$$

La ley r^{-2} y la conservación de la carga eléctrica

¿Por qué, de forma análoga a lo que ocurre con la gravitación, la dependencia de la intensidad del campo eléctrico es de la forma $\frac{1}{r^2}$? Para responder a esta cuestión, imaginemos la superficie de una esfera a una distancia R del centro O , en el que está situada carga puntual, q , fuente del campo eléctrico \vec{E} . En todos los puntos de la superficie de la esfera la intensidad del campo eléctrico sería la misma y de valor:

$$\|\vec{E}\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}.$$

El *flujo del campo eléctrico*, Φ – cuya definición más general estudiaremos en el apartado que sigue – es en esta situación igual al producto de la intensidad del campo por el área de la superficie esférica:

$$\Phi = 4\pi R^2 \|\vec{E}\| = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Así, vemos que Φ no depende del radio de la superficie esférica escogida siendo en cierto modo una cantidad objetivamente asociada a la carga presente en el interior de la esfera imaginada, por lo que se puede decir que las cargas eléctricas son *fuentes* del flujo de campo eléctrico. Para que ello tenga sentido físico, es condición indispensable que la dependencia de la intensidad del campo con la distancia al centro de la carga sea de la forma propuesta (es decir, $\propto r^{-2}$).

Antes de abordar una definición más amplia del concepto de flujo es preciso discutir qué sucede con el campo eléctrico cuando existen más cargas o incluso en presencia de distribuciones continuas de carga.

El principio de superposición

Derivado de la corriente de pensamiento en los siglos XVII y XVIII que consistía en suponer que el *todo* es igual a la suma de las partes, se establece que:

Ley 1.3

(Principio de Superposición)

La fuerza de Coulomb (y consiguientemente el campo eléctrico) que originan una combinación de cargas, es la suma vectorial de la fuerza producida por cada carga individual. Formalmente, si en una región existe una distribución de cargas $(q_i, \vec{r}_i); i = 1, \dots, N$, localizadas respectivamente en posiciones dadas por \vec{r}_i , la fuerza de Coulomb sobre una carga q_j situada en la posición \vec{r}_j viene dada por la suma:

$$\vec{F}_j = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \quad (1.8)$$

donde $r_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$ y \hat{r}_{ij} es el vector unitario señalando hacia \vec{r}_j desde la respectiva posición \vec{r}_i de cada carga de la distribución.

Con el principio de superposición disponemos de una prescripción sobre cómo calcular el campo electrostático creado por un conjunto de cargas dado en diferentes configuraciones.

Distribuciones discretas

Una distribución de cargas discreta es un conjunto finito (o infinito numerable) de cargas puntuales que podemos individualizar por medio de un subíndice i .

Supongamos que existen en un volumen dado N cargas puntuales q_i en las respectivas posiciones dadas por los vectores de posición \vec{r}_i donde $i = 1, 2, \dots, N$. El campo electrostático producido por el conjunto de las N

cargas en la posición de observación dada por el vector \vec{r} viene dado, en virtud del principio de superposición, por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}. \quad (1.9)$$

Distribuciones continuas

Aunque, como se ha visto, la naturaleza de la carga es discreta, en la mayor parte de problemas de electromagnetismo es perfectamente admisible la hipótesis *macroscópica* o *del continuo*. Según ésta, las distribuciones de carga pueden describirse mediante *funciones densidad de carga eléctrica*, de forma análoga a la densidad de masa en el caso de distribuciones de materia.

Para justificar esta idea pensemos en un volumen pequeño, $d\tau'^2$, dentro de un agregado material de átomos o cargas. Si dicho volumen es suficientemente grande en comparación con el tamaño de las partículas pero suficientemente pequeño en comparación con la escala del problema que nos estemos planteando, resulta que en su interior siempre existirá un número enorme de cargas y la fluctuación que supone la variación en unas pocas es tan pequeña que la densidad de carga (el número de cargas por unidad de volumen) resulta ser una función suave (que no varían demasiado rápidamente en el espacio y en el tiempo) y matemáticamente tratable. De esta manera, si en el volumen infinitesimal $d\tau'$, situado en la posición dada por el vector \vec{r}' existe la densidad de carga $\rho_e(\vec{r}')$, la cantidad infinitesimal de carga contenida en $d\tau'$ será:

$$dq = \rho_e(\vec{r}') d\tau'.$$

De forma análoga, existen distribuciones de carga en superficie y sobre líneas, para las que, las respectivas densidades de carga reciben el nombre de *densidad superficial de carga*, σ_e y *densidad lineal de carga*, λ_e .

²Las primas en la definición de los elementos de volumen, superficie o línea indican que al integrar recorreremos los diferentes puntos que definen la distribución.

Según si la distribución de carga es en volumen, superficie o línea, el campo eléctrico viene determinado por integrales de volumen, superficie o línea.

1. Distribuciones de carga en volumen:

La carga está confinada en una región o volumen τ en el cuál existe una densidad de carga en volumen dada por la función ρ_e . Este tipo de distribuciones describen por ejemplo nubes de cargas o los llamados *plasmas*, materia ionizada con propiedades muy características. El campo eléctrico se obtiene como paso al continuo de la ley de superposición para cargas discretas y viene dado por la expresión:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho_e(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\tau' . \quad (1.10)$$

2. Distribuciones de carga en superficie

Este tipo de configuraciones aparecen con frecuencia al tratar el campo creado por conductores cargados o en presencia de otros, ya que en ellos aparecen densidades de carga en superficie, como veremos en apartados posteriores; el campo resultante viene dado por la expresión:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma_e(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dS' , \quad (1.11)$$

donde dS' es el elemento de superficie. Si la superficie es cerrada, el símbolo de la integral se denotará \oiint_S .

