



UNIVERSIDAD  
POLITECNICA  
DE VALENCIA



# ANÁLISIS AEROELÁSTICO DE UN ALA OBLICUA

Análisis analítico y numérico

Autor

**Guillermo Antoine Ponsoda**

Tutor

**Mario Lázaro Navarro**

Trabajo de Fin de Grado

**Universidad Politécnica de Valencia**

Valencia - Julio de 2016

# ANÁLISIS AEROELÁSTICO DE UN ALA OBLICUA

Análisis analítico y numérico

**Guillermo Antoine Ponsoda**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño,  
Universidad Politécnica de Valencia

Julio de 2016

# Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mi tutor en este Trabajo de Fin de Grado, Mario Lázaro Navarro, quien me ha ayudado durante todo el proceso y me ha dado ánimo a continuar. Sin su ayuda, no habría sido posible. También mencionar al resto de profesores que me han impartido clase, ya que sin todos ellos no habría logrado llegar aquí. Por supuesto, a toda mi familia, mis padres y hermano en especial.

## Resumen

El presente Trabajo de Fin de Grado aborda el un análisis de un ala oblicua. El objetivo principal se basa en estudiar las características aerolelásticas de este tipo de alas en estado estacionario, hallando principalmente la divergencia en este tipo de alas. Para abordar el problema se resolverá de dos modos distintos. Primero se resolverá el problema de modo analítico, para posteriormente realizar el cálculo de de modo numérico, donde inicialmente se calculara la deformación del ala, así como la distribución de sustentación a lo largo de la envergadura mediante el método de los paneles, para poder realizar posteriormente el análisis aeroelástico de la misma. De este modo se podrán comparar ambos resultados para poder ver las diferencias entre los dos métodos de resolución. Esto es importante, ya que cuando la geometría del ala empieza a complicarse, o las condiciones del problema no son sencillas, con el modo analítico no es posible hallar una solución. La divergencia es interesante en este tipo de alas, debido a la distinta flecha en cada semienvergadura de la misma, pudiendo comparar los resultados según la flecha sea positiva o negativa. Con este estudio se podrá ver en parte el porqué de las alas con flechas positivas en la mayor parte de las aeronaves actuales desde un punto de vista aerolástico.





## Lista de Símbolos

$AR$	Aspect ratio, $b^2/S$ .
$b$	Envergadura alar ( $m$ ).
$c_r$	Cuerda alar en la raiz ( $m$ ).
$c_t$	Cuerda alar en punta de ala ( $m$ ).
$c$	Cuerda alar geométrica media ( $m$ ).
$q$	Presión dinámica ( $Pa$ ).
$c_D$	Coefficiente de resistencia ( $D/qS$ ).
$c_L$	Coefficiente de sustentación ( $L/qS$ ).
$c_m$	Coefficiente de cabeceo ( $M_a/qSc$ ).
$D$	Fuerza de resistencia ( $N$ ).
$F_A$	Fuerza axial ( $N$ ).
$F_N$	Fuerza normal ( $N$ ).
$L$	Fuerza de sustentación ( $N$ ).
$M$	Número de Mach.
$S$	Superficie alar de referencia ( $m^2$ ).
$t/c$	Máximo espesor del ala respecto a la cuerda.
$X, Y, Z$	Ejes de coordenadas local del ala sobre eje elástico( $m$ ).
$x, y, z$	Ejes de coordenadas fijo ( $m$ ).
$V$	Velocidad ( $m/s$ ).
$W$	Peso en vacío ( $kg$ ).
$\alpha$	Ángulo de ataque del ala ( $^\circ$ ).
$\lambda$	Estrechamiento alar, $c_t/c_r$ .
$\Lambda_E$	Angulo de flecha del eje elástico ( $^\circ$ ).
$\Lambda$	Angulo de flecha del borde de ataque ( $^\circ$ ).
$N$	Número de paneles en los que se divide el ala.
$u$	Respuesta en un sistema.
$u_i$	Respuesta del grado de libertad $i$ en un sistema de múltiples grados de libertad.
$\mathbf{u}$	Vector con todos los grados de libertad de un sistema discreto.
$\mathbf{u}_e$	Vector de desplazamientos y giros nodales en un elemento finito.
$j, k$	Contadores.
$E$	Módulo de Young estático.
$G$	Módulo transversal estático.
$\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$	Matrices de masas, rigidez y amortiguamiento en un sistema dinámico discreto.

$\mathbf{K}^{(e)}, \mathbf{K}_w^{(e)}, \mathbf{K}_\theta^{(e)}$	Matrices de rigidez del elemento: general, rigidez a flexión y rigidez a torsión, respectivamente.
$\mathbf{q} = \{q_z, m_x\}^T$	Vector de fuerzas y momentos distribuidos en la viga.
$\delta(y)$	Función <i>Delta de Dirac</i> .
$\mathbf{F}$	Vector de fuerzas de excitación en un sistema de múltiples grados de libertad.
$F_r(t), M_r(t)$	Fuerza y momento puntual situadas en la coordenada $x = r$ de la viga.
$u$	Respuesta en un sistema.
$u_i$	Respuesta del grado de libertad $i$ en un sistema de múltiples grados de libertad.
$\mathbf{u}$	Vector con todos los grados de libertad de un sistema discreto.
$\mathbf{u}_e$	Vector de desplazamientos y giros nodales en un elemento finito.
$j, k$	Contadores.
$x, r$	Variable posición.
$i$	Unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ .
$E$	Módulo de Young estático.
$G$	Módulo transversal estático.
$\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$	Matrices de masas, rigidez y amortiguamiento en un sistema dinámico discreto.
$\mathcal{M}, \mathcal{K}, \mathcal{C}$	Matriz de masas, rigidez y amortiguamiento adimensionalizadas.
$n$	Número de grados de libertad en un sistema discreto.
$m$	Número de modos utilizados.
$X, Y, Z$	Coordenadas espaciales de un punto en los ejes locales de la viga.
$r$	Coordenada de localización de la excitación.
$w(Y)$	Desplazamiento vertical del eje de la viga.
$\theta(Y)$	Giro de la sección transversal de la viga.

$\mathbf{u}$	Vector con las componentes de los desplazamientos y giros.
$\mathbf{u}'$	Derivada respecto de $Y$ de $\mathbf{u}$ .
$V_Z, M_X$	Cortante en dirección $Z$ y flector en dirección $X$ .
$\mathbf{f}$	Vector con las componentes de los esfuerzos cortantes y flectores.
$\xi, \eta$	Variabes empleadas como coordenadas espaciales adimensionales.
$N_j(\eta)$	Funciones de forma.
$\mathbf{N}(\eta)$	Matriz de forma.
$w_j, \theta_j$	Desplazamiento y giro del nodo $j$ .
$\mathcal{T}, \mathcal{T}_e$	Energía cinética total y del elemento, respectivamente.
$\mathcal{U}, \mathcal{U}_e$	Energía interna de deformación total y del elemento, respectivamente.
$\mathcal{V}$	Energía potencial.
$\mathcal{W}$	Potencial de fuerzas exteriores.
$\mathcal{F}$	Función disipativa de Rayleigh.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>1</b>
<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>4</b>
<b>1. Introducción a las Alas Oblicuas</b>	<b>9</b>
1.1. Conceptos Básicos y Motivación . . . . .	10
1.2. Breve Historia . . . . .	13
1.2.1. Problemas en el Túnel de Viento . . . . .	18
1.3. Objetivos . . . . .	18
1.4. Suposiciones . . . . .	19
1.5. Divergencia Alas en Flecha . . . . .	19
<b>2. Modelo Analítico</b>	<b>22</b>
2.1. Consideraciones Iniciales . . . . .	23
2.2. Strip-Line Theory . . . . .	23
2.2.1. Ecuación de equilibrio . . . . .	25
2.2.2. Divergencia por torsión . . . . .	26
2.2.3. Distribución de sustentación . . . . .	29
2.2.4. Efecto de la flecha . . . . .	32
2.2.5. Cálculo de la divergencia . . . . .	35
<b>3. Desarrollo numérico</b>	<b>42</b>
3.1. Introducción al <i>Vortex Lattice Method</i> . . . . .	43
3.2. Modelado Estructural . . . . .	43
3.2.1. Definición de los grados de libertad . . . . .	44
3.2.2. Definición de la respuesta . . . . .	44
3.2.3. Energía de deformación . . . . .	48
3.2.4. Ángulo de ataque . . . . .	49
3.2.5. Desplazamiento vertical . . . . .	52
3.3. Modelado Aerodinámico ( <i>Vortex Lattice Method</i> ) . . . . .	53
3.3.1. Ángulo de ataque de los paneles . . . . .	54
3.3.2. Desplazamiento vertical de los paneles . . . . .	56

3.3.3. Numeración de los paneles: Matriz de Conexiones y Matriz de Nodos . . . . .	57
3.3.4. Obtención coordenadas de un punto . . . . .	60
3.3.5. Condiciones de contorno en cada panel . . . . .	65
3.4. Ley de Biot-Savart . . . . .	67
3.4.1. Teoremas de vórtices . . . . .	67
3.4.2. Ley de Biot-Savart . . . . .	67
3.4.3. Torbellino en herradura . . . . .	72
3.5. Trabajo virtual y fuerzas generalizadas . . . . .	74
<b>4. Resultados</b>	<b>77</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>84</b>
5.1. Introducción . . . . .	84
5.2. Conclusiones . . . . .	84
5.3. Estudios Futuros . . . . .	85
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>
<b>Appendices</b>	<b>89</b>
<b>A. Presupuesto</b>	<b>90</b>
A.1. Introducción . . . . .	90
A.2. Presupuestos Parciales . . . . .	90
A.2.1. Mano de obra . . . . .	90
A.2.2. Licencias de programas . . . . .	91
<b>B. Código Modelo Numérico</b>	<b>92</b>
B.1. Introducción . . . . .	92

# 1

## Introducción a las Alas Oblicuas

Durante los inicios de la aviación, la mayor parte de aviones se construían con ala recta, es decir, no contaban con ángulo de flecha en las alas aunque el concepto de las alas en flecha ya era conocido en la década de 1930. Sin embargo, este tipo de geometría no tenía gran interés debido a las bajas velocidades a las que volaban las aeronaves. Todo esto cambió a raíz con la aparición de los motores a reacción, y durante la segunda guerra mundial se empezó a introducir este tipo de geometría alar. El aumento de las velocidades necesitaba una mejora en la aerodinámica de los aviones, y las mejoras que introducían las alas en flecha hizo que se masificaran los aviones que las usaban. Los alemanes fueron los pioneros en este campo, los cuales fueron seguidos rápidamente por los estadounidenses. No obstante, la mayor parte de aviones utilizaban alas con flecha positiva las cuales también presentan ciertas desventajas, sobre todo en términos de control a bajas velocidades y por la incapacidad del flujo a reaccionar a altas velocidades.

Por todo esto se introdujo el concepto de flecha negativa, con el ala hacia delante, la cual mejoraba los problemas de control a bajas velocidades. Sin embargo, los problemas estructurales que tienen este tipo de alas es mucho mayor, y pueden llegar a ser muy inestables.

Vistas todas las ventajas y desventajas de los dos tipos de flecha, en 1958 Jones sugirió que un aeronave con alas de flecha asimétrica ofrecería muchas ventajas a altas velocidades transónicas, así como a bajas velocidades supersónicas. Sin embargo, el desconocimiento del comportamiento real, así como las grandes dificultades tecnológicas debidas a la inusual configuración hicieron que su uso se desestimara en aviones operacionales. En

las pasadas décadas, la necesidad de resolver estos problemas ha hecho que actualmente se genere un rápido desarrollo de prototipos de aviones de ala oblicua que se presentan como alternativas válidas a los diseños convencionales de aviones tanto civiles como militares.

Muchos de los desafíos técnicos de las alas oblicuas provienen de su aerodinámica no lineal y fuertemente acoplada. Por ejemplo, se producen fuertes variaciones en el momento de roll con cambios en el ángulo de ataque. Otros problemas apreciables son inusuales acoplamientos inerciales, así como complejas características aeroelásticas que complican la integración del sistema propulsivo. Estos retos son especialmente considerables para todas las configuraciones alares que carecen de la estabilidad y control otorgadas por las colas tradicionales. La estabilidad es un problema por las limitaciones que impone sobre la colocación de la carga de pago, la propulsión, y los sistemas de la aeronave para conseguir el centro de gravedad en la posición deseada. El control puede ser difícil de realizar debido a las variaciones de efectividad de éste con grandes cambios en el ángulo de flecha.

Los métodos computacionales actuales proporcionan una manera mucho más rápida de analizar las características de las fuerzas y momentos sobre el vehículo, la efectividad del control, así como otras características. La tecnología de los sistemas de control de vuelo modernos hace que sea mucho más factible el control de aeronaves inestables y fuertemente acopladas, por lo que se ha recuperado el interés en estudiar las posibles ventajas de las alas oblicuas. Sin embargo, mucha de la experiencia obtenida en los últimos 50 años en el desarrollo de las alas oblicuas no ha sido sustituida rápidamente por las nuevas herramientas de simulación, sino que conviven ambos métodos de desarrollo.

## 1.1. Conceptos Básicos y Motivación

El estudio profundo del concepto de ala oblicua empezó a realizarse por R.T.Jones en la década de 1940, principalmente porque representaba una solución simplificada para mínima resistencia en un flujo supersónico. Mientras Jones desarrollaba una teoría para estimar las características de las alas supersónicas, se vio que la mínima resistencia de onda inducida se alcanzaría cuando la distribución de la sustentación sobre el ala fuese elíptica tanto en la cuerda como en la totalidad su envergadura. Por tanto, esto motivó estudios más minuciosos de las alas oblicuas para vuelos supersónicos, ya que los diseños alares de la época el ángulo de flecha era simétrico en cada semi-envergadura, lo que provocaba que la distribución de sustentación no fuese continua a lo largo de toda la envergadura.



Otra clara ventaja de las alas oblicuas para vuelo supersónico es que éstas distribuyen la sustentación alrededor de dos veces más que un ala convencional de la misma longitud, con la misma flecha e idéntica cuerda, lo que se traduce en una reducción de 4 veces de la resistencia de onda inducida. Además, las alas oblicuas mantienen el efecto de la flecha en la sección central del ala, la cual puede llegar a ser crítica.

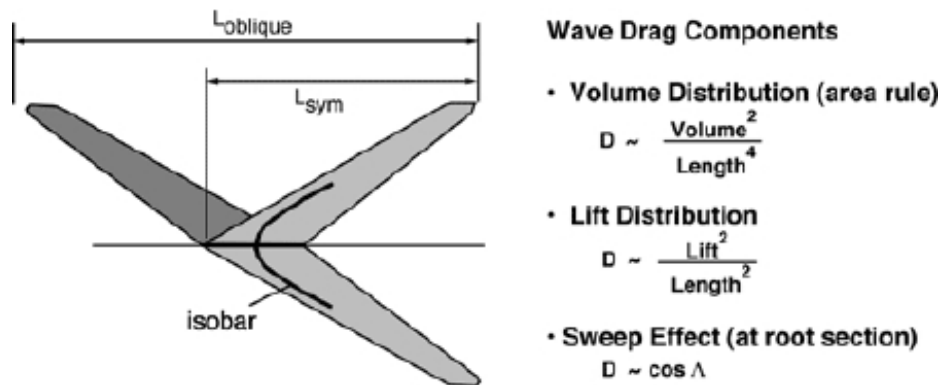


Figura 1.1: Características de la reducción de drag de un ala oblicua

Por tanto, a causa de todas estas mejoras aerodinámicas de las alas oblicuas, el interés inicial del concepto, las características estructurales y la posibilidad de diseños de geometría variable han hecho que las investigaciones sobre este tipo de alas hayan continuado hasta hoy en día.

La estructura recta de la geometría de las alas oblicuas evita pares que a veces se generan sobre el fuselaje, lo que hace que la fabricación de la estructura sea mucho más fácil. Si además se incorpora la flecha variable en el diseño del ala, tan solo hace falta un pivote central, lo que proporciona ventajas estructurales importantes en comparación con los dos pivotes que deben llevar aviones convencionales de flecha variable, los cuales deben soportar grandes cargas de flexión.

Probablemente la ventaja mas significativa de este tipo de alas para aviones de flecha variable fue introducida en un diseño realizado en la década de 1940 por Blohm y Voss, quienes usaron un ala oblicua de flecha variable para evitar el cambio del centro aerodinámico que se produce con los aviones convencionales de geometría variable.

Las buenas características de las alas oblicuas para los aviones de geometría variable permite a estos diseños maximizar la aerodinámica de la aeronave en un amplio rango de números de Mach sin los inconvenientes

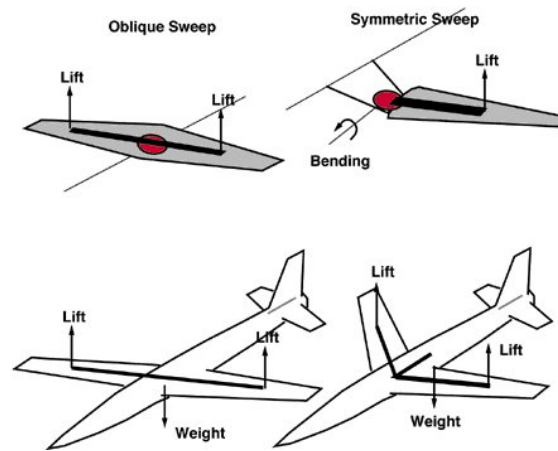


Figura 1.2: Ventajas Estructurales de un Ala Oblicua

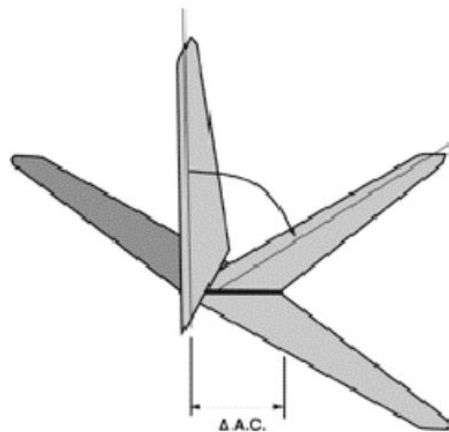


Figura 1.3: Variación casi nula del CA en un ala con flecha oblicua frente a la gran variación si ésta tuviese una flecha simétrica en ambas semialas.

asociados a los conceptos de aeronaves de geometría variable convencionales.

Otras características únicas de los diseños de alas oblicuas pueden hacer de este tipo de aviones los mejores para ciertas misiones. Por ejemplo a la hora de almacenarlos en un portaaviones, al poder reducir la envergadura en gran medida al posicionar el ala sobre el fuselaje.

Atendiendo a las características descritas, se puede ver que la configuración de ala oblicua es particularmente atractiva debido a que se pueden

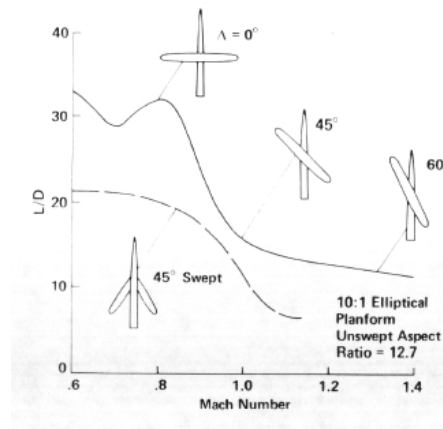


Figura 1.4: Variación de  $L/D$  con el Mach para un ala oblicua optimizada en comparación con ala simétrica fija

alcanzar grandes variaciones de flecha de un modo mucho más sencillo y ligero que en los aviones con geometrías convencionales. No obstante, se trata de una geometría muy poco utilizada hoy en día debido a los problemas que presenta, por lo que es interesante el estudio de esta problemática de modo que se pueda resolver, ya que el ala oblicua es una configuración que puede suponer un paso adelante en la mejora de la aerodinámica de las aeronaves comerciales. Por ello en este Trabajo se va a estudiar el efecto de la divergencia en este tipo de alas, y poder conocer sus limitaciones.