3. Distribuciones lineales de carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \lambda_e(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dl' . \quad (1.12)$$

Si la línea es cerrada, el símbolo de la integral se escribe como \oint_L .

Se puede pensar que las integrales anteriores sólo pueden definirse si \vec{r} es una posición que no pertenece a la distribución, ya que el integrando es

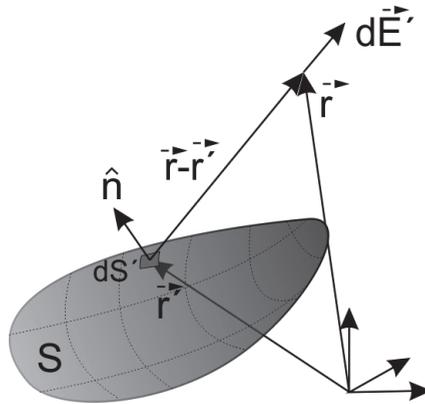


Figura 1.2: Distribución continua de carga en superficie. En la posición de observación, dada por el vector \vec{r} , la contribución diferencial al campo electrostático – producida por un elemento de superficie, dS' – posee la dirección de la línea que une éste con la posición de observación.

singular en $\vec{r} = \vec{r}'$. A pesar de ello, es posible mostrar que las expresiones anteriores son también válidas en puntos que se encuentran en el interior de la distribución de carga.

Ejemplo 1.1 Una carga $+Q$ está situada en el punto $A(-a, 0, 0)$ y una carga $-2Q$ en $B(a, 0, 0)$. Se pide calcular el punto del espacio donde el campo electrostático es nulo.

Solución: El campo total producido por el conjunto de las dos cargas en cualquier punto es, según el principio de superposición, igual a la suma del campo producido por la carga $+Q$ y el producido por la carga $-2Q$, es decir:

$$\vec{E} = \vec{E}_{+Q} + \vec{E}_{-2Q}$$

En primer lugar, realizamos el cálculo del campo que produce la carga $+Q$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{+Q} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_A}{r_A^3} \\ \vec{r}_A &= (x+a)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ r_A^3 &= \left[(x+a)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}, \end{aligned}$$

mientras que para el campo que produce la carga $-2Q$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{-2Q} &= \frac{-2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_B}{r_B^3} \\ \vec{r}_B &= (x-a)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ r_B^3 &= [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}.\end{aligned}$$

Siendo \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} los vectores unitarios o versores dirigidos respectivamente hacia los sentidos positivos de los ejes coordenados OX,OY y OZ trirectangulares dextrógiros. En conjunto, el campo total valdrá cero si se cumple que:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x+a)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{2(x-a)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\} = \vec{0}$$

y por tanto, habrán de cumplirse:

$$\begin{aligned}E_x = 0 &= \frac{(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ E_y = 0 &= \frac{y}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{2y}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ E_z = 0 &= \frac{z}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{2z}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

Las dos últimas igualdades se cumplen en particular si, respectivamente, $y = 0$ y $z = 0$, lo que aplicado a la primera de las tres igualdades da:

$$\frac{(x+a)}{[(x+a)^3]} - \frac{2(x-a)}{[(x-a)^3]} = 0 \iff (x-a)^2 - 2(x+a)^2 = 0$$

que tiene como una solución:

$$x = \frac{(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})} a \approx -5,8 a$$

Esto significa que el punto situado en la posición $(-5,8 a, 0, 0)$ verifica la condición que se solicitaba en el enunciado del problema.

Ejemplo 1.2 Dada una distribución lineal de carga constante (tramos 1, 2, 3 y 4), como indica la figura, cargada uniformemente con $\lambda_e(C/m)$, se pide calcular el campo electrostático creado por la distribución en el origen de coordenadas (O). Nota: El tramo 1 sobre el eje X negativo es indefinido.

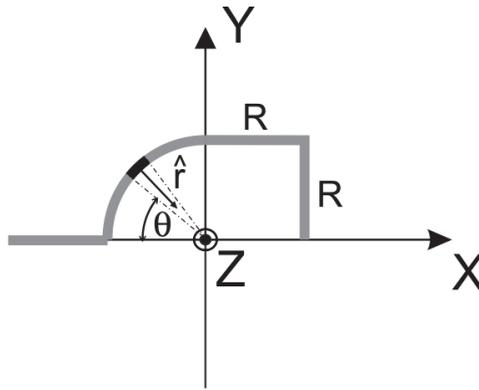


Figura 1.3: Diagrama que corresponde al ejemplo de cálculo propuesto. En el tramo compuesto por un cuarto de círculo (tramo 2), el elemento de arco viene dado por el ángulo θ tomando como origen de ángulos el semieje OX negativo.

Solución:

Tramo 1 Tomamos un elemento diferencial de carga dq , sobre el diferencial de tramo dx , a una distancia x del origen de coordenadas, y lo integraremos desde $-\infty$ a $-R$.

Por simetría, cada elemento de línea del tramo realiza una contribución diferencial al campo eléctrico en O cuya única componente es horizontal, señalando en la dirección del eje OX y sentido positivo (es decir, de dirección dada por el versor \hat{x}); por consiguiente y considerando que la carga de cada elemento del tramo vale $dq = \lambda_e dx$, tendríamos que:

$$d\vec{E}_1 = dE_1 \hat{x} = \frac{\lambda_e dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} \hat{x}$$

obtenemos así que la contribución del *tramo 1* al campo electrostático en el origen de coordenadas sería:

$$\vec{E}_1(\vec{0}) = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{-R} \frac{dx}{x^2} \hat{x} = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-\infty}^{-R} \hat{x} = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 R} \hat{x}$$

Tramo 2 Tomando ahora un elemento diferencial de carga dq (a lo largo del diferencial de arco $dl = R d\theta$) a una distancia R del origen de coordenadas y tomando como referencia de ángulos el eje $-OX$, la dirección del campo que produce el elemento de arco en el origen viene dada por el versor $(\cos\theta \hat{x} - \sin\theta \hat{y})$, por lo que la contribución al campo de cada elemento de arco es:

$$d\vec{E}_2 = dE_2(\cos\theta \hat{x} - \sin\theta \hat{y}) = \frac{\lambda_e R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} (\cos\theta \hat{x} - \sin\theta \hat{y}),$$

por ser la intensidad de la contribución diferencial al campo igual a $\frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ con $dq = \lambda_e R d\theta$; integrando desde 0 a $\frac{\pi}{2}$, obtenemos finalmente:

$$\vec{E}_2(0) = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 R} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta d\theta \hat{x} - \sin\theta d\theta \hat{y}) \right\} = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 R} (\hat{x} - \hat{y})$$

Tramo 3 Tomamos ahora un elemento diferencial de carga dq , sobre un trayecto que recorre un tramo horizontal paralelo al eje OX y de longitud R . La distancia de cada elemento dx de dicho tramo al origen de coordenadas viene dada por $(x^2 + R^2)^{-1/2}$, por lo que el versor que se orienta desde dicho elemento al origen, en que pretendemos determinar el campo eléctrico es:

$$\vec{u}_r = \frac{-(x\hat{x} + R\hat{y})}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Consiguientemente, la contribución de cada tramo al campo eléctrico en el origen de coordenadas es:

$$d\vec{E}_3 = -dE_3 \frac{(x\hat{x} + R\hat{y})}{\sqrt{x^2 + R^2}} = -\frac{\lambda_e dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)} \frac{(x\hat{x} + R\hat{y})}{\sqrt{x^2 + R^2}},$$

y simplificando:

$$d\vec{E}_3 = -\frac{\lambda_e dx (x\hat{x} + R\hat{y})}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Por fin, integrando entre los límites del tramo, dados por $x = 0$ y $x = R$ se encuentra que:

$$\begin{aligned}\vec{E}_3(\vec{0}) &= -\frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_0^R \frac{x dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x} + R \int_0^R \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y} \right\} = \\ &= -\frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 R} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \hat{x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \right\}\end{aligned}$$

Tramo 4 Para concluir, consideramos un elemento diferencial de carga dq , sobre el diferencial de tramo dy , a una distancia $(y^2 + R^2)^{-1/2}$ del origen de coordenadas. Siguiendo consideraciones similares a las empleadas para calcular la contribución del tramo 3 obtenemos:

$$d\vec{E}_4 = -\frac{\lambda_e dy}{4\pi\epsilon_0(y^2 + R^2)} \frac{(R\hat{x} + y\hat{y})}{\sqrt{y^2 + R^2}}$$

e integrando entre los valores del parámetro y que define dicho tramo ($y = 0$ e $y = R$) se halla que:

$$\begin{aligned}\vec{E}_4(0) &= -\frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_0^R \frac{y dy}{(y^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x} + R \int_0^R \frac{dx}{(y^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y} \right\} = \\ &= -\frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 R} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \hat{y} \right\}\end{aligned}$$

Aplicando el principio de superposición a los 4 tramos, obtenemos el resultado final para el campo en el centro del sistema de ejes:

$$\vec{E}_t(0) = \vec{E}_1(0) + \vec{E}_2(0) + \vec{E}_3(0) + \vec{E}_4(0) = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 R} (\hat{x} - 2\hat{y})$$

Ejemplo 1.3 Se realiza un orificio de forma circular de radio R y centro O , en un plano indefinido uniformemente cargado con una densidad superficial de carga $+\sigma_e$ constante. El círculo extraído de centro O' , se sitúa paralelamente al plano a una distancia d coincidiendo sobre el mismo eje sus respectivos centros O y O' . Admitiendo que las distribuciones de cargas en el plano y en el círculo no quedaran afectadas por la operación descrita, determinar:

1. El campo electrostático en el vacío debido al plano, en un punto P_1 de la normal situada en O que une los centros O y O' , a una distancia z de O .

2. El campo electrostático en el vacío debido al círculo cargado en un punto P_2 de la normal situada en O' que une los centros O y O' a una distancia z de O' .
3. El campo electrostático total en un punto P_3 entre el plano y el disco.
4. Situando una partícula inicialmente en reposo, de masa m y carga eléctrica $+q$, en el punto medio entre los centros del agujero y del círculo, y en las condiciones dadas en el problema, razonar el tipo de movimiento que realiza, calculando su velocidad en un punto extremo del segmento d , teniendo en cuenta los datos siguientes: $\sigma_e = 5 \cdot 10^{-11} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$; $R = 1 \text{m}$; $d = 10 \text{m}$; $m = 10^{-6} \text{kg}$; $q = 1 \mu\text{C}$.

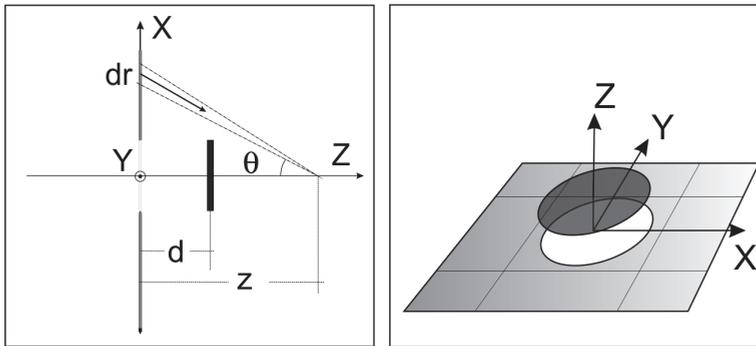


Figura 1.4: A la derecha: plano indefinido uniformemente cargado con una densidad superficial electrostática de carga $+\sigma_e$ constante, donde se ha realizado un orificio de forma circular de radio R . A la izquierda: el mismo plano visto en sección. El ángulo θ define la posición angular de los elementos de superficie en forma de corona que – en conjunto – forman el plano.