## 1.2. Breve Historia

El diseño de ala oblicua fue propuesto originalmente por Edmond de Marcay y Emile Moonen en 1912. La idea era variar la flecha de las alas oblicuas de modo que se pudiese aterrizar deslizándose lateralmente. Este concepto fue estudiado más profundamente por Richard Vogt en Alemania por el aumento de velocidad de la aeronave que se produce al aumentar la flecha. Poco después R.T.Jones en Laboratorio Aeronáutico de Langley se interesó en las alas oblicuas y se consagró como el mayor defensor de este concepto. Inició estudios en túnel de viento en la década de 1940 sobre este tipo de alas y cómo podrían ser integradas en aeronaves civiles de alta velocidad. Estos estudios se pueden dividir en dos temas principales. En primer lugar los correspondientes al montaje del ala oblicua sobre el fuselaje mediante un pivote, y en segundo lugar los que tratan el concepto del vuelo del ala oblicua.

Desde entonces han habido muchos estudios sobre diseños de aeronaves de ala oblicua para aplicaciones civiles y militares. Debido a las ventajas aerodinámicas a altas velocidades en este tipo de alas su uso se considera en muchos casos, sin embargo normalmente se rechaza debido a los problemas que surgen en la integración del ala con el fuselaje, así como a las dificultades surgidas en el control. A lo largo de la historia dos de los diseños desarrollados más importantes han sido el OWRA RPV y el AD-1.

El primero fue el OWRA RPV (NASA Dryden Oblique Wing Research Aircraft (Figura 1.5), el cual se construyó en el inicio de la década de 1970 para poder investigar las características aerodinámicas y de control de vuelo de un ala oblicua. Se trataba de un Vehículo Pilotado Remotamente (RPV) al que se le añadió una pequeña cola para compensar el movimiento del centro aerodinámico a medida que se movía el ala. También contaba con un fuselaje muy rudimentario. Su diseño constó de varias iteraciones realizadas en el túnel de viento y testeó en vuelo. Se probaron tres tipos de cola distinta hasta encontrar la adecuada. El primer vuelo de la aeronave se realizó en 1976 y duró 24 minutos. Durante los posteriores vuelos, se hicieron pruebas hasta un ángulo de flecha de  $45^\circ$ . El plan era eliminar la cola posteriormente para convertirlo en un ala volante, sin embargo se desestimó por falta de presupuesto. El OWRA RPV fue el primer ala oblicua con la que se consiguieron datos reales de vuelo de las derivadas de estabilidad y control de un ala oblicua.

Por otra parte, el segundo desarrollo se trató del AD-1 (Ames-Dryden, Figura 1.6). Fue diseñado por Burt Rutan y se trata del primer avión tripulado de ala oblicua, el cual hizo su primer vuelo en 1979. Se diseñó para evaluar las ventajas del concepto de un ala oblicua sobre un pivote. El proyecto se pretendía que fuese de bajo coste, con vuelos a bajas velocidades para demostrar las características de la flecha variable a estas velocidades de un ala oblicua. No obstante, se descubrió que las mayores ventajas de un ala oblicua con alta flecha se encuentran a velocidades transónicas y altas velocidades. Por tanto se rediseñó parte del proyecto para adaptar el avión a este tipo de velocidades. Para su construcción se hicieron minuciosos ensayos en túnel de viento, así como extensas simulaciones. El primer vuelo se realizó en 1980 a manos de Thomas McMurtry, donde las pruebas de vuelo se realizaron hasta una flecha de  $60^\circ$  sin una pérdida significativa del control. Sin embargo, a partir de  $45^\circ$  de flecha la dificultad para el pilotaje aumentó considerablemente debido a los problemas ocasionados por la asimetría de la aeronave como la aparición de una fuerza lateral en el ala delantera y una entrada en pérdida asimétrica. Se vio que el efecto de compresibilidad no afectaba en gran medida, ya que los efectos ocasionados por la asimetría eran mucho más influyentes. Posteriormente varios pilotos más volaron el avión constatando un fuerte acoplamiento entre el momento de cabeceo y



NASA Dryden Flight Research Center Photo Collection  
<http://www.dfrc.nasa.gov/Gallery/Photo/index.html>  
NASA Photo: E76-30764 Date: August 2, 1976 Photo By: NASA FRC  
Oblique Wing Research Aircraft on ramp

Figura 1.5: OWRA (Oblique Wing Research Aircraft)

giro, siendo más grave a partir de los  $45^\circ$  de flecha.



Dryden Flight Research Center ECN 15846 Photographed 1980  
AD-1

Figura 1.6: AD-1 (Ames-Dryden)

Una vez terminado el proyecto del AD-1 junto con todos los estudios realizados, se llegó a la conclusión que los aviones de ala oblicua tendrían un gran papel en el ámbito militar. Por todo esto, la NASA decidió invertir en la investigación de un avión de ala oblicua supersónico basado en el Vought F-8 Crusader. Por ello a finales de la década de los 70 se inició el estudio para la adaptación, con la intención de empezar con la construcción del modelo en 1984. Sin embargo, a pesar del esfuerzo realizado, el proyecto se canceló debido a las grandes dificultades ocasionadas por la modificación del aeronave. Por otra parte, la Marina estaba muy interesada en el proyecto, ya que tener aviones con este tipo de alas, reduciría el espacio que ocupan los mismos en un portaaviones. Por ello, se quedaron con el programa y empezaron a desarrollarlo por su cuenta. Rockwell realizó diversos estudios para la Marina con diseños que llegaban hasta 1.8M y ángulos de flecha de  $0^\circ$  a  $65^\circ$ . En 1988 se presentó el diseño preliminar sin embargo, el sobrecoste que se ocasionó, así como la cancelación de otros proyectos de la NASA hizo que se abandonara finalmente el proyecto.



Figura 1.7: Diseño de Rockwell para la marina estadounidense

En 1995, dos maquetas a pequeña escala de aeronaves de ala oblicua (3m y 6m de envergadura) fueron desarrolladas por Stephen Morris en la Universidad de Stanford. El diseño estaba basado en una propuesta de la NASA para un avión de transporte supersónico con capacidad para 400 pasajeros. El objetivo era investigar los problemas de control derivados por la flecha

asimétrica que hacen que el vuelo inestable sea inabarcable. La maqueta más pequeña, la cual era estable, se usó mediante radiocontrol para identificar los problemas que serían importantes para la maqueta más grande (*Figura ??*). Gracias a esto se vio que las aletas verticales afectaban negativamente al cabeceo por lo que se rediseñaron. Además esta aeronave usaba un sistema automático de control para permitir que cuando la aeronave fuese inestable pudiera seguir volando.



Figura 1.8: Morris OFW en vuelo

Una vez entrado ya el siglo XXI, la agencia de defensa estadounidense (*DARPA*) inició un programa de un aeronave de ala oblicua en el 2006. El proyecto se adjudicó a la empresa *Northrop Grumman*, la cual debía realizar un diseño preliminar y testeo de un aeronave de pruebas X-Plane de ala oblicua. El programa se llamó *DARPA OFW* y su objetivo era mejorar los problemas de diseño asociados al ala de flecha variable con vuelo supersónico referentes a la aerodinámica, la aeroelasticidad y el control del aeronave. El avión propuesto se muestra en la Figura 1.9, el cual se basaba en un ala volante pura donde la flecha del aeronave era oblicua, con un ala hacia atrás y otra hacia delante. La configuración se realizó para un alta velocidad, alto rango y larga duración. El programa se dividió en dos fases. La primera fase consistió en el desarrollo teórico y el diseño conceptual del aeronave, mientras que la fase dos resultó en el diseño, fabricación y testeo en vuelo del aeronave. Sin embargo, una vez se realizó la fase 1, el programa se canceló en el 2008 al inicio de la segunda fase.





Figura 1.9: Northrop Grumman Switchblade

### 1.2.1. Problemas en el Túnel de Viento

Realizar pruebas de medida de cualquier tipo de configuración alar presenta dificultades para sujetar el modelo en el túnel de viento y obtener buenas medidas de las fuerzas y momentos sobre éste. El concepto de ala oblicua agrava estos problemas debido a que tiende a crear grandes momentos desestabilizantes de giro y guiñada, y la falta de flujo simétrico suele causar interferencias en el soporte que no son habituales en otros tipos de configuración.

El programa de la NASA de principio de la década de 1990 realizó una aproximación para superar estas dificultades, a pesar de que los resultados no se publicaron.

## 1.3. Objetivos

Las estructuras modernas de los aviones no son completamente rígidas y el fenómeno aeroelástico suele ser un problema a tener en cuenta en la mayoría de casos. Siendo éste en muchas ocasiones un factor limitante en el rango de operación del aeronave. Por tanto, es necesario realizar un análisis aerolástico de este tipo de aviones, centrándose ese Trabajo en la aeroelasticidad estática, concretamente en la divergencia.

El objetivo principal de este trabajo, como se ha mencionado, es evaluar la divergencia en los aviones de ala oblicua, y los parámetros que limitan el desarrollo de los mismos, ya que se trata de aviones con grandes capacidades aerodinámicas que pueden mejorar las características de los diseños actuales.



Sin embargo, la aeroelasticidad limita su aplicación, ya que debido a su no simetría el comportamiento no es el mismo en ambas semi-alas. El comportamiento estructural se encuentra desacoplado para cada semi-envergadura, sin embargo el comportamiento aerodinámico no lo está, ya que el ala con flecha negativa influye en la aerodinámica del ala positiva. Esto hace que el problema aerodinámico sea más tedioso de resolver, y por tanto la divergencia en este tipo de configuración alar será distinta a las alas en flecha tradicionales con ambas hacia el mismo lado, ya que las fuerzas que intervienen en el sistema son distintas. Este problema se resolverá de dos modos distintos, analíticamente y numéricamente utilizando el *Vortex Lattice Method*. El método numérico se realizará mediante las ecuaciones energéticas de Lagrange. Esto permitirá la organización del problema de forma matricial, de modo que sea posible realizar un método estandarizado para este tipo de problemas.

## 1.4. Suposiciones

Tanto en el Capítulo 2 como en el Capítulo 3 se contrastarán los resultados mediante un ejemplo numérico detallado en el Anexo II. Estos ejemplos se realizarán con un aeroplano de ala oblicua con unas características basadas en el avión experimental AD-1 (Figura 1.6) de la NASA descrito anteriormente. En ambos casos se supone caso estacionario, así como una rigidez a flexión como torsión constante a lo largo de todo el ala. Posteriormente, en el Capítulo 4 se comparan los cálculos realizados con los dos métodos, para finalmente en el Capítulo 5 analizar los resultados obtenidos, de modo que se puedan obtener los puntos más relevantes del análisis de este tipo de alas, así como los problemas que se han encontrado y mencionar los posibles futuros estudios que se pueden llevar a cabo en este campo.

## 1.5. Divergencia Alas en Flecha

El aumento del uso de aviones con alas en flecha, ya sea positiva o negativa, ha incrementado en gran modo el interés en el comportamiento aeroelástico de este tipo de alas. Por ello, tal y como se ha indicado, en este trabajo se estudiará la divergencia de las mismas. Sin embargo, antes de iniciar el cálculo de la misma es importante tener una idea clara de qué es la divergencia y qué la produce, así como la respuesta que ocasiona la misma en las aeronaves que la sufren.

La divergencia de las alas es un fenómeno de inestabilidad estática que se produce por la interacción entre las fuerzas aerodinámicas y las fuerzas estructurales. Su efecto se traduce en la modificación del ángulo de ataque, el cual puede estabilizarse o divergir, en función de la velocidad. La velocidad

límite a la que se produce dicho efecto se llama velocidad de divergencia. Ésta puede conducir a fallos estructurales y está causada por el hecho de que las fuerzas aerodinámicas superan a las fuerzas elásticas de la estructura. Sometida a cargas aerodinámicas, la estructura de la aeronave se deforma de manera que las cargas aerodinámicas aumentan. Al llegar a la mencionada velocidad de divergencia de la aeronave respecto al viento, la deformación autoamplificada puede concluir en fallo estructural.

La descripción física para un ala en flecha se puede explicar mediante la Figura 1.10.

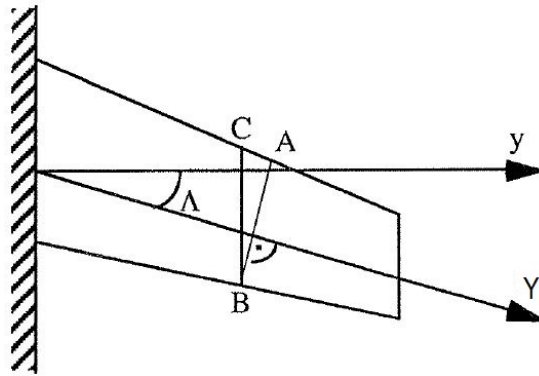


Figura 1.10: Ala en flecha

Cuando se aplica una fuerza normal en el eje elástico del ala los puntos A y B se mueven en la dirección normal aproximadamente la misma cantidad. Sin embargo, el punto C se desplaza una menor cantidad.

Si se considera el flujo en dirección CB, flecha positiva, el segmento BC disminuirá su ángulo de ataque y se producirá una disminución de la sustentación. Se puede ver que cuando un ala con flecha positiva flexa su ángulo de ataque respecto a la dirección del flujo disminuye. La sustentación negativa que se produce tiene un efecto estabilizante debido a la torsión del propio segmento BC.

Contrariamente, si se considera la dirección del flujo en BC, flecha negativa, el segmento BC aumentará su ángulo de ataque, ya que el desplazamiento vertical del punto B es mayor al del punto C.

A consecuencia de lo expuesto, la velocidad de divergencia aumenta para alas con flecha positiva pero disminuye para alas con flecha negativa. Además, para alas con flecha positiva el centro aerodinámico se desplaza hacia el fuselaje disminuyendo los esfuerzos a flexión en el encastre, sin

embargo, en alas con flecha negativa se produce lo contrario. El centro aerodinámico se desplaza hacia la punta de ala provocando mayores esfuerzos flectores en el encastre.

Por todo esto, la elección de la flecha en un aeronave es crucial según la misión de la misma. Sin embargo, en los aviones con ala oblicua que se tratan en este Trabajo, el interés es aún mayor, ya que mezcla ambos tipos de flecha en un mismo ala. Esto es muy importante, ya que el comportamiento de cada una de las semi-alas es muy distinto entre ellas. Esto hace que las limitaciones no siempre vengan determinadas por la misma semi-ala, y resulta un caso interesante de estudio ya que se puede ver el efecto de la flecha positiva y negativa en una misma aeronave. A lo largo de este Trabajo se va a buscar encontrar las diferencias entre estas y ver la limitación por divergencia de la aeronave determinando si la flecha positiva o negativa es la restrictiva en este tipo de aviones.

# 2

## Modelo Analítico

A veces, los análisis aeroelásticos de las alas, se basan en modelos de alas rígidas donde el soporte sí es flexible. Estos estudios pueden dar una buena aproximación de la estabilidad y respuesta aeroelástica del ala, sin embargo en los análisis prácticos se debe tener en cuenta la flexibilidad de todo el ala. En este caso, para la realización de todos los cálculos se ha tenido en consideración un ala flexible con un modelo estructural simplificado.

El estudio que se quiere realizar se basa en alas con flecha, tanto positiva como negativa, sin embargo se debe empezar con el análisis de un ala recta, ya que resulta más sencillo para después generalizar los resultados obtenidos a alas con flecha. Para ello se debe considerar una ala elástica uniforme sin flecha, la cual se modela como una viga (Figura 2.1). El eje de coordenadas a lo largo de la envergadura del ala, será el mismo que el de la viga, el cual se trata del eje  $x$  y de acuerdo a la costumbre en el campo de la aeroelasticidad. La viga se toma empotrada en la raíz ( $y=0$ ) y como borde libre en el extremo ( $y=l$ ), que corresponde con la punta de ala. Además, hay que destacar que el eje  $y$  corresponde con el eje elástico del ala, el cual se define como el eje transversal del ala por el que se concentra toda la capacidad elástica del material. En vigas isotrópicas se traduce en que cuando se aplica una fuerza transversal en cualquier punto de este eje se produce una flexión sin ningún tipo de torsión. Además este eje también corresponde con el eje de giro del ala cuando se le aplica únicamente un momento torsor puro. Destacar que cuando se calculen las fuerzas aerodinámicas sobre el ala, únicamente influirá la rotación del ala, ya que la flexión no variará la magnitud de estas fuerzas.

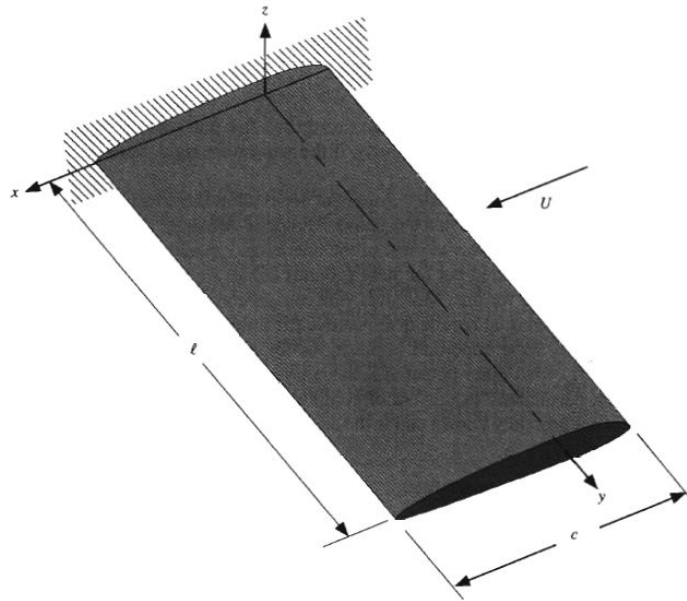


Figura 2.1: Esquema de un ala uniforme sin flecha

## 2.1. Consideraciones Iniciales

Para el desarrollo del trabajo, las consideraciones iniciales que se tienen son las siguientes:

- Estructura alar flexible
- Rigidez a Flexión  $EI$  constante
- Rigidez a Torsión  $GJ$  constante
- Caso estacionario, sin dependencias del tiempo

Una vez conocidas se puede pasar al desarrollo del modelo teórico.

## 2.2. Strip-Line Theory

Para los cálculos que se van a realizar, tal y como se ha mencionado anteriormente el ala se modelará como una viga isotrópica, por tanto el ángulo de ataque dependerá de la posición a lo largo de la envergadura por la posible variación de éste por la rotación del ala. Se debe calcular la distribución de la sustentación, así como el momento de cabeceo por unidad de envergadura a lo largo de una viga esbelta como el ala. Sin embargo, para este

cálculo se ignorarán los efectos tridimensionales que se producen con alas finitas, es decir, las cargas aerodinámicas en una sección no dependerán de las adyacentes. Esta simplificación se puede hacer debido a que el ala a estudiar se trata de una ala de gran envergadura con un elevado *aspect ratio* ”.

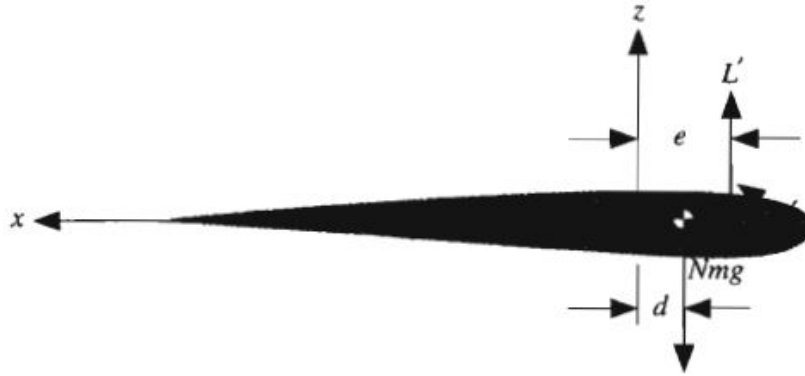


Figura 2.2: Sección transversal del ala

Por tanto si evaluamos una sección del ala con las fuerzas que actúan sobre ella, Figura 2.2, el momento total de torsión por unidad de longitud sobre el eje elástico viene dado por:

$$M' = M'_{ac} + eL' - Nmgd \quad (2.1)$$

donde el momento positivo va hacia arriba en el borde a ataque y  $L'$  y  $M'_{ac}$  son la sustentación y el momento de cabeceo distribuidos por unidad de longitud,  $mg$  es la distribución de peso por unidad de longitud y  $N$  es el factor de carga normal. Este factor de carga puede escribirse como:

$$N = \frac{L}{W} \quad (2.2)$$

siendo  $L$  la sustentación total y  $W$  el peso total del aeronave. Las cargas aerodinámicas distribuidas de la sustentación y el momento de cabeceo se pueden escribir como

$$L' = \frac{1}{2}\rho_{\infty}cU^2c_l \quad (2.3)$$

$$M'_{ac} = \frac{1}{2}\rho_{\infty}c^2U^2c_{mac} \quad (2.4)$$

pudiendo definir la presión dinámica como

$$q = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2 \quad (2.5)$$

Observando las definiciones se puede observar que tanto la sustentación como el momento de cabeceo distribuidos dependen del ángulo de ataque  $\alpha$  a través del coeficiente de sustentación  $c_l$  y el coeficiente de momento  $c_m$  respectivamente mediante la teoría aerodinámica, sin embargo normalmente se deberá integrar a lo largo de toda la superficie alar para poder evaluar estas variables.

Otro modo de calcular que puede resultar más sencillo se basa en dividir el ala en secciones con un grosor infinitesimal de modo que se pueda calcular la sustentación local, así como el momento de cabeceo mediante teorías bi-dimensionales. Esta teoría es la llamada "strip theory", la cual se va a utilizar para un primer cálculo tal y como se ha mencionado. Además, para valores pequeños del ángulo de ataque,  $\alpha$ , se puede usar un método más simple asumiendo que la curva de sustentación es constante a lo largo de toda la envergadura, así como el coeficiente de momento distribuido  $c_{m\ ac}(\alpha)$ , de modo que:

$$c_l(y) = a \alpha(y) \quad (2.6)$$

donde  $a$  es la pendiente de la curva de sustentación.

Al tratarse de alas elásticas, el ángulo de ataque dependerá de dos componentes, al contrario que las alas rígidas donde solo depende de un parámetro. En este caso  $\alpha$  vendrá definido por la contribución de una parte rígida,  $\alpha_r$ , asociada a un giro rígido del ala en su construcción (no se tiene en cuenta torsión geométrica), y una contribución del giro elástico,  $\theta(y)$ . Con esto el ángulo de ataque queda

$$\alpha(y) = \alpha_r + \theta(y) \quad (2.7)$$

donde hay que tener en cuenta la contribución del downwash al ángulo de ataque. Por tanto, aplicando esta definición de  $\alpha$  al coeficiente de sustentación se obtiene:

$$c_l(y) = a[\alpha_r + \theta(y)] \quad (2.8)$$

### 2.2.1. Ecuación de equilibrio

Tal y como se ha mencionado, en este caso se estudia el comportamiento estático del ala. Por esto se puede simplificar el comportamiento de la deformación por torsión del ala como

$$T = \overline{GJ} \frac{d\theta}{dy} \quad (2.9)$$

donde  $GJ$  es la rigidez a torsión del ala y  $T$  el momento Torsor sobre el eje elástico. Por tanto, la ecuación de equilibrio estático de momentos sobre el eje elástico viene dada por

$$\frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy} \left( \overline{GJ} \frac{d\theta}{dy} \right) = -M' \quad (2.10)$$

Por tanto, si se aplica el momento resultante obtenido en (2.1), y se aplica la hipótesis de  $\overline{GJ}$  constante se obtiene

$$\overline{GJ} \frac{d^2\theta}{dy^2} = -qc^2 c_{mac} - ceqc_l + Nmgd \quad (2.11)$$

Además ahora se tiene el coeficiente de sustentación en la ecuación, que se ha definido anteriormente, (2.8). Sustituyendo éste en (2.11) y reordenando se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{qace}{\overline{GJ}} \theta = -\frac{1}{\overline{GJ}} (qace\alpha_r + qc^2 c_{mac} - Nmgd) \quad (2.12)$$

Para poder resolver la ecuación hacen falta las condiciones de contorno de la misma. Tal y como se ha descrito anteriormente, el ala se encuentra empotrada en la raíz, mientras que la punta de ala se trata como un borde libre. Esto significa que en el encastrado se tendrá una deflexión nula, mientras que en la punta de ala el momento torsor será nulo. Por esto las condiciones de contorno que se deben aplicar para su resolución son:

$$\begin{aligned} \bullet y = 0 : \quad \theta &= 0 && \text{(deflexion nula)} \\ \bullet y = l : \quad \frac{d\theta}{dy} &= 0 && \text{(momento torsor nulo)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.2.2. Divergencia por torsión

Al conocer los parámetros del ala es posible resolver (2.12) con tal de obtener la distribución del momento torsor, así como de fuerza. Para simplificar la notación se define:



$$\lambda^2 = \frac{qace}{G\bar{J}}$$

$$\lambda^2 \bar{\alpha}_r = \frac{qc^2 c_{mac} - Nmgd}{G\bar{J}} \quad (2.14)$$

Y por tanto:

$$\bar{\alpha}_r = \frac{cc_{mac}}{ae} - \frac{Nmgd}{qace} \quad (2.15)$$

Se puede ver como tanto  $\lambda$  como  $\bar{\alpha}_r$  son independientes de  $y$ . Esto se debe a que el ala se ha tomado uniforme, con cuerda constante. Una vez se han realizado estas definiciones se puede escribir la ecuación de equilibrio aeroelástica de un modo más simplificado:

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \theta\lambda^2 = -\lambda^2 (\bar{\alpha}_r + \alpha_r) \quad (2.16)$$

Se puede ver que se trata de una ecuación diferencial ordinaria. Por lo tanto la solución vendrá dada por la expresión:

$$\theta = A \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y) - (\bar{\alpha}_r + \alpha_r) \quad (2.17)$$

Siempre y cuando  $\lambda$  sea distinta de 0. Al aplicar las condiciones de contorno (2.13) se obtiene el valor de las constantes, las cuales quedan definidas como:

$$\begin{aligned} \theta(0) = 0 : & \quad B = \bar{\alpha}_r + \alpha_r \\ \theta(l) = 0 : & \quad A = B \tan(\lambda l) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por tanto, la solución una vez conocidas éstas queda:

$$\theta = (\bar{\alpha}_r + \alpha_r) [\tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1] \quad (2.19)$$

Una vez se tiene el valor del giro se puede evaluar la distribución de sustentación por unidad de envergadura sustituyendo el valor del coeficiente de sustentación (2.8) en (2.3), con lo que se obtiene

$$L' = qca (\alpha_r + \theta) \quad (2.20)$$

Cabe destacar de la ecuación del giro elástico  $\theta(y)$  que tiene una singularidad cuando  $\lambda l$  se aproxima a  $\pi/2$ , ya que el giro  $\theta$  tiende a infinito. Este

fenómeno es conocido como "*divergencia de torsión*" y depende del valor de  $\lambda$ .

$$\lambda = \sqrt{\frac{qcae}{GJ}} \quad (2.21)$$

Como se puede ver en la definición de  $\lambda$  todos los valores son constantes a excepción de la presión dinámica  $q$ . Por tanto, la divergencia torsional dependerá del valor de éste valor. Al valor de  $q$  donde  $\lambda l$  es igual a  $\pi/2$  se le denomina "*presión dinámica de divergencia*",  $q_D$ . En este valor el ángulo de giro tiende teóricamente al infinito. Por tanto resolviendo el sistema se obtiene que el valor de  $\lambda$  para que ocurra la divergencia es:

$$\lambda_D = \frac{\pi}{2l} \quad (2.22)$$

Por tanto, si se sustituye este valor en la definición de  $\lambda$ , (2.21), y se halla el valor de la presión dinámica de divergencia, se obtiene:

$$q_D = \frac{GJ}{eca} \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \quad (2.23)$$

Una vez hecho esto, se puede averiguar el valor de  $\lambda$  en función del valor de la presión dinámica, así como de las características de divergencia del ala. Para ello se tiene que resolver  $\lambda/\lambda_D$ , con lo cual se obtiene:

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} \sqrt{\bar{q}} \quad (2.24)$$

donde

$$\bar{q} = \frac{q}{q_D} \quad (2.25)$$

Con todo esto, ahora es posible conocer el giro  $\theta$  en la punta de ala en función de  $\bar{q}$ :

$$\theta(l) = (\bar{\alpha}_r + \alpha_r) \left( \frac{1}{\cos(\lambda l)} - 1 \right) = (\bar{\alpha}_r + \alpha_r) \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi\sqrt{\bar{q}}}{2}\right)} - 1 \right) \quad (2.26)$$

Además, se puede expresar (2.15) como

$$\bar{\alpha}_r = \frac{cc_{acm}}{ae} - \frac{4l^2 Nmgd}{GJ\pi^2\bar{q}} \quad (2.27)$$

Atendiendo a la definición de  $\bar{\alpha}_r$ , este ángulo depende de  $\bar{q}$ , sin embargo si  $d$  (distancia entre el eje elástico y el cdg) tiende a cero, éste ángulo ya no dependerá de  $\bar{q}$ . Por tanto se podrá evaluar el giro  $\theta$  en punta de ala en función de  $\bar{q}$ . Esta dependencia esta representada en la Figura 2.3 donde se puede ver que el ángulo de giro en la punta del ala tiende a infinito a medida que  $\bar{q}$  se aproxima a 1. Es decir, que la presión dinámica a la que esta sometida el ala, se aproxima a la presión dinámica de divergencia. Esto es muy importante conocerlo a la hora de realizar vuelos con un ala debido a que el ángulo de giro de la punta de ala según las condiciones de vuelo debe conocerse, ya que si sobrepasa ciertos límites se podría dañar la integridad estructural de la aeronave. Por tanto, nunca se debe llegar a la presión dinámica de divergencia de una aeronave. Esto se realiza mediante las envolventes de vuelo de una aeronave, las cuales limitan la actuación de ésta a condiciones donde se conoce que nunca se llegará a  $q_D$  con seguridad.

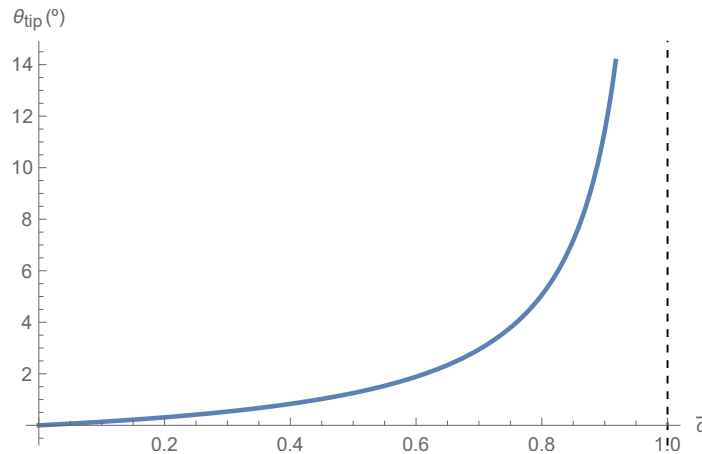


Figura 2.3:  $\theta_{TIP}$  en función de  $\bar{q}$  con  $\alpha_r + \bar{\alpha}_r = 1, 5^\circ$

No obstante, este caso tan solo ocurre en aviones con ala recta, ya que cuando aparece una flecha en las alas se produce un acoplamiento entre la torsión y la flexión y la divergencia no solo viene causada por la torsión, sino que la flexión también influye en su aparición. Por lo que para poder empezar a realizar un análisis de la divergencia es interesante este caso, pero cuando se trata de geometrías más complejas se deben analizar otros factores como se va a hacer en las siguientes secciones.

### 2.2.3. Distribución de sustentación

Atendiendo a la definición del coeficiente de sustentación (2.8), si se sustituye en la expresión de la sustentación por unidad de envergadura, esta última queda

$$L' = qca (\alpha_r + \theta) \quad (2.28)$$

donde hay que recordar que  $\theta$  viene definida en (2.19) como

$$\theta = (\bar{\alpha}_r + \alpha_r) [\tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1] \quad (2.29)$$

y  $\bar{\alpha}_r$  esta definido en (2.15) del siguiente modo

$$\bar{\alpha}_r = \frac{cc_{mac}}{ae} - \frac{Nmgd}{qace} \quad (2.30)$$

En el caso que el factor de carga  $N$  fuera igual a la unidad y el ángulo  $\alpha_r$  se pudiera definir, el cálculo de la sustentación sería bastante sencillo. Sin embargo, un ala representa tan solo la mitad de la superficie sustentadora de un aeroplano, por lo que el cálculo se complica. La constante  $\bar{\alpha}_r$  depende de  $N$ . Esto quiere decir que para un valor dado de  $\alpha_r$ , existe una distribución del ángulo de giro  $\theta$  y una distribución de sustentación particular. Esta distribución de sustentación se puede integrar a lo largo de todo el ala para obtener la sustentación total. No obstante, el factor de carga es función del ángulo de ataque rígido  $\alpha_r$ , a través del ángulo de giro elástico  $\theta$ . Por este motivo una de las dos variables  $\alpha_r$  o  $N$  se debe especificar para poder resolver el sistema, mientras que la otra se puede averiguar a partir de la sustentación total  $L$ , la cual viene definida por la expresión

$$L = 2 \int_0^l L' dy \quad (2.31)$$

Si se sustituye  $L'$  por su definición (2.20) y la de sus variables, se tiene

$$\begin{aligned} L &= 2qac \int_0^l ((\bar{\alpha}_r + \alpha_r) [\tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1] + \alpha_r) dy \\ &= 2qcal \left( (\alpha_r + \bar{\alpha}_r) \frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} - \bar{\alpha}_r \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

El factor de carga viene definido por  $N = L/W$ , por tanto esta expresión se puede dividir en términos de  $\alpha_r$  y  $\bar{\alpha}_r$ . Si se utiliza la definición de  $\bar{\alpha}_r$  (2.30), se queda una función que depende de  $N$  y de  $\alpha_r$ . Por tanto se puede expresar  $N$  en función de  $\alpha_r$  o en su defecto  $\alpha_r$  en función de  $N$  según se prefiera. Estas dos relaciones son las que siguen

$$N(\alpha_r) = \frac{2\bar{G}\bar{J}(\lambda l)^2 \left( a\alpha_r e + cc_m \left( 1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right) \right)}{ael \left( 2mgld \left( 1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right) + \frac{We\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right)} \quad (2.33)$$

$$\alpha_r(N) = \frac{NWle}{2GJ\lambda \tan(\lambda l)} + \left(1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)}\right) \left(\frac{Nmgl^2 d}{GJ(\lambda l)^2} - \frac{cc_m}{ae}\right) \quad (2.34)$$

Estas relaciones permiten fijar un valor de  $\alpha_r$  para encontrar el valor de  $N(q)$  o de forma inversa fijar un valor del factor de carga,  $N$ , y hallar el  $\alpha_r(q)$  correspondiente. Observando las ecuaciones, se puede ver que cuando  $q = 0$ , el factor de carga  $N(q)$  es nulo. Sin embargo,  $\alpha_r(q)$  empieza en el infinito para  $q = 0$ . Por otra parte, los valores límites de  $q$ , como la presión dinámica de divergencia  $q_D$  dependen de otros parámetros. Con estas ecuaciones es posible obtener la deformación torsional y la distribución de sustentación resultante para unas condiciones de vuelo determinadas pero no sirven para evaluar la presión dinámica de divergencia de la estructura.

El cálculo de la distribución de sustentación aerolástica en función de la envergadura es muy práctico y en la industria se suele realizar de dos modos distintos. El primero se realiza para satisfacer las necesidades aerodinámicas que hacen falta para conocer la fuerza y el momento total que se generan en el aeronave según la altitud y las condiciones del vuelo. En este caso, la presión dinámica  $q$  y el ángulo de ataque rígido  $\alpha_r$  son datos conocidos, y el factor de carga o la sustentación total se calculan usando (2.33). El segundo se basa en asegurar la integridad estructural de la superficie sustentadora para un determinado factor de carga  $N$  y unas condiciones de vuelo dadas. Cuando se sabe el factor de carga y las condiciones de vuelo, es necesario conocer la distribución de la sustentación para poder realizar un análisis de las cargas y en su defecto un análisis de la fatiga. Cuando  $q$  y  $N$  son parámetros definidos previamente, mediante (2.34) se obtiene  $\alpha_r$ . Una vez conocidos estos tres parámetros se puede averiguar  $\bar{\alpha}_r$  con (2.30). Por tanto ahora se puede hallar la deformación por torsión  $\theta$  a partir de (2.29) y la distribución de sustentación por unidad de envergadura con (2.28). A partir de estos nuevos parámetros conocidos se pueden calcular las distribuciones de momentos torsores y flectores sobre el ala, de modo que se sepa el punto de máxima fatiga en el ala, el cual normalmente se encuentra cerca del encastre.

Es importante conocer que el efecto de la flexibilidad por torsión de una ala recta puede variar en gran medida la distribución de sustentación a lo largo de ésta. Este efecto se puede ver en la parte elástica del coeficiente de sustentación, la cual es proporcional al giro por torsión  $\theta(y)$ . Además, este giro suele ser más grande a medida que se acerca a la punta del ala y se aleja de la raíz, por lo que afecta de forma considerable a la distribución de sustentación del mismo modo. El efecto total depende de si se ha determinado  $\alpha_r$  o el factor de carga  $N$ . Si se especifica  $\alpha_r$  la sustentación total

aumenta gracias al aumento del factor de carga en el extremo del ala. Por otra parte, si el valor prefijado es el factor de carga  $N$ , la sustentación total (área debajo de la curva de  $L'$ ) se mantiene constante. Por tanto el aumento de sustentación en punta de ala se verá contrarrestado por un decremento de sustentación cerca de la raíz. Esto se debe a una disminución de  $\alpha_r$  a medida que la estructura es más flexible.

Destacar que todas las ecuaciones utilizadas para calcular la divergencia por torsión, así como la distribución de sustentación están basadas en la Strip-Theory. Una pequeña mejora numérica se podría realizar si la pendiente de la curva de sustentación,  $a$ , en dos dimensiones que se ha utilizado se reemplaza por la pendiente de la curva en tres dimensiones. Sin embargo, si se modifica la teoría usando coeficientes tridimensionales los resultados que se obtienen son numéricos y no se podría llegar a soluciones analíticas, mediante las cuales se pueden ver las dependencias y efectos de las variables de una forma mucho más clara.

#### 2.2.4. Efecto de la flecha

El estudio que se intenta llevar a cabo trata sobre las alas oblicuas, las cuales tienen una semi-ala con flecha positiva, y la otra semi-ala con flecha negativa. Sin embargo la Strip-Theory desarrollada se ha hecho para alas rectas. Esto se debe a que es más sencillo desarrollarla para este tipo de alas, y ahora, una vez realizado el desarrollo se puede generalizar para las alas en flecha que son la que interesan para las conclusiones a las que se intentan llegar. Por tanto, ahora se va a incluir el efecto de la flecha de modo que influya en los resultados obtenidos.