Solución:

1. Para el cálculo del campo electrostático debido al plano indefinido con orificio, integramos mediante coronas circulares elementales. Tomamos ejes de tal forma, que la dirección del eje OZ coincida con la línea que pasa por los centros O y O' . Por simetría consideramos que el campo en dicho eje OZ solamente va a tener componente z ; es decir:

$$\vec{E}(z) = E_z(z)\hat{z}.$$

Observamos que, por proyección sobre el eje z , la corona, cuya carga total viene dada por $dq = \sigma_e 2\pi r dr$ aporta únicamente una contribución diferencial a la componente z del campo total. Si l es la distancia de cada elemento

de la corona a P_1 y θ el ángulo entre dicha línea de unión y el eje OZ – según puede apreciarse en el diagrama 1.4 –, dicha contribución de la corona vendrá dada por:

$$dE_{z_1} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 l^2} \cos\theta,$$

siendo:

$$l = \sqrt{z^2 + r^2} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}},$$

donde, integrando, resulta el campo en P_1 :

$$\vec{E}_1(z) = \frac{\sigma_e z}{2\epsilon_0} \left(\int_R^\infty \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{z} = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \hat{z}$$

2. Para obtener el campo electrostático debido al disco podemos aplicar la misma estrategia, integrando mediante coronas circulares. Se obtiene de nuevo:

$$dE_{z_2} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 l^2} \cos\theta,$$

siendo:

$$l = \sqrt{z^2 + r^2} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}},$$

donde, integrando ahora entre $r = 0$ y $r = R$, resulta para el campo en P_2 :

$$\vec{E}_2(z) = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \hat{z}.$$

3. Campo electrostático total en P_3 entre el plano y el disco. El campo resultante en P_3 se obtendrá aplicando el principio de superposición para los dos campos hallados en los apartados anteriores, pero cuidando de acoplar las distancias al referencial de la figura:

$$\vec{E}_3(z) = \vec{E}_1(z) + \vec{E}_2(z-d) = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \hat{z} - \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{(d-z)}{\sqrt{(d-z)^2 + R^2}} \right] \hat{z}$$

4. Tipo de movimiento.

Aplicando la 2ª Ley de Newton $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$, donde la fuerza sobre la partícula es combinación de fuerza eléctrica – dada por $\vec{F}_e = q E_3 \hat{z}$ – y la fuerza de origen gravitatorio – cuya expresión en los ejes dados es $\vec{F}_g = -mg \hat{z}$.

La aceleración la tomamos como:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = v \frac{dv}{dz} ,$$

y, por tanto:

$$q E_3 - m g = m \frac{dv}{dz} v .$$

Integrando la relación diferencial anterior, se obtiene:

$$\int_{d/2}^z \left[\frac{q}{m} E_3 - g \right] dz = \int_0^v v dv .$$

Si, por otra parte, no se tiene en cuenta la acción gravitatoria ($\frac{q}{m} E_3 \gg g$), puede integrarse directamente y se obtiene que:

$$\frac{m}{2q} v^2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} \right]_{\frac{d}{2}}^d - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[z - \sqrt{(d-z)^2 + R^2} \right]_{\frac{d}{2}}^d$$

$$v^2 = \frac{q\sigma}{m\epsilon_0} \left[R - \frac{d}{2} + \sqrt{d^2 + R^2} - 2\sqrt{\frac{d^2}{4} + R^2} \right]$$

Con los datos: $\sigma = 5 \cdot 10^{-11} \text{Cm}^2$; $R = 1 \text{ m}$; $d = 10 \text{ m}$; $m = 10^{-6} \text{ kg}$; $q = 1 \mu\text{C}$, resulta:

$$\vec{v} = 1,937 \hat{z} \text{ ms}^{-1}$$

La partícula cargada es acelerada hacia el centro del disco cargado, ya que el campo electrostático creado por el plano cargado con el agujero circular, es mayor que el campo electrostático que produce el disco cargado.

1.2 Ley de Gauß de la electrostática

La ley de Gauß de la electrostática constituye una generalización de la relación entre el flujo del campo electrostático y la carga eléctrica que lo origina y que – para una carga puntual y superficie de control esférica – ya obtuvimos en el apartado anterior.

Concepto generalizado de flujo del campo electrostático

En una región del espacio en que existe un campo electrostático producido por una cierta distribución de carga, llamamos *flujo infinitesimal*, $d\Phi$, del campo \vec{E} a través de una determinada superficie elemental $d\vec{S}$, al producto escalar:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.13)$$

siendo $d\vec{S}$ un vector diferencial cuyo módulo es igual al área del elemento diferencial de superficie. En el caso de superficies curvas cerradas, su dirección es la normal a la superficie en cada punto de la misma, en el sentido que va desde el centro de curvatura de la superficie hacia el exterior:

$$d\vec{S} = \hat{n} dS .$$

El flujo total a través de una superficie (abierta o cerrada) S , se obtiene integrando la relación anterior sobre todos los elementos de superficie. Por ejemplo, para una superficie cerrada:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} .$$

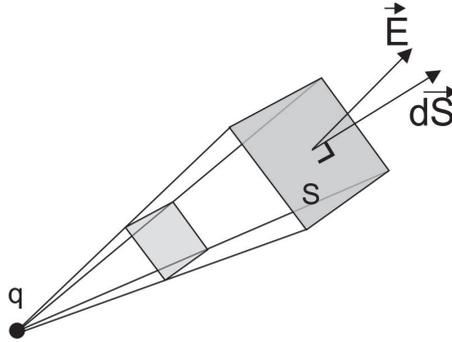


Figura 1.5: Representación del flujo elemental del campo electrostático creado por una carga puntual a través de un elemento diferencial de superficie $d\vec{S}$. El espacio que subtiende el elemento desde el punto de vista de la carga q es igual al diferencial de ángulo sólido $d\Omega$ que define el elemento de superficie.