Para evaluar esta nueva geometría alar se presupone que el giro se obtiene rotando el ala desde la raíz del eje elástico en el encastre, (Figura 2.4). Las reacciones aerodinámicas dependen del ángulo de ataque medido en la dirección del flujo libre, por tanto queda

$$\alpha = \alpha_{el} + \alpha_r \quad (2.35)$$

donde  $\alpha_{el}$  es la variación del ángulo de ataque en la dirección del flujo causada por la deformación elástica. Para poder tener una relación cinemática entre el flujo libre y el ala en flecha se deben rotar los ejes de referencia. Inicialmente los ejes llevan la dirección paralela y perpendicular al flujo libre, y rotan el ángulo de la flecha  $\Lambda$  para situarse sobre el eje elástico del ala. Por tanto la matriz de rotación queda

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\Lambda) & \sin(\Lambda) \\ -\sin(\Lambda) & \cos(\Lambda) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

y la relación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} = \text{Rz.} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

donde una vez operado los vectores quedan

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= \hat{a}_2 \sin(\Lambda) + \hat{a}_1 \cos(\Lambda) \\ \hat{b}_2 &= \hat{a}_2 \cos(\Lambda) - \hat{a}_1 \sin(\Lambda) \end{aligned} \quad (2.38)$$

siendo los vectores  $\hat{a}_1$  y  $\hat{a}_2$  los vectores unitarios alineados con el eje  $y$  y el flujo libre respectivamente, y los vectores  $\hat{b}_1$  y  $\hat{b}_2$  los vectores obtenidos al girar los anteriores que se encuentra en el eje elástico del ala y perpendicular a éste respectivamente. La 2.4 muestra un gráfica de como quedan los distintos sistemas de referencia

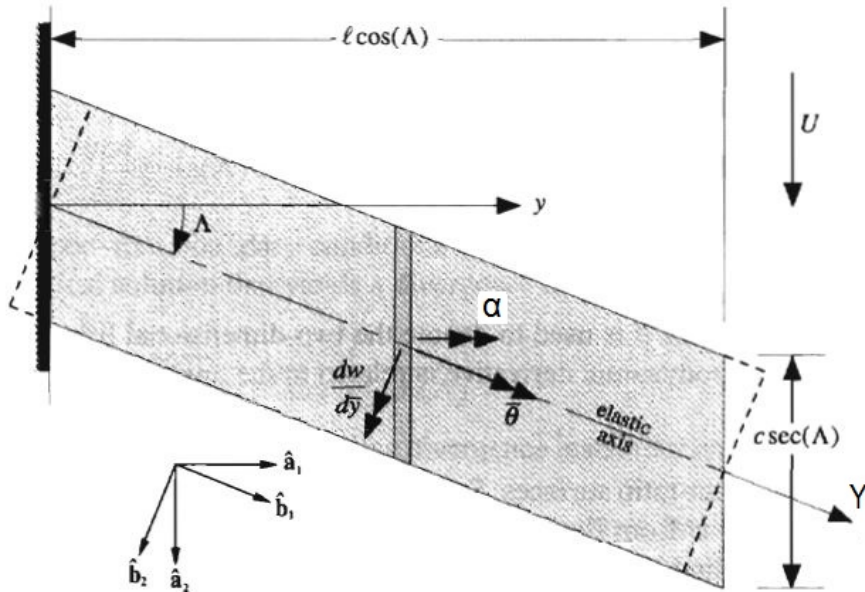


Figura 2.4: Efecto de la flecha

Atendiendo al giro, se puede ver que la rotación local (rotación sobre los ejes del ala) de cualquier sección del ala causada por la deformación elástica se puede escribir como la combinación de dos rotaciones. La primera rotación viene causada por la torsión,  $\theta$ , sobre  $\hat{b}_1$ , y la flexión alar,  $dw/d\bar{y}$  sobre  $\hat{b}_2$ , siendo  $w$  la deflexión a causa de la flexión (positivo hacia arriba). Por tanto la rotación total  $\alpha$  sobre los ejes iniciales es la componente de la rotación local sobre el vector  $\hat{a}_1$ , que se define como

$$\alpha_{el} = \hat{a}_1 \left( \hat{b}_2 \frac{dw}{d\bar{y}} + \hat{b}_1 \theta \right) = \theta \cos(\Lambda) - \frac{dw}{d\bar{y}} \sin(\Lambda) \quad (2.39)$$

De esta relación se puede ver que cuando un ala tiene flecha, el ángulo efectivo de ataque varía a causa de la flexión. Esto provoca acoplamiento entre la flexión y la torsión en el ala provocando una variación en la respuesta estática del ala en vuelo, así como las condiciones en las cuales se produce la divergencia. Además, se puede ver que al combinar la flexión y la torsión por la flecha, la sección del perfil en la dirección del flujo libre obtiene un aumento de cuerda. Pero en este caso esta variación de cuerda no se tiene en consideración. La notación es la misma que la utilizada en el caso del ala recta, ya que de este modo es mucho más sencillo comparar los resultados para ambos casos. En este caso de ala con flecha hacen falta dos ecuaciones de equilibrio a diferencia del caso anterior. Esto se debe a que la flexión provoca una variación en el ángulo de ataque efectivo que antes no se producía por lo que hay que tenerlo en consideración. La primera se trata del equilibrio del momento torsor al igual que en el caso de ala recta, mientras que la segunda ecuación se trata del equilibrio de fuerzas asociada a la flexión. Las ecuaciones son las que siguen

$$\frac{d}{dY} \left( \overline{GJ} \frac{d\theta}{dY} \right) = -qec\bar{a}\alpha - qc^2\bar{c}_{mac} + Nmgd \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2}{dY^2} \left( \overline{EI} \frac{d^2w}{dY^2} \right) = qc\bar{a}\alpha - Nmg \quad (2.41)$$

Los términos  $\bar{a}$  y  $\bar{c}_{mac}$  representan la pendiente de la curva bidimensional de sustentación del ala en flecha y el coeficiente de cabeceo bidimensional respectivamente. La relación que tienen estas variables aerodinámicas con sus respectivas en alas rectas son

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a \cos(\Lambda) \\ \bar{c}_{mac} &= \cos^2(\Lambda)c_{mac} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Por tanto si ahora se sustituye en (2.40) y (2.41) los valores de  $\bar{a}$  (2.42),  $\alpha$  (2.35) y  $\alpha_{el}$  (2.39) en función de  $\theta$  y  $w$ ; y se toman las rigideces a torsión y flexión,  $\overline{GJ}$  y  $\overline{EI}$  respectivamente, como constantes se obtiene un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para la torsión y la flexión.



$$\begin{aligned}
& \theta'' + \theta \cos(\Lambda) \frac{qeca}{GJ} - \frac{qeca}{GJ} w' \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) \\
&= -\frac{1}{GJ} (qeca \cos \alpha_r(\Lambda) + qc^2 c_{mac} \cos^2(\Lambda) - Nmdg) \\
& \\
& w'''' + \frac{qca}{EI} w' \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) - \frac{\theta \cos^2(\Lambda) acq}{EI} \\
&= \frac{1}{EI} (qac\alpha_r \cos(\Lambda) - Nmg)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Para poder resolver el sistema se han de imponer unas condiciones de contorno, las cuales son las mismas que para el caso de ala recta, ya que se sigue considerando que el ala esta empotrada en el encastre y libre en la punta de ala.

$$\begin{aligned}
Y = 0 : \quad \theta &= 0 && \text{giro nulo} \\
& w &= 0 && \text{deflexion nula} \\
& w' &= 0 && \text{pendiente deflexino nula} \\
Y = l : \quad \theta' &= 0 && \text{momento torsor nulo} \\
& w'' &= 0 && \text{momento flector nulo} \\
& w''' &= 0 && \text{fuerza cortante nula}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Una vez conocidas las condiciones de contorno se puede pasar a evaluar la solución del sistema de modo que se obtenga la presión dinámica de divergencia del problema.

### 2.2.5. Cálculo de la divergencia

Antes de intentar resolver de manera exacta las ecuaciones obtenidas mediante *Strip Theory*, hay que destacar dos casos de especial interés en los cuales el acoplamiento entre la flexión y la torsión desaparece o se hace despreciable de modo que se pueden resolver las ecuaciones de un modo analítico. El primer caso se trata de la eliminación de la flecha. En este caso la solución sería la misma que en caso de ala recta estudiado anteriormente, donde a partir de la solución del giro  $\alpha_{el} = \theta$  se puede sustituir en la ecuación de la flexión e integrando con las condiciones de contorno obtener la fuerza cortante, el momento flector, la pendiente de la deflexión, así como la deflexión por flexión.

El segundo caso ocurre cuando  $e = 0$ , es decir, el centro aerodinámico del ala coincide con el eje elástico de la misma. En este caso la divergencia por torsión no tiene lugar y se puede hallar una solución polinómica para  $\theta$  con

las condiciones de contorno. Por tanto si se sustituye la solución obtenida en la ecuación de flexión (2.43) se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden para  $w$  con un función de fuerza polinómica. Esta nueva ecuación se puede resolver, sin embargo, la solución no es tan sencilla como en el caso anterior. Para resolver esta ecuación y averiguar la condición de divergencia de la estructura, tal y como se ha visto en la solución de ala recta, tan solo hace falta la parte homogénea de la ecuación, la cual se puede escribir de tercer orden sustituyendo  $\zeta = w'$ , y queda

$$\zeta''' + \frac{qca}{EI} \zeta \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) = 0 \quad (2.45)$$

Para el caso que se esta estudiando con el ala empotrada - libre con las condiciones de contorno  $\zeta(0) = \zeta'(l) = \zeta''(l) = 0$ , esta ecuación tiene una solución analítica con la que se obtiene una presión dinámica de divergencia

$$q_D = -6,3297 \frac{\overline{EI}}{acl^3 \sin(\Lambda) \cos(\Lambda)} \quad (2.46)$$

El signo menos indica que la divergencia por flexión tan solo se produce para alas con flecha negativa, ya que para este tipo de flecha el producto de coseno y seno es negativo y el signo de la presión dinámica será positivo, dando a resultados posibles en la práctica, mientras que para flechas positivas el signo de la presión dinámica será negativo y esto no tiene sentido físico, por lo que no se produce la divergencia por flexión en este caso. Esto se puede comprobar en la Figura 2.5 donde se grafica la presión dinámica de divergencia normalizada con la misma con una flecha nula obtenida en (2.23). Aquí tan solo se observa una asíntota en la parte positiva de  $q$  para valores de flecha negativos.

Esto es muy importante tenerlo en cuenta cuando se realizan aeronaves de ala oblicua, ya que el comportamiento frente a la divergencia será muy distinto en cada semi-ala. Mientras que para el ala con flecha postiva se puede llegar a evitar este efecto haciendo coincidir el eje elástico con el centro aerodinámico del ala, en el ala con flecha negativa se podrá evitar del mismo modo la divergencia por torsión, pero la divergencia por flexión no se podrá evitar, por lo que las condiciones de vuelo vendrán restringidas por este fenómeno. La ventaja es que se elimina la divergencia por torsión y la de flexión en una semi-ala, sin embargo habrá que seguir considerando una presión dinámica crítica por la semi-ala con flecha negativa. No obstante, las simplificaciones realizadas en este caso son muy grandes, y casi nunca ocurren en la realidad. Por ello también existe una solución analítica exacta para 2.43 la cual se va a desarrollar.

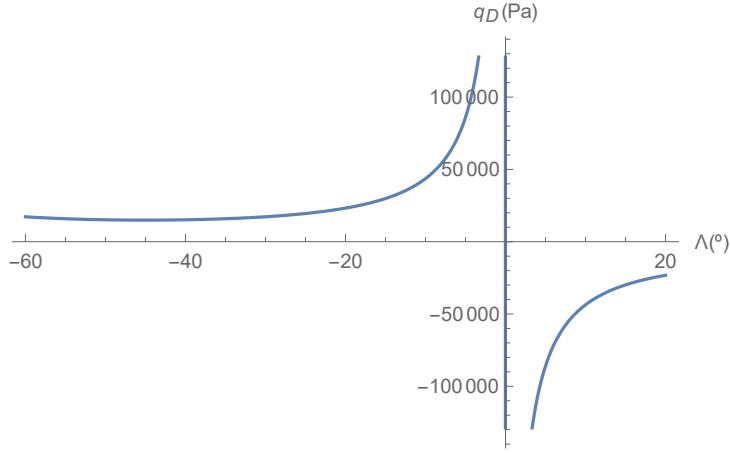


Figura 2.5: Presión dinámica de divergencia en función de  $\Lambda$  con  $e = 0$

### Solución exacta

La solución exacta no es sencilla de obtener. Para facilitar su cálculo se convierte primero el sistema de ecuaciones acopladas formado por las ecuaciones (2.43) en una única ecuación gobernada por el componente elástico del ángulo de ataque. Al estar tratando de encontrar la presión dinámica de divergencia tan solo es necesario coger la parte homogénea de las ecuaciones, con lo que el sistema queda del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \theta'' + \frac{qeca}{GJ} \theta \cos^2(\Lambda) - \frac{qeca}{GJ} w' \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) &= 0 \\ w'''' + \frac{qca}{EI} w' \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) - \frac{qca}{EI} \theta \cos^2(\Lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para poder obtener una única ecuación se deriva la primera ecuación respecto a  $Y$  y se multiplica por  $\cos(\Lambda)$ . Una vez hecho esto se le resta la segunda ecuación multiplicada por  $\sin(\Lambda)$  con lo que queda

$$\begin{aligned} (\theta''' \cos(\Lambda) - w'''' \sin(\Lambda)) \frac{qeca}{GJ} \cos^2(\Lambda) (\theta' \cos(\Lambda) - w'' \sin(\Lambda)) \\ + \frac{qca}{EI} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) (\theta \cos(\Lambda) - w' \sin(\Lambda)) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Si se sustituye la definición de  $\alpha_{el}$  (2.39) y se introduce la coordenada adimensional  $\eta = Y/l$  la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\alpha_{el}''' + \frac{qecal^2}{GJ} \cos^2(\Lambda) \alpha_{el}' + \frac{qcal^3}{EI} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) \alpha_{el} = 0 \quad (2.49)$$

En este caso las condiciones de contorno vienen definidas como sigue a continuación

$$\begin{aligned} \alpha_{el}(0) &= 0 \\ \alpha'_{el}(1) &= 0 \\ \alpha''_{el}(1) + \frac{qecal^2}{GJ} \cos^2(\Lambda) \alpha_{el}(1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Una vez se tiene esta única ecuación es necesario realizar simplificaciones para poder hallar la solución mediante operaciones matemáticas conocidas. Para ello se definen las variables  $\tau$  y  $\beta$  del modo

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{qecal^2}{GJ} \cos^2(\Lambda) \\ \beta &= \frac{qcal^3}{EI} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Con esto (2.49) queda como

$$\alpha'''_{el} + \tau \alpha'_{el} + \beta \alpha_{el} \quad (2.52)$$

La solución general a esta ecuación es

$$\alpha_{el} = \sum_{i=1}^3 A_i e^{r_i \eta} \quad (2.53)$$

donde los términos  $A_i$  son constantes arbitrarias y los términos  $r_i$  hacen referencia a las raíces de la ecuación característica  $r^3 + \tau r + \beta = 0$ . Para poder calcular las constante  $A_i$  hacen falta condiciones de contorno, las cuales son las definidas en (2.50). Si se sustituyen estas condiciones de contorno en la solución (2.53) se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 A_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 r_i A_i e^{r_i} &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 (r_i^2 + a) A_i e^{r_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Por tanto, las condiciones para la divergencia es que haya una solución no nula de las constantes  $A_i$ . Para hallarla se debe realizar el determinante de los coeficientes que acompañan a las constantes e igualarlo a cero. De modo que se puedan hallar los valores de  $\tau$  y  $\beta$  críticos que causen la divergencia en la aeronave.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 e^{r_1} & r_2 e^{r_2} & r_3 e^{r_3} \\ (r_1^2 + \tau) e^{r_1} & (r_2^2 + \tau) e^{r_2} & (r_3^2 + \tau) e^{r_3} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.55)$$

Sin embargo, el cálculo de estos valores de una manera exacta resulta bastante complejo por lo que hay varios métodos para calcularlos de un modo aproximado. La solución exacta consta de varias ramas, donde la más importante, e interesante para poder realizar un estudio de la divergencia, tiene un comportamiento bastante sencillo demostrado por Diederich y Budiansky (1948) que se puede aproximar a una recta

$$\tau_D = \frac{\pi^2}{4} + \frac{3\pi^2}{76}\beta_D \quad (2.56)$$

Con esta ecuación se puede obtener la relación entre los valores de  $\tau$  y  $\beta$  críticos para la divergencia. Cabe destacar los dos casos particulares con  $\beta_D$  y  $\tau_D$ . En el primer caso  $\beta_D = 0$  se trata de un ala rígida a flexión, donde  $\tau_D = \frac{\pi^2}{4}$  es la solución para la divergencia por torsión pura. En el segundo caso  $\tau_D = 0$  se trata de un ala rígida a torsión, donde  $\beta_D = -19/3$  es una solución muy cercana a la exacta vista en (2.46). Para los casos en los que la divergencia sea debida a un conjunto de ambos casos, el error obtenido con esta aproximación se puede considerar despreciable. Cabe destacar que el signo de  $\tau$  vendrá dado por el signo de  $e$ , y que el signo de  $\beta$  vendrá dado por el signo de  $\Lambda$ . La solución aproximada (2.56) se representa junto con la solución exacta en la Figura 2.6. Como se puede apreciar, la aproximación y la solución exacta coinciden con muy poco error cerca del origen, por lo que la solución aproximada es válida para realizar cálculos.

Otro modo de representar el comportamiento de la divergencia dinámica es representar  $\tau_D$  frente a un parámetro adimensional que se define como

$$r \equiv \frac{\beta}{\eta} = \frac{l \overline{GJ}}{e \overline{EI}} \tan(\Lambda) \quad (2.57)$$

Por tanto, si se aplica esta definición a (2.56) se llega a

$$\tau_D = \frac{\pi^2}{4 \left(1 - \frac{3\pi^2 r}{76}\right)} \quad (2.58)$$

Por tanto, si se sustituye esta ecuación en las definiciones hechas en (2.51) se obtiene una definición de la presión dinámica de divergencia en función de parámetros constructivos de la aeronave, así como de la flecha de la misma.

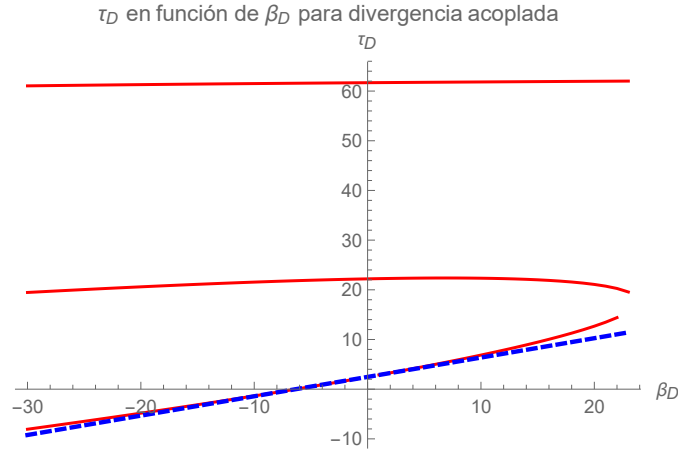


Figura 2.6:  $\tau_D$  frente a  $\beta_D$  para divergencia acoplada; Línea continua (solución exacta) y línea discontinua (solución aproximada)

$$q_D = \frac{\overline{GJ}\pi^2}{4ecal^2 \cos^2(\Lambda) \left(1 - \frac{3\pi^2 l}{76} \frac{\overline{GJ}}{e EI}\right)} \quad (2.59)$$

Aunque hay significativas diferencias entre la solución exacta y la aproximada tal y como se puede apreciar (Figura 2.6), en el rango de interés para la divergencia la aproximación lineal de las condiciones para la misma en función de  $\tau_D$  y  $\beta_D$  es muy acertada. Por esto, es posible obtener una expresión de la presión dinámica de divergencia en función de la rigidez estructural, de  $e/l$  y del ángulo de flecha ( $\Lambda$ ). De modo que sea más sencilla la comparación de la divergencia con distintas configuraciones de la aeronave se normaliza  $q_D$  con el valor que tiene la misma para un ángulo de flecha nulo

$$q_{D0} = \frac{\pi^2 \overline{GJ}}{4ecal^2} \quad (2.60)$$

Por tanto

$$\frac{q_D}{q_{D0}} = \frac{1 + \tan^2(\Lambda)}{1 - \frac{3\pi^2 l}{76} \frac{\overline{GJ}}{e EI} \tan(\Lambda)} \quad (2.61)$$

Si se toman valores positivos de  $e$ , es decir, que el centro aerodinámico se encuentra siempre por delante del eje elástico, la única variable que podrá ocasionar variaciones en la presión dinámica de divergencia será la flecha ( $\lambda$ ). Hay valores de  $\Lambda$  en los que la divergencia tenderá al infinito o pasará a ser negativa, por lo que en estos valores de flecha no ocurrirá este fenómeno.