Flujo del campo electrostático producido por una carga puntual

Cuando el campo eléctrico es el originado por una carga puntual q situada en el origen:

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r^2} (\hat{r} \cdot \hat{n}),$$

donde, $\hat{n} \cdot \hat{r} = \cos[\phi]$, siendo ϕ el ángulo entre las direcciones normal a la superficie y radial. Observamos, sin embargo, que:

$$\frac{dS}{r^2} \cos[\phi] = d\Omega,$$

donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido del elemento de superficie dS (ver figura 1.5) medido desde la posición de la carga en O y por tanto:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\Omega.$$

Dado que el ángulo sólido total de cualquier superficie cerrada que rodee por completo O vale invariablemente $\oiint_S d\Omega = 4\pi$, tenemos finalmente que:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.14)$$

Aplicación del teorema de Gauß – Ostrogradsky al campo electrostático

La demostración anterior admite una generalización cuya aplicabilidad se extiende a distribuciones de carga arbitrarias en base al teorema de la *divergencia* o también de *Gauß – Ostrogradsky*, que se desarrolla en el apéndice de *teoría de campos*. Recordando que, en general, si τ es un volumen delimitado por una superficie de contorno S y $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo vectorial, univaluado, al menos una vez derivable y carente de singularidades en el interior del volumen, entonces:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{F} \, d\tau .$$

Observamos que el teorema anterior se refiere a campos carentes de singularidades y este no es el caso para el campo dado por la expresión 1.6, que es singular en el “punto preciso”, donde está localizada la carga. Podemos resolver el problema *extrayendo* de τ la singularidad mediante un hueco esférico centrado en O y de radio r_1 lo suficientemente pequeño como para formar parte del volumen τ , creando de esta manera un hueco esférico de radio r_1 .

Para calcular la divergencia del campo electrostático de una carga puntual en el origen – dado por la expresión 1.6 – podemos recurrir a la expresión del operador divergencia en coordenadas esféricas, ya que en dicho sistema, el campo depende únicamente de la coordenada radial. Teniendo en cuenta (ver apartado sobre teoría de campos) la expresión en este sistema del operador *divergencia* y que $\vec{E} = E_R(R)\hat{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{R}$:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial(R^2 E_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial(R^2 E_R)}{\partial R} = 0 ,$$

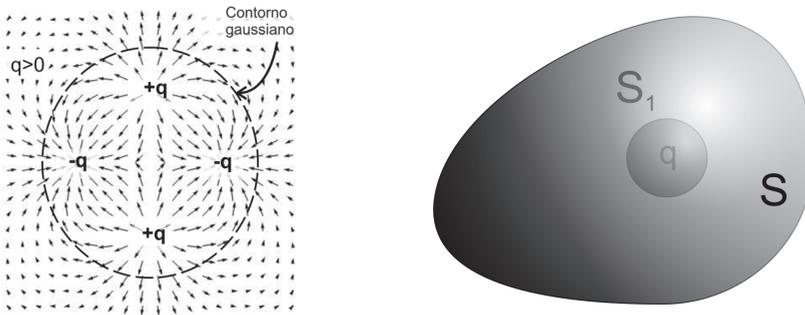


Figura 1.6: A la izquierda: Representación del flujo que atraviesa el campo de un cuadrupolo eléctrico (un conjunto neutro de cuatro cargas). El hecho de que la carga total que encierra la superficie de contorno gaussiano es cero – y por consiguiente también el flujo total –, se manifiesta en que el número de líneas de campo entrantes se iguala al número de líneas salientes. A la derecha: En general para facilitar el cálculo del flujo del campo eléctrico a través de una superficie, S , se rodea la carga que origina el campo de otra superficie situada dentro de la primera – S_1 – formándose una oquedad o volumen interior.

luego, aplicando el teorema de la divergencia al nuevo volumen con *hueco* τ' que ahora posee dos superficies que lo delimitan S_1 (interior) y $S_2 = S$ (exterior):

$$\oiint_{S_1+S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi = \oiint_{\tau'} \nabla \cdot \vec{E} \, d\tau = 0,$$

donde Φ es el flujo total a través de la superficie exterior del volumen original, τ , y Φ_1 es el flujo a través de la esfera–hueco interior de radio r_1 .

Notemos que Φ_1 ya se determinó en el epígrafe anterior, puesto que representa el flujo del campo eléctrico para una superficie esférica que rodea una carga en O ; únicamente habremos de tener cuidado con el signo, ya que ahora *la dirección hacia el exterior del volumen señala hacia O* , así:

$$\Phi_1 = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

y dado que:

$$\Phi_1 + \Phi = 0$$

finalmente:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0},$$

con lo que obtenemos una expresión formalmente equivalente a 1.14, pero que ahora puede ser aplicada a distribuciones de carga arbitrarias y es válida sea cual sea la geometría de la superficie S .