Si se toma en consideración el rango principal comprendido entre  $-90^\circ \leq \Lambda \leq 90^\circ$  se puede ver como la divergencia ocurrirá cuando el módulo de  $\Lambda$  sea distinto de 0 y  $3\pi^2 r \neq 76$ . Por tanto la divergencia tendrá lugar cuando  $-90^\circ < \Lambda < \Lambda_\infty$ , donde  $\Lambda_\infty$  se trata del valor límite a partir del cual se produce la divergencia y viene definido por

$$\tan(\Lambda_\infty) = \frac{76\overline{EI}e}{3\pi^2 GJl} \quad (2.62)$$

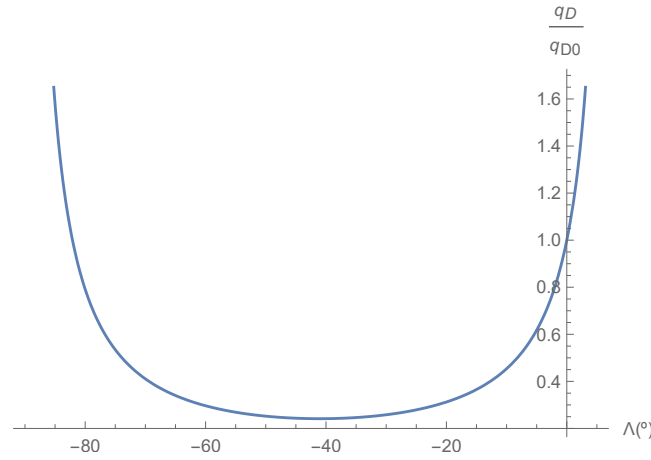


Figura 2.7: Presión dinámica de divergencia normalizada con  $GJ/EI = 0,833$  y  $e/l = 0,045$

Por tanto, para evitar la divergencia se debe elegir un ángulo de flecha  $\Lambda \geq \Lambda_\infty$ , ya que con flechas menores la presión dinámica de divergencia cae en gran medida. Esto se debe a que al aumentar  $\Lambda$ , el denominador de (2.62) aumenta, mientras que el resto de parámetros son constantes, por lo que el valor de  $q_D$  disminuirá. Este ángulo de flecha crítico suele ser pequeño por lo que da a ver que no suele existir divergencia para alas en flecha positiva, pero sí para alas en flecha negativa. Este efecto se puede ver en la Figura 2.7, y se debe tener muy en cuenta al evaluar alas oblicuas, ya que al tener siempre un ala con cada tipo de flecha tenderá a producirse la divergencia en el ala con flecha negativa, mientras que en la positiva no. Esto es crítico en el diseño de estas aeronaves, ya que una de las semialas puede limitar el dominio de vuelo de la aeronave. Esto tendrá que ser compensado variando la altura o velocidad de vuelo para evitar llegar a la presiones dinámica críticas y que la estructura de la aeronave entre en divergencia.

# 3

## Desarrollo numérico

Muchas veces los modelos teóricos no son suficientes para explicar el comportamiento de todos los casos posibles. Muchas veces se toman simplificaciones que no siempre se dan en la realidad con el objetivo de sacar una conclusión general. Sin embargo hay que tener en cuenta que las conclusiones sacadas no se pueden aplicar en todos los contextos y conocer las limitaciones de las mismas. En el caso de la Strip Theory desarrollada en el Capítulo anterior, no se tiene en cuenta el efecto 3D de las alas en la sustentación, es decir, no se tiene en cuenta el efecto producido en punta de ala, así como la fuerza de sustentación nula en este punto. Además, su uso está limitado para plantas alares sencillas, dejado de tener validez para alas con formas geométricas complejas. Por todo esto, se va a desarrollar el comportamiento del ala de un modo numérico, para conseguir resultados más exactos con respecto al comportamiento real. La Strip Theory es buena para obtener conclusiones generales sobre como va a comportarse el ala, pero no permite conocer con profundidad las limitaciones concretas del ala estudiada. En este capítulo, se obtendrá el resultado mediante el método energético de las ecuaciones de Lagrange, para el cual se utilizará el modelo *Vortex Lattice* para el cálculo de la aerodinámica de la aeronave. La ventaja significativa de este tipo de cálculo frente al analítico radica en la solución mucho más precisa de las fuerzas que actúan sobre el sistema. Además, las ecuaciones de Lagrange se pueden organizar de forma matricial, lo que permite que se realice un procedimiento estandarizado para resolver el problema que se va a tratar.



### 3.1. Introducción al *Vortex Lattice Method*

El modelo de *Vortex Lattice* es un método muy similar al método de los paneles, pero mucho más sencillo de utilizar y capaz de obtener muy buenos resultados para el cálculo de la aerodinámica de un ala, así como la interacción entre componentes. Se trata de un método ampliamente utilizado hoy en día para la estimación de la aerodinámica de las aeronaves. Este método está basado en la solución de la Ecuación de Laplace, y está sometido a las mismas restricciones teóricas que el método de los paneles. Algunas de las principales características del *Vortex Lattice* son:

- Los torbellinos se encuentran sobre la superficie
- La condición de flujo perpendicular nulo se satisface en unos puntos de control
- Se resuelve un sistema lineal de ecuaciones algebraicas para obtener la circulación de los torbellinos
- Orientado hacia los efectos de sustentación, además la formulación clásica ignora el espesor del ala
- Las condiciones de contorno se aplican en una superficie principal
- Los torbellinos no se distribuyen sobre toda la superficie
- Orientado hacia alas delgadas

Se trata de un método extremadamente sencillo, si embargo no se puede hacer una aproximación analítica sencilla, ya que aparecen matrices demasiado grandes para el cálculo analítico a mano, por lo que se deben usar métodos computacionales que faciliten el cálculo. En este caso se utilizará un programa realizado con *Mathematica* (Anexo II) que facilitará la resolución del problema. Sin embargo, previamente al cálculo aerodinámico, se debe realizar un cálculo estructural, de modo que sea posible conocer el comportamiento del ala y su deformación.

### 3.2. Modelado Estructural

En primer lugar se va a realizar el cálculo estructural del ala. Al igual que en el capítulo anterior, el ala se modelará como una viga, y el ángulo de ataque dependerá de la posición a lo largo de la envergadura por la rotación de la misma ( $\theta$ ) y el desplazamiento vertical debido a la flexión ( $w$ ). La rigidez a torsión  $GJ$ , así como la rigidez a flexión  $EI$  se considerarán constantes a lo largo del ala.

### 3.2.1. Definición de los grados de libertad

El ala se discretizará en un número par de nodos equidistantes entre sí, en los cuales se supondrá un desplazamiento por flexión  $w_i$ , así como un giro por torsión  $\theta_i$ . Estos serán los grados de libertad del sistema, mediante los cuales se podrá obtener el movimiento de cualquier punto del sistema. Es recomendable que la cantidad de nodos sea un número par, de modo que se tenga el mismo número de nodos en cada semi-ala. Por tanto, el ala tendrá  $2N$  grados de libertad, ya que se tienen 2 por cada nodo. Para el análisis realizado en el Anexo II se han establecido 6 nodos. En la Figura 3.1 se observa la discretización realizada.

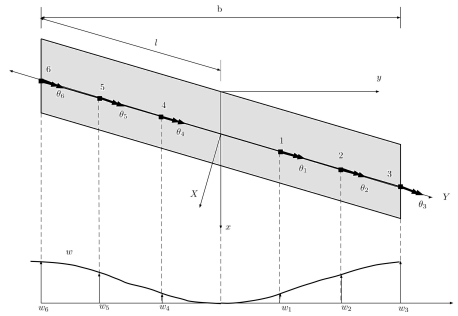


Figura 3.1: Grados de libertad del ala

Los grados de libertad se agrupan en el vector adimensional  $u$ , que viene definido como:

$$u = \left\{ \frac{w_1}{c}, \theta_1, \frac{w_2}{c}, \theta_2, \frac{w_3}{c}, \theta_3, \frac{w_4}{c}, \theta_4, \frac{w_5}{c}, \theta_5, \frac{w_6}{c}, \theta_6 \right\} \quad (3.1)$$

donde los desplazamientos verticales por flexión ( $w$ ) vienen adimensionalizados con la cuerda del ala.

### 3.2.2. Definición de la respuesta

La respuesta del sistema se definirá como una función polinómica. En el caso de la deflexión se trata de un polinomio de sexto grado, mientras que para el giro es de cuarto grado. Por tanto, las funciones de respuesta ante la flexión y la torsión vienen dadas por:

$$\begin{aligned} w(Y) &= a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + a_3 Y^3 + a_4 Y^4 + a_5 Y^5 + a_6 Y^6 \\ \theta(Y) &= b_0 + b_1 Y + b_2 Y^2 + b_3 Y^3 + b_4 Y^4 + b_5 Y^5 + b_6 Y^6 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Por otra parte, según se ha definido las condiciones del ala, ésta se encuentra empotrada en la raíz, por tanto es posible dividir el problema en dos. Por un lado, la deformación del ala derecha, y por otro la deformación del ala izquierda, ya que a causa del empotramiento los movimientos de cada semi-ala son independientes de la otra.

Por ello el desplazamiento vertical  $w$  y la rotación  $\theta$  vienen definidos en dos tramos,  $w_D, \theta_D$  y  $w_I, \theta_I$ . Además, si se agrupan los coeficientes en función de los grados de libertad, se pueden simplificar las expresiones de  $w$  y  $\theta$  de modo que a cada grado de libertad lo acompañe una función dependiente de  $Y$ , las cuales son conocidas como funciones de forma ya que tan solo dependen de la posición  $Y$  en la que nos encontremos, es decir, de su forma.

#### SEMI-ALA DERECHA

$$\begin{aligned} w_D(Y) &= N_{w_1}(Y)w_1 + N_{w_2}(Y)w_2 + N_{w_3}(Y)w_3 \\ \theta_D(Y) &= N_{\theta_1}(Y)\theta_1 + N_{\theta_2}(Y)\theta_2 + N_{\theta_3}(Y)\theta_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

con  $y = Y \cos \Lambda_E$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq Y \leq l \\ 0 &\leq y \leq \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

#### SEMI-ALA IZQUIERDA

$$\begin{aligned} w_I(Y) &= N_{w_4}(Y)w_4 + N_{w_5}(Y)w_5 + N_{w_6}(Y)w_6 \\ \theta_I(Y) &= N_{\theta_4}(Y)\theta_4 + N_{\theta_5}(Y)\theta_5 + N_{\theta_6}(Y)\theta_6 \end{aligned} \quad (3.5)$$

con  $y = -Y \cos \Lambda_E$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq Y \leq l \\ -\frac{b}{2} &\leq y \leq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sin embargo, se desconocen los valores de las funciones de forma mencionadas. Para su cálculo son necesarias las condiciones de contorno.

**Condiciones de contorno**

Para poder averiguar el valor de las funciones de forma, es necesario evaluar la deflexión y el giro con las condiciones de contorno del ala. Éstas serán las mismas para ambas semialas tanto en la raíz como en el extremo, mientras que en los nodos intermedios tendrán distintos valores dependiendo del grado de libertad asociado.

El valor de las condiciones de contorno para el ala empotrada en la raíz y libre en el extremo son:

$$\begin{aligned}
 w(Y = 0) &= 0 && \text{(deflexión nula)} \\
 w'(Y = 0) &= 0 && \text{(giro por deflexión nulo)} \\
 w''(Y = l) &= 0 && \text{(momento flector nulo)} \\
 w'''(Y = l) &= 0 && \text{(fuerza cortante nula)}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 \theta(Y = 0) &= 0 && \text{(giro nulo)} \\
 \theta'(Y = 0) &= 0 && \text{(momento torsor nulo)}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sin embargo, las condiciones de los nodos internos serán distintas para cada semiala del aeronaue:

**SEMI-ALA DERECHA**

$$\begin{aligned}
 w(Y = Y_1) &= w_1 & \theta(Y = Y_1) &= \theta_1 \\
 w(Y = Y_2) &= w_2 & \theta(Y = Y_2) &= \theta_2 \\
 w(Y = Y_3) &= w_3 & \theta(Y = Y_3) &= \theta_3
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

**SEMI-ALA IZQUIERDA**

$$\begin{aligned}
 w(Y = Y_4) &= w_4 & \theta(Y = Y_4) &= \theta_4 \\
 w(Y = Y_5) &= w_5 & \theta(Y = Y_5) &= \theta_5 \\
 w(Y = Y_6) &= w_6 & \theta(Y = Y_6) &= \theta_6
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Siendo  $Y_1 = Y_4 = l/3$  ;  $Y_2 = Y_5 = 2/3 l$  ;  $Y_3 = Y_6 = l$

**Funciones de forma flexión**

Una vez conocidas las condiciones de contorno, se puede resolver el sistema creado por los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  aplicando (3.7) en ambas semialas, pero variando las condiciones específicas según se trate de

la semiala derecha o la izquierda. Con esto se hallan los valores de estos coeficientes, y agrupando términos se puede obtener el valor de las funciones de forma.

$$\begin{aligned}
 N_{w_1}(Y) = N_{w_4}(Y) &= \frac{2187 Y^6}{37 l^6} - \frac{17253 Y^5}{74 l^5} + \frac{25353 Y^4}{74 l^4} - \frac{8181 Y^3}{37 l^3} + \frac{1944 Y^2}{37 l^2} \\
 N_{w_2}(Y) = N_{w_5}(Y) &= -\frac{8019 Y^6}{148 l^6} + \frac{7533 Y^5}{37 l^5} - \frac{20493 Y^4}{74 l^4} + \frac{5751 Y^3}{37 l^3} - \frac{4131 Y^2}{148 l^2} \\
 N_{w_3}(Y) = N_{w_6}(Y) &= \frac{735 Y^6}{37 l^6} - \frac{5379 Y^5}{74 l^5} + \frac{21023 Y^4}{222 l^4} - \frac{5461 Y^3}{111 l^3} + \frac{308 Y^2}{37 l^2}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

### Funciones de forma torsión

Por otra parte, si se aplican las condiciones de contorno de giro 3.8 a la respuesta  $\theta$  del sistema, y se agrupan los coeficientes  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$  con los grados de libertad, se obtienen las funciones de forma de torsión. Éstas vienen definidas como:

$$\begin{aligned}
 N_{\theta_1}(Y) = N_{\theta_4}(Y) &= \frac{81 Y^4}{2 l^4} - \frac{135 Y^3}{2 l^3} + \frac{27 Y^2}{l^2} \\
 N_{\theta_2}(Y) = N_{\theta_5}(Y) &= -\frac{81 Y^4}{4 l^4} + \frac{27 Y^3}{l^3} - \frac{27 Y^2}{4 l^2} \\
 N_{\theta_3}(Y) = N_{\theta_6}(Y) &= \frac{9 Y^4}{2 l^4} - \frac{9 Y^3}{2 l^3} + \frac{Y^2}{l^2}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

### Modo matricial

Una vez se conocen las funciones de forma, se pueden expresar la deflexión  $w$  y el giro  $\theta$  de modo matricial. Hay que tener en cuenta que se han de tratar las dos semialas por separado. De este modo queda:

$$\begin{aligned}
 w_D(Y) &= c \mathbf{N}_{w_D}^T(Y) \mathbf{u} \\
 w_I(Y) &= c \mathbf{N}_{w_I}^T(Y) \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_D(Y) &= \mathbf{N}_{\theta_D}^T(Y) \mathbf{u} \\
 \theta_I(Y) &= \mathbf{N}_{\theta_I}^T(Y) \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de los grados de libertad (3.1).

### 3.2.3. Energía de deformación

La energía de deformación  $\mathcal{U}$  del ala es la energía potencial acumulada por la misma. En este caso se tiene energía de deformación por flexión, así como por torsión. Hay que tener en cuenta que cada semi-ala se trata por separado, por tanto se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \frac{1}{2} \int_{Y=0}^l EI \left( \frac{\partial^2 w_D(Y)}{\partial Y^2} \right)^2 dY + \frac{1}{2} \int_{Y=0}^l GJ \left( \frac{\partial \theta_D(Y)}{\partial Y} \right)^2 dY \\ & + \frac{1}{2} \int_{Y=0}^l EI \left( \frac{\partial^2 w_I(Y)}{\partial Y^2} \right)^2 dY + \frac{1}{2} \int_{Y=0}^l GJ \left( \frac{\partial \theta_I(Y)}{\partial Y} \right)^2 dY \end{aligned} \quad (3.15)$$

Otro modo de expresar esta energía de deformación es matricialmente. Esto se obtiene sustituyendo los valores de las deflexiones y los giros con los obtenidos en las ecuaciones 3.13 y 3.14. De este manera la expresión de la energía de deformación queda:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (3.16)$$

siendo

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{w_D} + \mathbf{K}_{\theta_D} + \mathbf{K}_{w_I} + \mathbf{K}_{\theta_I} \quad (3.17)$$

donde las  $\mathbf{K}_w$  hacen referencia a las matrices de rigidez a flexión de la estructura y las  $\mathbf{K}_\theta$  se tratan de las matriz de rigidez a torsión de la misma. Vienen definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{w_D} &= \int_{Y=0}^l EI \left( \frac{\partial^2 N w_D(Y)}{\partial Y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 N w_D(Y)^T}{\partial Y^2} \right) dY \\ \mathbf{K}_{\theta_D} &= \int_{Y=0}^l GJ \left( \frac{\partial \theta_D(Y)}{\partial Y} \right) \left( \frac{\partial \theta_D^T(Y)}{\partial Y} \right) dY \end{aligned} \quad (3.18)$$

### Matriz de rigidez

Con la suma de todas ellas se obtiene la matriz de rigidez total de la estructura, tal y como se muestra en la ecuación 3.17. Por tanto queda una matriz de dimension  $2N \times 2N$ . De modo que se pueda normalizar la matriz de rigidez, se incluye una relación entre la rigidez a torsión y a flexión mediante el parámetro  $\gamma$  como sigue

$$EI = \gamma GJ \quad (3.19)$$

Por tanto, si se aplica la relación se puede obtener una matriz de rigidez adimensional del modo

$$\mathbf{K} = \frac{GJ}{l} \mathcal{K} \quad (3.20)$$

$$\mathcal{K}_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \frac{31512483c^2\beta}{47915 l^2} & 0 & -\frac{158507199c^2\beta}{383320 l^2} & 0 & \frac{5644566c^2\beta}{47915 l^2} & 0 \\ & \frac{2673}{140} & 0 & -\frac{7047}{560} & 0 & \frac{423}{140} \\ & & \frac{36157671c^2\beta}{95830 l^2} & 0 & -\frac{51794073c^2\beta}{383320 l^2} & 0 \\ & & & \frac{486}{35} & 0 & -\frac{3177}{560} \\ & & & & \frac{2677457c^2\beta}{47915 l^2} & 0 \\ & & & & & \frac{1667}{420} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

### 3.2.4. Ángulo de ataque

Una vez se conoce el giro elástico  $\theta$  de la estructura alrededor del eje elástico, se puede averiguar el ángulo de ataque del ala respecto a los ejes viento, es decir, relativos al flujo. Esto es muy importante para poder calcular las fuerzas y momentos aerodinámicos sobre la misma. Además, hay que tener en cuenta que si el ángulo de flecha del ala fuese nulo, el ángulo de ataque coincidiría con el giro elástico. Sin embargo, al tratarse de alas con flecha, éstos no coinciden, ya que la flexión de la estructura también genera un giro en la dirección  $y$ .

Para facilitar el cálculo se introduce una nueva nomenclatura para las derivadas de la deflexión:

$$\begin{aligned}\varphi_D(Y) &= \frac{d w_D(Y)}{d Y} = c \frac{d N_{w_D}^T(Y)}{d Y} \mathbf{u} \\ \varphi_I(Y) &= \frac{d w_I(Y)}{d Y} = c \frac{d N_{w_I}^T(Y)}{d Y} \mathbf{u}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Hay que tener en cuenta, que se está tratando un caso particular de alas en flecha, las alas oblicuas. Por tanto, en este caso, la semi-ala derecha tendrá flecha positiva, mientras que la semi-ala izquierda tendrá flecha negativa. El ángulo de ataque en cada caso queda como sigue:

**Semi-ala derecha** ( $0 \leq y \leq \frac{b}{2}$ )

$$Y = \frac{y}{\cos(\Lambda_E)} \quad (3.23)$$

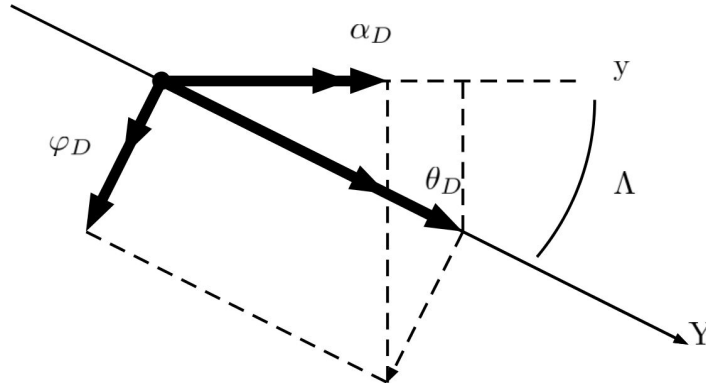


Figura 3.2: Ángulo de ataque semi-ala derecha

$$\alpha_D(y) = \theta_D \left( \frac{y}{\cos(\Lambda_E)} \right) \cos(\Lambda_E) - \varphi_D \left( \frac{y}{\cos(\Lambda_E)} \right) \sin(\Lambda_E) = N_{\alpha_D}^T(y) \mathbf{u} \quad (3.24)$$

donde

$$N_{\alpha_D}^T(y) = N_{\theta_D}^T \left( \frac{y}{\cos(\Lambda_E)} \right) \cos(\Lambda_E) - c \frac{d N_{w_D}}{d Y} \sin(\Lambda_E) \quad (3.25)$$

Como se puede ver, el giro elástico produce un aumento en el ángulo de ataque, mientras que el giro ocasionado por la deflexión reduce el ángulo de



ataque total del ala.