Aplicación a distribuciones de carga arbitrarias

El argumento anterior se puede extender de inmediato a colecciones de cargas discretas, q_i , $i = 1, \dots, N$, ya que rige el principio de superposición, y por tanto la divergencia del campo total de todas las cargas sigue siendo nula (salvo en las posiciones de las cargas); siguiendo el esquema del epígrafe anterior podemos así construir huecos esféricos alrededor de cada una de las cargas individuales. El flujo a través de la superficie exterior a τ sería el negativo de la suma de los flujos a través de los N huecos, es decir:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

donde Q es la carga total contenida en el interior de τ .

Por un proceso de paso al límite el argumento anterior puede extenderse igualmente a las distribuciones de carga continuas. En este caso, como se muestra a continuación, el teorema de la divergencia permite además establecer una relación entre las derivadas del campo y el valor de la densidad de carga eléctrica, ρ_e , es decir, permite expresar la relación entre el campo y sus fuentes en forma de ecuación diferencial.

Ley 1.4

(Ley de Gauß de la electrostática)

Un volumen, τ , encerrado por la superficie S , rodea una cierta cantidad de carga Q . Para hallar el flujo a través de S del campo electrostático \vec{E} que tiene su origen en dicha carga es válida la ley integral de Gauß que establece que:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.15)$$

Si tratamos con una densidad en volumen de carga determinada por la función densidad de carga $\rho_e(\vec{r}')$, entonces, la carga total contenida en el volumen cerrado τ valdrá:

$$Q = \iiint_{\tau} \rho_e(\vec{r}') d\tau. \quad (1.16)$$

Por otro lado, por el teorema de la divergencia:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = \iiint_{\tau} \frac{\rho_e(\vec{r}')}{\epsilon_0} d\tau = \iiint_{\tau} (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau$$

dos integrales que siempre dan el mismo resultado, con independencia de cómo escojamos el volumen de integración. Ello sólo es posible si los integrandos de ambas integrales son iguales, es decir, si:

$$\nabla \cdot \vec{E} (= \text{div}\vec{E}) = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (1.17)$$

expresión que se conoce como ley de Gauß diferencial.

El campo desplazamiento eléctrico \vec{D}

Mediante la definición:
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.18)$$

introducimos un nuevo campo llamado “desplazamiento eléctrico”. En el vacío, dicho campo supone únicamente un cambio de escala y unidades con respecto al campo electrostático \vec{E} . Observamos que, en función de este nuevo campo, el teorema de Gauß se enuncia como:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q, \quad (1.19)$$

o bien:

$$\nabla \cdot \vec{D} (= \text{div} \vec{D}) = \rho_e. \quad (1.20)$$

Como veremos en el tema dedicado a los dieléctricos, es esta última la forma más general del teorema de Gauß, y resulta ser válida también cuando estamos en presencia de medios materiales. Por contra, la expresión 1.17 tiene validez únicamente en el vacío o en medios sin efectos polares.

Ejemplos de aplicación de la ley de Gauß

Flujo alrededor de un conjunto de cargas que se neutralizan

Si alrededor de un conjunto de cargas que en total poseen carga nula imaginamos una superficie S , el flujo neto del campo que la atraviesa vale cero. Como ejemplo consideremos el cuadripolo eléctrico (ver figura 4.4). Se observa que, por cada línea de campo que *sale* de dicha superficie existe otra línea que *entra* en ella para compensar el flujo saliente.

Cálculo del campo eléctrico de una distribución de carga con simetría esférica

Imaginemos un volumen esférico de radio R en el que exista una distribución de carga que tuviese simetría esférica y carga neta total igual a Q . Sin pérdida de generalidad, situemos su centro en O . Dado que la densidad de carga sólo depende de la distancia del elemento al centro de la esfera, es decir:

$$\rho_e(\vec{r}) = \rho_e(R), \quad R \leq R_1,$$

y podemos suponer por simetría que también el campo posee simetría esférica, es decir:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_R(R)\hat{R}.$$

Tracemos ahora una superficie esférica S de un determinado radio, R ($R \geq R_1$), centrada en la distribución de carga y que la contenga en su totalidad. El teorema de Gauß y la propia forma del campo electrostático nos permiten ver que:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi E(R) R^2,$$

de modo que,

$$E_R(R) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2}.$$

La expresión obtenida es la misma que se dedujo para una carga puntual situada en el origen de manera que el campo \vec{E} de una distribución de carga con simetría esférica en puntos situados fuera de la propia distribución es el mismo que produciría una carga puntual situada en el centro de la distribución y que contuviese la carga total de ésta. Este hallazgo nos resultará útil al tratar, por ejemplo, con esferas cargadas en el tercer capítulo.

Campo eléctrico de una distribución de carga con simetría cilíndrica

Siguiendo las ideas del epígrafe anterior, imaginemos ahora que la distribución de cargas tiene forma de cilindro de radio r_1 , indefinido y con densidad de carga sólo dependiente de la distancia entre cada punto y el eje del cilindro (simetría cilíndrica).

Si establecemos una superficie de control cilíndrica de radio r desde $-z$ hasta $+z$ (y longitud $2z$) alrededor de la distribución y, dado que el campo posee simetría cilíndrica, podemos expresar \vec{E} , utilizando coordenadas cilíndricas, como:

$$\vec{E} = E_r(r) \hat{r},$$

siendo ahora \hat{r} el versor radial en coordenadas cilíndricas.