**Semi-ala izquierda** ( $-\frac{b}{2} \leq y \leq 0$ )

$$Y = \frac{y}{\cos(\Lambda_E)} \quad (3.26)$$

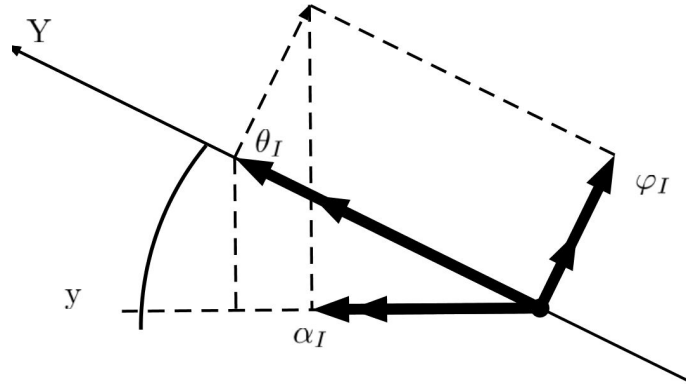


Figura 3.3: Ángulo de ataque semi-ala izquierda

$$\alpha_I(y) = -\theta_I \left( \frac{-y}{\cos(\Lambda_E)} \right) \cos(\Lambda_E) + \varphi_D \left( \frac{-y}{\cos(\Lambda_E)} \right) \sin(\Lambda_E) = \mathbf{N}_{\alpha_I}^T(y) \mathbf{u} \quad (3.27)$$

donde

$$\mathbf{N}_{\alpha_I}^T(y) = -\mathbf{N}_{\theta_I}^T \left( \frac{-y}{\cos(\Lambda_E)} \right) \cos(\Lambda_E) + c \frac{d \mathbf{N}_{\varphi_I}}{d Y} \sin(\Lambda_E) \quad (3.28)$$

Contrariamente al caso anterior, tanto el giro elástico como el giro ocasionado por la deflexión tienden a aumentar el ángulo de ataque total del ala.

Esta es una de las principales diferencias de las alas en flecha positiva y negativa. Mientras que en las positivas la variación de  $\alpha$  con la deformación es más suave, en alas con flechas positiva la variación de  $\alpha$  es mucho más elevada, ya que contribuyen positivamente tanto el giro por torsión, así como la deflexión por flexión. Esto es una característica muy importante al diseñar este tipo de aviones, ya que cada ala impondrá unas restricciones tanto estructurales como aerodinámicas muy distintas entre ellas. En el caso

aeroelástico que se desea tratar, la flecha negativa ocasionará una velocidad de divergencia mucho menor que con flecha positiva, aunque esto se tratará con mas detalle en capítulos posteriores.

### 3.2.5. Desplazamiento vertical

En esta sección se va a estudiar el desplazamiento vertical que ocurre en cualquier punto del ala. Para ello se va a analizar el desplazamiento vertical de un punto genérico  $A$ , con coordenadas  $(x_A, y_A)$ , tal y como se muestra en la figura 3.4, respecto a los ejes fijos  $(x, y, z)$ .

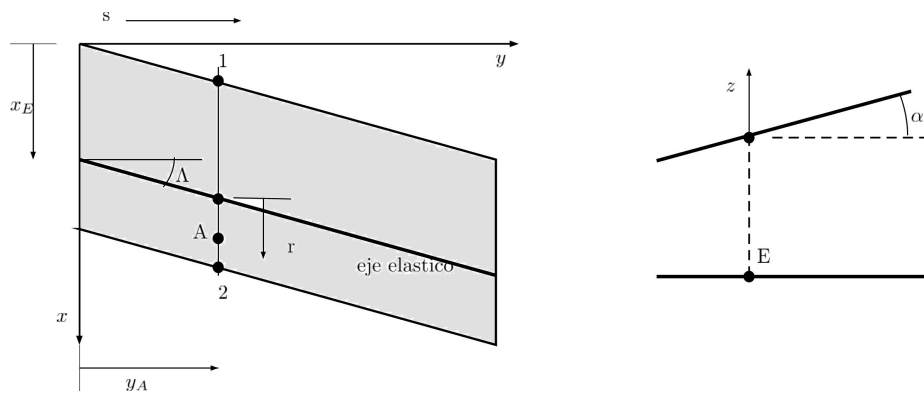


Figura 3.4: Desplazamiento vertical sección perfil

Tal y como se puede observar, la variación vertical de cualquier punto de una sección alar viene dado por el desplazamiento del eje elástico de ésta, sumado con la variación de la posición vertical debida al ángulo de ataque. La posición  $r$  del punto  $A$  respecto al eje elástico vendrá dada por:

$$r_A = x_A - x_E - y_A \tan(\Lambda_E) \quad (3.29)$$

tanto en la semi-ala derecha como en la semi-ala izquierda de la aeronave. Destacar que  $x_E$  hace referencia a la posición del eje elástico respecto al borde de ataque.

Por tanto, con esto ya se puede buscar una solución al desplazamiento vertical de cualquier punto del ala. No obstante, hay que diferenciar en entre ambas semialas, ya que el ángulo de ataque de éstas esta definido de modo distinto en cada lado. Finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Si } y_A \geq 0 : \quad z_A &= w_D \left( \frac{y_A}{\cos(\Lambda_E)} \right) - \alpha_D(y_A) \cdot r_A \\ \text{Si } y_A \leq 0 : \quad z_A &= w_I \left( \frac{y_A}{\cos(\Lambda_E)} \right) - \alpha_I(y_A) \cdot r_A \end{aligned} \quad (3.30)$$

Si se expresa en modo matricial el desplazamiento  $z$  queda:

$$\begin{aligned} \text{Si } y_A \geq 0 : \quad z_A &= c \mathbf{N}_{\mathbf{w}_D}^T \left( \frac{y_A}{\cos(\Lambda_E)} \right) \mathbf{u} - \mathbf{N}_{\alpha_D}^T(y_A) \mathbf{u} \cdot r_A = c \mathbf{N}_{A_D}^T(y_A) \mathbf{u} \\ \text{Si } y_A \leq 0 : \quad z_A &= c \mathbf{N}_{\mathbf{w}_I}^T \left( \frac{-y_A}{\cos(\Lambda_E)} \right) \mathbf{u} - \mathbf{N}_{\alpha_I}^T(-y_A) \mathbf{u} \cdot r_A = c \mathbf{N}_{A_I}^T(y_A) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.31)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{A_D}^T(y_A) &= \mathbf{N}_{\mathbf{w}_D}^T \left( \frac{y_A}{\cos(\Lambda_E)} \right) - \mathbf{N}_{\alpha_D}^T(y_A) \frac{r_A}{c} \\ \mathbf{N}_{A_I}^T(y_A) &= \mathbf{N}_{\mathbf{w}_I}^T \left( \frac{-y_A}{\cos(\Lambda_E)} \right) - \mathbf{N}_{\alpha_I}^T(-y_A) \frac{r_A}{c} \end{aligned} \quad (3.32)$$

### 3.3. Modelado Aerodinámico (*Vortex Lattice Method*)

Para poder realizar el análisis de la divergencia que se busca, es necesario conocer las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre el ala a estudiar. Por ello es necesario realizar un estudio aerodinámico de la misma. En este caso, para poder averiguar las fuerzas que actúan sobre el ala se va a realizar un estudio mediante el método de los paneles de una manera sencilla. Este método se basa en la subdivisión del ala en paneles a lo largo de la envergadura y la cuerda. Cada panel dispone de un punto de control situado a  $1/4$  del borde de fuga del mismo. Posteriormente, se sitúa sobre cada panel un torbellino en herradura que actúa sobre el ala, de este modo se pueda evaluar la velocidad vertical inducida del ala sobre los puntos de control y poder obtener las intensidades de los torbellinos, comparando esta velocidad con la obtenida mediante la modelización estructural del apartado 3.2. Una vez obtenidas la intensidades, mediante la ley de Kutta-Joukowski será posible hallar la fuerza de sustentación que actúa sobre el ala. Además, destacar que el punto de aplicación de la fuerza de sustentación (centro aerodinámico) se ha supuesto a  $c/4$  del borde delantero de éste.

En este caso, al tratarse de una ala de gran alargamiento, las subdivisiones en paneles tan sólo se harán a lo largo de la envergadura, mientras que en la dirección de la cuerda no se dividirá. Por tanto, el ala quedará dividida en un número  $N$  par de paneles para que en cada semi-ala haya la

misma cantidad de los mismos. El número de paneles que se ha elegido para cálculo es de 10, de modo que se tienen cinco paneles a cada lado de la raíz. En la siguiente figura se muestra como queda el ala una vez se ha hecho la división de ésta.

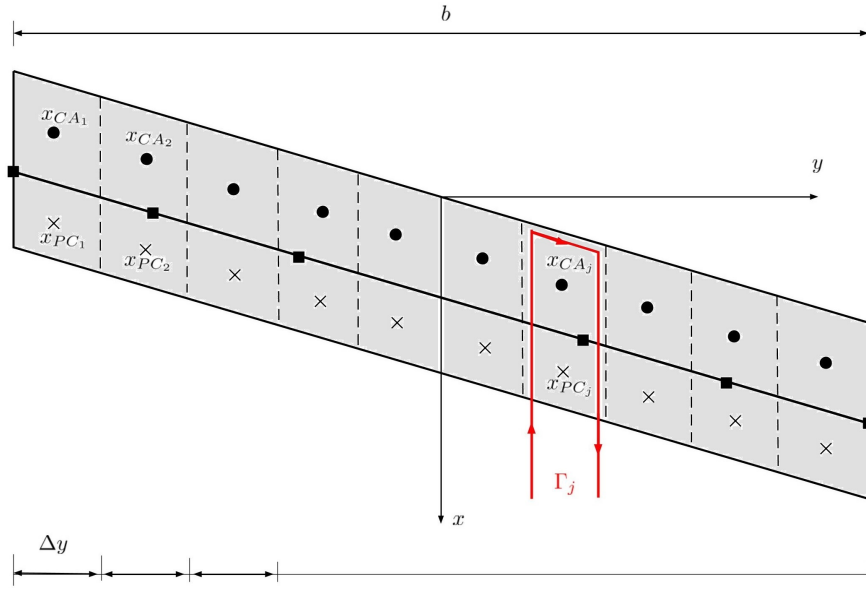


Figura 3.5: División del ala en paneles

donde  $C_N$  indican los puntos de control de cada panel.

### 3.3.1. Ángulo de ataque de los paneles

En el apartado anterior 3.2.4, se han calculado los ángulos de ataque de cada una de las semi-alas según la posición a lo largo de éstas. Por tanto, se puede proceder al cálculo de  $\alpha$  para cada uno de los  $N$  paneles en los que se subdivide el ala. El ángulo de ataque en cada uno de ellos viene dado por:

$$\alpha_j = \alpha(y_j) \quad (3.33)$$

donde

$$\alpha_j = \alpha(y_j) = \begin{cases} \mathbf{N}_{\alpha_D}^T(y_j) & \text{si } y_j \geq 0 \\ \mathbf{N}_{\alpha_I}^T(y_j) & \text{si } y_j \leq 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Por tanto, una vez hecho esto se puede formar un vector columna:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{r1} \\ \vdots \\ \alpha_{rj} \\ \vdots \\ \alpha_{rN} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\alpha 1}^T(y_1) \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{\alpha}^T(y_j) \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{\alpha D}^T(y_N) \end{bmatrix}_{Nx12} \mathbf{u}_{12x1} \quad (3.35)$$

donde  $\alpha_r$  indica los ángulos de ataque inicial de la estructura en cada nodo. Este ángulo de ataque inicial puede ser tanto rígido como por un determinado ángulo de ataque del aeronave. Si se usa notación vectorial, la función queda:

$$\boldsymbol{\alpha}_{Nx1} = \boldsymbol{\alpha}_{rNx1} + \mathbf{D}_{\alpha Nx12} \mathbf{u}_{12x1} \quad (3.36)$$

Con lo que se obtiene el  $\alpha$  de cada uno de los paneles en función de su ángulo de ataque rígido, y los grados de libertad del sistema mediante una matriz  $\mathbf{D}_{\alpha}$  conocida como *Primera Matriz de Acoplamiento*.

Con esto, se puede relacionar la pendiente del desplazamiento vertical de una sección con el ángulo de ataque de la misma. En la figura 3.6 se puede ver la representación gráfica.

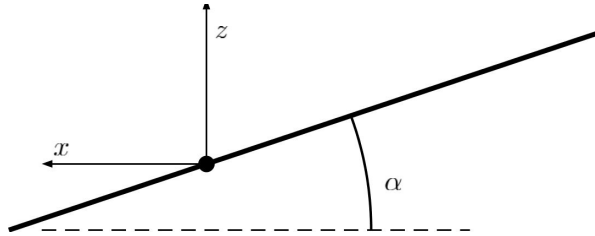


Figura 3.6: Relación entre desplazamiento vertical y ángulo de ataque

Atendiendo a la figura, la derivada de  $z$  respecto de  $x$  en el punto  $C$  es equivalente a la pendiente en ese punto, y siendo  $\alpha$  el ángulo de ataque del panel, matemáticamente se tiene:

$$\mathbf{a} = -\boldsymbol{\alpha} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial z_P}{\partial x} \Big|_{\mathbf{R}_{C1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial z_P}{\partial x} \Big|_{\mathbf{R}_{CN}} \end{array} \right\} \quad (3.37)$$

donde se ha definido el vector  $\mathbf{a}$  como el vector de velocidad vertical de los puntos de control, siendo el sentido positivo hacia arriba.

### 3.3.2. Desplazamiento vertical de los paneles

Al igual que en el caso del cálculo del  $\alpha$  de los paneles, en este caso se va a utilizar los resultados obtenidos en el apartado 3.2.5 para obtener los desplazamientos verticales de cada uno de los puntos de control de los paneles. La obtención de este desplazamiento será necesaria posteriormente para poder calcular el trabajo realizado por la sustentación. La distancia que separa el eje elástico de los centros aerodinámicos, los cuales están situados a  $c/4$  del borde de ataque se define como  $e$ . Atendiendo a estas definiciones se tiene

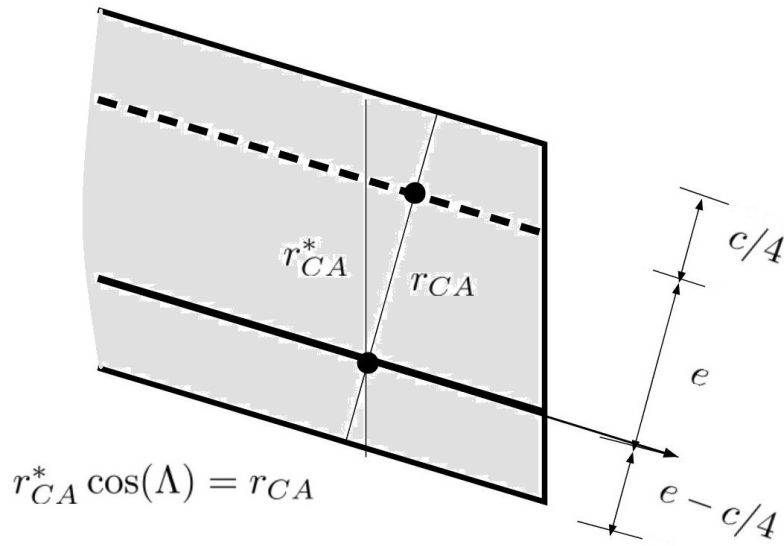


Figura 3.7: Distancia entre eje elástico y centro aerodinámico

donde se puede ver que la distancia  $r$  de un centro aerodinámico cualquiera  $A$  con el eje elástico es constante al tratarse de un ala recta y viene definida como

$$r_{CA} = \frac{r_{CA}^*}{\cos(\Lambda_E)} \quad (3.38)$$

Además  $y_A$  corresponderá a la distancia entre el centro aerodinámico de cada panel y la raíz, la cual vendrá dada por:

$$y_A = \pm \frac{b/2}{\cos(\Lambda_E)} \left( \frac{2i-1}{2N} \right) \quad \text{con } i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (3.39)$$

donde  $N$  es el número total de paneles. Además hay que tener en cuenta que se trata de una distancia positiva para la semi-ala derecha y negativa para la semi-ala izquierda.

Con estas variables calculadas, se puede pasar a expresarlo matricialmente el desplazamiento vertical  $z$  de los puntos de control aprovechando las definiciones del apartado 3.2.5.

$$\begin{Bmatrix} z_{A1} \\ \vdots \\ z_{Aj} \\ \vdots \\ z_{AN} \end{Bmatrix} = c \begin{bmatrix} N_{AI}^T(y_{A1}) \\ \vdots \\ N_{AI}^T(y_{Aj}) \\ \vdots \\ N_{AD}^T(y_{AN}) \end{bmatrix}_{Nx12} \quad \mathbf{u}_{12x1} \quad (3.40)$$

donde se pueden definir los vectores de modo que se exprese de forma más compacta:

$$\mathbf{z}_{ANx1} = c \mathbf{D}_{zNx12} \mathbf{u}_{12x1} \quad (3.41)$$

Con lo que se obtiene el desplazamiento vertical de los puntos de control en función de los grados de libertad del sistema mediante una matriz  $\mathbf{D}_z$  conocida como *Segunda Matriz de Acoplamiento*.

### 3.3.3. Numeración de los paneles: Matriz de Conexiones y Matriz de Nodos

Para el modelado aerodinámico, se ha dividido el ala en paneles como ya se ha descrito, y a su vez se han calculado en los apartados anteriores el desplazamiento, así como el ángulo de ataque de estos. Sin embargo, hace falta conocer como se organizan los mismos y como están colocados de modo que el cálculo se pueda realizar de un modo más sencillo. Para ello, se evaluará la fila y la columna en la que esta situado en la matriz de paneles, según el número asociado al mismo. La forma de numerar los paneles, será con números enteros consecutivos, empezando por la esquina inferior izquierda. En este caso, al tratarse de una matriz con una única fila, la posición del panel vendrá determinada por la columna. Además, también se numeraran los nodos que interconectan los paneles. Esta subdivisión queda del siguiente modo:

Por tanto, para conocer la posición (columna y fila) de un panel genérico  $j$  se puede utilizar un algoritmo tal y como sigue:

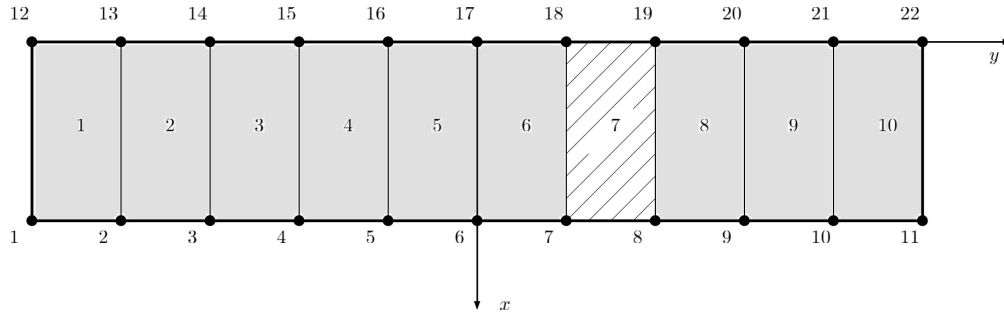


Figura 3.8: Numeración de paneles y nodos

$$j = A n_y + B \quad ; \quad A = \left[ \frac{j}{n_y} \right] \quad (\text{Parte entera})$$

$$B = \left[ \frac{j}{n_y} \right] \quad (\text{Resto})$$
(3.42)

Donde la fila y la columna que ocupa vendrá determinada por el valor de  $B$ :

$$\text{Si } B = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{fila} & = A \\ \text{columna} & = n_y \end{cases}$$

$$\text{Si } B > 0 \rightarrow \begin{cases} \text{fila} & = A + 1 \\ \text{columna} & = B \end{cases}$$
(3.43)

Una vez conocida la posición que ocupa cada panel, se puede averiguar los nodos que se encuentran en cada una de las esquinas del panel. Cada una de estos nodos se definen como  $E1, E2, E3, E4$ .

El número de cada uno de estos nodos vendrá dado por el número de panel ( $j$ ), la fila que ocupa ( $f$ ) y el número total de divisiones a lo largo de la envergadura ( $n_y$ ) que se han hecho tal y como sigue:

$$\begin{aligned} E1 &= j + f - 1 \\ E2 &= E1 + 1 \\ E3 &= E1 + n_y + 1 \\ E4 &= E1 + n_y + 2 \end{aligned}$$
(3.44)

Con estas definiciones será posible realizar una matriz que indique que nodos corresponden a cada panel, llamada *Matriz de Conexiones*.



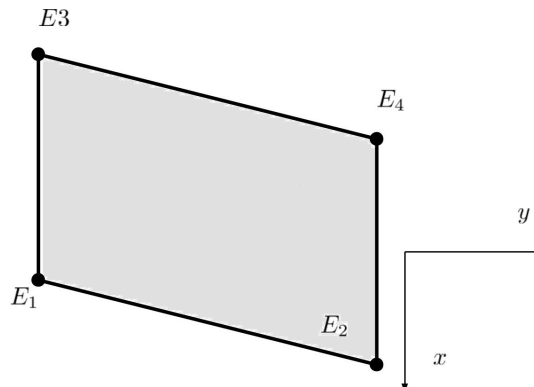


Figura 3.9: Nodos relativos a cada panel

### Matriz de Conexiones

La Matriz de Conexiones tendrá unas dimensiones de  $N \times 5$  y viene definida del modo:

$$\begin{matrix}
 j & E1 & E2 & E3 & E4 \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 1 & (E1)_1 & (E2)_1 & (E3)_1 & (E4)_1 \\
 2 & (E1)_2 & (E2)_2 & (E3)_2 & (E4)_2 \\
 3 & (E1)_3 & (E2)_3 & (E3)_3 & (E4)_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 N & (E1)_N & (E2)_N & (E3)_N & (E4)_N
 \end{array} \right] & & & & (3.45)
 \end{matrix}$$

También es posible añadir a esta matriz dos columnas más que correspondan con la fila y columna que ocupa el panel, de modo que las dimensiones serían de  $N \times 7$ .

### Matriz de Nodos

Por otra parte, conocer la ubicación de los nodos, también es igual, o incluso más, importante que la de los paneles. Por ello también se realiza una malla con los nodos, dónde cada a cada uno le corresponde una fila y una columna. Esto es importante, ya que la posición de los extremos de los paneles es necesaria conocerla para poder evaluar las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre cada uno de los paneles. En este caso, el número total de puntos tanto en  $x$  como en  $y$  será una unidad mayor al de subdivisiones en el correspondiente eje. Es decir:

$$\begin{aligned}
 P_x &= n_x + 1 && \text{(Número de puntos en } x) \\
 P_y &= n_y + 1 && \text{(Número de puntos en } y) \\
 P &= P_x \cdot P_y && \text{(Número total de puntos)}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Una vez hecho esto, se puede averiguar la fila y la columna que ocupa un nodo genérico  $k$ , donde  $k = A \cdot P_y + B$ . El método a seguir es el mismo que el detallado en la ecuaciones 3.38 y 3.39, de modo que se obtengan  $A$  y  $B$  para conocer la posición, aunque variando  $n_y$  por  $P_y$  y  $j$  por  $k$ , al estar tratando en este caso de nodos y no de paneles. La fila y la columna que ocupa cada nodo  $k$ , se puede expresar en una matriz de conocida como *Matriz de nodos*, la cual se define como sigue:

$$\begin{matrix} & k & f_k & c_k \\ \begin{bmatrix} 1 & f_1 & c_1 \\ 2 & f_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P & f_P & c_P \end{bmatrix} & & & \end{matrix} \quad (3.47)$$

Esta matriz es de gran ayuda, ya que facilitará el cálculo de puntos intermedios internos a los paneles, como se va a ver en la sección siguiente.

### 3.3.4. Obtención coordenadas de un punto

En este apartado se obtendrán las coordenadas de un punto partiendo de otros dos puntos conocidos ( $A, B$ ) y las distancias entre ellos. Antes que nada hay que tener en cuenta que la posición vendrá dada por el vector  $\mathbf{R} = (x, y)$ .

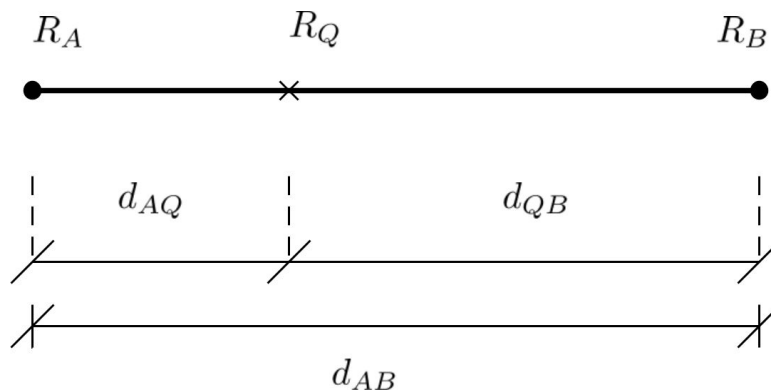


Figura 3.10: Coordenadas de un punto

Matemáticamente la posición del punto  $Q$  viene determinada por:

$$\mathbf{R}_Q = \frac{d_{BQ}}{d_{AB}} \mathbf{R}_A + \frac{d_{AQ}}{d_{AB}} \mathbf{R}_B \quad (3.48)$$

Una vez conocido esto se puede pasar a averiguar la posición de un punto cualquiera del ala, en función de las esquinas de la misma. Hay que tener en cuenta que al igual que en todos los cálculos anteriores se debe diferenciar entre la semi-ala derecha y la izquierda. Esto va a permitir averiguar las posiciones de los nodos de los paneles en los que se ha subdividido el ala, de modo que se pueda averiguar posteriormente las posiciones de los puntos de control de cada uno de los paneles, y por tanto, que se pueda aplicar la teoría de torbellinos numéricamente.

**Definición Geométrica del Ala**

Sin embargo, primeramente es necesario conocer correctamente la geometría del ala y conocer las posiciones de los puntos extremos de la misma, ya sea en las puntas de ala o en la raíz.

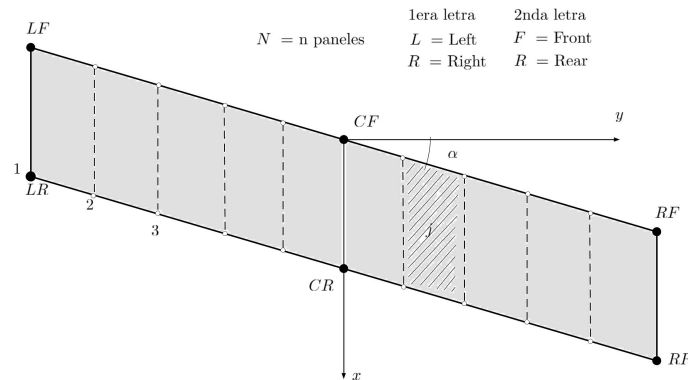


Figura 3.11: Definición geométrica del ala

Por tanto, se puede encontrar de manera sencilla las posiciones de los extremos de cada semi-ala, los cuales reciben los nombres de:  $CF$  (Central Front),  $CR$  (Center Rear),  $LF$  (Left Front),  $LR$  (Left Rear),  $RF$  (Right Front) y  $RR$  (Right Rear). Las posiciones de éstos vienen determinadas por la cuerda, el ángulo de flecha del ala y la envergadura como sigue:

Una vez conocidas las coordenadas de estos puntos, se puede pasar al cálculo de la posición de cualquier punto interior del ala basado en las coordenadas de los extremos. Cabe destacar que para facilitar el cálculo se trabajará con las coordenadas adimensionales  $\xi$  y  $\eta$  que vienen definidas como:

$$\xi = \frac{x}{c} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{b/2} \tag{3.49}$$

A continuación se muestra las variables que intervienen en el cálculo de la posición de un punto cualquiera ( $Q$ )

Punto	$x$	$y$
CF	0	0
CR	$c$	0
LF	$-b/2 \tan(\Lambda_E)$	$-b/2$
LR	$-b/2 \tan(\Lambda_E) + c$	$-b/2$
RF	$b/2 \tan(\Lambda_E)$	$b/2$
RR	$b/2 \tan(\Lambda_E) + c$	$b/2$

Cuadro 3.1: Posición de los extremos

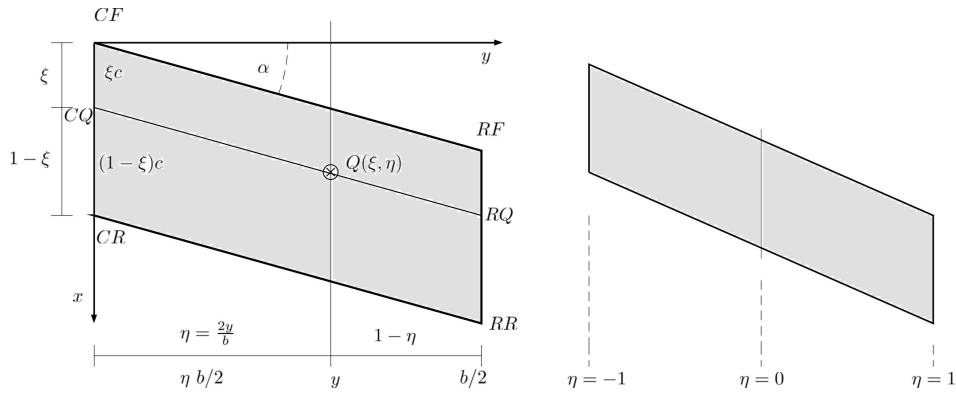


Figura 3.12: Coordenadas de un punto sobre el ala

### Posición de los nodos

A continuación, se aplicará la definición vista anteriormente para el cálculo de la posición de los nodos resultantes al subdividir el ala en paneles. Este procedimiento se realizará tanto en el eje  $x$ , como en el eje  $y$ . Con ello se obtendrán tres ecuaciones para cada punto, con las que poder obtener su posición en función de los extremos de la semi-ala.

La posición respecto a la raíz del ala del punto, será la misma independientemente de la semi-ala que se quiera estudiar, y viene definida como:

$$\mathbf{R}_{CQ} = (1 - \xi)\mathbf{R}_{CF} + \xi \mathbf{R}_{CR} \quad (3.50)$$

Sin embargo, la posición respecto a la punta del ala, será distinta para cada una de las partes, ya que la flecha es contraria y la posición de los puntos extremos no es la misma en ambos casos.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{RQ} &= (1 - \xi)\mathbf{R}_{RF} + \xi \mathbf{R}_{RR} && \text{(semiala derecha)} \\ \mathbf{R}_{LQ} &= (1 - \xi)\mathbf{R}_{LF} + \xi \mathbf{R}_{LR} && \text{(semiala izquierda)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Una vez conocida la posición del punto respecto a los puntos extremos, los cuales son conocidos, se puede pasar a obtener el vector  $\mathbf{R}_Q$  que determina la posición del punto genérico  $Q$  respecto a los ejes totales  $x, y$ .

$$\mathbf{R}_Q(\xi, \eta) = \begin{cases} \eta \mathbf{R}_{RQ} + (1 - \eta) \mathbf{R}_{CQ} & \text{(semiala derecha)} \\ -\eta \mathbf{R}_{LQ} + (1 + \eta) \mathbf{R}_{CQ} & \text{(semiala izquierda)} \end{cases} \quad (3.52)$$

Si se sustituyen las ecuaciones 3.50 en la ecuación anterior, y se incluyen las definiciones de los puntos extremos definidas en 3.1, se obtiene la ecuación final que determina la posición de  $Q$ :

SEMI-ALA DERECHA ( $0 \leq \xi \leq 1 ; 0 \leq \eta \leq 1$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_Q(\xi, \eta) &= (1 - \eta) \xi \mathbf{R}_{CR} + \eta \xi \mathbf{R}_{RR} + \eta(1 - \xi) \mathbf{R}_{RF} + (1 - \eta)(1 - \xi) \mathbf{R}_{CF} = \\ &= (1 - \eta) \xi \begin{Bmatrix} c \\ 0 \end{Bmatrix} + \eta \xi \begin{Bmatrix} b/2 \tan(\Lambda_E) \\ b/2 \end{Bmatrix} + \eta(1 - \xi) \begin{Bmatrix} b/2 \tan(\Lambda_E) + c \\ b/2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.53)$$

SEMI-ALA IZQUIERDA ( $0 \leq \xi \leq 1 ; -1 \leq \eta \leq 0$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_Q(\xi, \eta) &= (1 + \eta) \xi \mathbf{R}_{CR} - \eta \xi \mathbf{R}_{LR} - \eta(1 - \xi) \mathbf{R}_{LF} + (1 + \eta)(1 - \xi) \mathbf{R}_{CF} = \\ &= (1 + \eta) \xi \begin{Bmatrix} c \\ 0 \end{Bmatrix} - \eta \xi \begin{Bmatrix} -b/2 \tan(\Lambda_E) \\ -b/2 \end{Bmatrix} - \eta(1 - \xi) \begin{Bmatrix} -b/2 \tan(\Lambda_E) + c \\ -b/2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Por tanto, ahora tan solo queda saber las coordenadas adimensionales de cada uno de los puntos que se quieren tratar.

En este caso, tal y como se ha mencionado interesa averiguar la posición de los nodos. Al dividir el ala en subdivisiones de igual magnitud, las posiciones adimensionales de los mismos no son difíciles de obtener y, a partir de estas, se obtendrán las coordenadas  $x$  e  $y$  de cada nodo. Para el cálculo de la posición  $\xi, \eta$  de cada nodo será necesario utilizar la *Matriz de Nodos* (3.47). Con esto, para cada nodo  $k$  se puede obtener sus coordenadas adimensionales que vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} \xi_k &= 1 - \frac{f_{k-1}}{n_x} \\ \eta_k &= -1 + 2 \frac{col_{k-1}}{n_y} \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde  $f_k$  es la fila y  $col_k$  la columna que ocupa el nodo.

é

Por tanto, si se aplican estas ecuaciones a todos los nodos de la malla realizada, se obtienen las coordenadas adimensionales de cada uno. Una vez conocidas las posiciones adimensionales, resulta sencillo obtener las medidas concretas. Lo único que hay que hacer, es aplicar la ecuación 3.55 en cada uno de los nodos de la ecuación anterior, de modo que se obtengan las coordenadas  $(x, y)$  dimensionales de cada uno de los nodos.

### Posición Puntos de Control de los Paneles

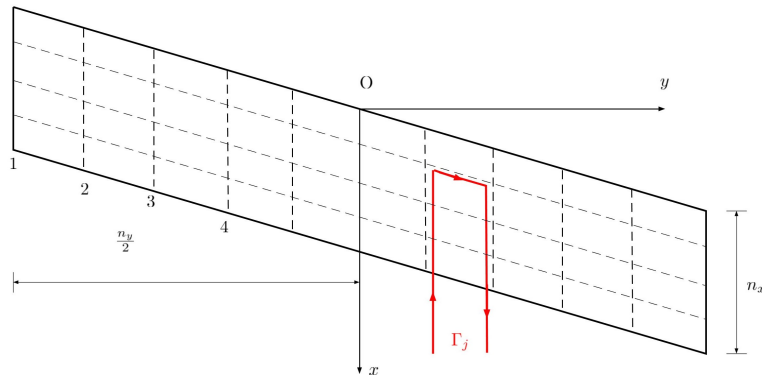


Figura 3.13: Subdivisión del ala con los torbellinos

Para continuar con el análisis aerodinámico del ala es necesario conocer la ubicación de los puntos de control de los paneles de modo que se pueda evaluar la velocidad vertical que inducen los torbellinos sobre éstos.

En este caso el punto de control  $C_j$  de cada panel se va a situar a  $1/4$  de la parte posterior de éste en el eje  $Y$ , mientras que en la dirección del eje  $X$  se va a situar justo a la mitad del panel. Además, la posición del torbellino en herradura con intensidad  $\Gamma_j$  queda de tal forma que entra al panel por su lado izquierdo y sale por el lado derecho, atravesándolo en una línea paralela al eje  $X$  que pasa por la el centro aerodinámico del panel, el cual se encuentra normalmente situado a  $1/4$  de la línea delantera del mismo. Un esquema de como queda un panel, con el punto de control  $C$  y el torbellino situado sobre él, con los puntos característicos del mismo se muestra en la Figura 3.14.

El punto  $C$  corresponde al punto de control, mientras que los puntos  $A$  y  $B$  corresponden a los puntos característicos del torbellino en herradura. Éstos se sitúan a  $3/4$  del borde trasero del panel, ya que el torbellino pasa por

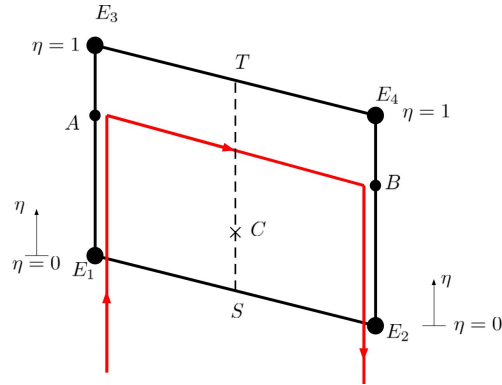


Figura 3.14: Panel con torbellino con puntos característicos

la línea del centro aerodinámico del panel situada a  $1/4$  del borde delantero. Además, se definen los puntos  $T$  y  $S$  de manera que se pueda obtener la posición del punto de control con las posiciones de los extremos del panel. Las posiciones de los distintos puntos vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_S &= \frac{1}{2}\mathbf{R}_{E1} + \frac{1}{2}\mathbf{R}_{E2} \\ \mathbf{R}_T &= \frac{1}{2}\mathbf{R}_{E3} + \frac{1}{2}\mathbf{R}_{E4} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Por tanto, ahora ya se puede pasar a definir la posición del punto de control, la cual se define con el vector  $\mathbf{R}_C$ :

$$\mathbf{R}_C = \frac{3}{4}\mathbf{R}_S + \frac{1}{4}\mathbf{R}_T = \frac{3}{8}\mathbf{R}_{E1} + \frac{3}{8}\mathbf{R}_{E2} + \frac{1}{8}\mathbf{R}_{E3} + \frac{1}{8}\mathbf{R}_{E4} \quad (3.57)$$

Además, las posiciones de los puntos  $A$  y  $B$  referentes a los torbellinos vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A &= [(1-\eta)\mathbf{R}_{E1} + \eta\mathbf{R}_{E3}]_{\eta=3/4} = \frac{1}{4}\mathbf{R}_{E1} + \frac{3}{4}\mathbf{R}_{E3} \\ \mathbf{R}_B &= \frac{1}{4}\mathbf{R}_{E2} + \frac{3}{4}\mathbf{R}_{E4} \end{aligned} \quad (3.58)$$

### 3.3.5. Condiciones de contorno en cada panel

En cada uno de los paneles en los que se subdivide el ala se tendrán unas condiciones de contorno que vendrán definidas por la velocidad vertical

inducida  $w$  en el punto de control, producida por el efecto de todos los torbellinos. Por tanto, la velocidad inducida en el panel  $k$  se define como:

$$w_k = U_\infty \left. \frac{\partial z_p}{\partial x} \right|_k \quad (3.59)$$

donde  $\left. \frac{\partial z_p}{\partial x} \right|_k$  es la pendiente en el punto de control  $k$ . Además, se puede comprobar de un modo sencillo que:

$$\alpha_k = - \left. \frac{\partial z_p}{\partial x} \right|_{(x_{Ck}, y_{Ck})} \quad (3.60)$$

siendo  $\alpha_k$  el ángulo de ataque del panel correspondiente al punto de control estudiado.