Siendo $d\vec{S} = r dz d\varphi \hat{r}$ el elemento de superficie según su expresión en coordenadas cilíndricas planas (ver apéndice), el flujo a través de la superficie de control vendrá dado por:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_{-z}^{+z} E(r) r dz d\varphi = E(r) r 2\pi 2z = Q/\epsilon_0,$$

ya que en las bases del cilindro resulta que:

$$\vec{E}(r) \cdot d\vec{S}_{\text{base}} = E(r) \hat{r} \cdot r dr d\varphi \hat{z} = 0.$$

Definiendo una densidad de carga por unidad de longitud como $\lambda_e \equiv \frac{Q}{2z}$, resulta para el campo electrostático a una distancia r ($r \geq r_1$):

$$E(r) = \frac{\lambda_e}{2\pi r \epsilon_0},$$

y en este caso el campo sólo decrece a razón de la inversa de la distancia al eje de la distribución. Este particular comportamiento asintótico se debe precisamente a la naturaleza indefinida de la distribución a lo largo del eje que la define, es decir, al hecho de que no podamos encerrarla dentro de una superficie finita.

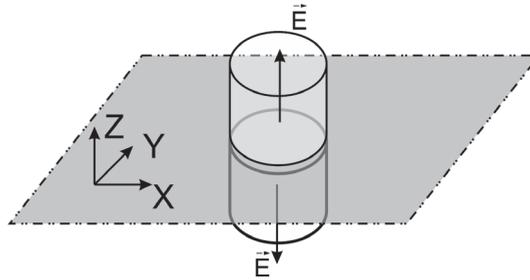


Figura 1.7: Para el cálculo del campo cerca de una distribución plana indefinida se utiliza un contorno gaussiano en forma de cilindro cuyo eje coincide con la normal al plano.

Campo eléctrico cerca de una distribución indefinida de cargas plana y uniforme e indefinidamente delgada (lámina cargada indefinida)

Consideramos ahora una distribución de cargas uniforme situada sobre una lámina de espesor nulo y densidad superficial de cargas $\sigma_e = \frac{dQ}{dS}$. Para calcular el campo eléctrico a ambos lados del plano, situamos una superficie de control – gaussiana – cilíndrica cuyo eje es perpendicular al plano (dicha dirección perpendicular coincide con el eje z), de radio r_1 y altura H . La distancia de las dos bases del cilindro al plano donde están las cargas, es la misma. (ver figura 1.7).

Puesto que la distribución es uniforme y a efectos de carga todos los puntos del plano son equivalentes el campo posee dirección perpendicular al plano y su intensidad dependerá únicamente de la distancia z al mismo:

$$E(\vec{r}) = E(z)\hat{z},$$

de manera que sólo existe flujo a través de las caras superior e inferior de la superficie cilíndrica de control; tenemos entonces que:

$$\Phi = 2\pi r_1^2 E(z) = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

de modo que,

$$E(z) = \frac{Q}{2\pi r_1^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}.$$

El campo es por consiguiente independiente de la distancia a la lámina. El campo cerca de la superficie de un conductor plano o en el interior de condensador de placas planas, que estudiaremos en capítulos posteriores, son ejemplos particulares relevantes de este tipo de configuraciones de carga.

Ejemplo 1.4 Las componentes de un campo electrostático son: $E_x = E_z = 0$ y $E_y = by^{\frac{1}{2}}$, donde $b = 800\text{N/Cm}^{\frac{1}{2}}$ en un sistema cartesiano tri-ortogonal $OXYZ$. Dado un cubo de lado a cuyas caras se encuentran en los siguientes planos:

Cara	1	2	3	4	5	6
Plano	$y = a$	$x = 2a$	$y = 2a$	$x = 0$	$z = 0$	$z = a$

1. Calcular el flujo electrostático que atraviesa cada una de las caras del cubo.
2. Determinar la carga eléctrica total, Q , en el interior del cubo.

Si en el centro del cubo anterior, hubiera situada una carga Q' , calcular de nuevo:

3. El flujo electrostático que atraviesa la cara $n^\circ 5$ del cubo.

Si ahora la carga Q' se situase en el vértice donde concurren las caras $n^\circ 1, 4$ y 6 determinar de nuevo:

4. El flujo electrostático a través de la cara $n^\circ 5$ del cubo.

Solución:

1. Flujo electrostático que atraviesa cada una de las caras. Dado que las caras son planas, el flujo electrostático Φ creado en una determinada cara se expresa como el producto escalar del campo electrostático \vec{E} que atraviesa esa cara por el vector superficie de dicha cara \vec{S} . En general, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} \\ \vec{E} = by^{\frac{1}{2}}\hat{y} \\ \vec{S} = a^2\hat{n} \end{array} \right\} \rightarrow \Phi = by^{\frac{1}{2}}a^2\hat{y} \cdot \hat{n}$$

Así, podemos calcular para cada cara:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Cara 1} & (y = a, \hat{n} = -\hat{y}) \quad \Phi_1 = \vec{E} \cdot \vec{S}_1 = -ba^{\frac{5}{2}} \\
 \text{Cara 2} & (x = a, \hat{n} = +\hat{x}) \quad \Phi_2 = \vec{E} \cdot \vec{S}_2 = 0 \\
 \text{Cara 3} & (y = 2a, \hat{n} = +\hat{y}) \quad \Phi_3 = \vec{E} \cdot \vec{S}_3 = \sqrt{2}ba^{\frac{5}{2}} \\
 \text{Cara 4} & (x = 0, \hat{n} = -\hat{x}) \quad \Phi_4 = \vec{E} \cdot \vec{S}_4 = 0 \\
 \text{Cara 5} & (z = 0, \hat{n} = -\hat{z}) \quad \Phi_5 = \vec{E} \cdot \vec{S}_5 = 0 \\
 \text{Cara 6} & (z = a, \hat{n} = +\hat{z}) \quad \Phi_6 = \vec{E} \cdot \vec{S}_6 = 0
 \end{array}$$

y el flujo total será:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = ba^{\frac{5}{2}}(\sqrt{2} - 1)$$

2. Carga Q en el interior. Según el teorema de Gauß $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$, por consiguiente:

$$Q = \epsilon_0 ba^{\frac{5}{2}}(\sqrt{2} - 1)$$

3. Si ahora situamos una cierta cantidad de carga Q' en el centro del cubo, el nuevo flujo electrostático total que atraviesa las seis caras del cubo, valdrá, según el teorema de Gauß:

$$\Phi' = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

La cara $n^0 5$ es una cara del cubo y el flujo que la atraviesa es por simetría igual a la sexta parte del flujo total, es decir:

$$\Phi'_5 = \frac{1}{6} \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

4. Si la carga Q' del apartado anterior estuviese situada en el vértice donde concurren las caras $n^0 1, 4$ y 6 , dicho vértice podría considerarse el centro de un sistema de ocho cubos iguales de lado a . El flujo total a través de los ocho cubos será: $\Phi''_{8 \text{ cubos}} = \frac{Q'}{\epsilon_0}$. Luego el flujo a través de un solo cubo será la octava parte del flujo total, es decir:

$$\Phi''_{cubo} = \frac{\Phi''_{8 \text{ cubos}}}{8} = \frac{Q'}{8 \epsilon_0}$$

El flujo obtenido en realidad atraviesa – de manera simétrica – sólo las caras 2, 3 y 5 (las caras 1, 4 y 6 coinciden en el vértice donde está la carga Q' y producen un flujo nulo sobre las mismas). Por tanto, el flujo por una sola cara será la tercera parte del flujo por un cubo, por tanto, el flujo a través de la cara $n^{\circ}5$ será:

$$\Phi''_{cara5} = \frac{\Phi''_{cubo}}{3} = \frac{Q'}{24 \epsilon_0}$$

1.3 El potencial electrostático V

Carácter irrotacional del campo electrostático

De la expresión 1.6 para el campo que produce una carga puntual, $\vec{E} = E_R(R)\hat{R}$, deducimos, teniendo en cuenta la expresión para el operador rotacional (o *rotor*), que en coordenadas esféricas – ver apéndices – se expresaría en general como:

$$\frac{\hat{R}}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta E_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) + \frac{\hat{\theta}}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial E_R}{\partial \varphi} - \frac{\partial (R \sin \theta E_\varphi)}{\partial R} \right) + \frac{\hat{\varphi}}{R} \left(\frac{\partial (R E_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial E_R}{\partial \theta} \right).$$

Y considerando que E_R sólo depende de R y que $E_\varphi = E_\theta = 0$ en todo el espacio, se obtiene de inmediato que:

$$\text{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \vec{0}.$$

En otras palabras, el campo electrostático de una carga puntual es irrotacional o conservativo, y – por el principio de superposición y el carácter lineal del operador rotacional –, lo será también el campo producido por cualquier otra agrupación de cargas estática. El carácter irrotacional tiene como consecuencia la existencia de la llamada, función potencial o – sencillamente – *potencial electrostático* con arreglo a la siguiente:

Ley 1.5**(Carácter irrotacional de \vec{E})**

El campo electrostático es irrotacional

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}, \quad (1.21)$$

y, como consecuencia, existe una *función potencial asociada*, es decir, una función escalar, que denominaremos sencillamente potencial electrostático, $V(r)$, de la cual se obtiene el campo electrostático, mediante derivación, en la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V \quad (1.22)$$

donde recordemos (ver apéndice) que, en cartesianas $V(x, y, z)$ y, $\nabla V \equiv (\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z})$. En el caso del campo eléctrico producido por una carga puntual q , el potencial V depende únicamente de la distancia a ésta y vale:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.23)$$

Leyes de Poisson y Laplace

El operador laplaciano se define como la divergencia del gradiente de una función vectorial. Aplicado a la función potencial, y teniendo en cuenta las relaciones 1.17 y 1.22 obtenemos:

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V) = -\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (1.24)$$

relación que se conoce como ecuación de Poisson ³. La ley de Poisson es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden que permite el cálculo del valor de la función potencial a partir de la forma de la distribución de carga en una determinada región. Tratar de resolverla suele ser una de las maneras más directas de tratar problemas electrostáticos, ya que existe un gran número de resultados matemáticos sobre ella ; por otro lado, el mismo tipo de formulación aparece en muchos campos de la Física y la Ingeniería: fluidos, termodinámica, mecánica de materiales, etc

En regiones del espacio en que no existen cargas ($\rho_e = 0$), la ecuación de Poisson se transforma en la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 . \quad (1.25)$$

Estudiaremos ésta de manera más exhaustiva en el tercer capítulo, que trata del equilibrio electrostático.

Cálculo del potencial de distribuciones de carga

Operar con potenciales conlleva ventajas prácticas – al simplificarse notablemente los cálculos – y tiene también consecuencias importantes de naturaleza fundamental, pues éstos se hallan directamente relacionados, como veremos, con los conceptos de energía y trabajo. En el caso de la función potencial rige también el principio de superposición; según este, el potencial de una distribución de cargas – continua o discreta – es igual a la combinación lineal del potencial de las cargas individuales, por tanto:

1. Potencial de una distribución discreta de cargas q_i situadas en las posiciones respectivas \vec{r}_i , siendo $i = 1, \dots, N$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} \quad (1.26)$$

³Es frecuente utilizar también el símbolo “ Δ ” para denotar el operador laplaciano, con lo que solemos encontrarnos la ley de Poisson en la forma:

$$\Delta V = -\frac{\rho_e}{\epsilon_e}$$

Para seguir leyendo haga click aquí