Si se deja como variables las intensidades de cada uno de los torbellinos y se agrupan el resto de variables entorno a estas, por combinación lineal se tiene:

$$w_k = H_{k1} \Gamma_1 + H_{k2} \Gamma_2 + \dots + H_{kN} \Gamma_N = U_\infty \left. \frac{\partial z_p}{\partial x} \right|_k \quad (3.61)$$

Si se aplica la expresión anterior a todos los puntos de control de los paneles se puede obtener una expresión en forma matricial que agrupe las contribuciones de cada uno de los torbellinos a la velocidad vertical de todos los paneles. De este modo se obtiene:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \dots \\ \Gamma_N \end{Bmatrix} = U_\infty \begin{Bmatrix} \left. \frac{\partial z_p}{\partial x} \right|_1 \\ \left. \frac{\partial z_p}{\partial x} \right|_2 \\ \dots \\ \left. \frac{\partial z_p}{\partial x} \right|_N \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

donde se puede expresar de forma compacta como:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{\Gamma} = U_\infty \mathbf{a} \quad (3.63)$$

siendo  $\mathbf{H}$  la matriz que incluye las contribuciones de todos los torbellinos en la velocidad vertical de los puntos de control de los paneles, el vector  $\mathbf{\Gamma}$  la que determina las intensidades de los torbellinos, y el vector  $\mathbf{a}$  calculado en (3.37) la pendiente de los paneles de control.

Sin embargo, el cálculo numérico de esta velocidad vertical en función de las intensidades de los torbellinos no es sencillo. Para su cálculo se utilizará



la Ley de Biot-Savart, la cual relaciona la velocidad de un fluido ocasionada por una singularidad en el mismo, como son los torbellinos. Gracias a la aplicación de esta ley se podrá obtener la matriz  $\mathbf{H}$  del problema.

### 3.4. Ley de Biot-Savart

#### 3.4.1. Teoremas de vórtices

Para poder utilizar el modelo de sustentación basado en torbellinos se necesita conocer las propiedades de los mismos llamadas teoremas de los vórtices. Estos teoremas están asociados con los nombres *Kelvin* y *Helmholtz* y fueron demostrados por *Karamcheti*. Los tres resultados más importantes son:

- A lo largo de una línea de torbellinos la circulación ( $\Gamma$ ) es constante
- Una línea de torbellinos no puede terminar de forma brusca en el fluido. Ésta debe ser:
  - Cerrada
  - Extenderse hasta el infinito
  - Acabar en un contorno sólido
- Un fluido inicial irrotacional y no viscoso, permanecerá irrotacional

Por tanto, como resultado de estos tres teoremas se puede sacar una importante conclusión:

- Un conjunto de vórtices puede sostener un salto en la velocidad tangencial (por ejemplo una fuerza) mientras la velocidad normal permanece continua. Esto significa que se puede utilizar un conjunto de vórtices para representar una superficie sustentadora.

#### 3.4.2. Ley de Biot-Savart

Una singularidad bidimensional cumple la ecuación de Laplace. En este caso, un torbellino en un punto queda:

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta \quad (3.64)$$

donde  $V_\theta$  es el flujo irrotacional del torbellino como se muestra a continuación:

No obstante con esta definición no se conoce el comportamiento del fluido en un caso tridimensional, donde el torbellino en lugar de encontrarse en un punto se trata una línea de torbellinos a lo largo del espacio. En este caso,

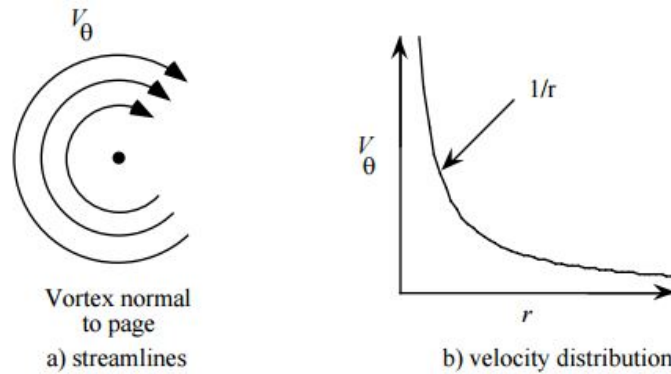


Figura 3.15: Torbellino en un punto

se tendría un filamento de torbellino de intensidad  $\Gamma$  como en la Figura 3.15. Cabe destacar que se utilizará  $\mathbf{r}$  para denotar vectores de distancia entre puntos, y por otro lado  $\mathbf{R}_P$  para definir las coordenadas de posición del punto  $P$  respecto del origen de coordenadas.

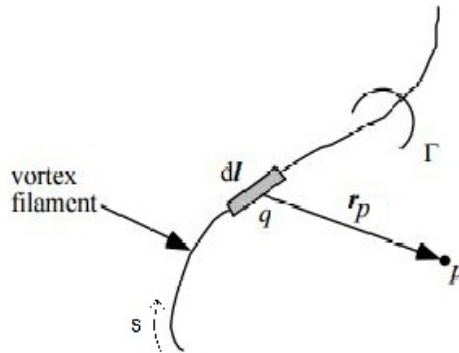


Figura 3.16: Filamento de torbellinos

donde la descripción matemática del flujo inducido por el filamento de intensidad  $\Gamma$  viene dada por la ley de Biot-Savart, la cual describe el aumento de velocidad  $d\mathbf{V}$  en un punto  $p$  debido a un segmento de longitud  $d\mathbf{l}$  en  $q$ . Matemáticamente queda:

$$d\mathbf{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}_P(s)}{|\mathbf{r}_P(s)|^3} \quad (3.65)$$

Por tanto, para obtener la velocidad inducida en el punto producida por todo el filamento, se deberá integrara lo largo de toda la longitud del mismo.

Hay que tener en cuenta que la intensidad  $\Gamma$  se mantiene constante a lo largo de todo el filamento, por lo que queda:

$$\vec{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_P(s)}{|\mathbf{r}_P(s)|^3} \quad (3.66)$$

Hay que tener en cuenta, que al obtenerse al velocidad inducida mediante un producto vectorial, la dirección de ésta será perpendicular al plano definido por  $d\vec{l}$  y  $\mathbf{r}_P(s)$  por definición.

Para el cálculo de la velocidad inducida se pueden distinguir tres tipos de filamento distintos según su longitud, ya sea infinita, semi-infinita o finita. A continuación se van a tratar los tres distintos casos.

### Filamento de longitud infinita ( $h=\text{cte}$ )

En el primer caso a tratar se considerará que el filamento tiene una longitud infinita con una distancia  $h$  hasta el punto  $P$  que permanece constante. La representación gráfica viene dada en la Figura 3.17.

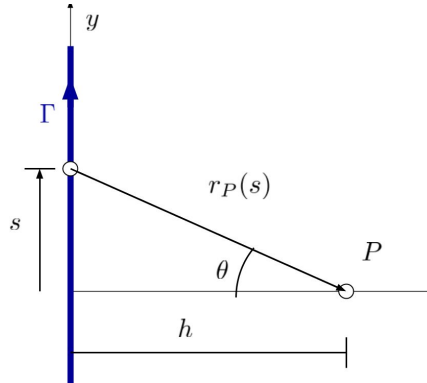


Figura 3.17: Filamento infinito de torbellinos

Usando la notación de la Figura anterior se evaluarán las expresiones de (3.66), donde queda:

$$\begin{aligned} ds &= dy \vec{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}_P(s) &= \mathbf{R}_P - \mathbf{R}(s) = h \vec{\mathbf{i}} - s \vec{\mathbf{j}} \\ d\vec{l} \times \mathbf{r}_P &= ds \vec{\mathbf{j}} \times (h \vec{\mathbf{i}} - s \vec{\mathbf{j}}) = -h ds \vec{\mathbf{k}} \\ |\mathbf{r}_P(s)|^3 &= (h^2 + s^2)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Si se sustituyen los valores obtenidos en (3.67) y se resuelve la integral, se obtendrá la velocidad inducida en un punto  $P$  producida por un filamento de torbellinos infinito con una intensidad  $\Gamma$ , la cual queda:

$$\mathbf{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{-h ds \vec{\mathbf{k}}}{(h^2 + s^2)^{3/2}} = -\frac{\Gamma h \vec{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(h^2 + s^2)^{3/2}} \quad (3.68)$$

Si ahora se aplica el cambio de variable  $s = h \eta$ , se tiene

$$\mathbf{V}_P = -\frac{\Gamma h \vec{\mathbf{k}} h}{4\pi h^3} \underbrace{\int_{\eta=-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)^{3/2}}}_{=2} = -\frac{\Gamma}{2\pi h} \vec{\mathbf{k}} \quad (3.69)$$

Como se puede observar, esta expresión coincide con la obtenida para el caso bidimensional en (3.64).

### Filamento de longitud semi-infinita

En este caso se considera que el torbellino se extiende desde el infinito hasta un punto genérico  $A$ . La representación gráfica sigue a continuación:

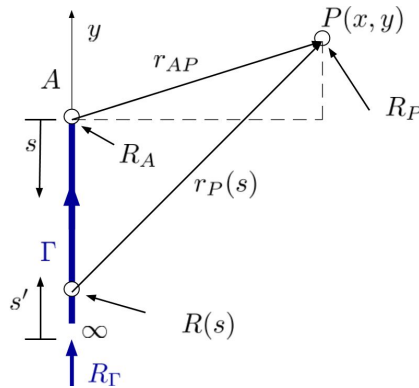


Figura 3.18: Filamento semi infinito de torbellinos

En este caso las variables definidas en la Figura 3.18 vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_P(s) &= \mathbf{R}_P - \mathbf{R}(s) \\ \mathbf{R}(s) - \mathbf{R}_A &= s(-\mathbf{R}_\Gamma) \\ \mathbf{R}_P &= \mathbf{R}_A + \mathbf{r}_{AP} \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde el vector  $\mathbf{R}_\Gamma$  es el vector unitario en el sentido de  $\Gamma$ . Si se sustituyen las definiciones en la primera ecuación y se evalúan los términos que intervienen en (3.66) queda:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_P(s) &= \mathbf{R}_P - \mathbf{R}(s) = \mathbf{R}_P - (\mathbf{R}_A - s\mathbf{R}_\Gamma) = \mathbf{r}_{AP} + s\mathbf{R}_\Gamma \\
 d\mathbf{l} &= ds \mathbf{R}_\Gamma \\
 |\mathbf{r}_P(s)| &= \sqrt{\mathbf{r}_P \cdot \mathbf{r}_P} = \sqrt{(\mathbf{r}_{AP} + s\mathbf{R}_\Gamma)^2} = \sqrt{|\mathbf{r}_{AP}|^2 + 2s \mathbf{r}_{AP} \cdot \mathbf{R}_\Gamma + s^2} \\
 d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_P &= ds \mathbf{R}_\Gamma \times (\mathbf{r}_{AP} + s\mathbf{R}_\Gamma) = ds \mathbf{R}_\Gamma \times \mathbf{r}_{AP} + \cancel{ds s \mathbf{R}_\Gamma \times \mathbf{R}_\Gamma}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Una vez se ha obtenido el valor de las distintas variables se pueden sustituir en (3.66) para poder determinar la velocidad inducida por un filamento de torbellinos semi-infinito, la cual queda:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_P &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{s=0}^{\infty} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_P}{|\mathbf{r}_P(s)|^3} = \\
 &= \frac{\Gamma}{4\pi} (\mathbf{R}_\Gamma \times \mathbf{r}_{AP}) \int_{s=0}^{\infty} \frac{ds}{(|\mathbf{r}_{AP}|^2 + 2s \mathbf{r}_{AP} \cdot \mathbf{R}_\Gamma + s^2)^{3/2}} = \tag{3.72} \\
 &= \mathbf{V}_P(\infty \rightarrow A)
 \end{aligned}$$

Esta expresión es muy útil para modelar un torbellino que se extienda desde el ala hacia el infinito aguas abajo de las misma.

### Filamento de longitud finita (segmento)

En este caso se va a estudiar la velocidad inducida en un punto que provoca un filamento de torbellinos con una determinada longitud.

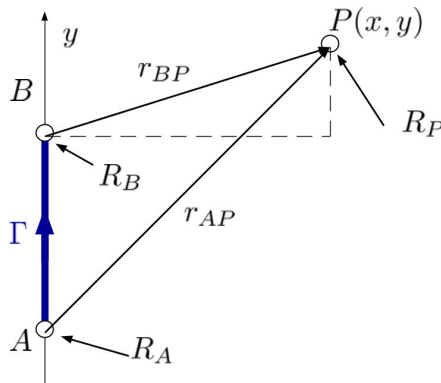


Figura 3.19: Filamento finito de torbellinos

En este caso la velocidad será la inducida por el torbellino semi-infinito hasta el punto  $B$ , quitándole la contribución desde el infinito hasta el punto  $A$ . De este modo queda:

$$\mathbf{V}_{A \rightarrow B} = \mathbf{V}_P(\infty \rightarrow B) - \mathbf{V}_P(\infty \rightarrow A) \quad (3.73)$$

Por tanto usando las ecuaciones (3.69) y (3.72) se pueden crear sistemas de torbellinos.

### 3.4.3. Torbellino en herradura

Este tipo de vórtices son específicos del *Vortex Lattice Method*. De este modo se utilizan las ecuaciones deducidas a partir de las leyes de Biot-Savart para crear un torbellino en herradura que se extienda desde el infinito hasta un punto  $A$  del ala, posteriormente desde  $A$  hasta un nuevo punto  $B$  del ala (ambos situados en el centro aerodinámico), para finalizar desde el punto  $B$  hasta el infinito de nuevo. La [Figura 3.20](#) muestra la disposición de los puntos.

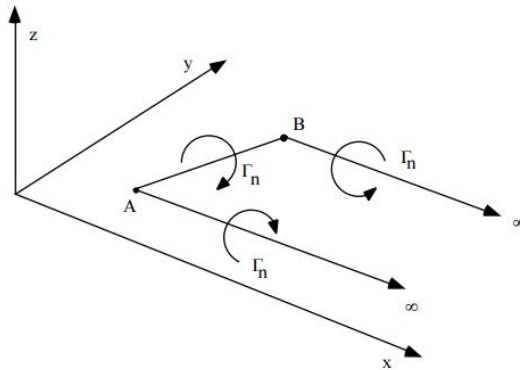


Figura 3.20: Torbellino en herradura

La velocidad inducida por este torbellino será la suma generada por las tres partes en las que se divide. Por tanto vendrá dada por la expresión:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_P(\infty \rightarrow A) + \mathbf{V}_P(A \rightarrow B) + \mathbf{V}_P(B \rightarrow \infty) \quad (3.74)$$

### Fórmula compacta de la velocidad

Para que se pueda resolver de un modo más sencillo se va a desarrollar la expresión (3.72) con la que se obtiene la velocidad inducida por un filamento

semi-infinito que termina en el punto A, de modo que se resuelva la integral y quede más compacta para un uso más sencillo. Inicialmente se tiene:

$$\mathbf{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi} (\mathbf{R}_\Gamma \times \mathbf{r}_{AP}) \int_{s=0}^{\infty} \frac{ds}{(|\mathbf{r}_{AP}|^2 + 2s \mathbf{r}_{AP} \cdot \mathbf{R}_\Gamma + s^2)^{3/2}} \quad (3.75)$$

donde se definen las variables  $\sigma$  y  $\mathbf{p}$  como:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{s}{|\mathbf{r}_{AP}|} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{R}_\Gamma \times \frac{\mathbf{r}_{AP}}{|\mathbf{r}_{AP}|} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Una vez se han realizado estas definiciones se puede pasar a resolver la integral, la cual queda como:

$$I = \int_{\sigma=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{r}_{AP}| d\sigma}{|\mathbf{r}_{AP}|^3 \left(1 + \frac{2s}{|\mathbf{r}_{AP}|} \left(\frac{\mathbf{r}_{AP}}{|\mathbf{r}_{AP}|} \cdot \mathbf{R}_\Gamma\right) + \frac{s^2}{|\mathbf{r}_{AP}|^2}\right)^{3/2}} = \quad (3.77)$$

donde se define  $k = \frac{\mathbf{r}_{AP}}{|\mathbf{r}_{AP}|} \cdot \mathbf{R}_\Gamma$  para facilitar su resolución. Oprando resulta;

$$I = \frac{1}{|\mathbf{r}_{AP}|^2} \int_{\sigma=0}^{\infty} \frac{d\sigma}{(1 + 2\sigma k + \sigma^2)^{3/2}} = \frac{1}{|\mathbf{r}_{AP}|^2} \frac{1}{1+k} \quad (3.78)$$

Por tanto se puede sustituir su valor en (3.75) para obtener el valor de la velocidad inducida:

$$\mathbf{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{R}_\Gamma \times \mathbf{r}_{AP}}{|\mathbf{r}_{AP}|^2} \frac{1}{1+k} \quad (3.79)$$

donde se puede definir el vector unitario  $\mathbf{e}_{AP} = \frac{\mathbf{r}_{AP}}{|\mathbf{r}_{AP}|}$  y al vector unitario del filamento  $\mathbf{R}_\Gamma$  se le llama  $\mathbf{e}_\Gamma$ , la ecuación anterior queda:

$$\mathbf{V}_P = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{e}_\Gamma \times \mathbf{e}_{AP}}{|\mathbf{r}_{AP}|} \frac{1}{1 + \mathbf{e}_\Gamma \cdot \mathbf{e}_{AP}} = \mathbf{V}_P(\infty \rightarrow A) \quad (3.80)$$

Esta ecuación es mucho mas sencilla de implementar para el cálculo de la velocidad inducida. Los parámetros de los que depende son el punto en el que finaliza el filamento de torbellinos, el punto donde se quiere calcular la velocidad y las características propias del torbellino como son la intensidad y la dirección del filamento.

Una vez hallada la ecuación de la velocidad, se deberá implementar un método iterativo para cada panel, de modo que se sumen las contribuciones de todos los torbellinos sobre el punto de control del mismo, tal y como se muestra en el Anexo II. Así de este modo poder obtener la matriz  $\mathbf{H}$  y poder resolver el problema.

### 3.5. Trabajo virtual y fuerzas generalizadas

Las fuerzas generalizadas son las componentes del trabajo virtual realizado por las fuerzas exteriores en función de los grados de libertad. Al aplicar sobre los grados de libertad una variación virtual  $\delta\mathbf{u}$ , los puntos del sistema se desplazan y con ellos las fuerzas de modo que realizan un trabajo, denominado trabajo virtual y que se representa por  $\delta W$ . En el caso que se está tratando, las fuerzas externas que actúan en el sistema es la fuerza de sustentación. Por lo que para poder resolver el problema energético se ha de evaluar el trabajo virtual de ésta. Al estar dividida el ala en paneles y cada panel tener una sustentación por unidad de envergadura distinta, el trabajo virtual será la suma de todos los trabajos virtuales de cada panel. Matemáticamente se expresa:

$$\delta W = \sum_{j=1}^N L_j \Delta y_j \delta z_{Aj} \quad (3.81)$$

donde  $\Delta y_j = b/n_y$  y el desplazamiento vertical esta definido en (3.41). Respecto a la sustentación or unidad de envergadura, ésta se define mediante la ley de *Kutta-Joukowski* que matricialmente queda:

$$\mathbf{L} = \rho U_\infty \mathbf{\Gamma} \quad (3.82)$$

donde  $\mathbf{\Gamma}$  se calcula mediante (3.63). Una vez conocidas todas la variables se puede proceder al cálculo del trabajo virtual de las fuerzas que actúan. En este caso se trata de la sustentación, la cual viene definida como:



$$\begin{aligned}
\delta W &= \left( \frac{b}{n_y} \right) \delta z_A^T \mathbf{L} = \left( \frac{2l \cos(\Lambda)}{n_y} \right) \cdot \underbrace{c \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}_z^T}_{\delta z_A} \cdot \underbrace{\rho U_\infty \mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{L}} = \\
&= \frac{\rho 2 l \cos(\Lambda) c U_\infty}{n_y} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}_z^T \underbrace{U_\infty \mathbf{H}^{-1} \mathbf{a}}_{\mathbf{\Gamma}} = \\
&= -\delta \mathbf{u}^T \left[ 4 \frac{\rho l \cos(\Lambda) c U_\infty^2}{2n_y} \mathbf{D}_z^T \mathbf{H}^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_r + \mathbf{D}_\alpha \mathbf{u}) \right] = \\
&= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Siendo  $\mathbf{Q}$  el vector de fuerzas generalizadas definido como:

$$\mathbf{Q} = l c^2 q (\mathbf{f}_r + \mathbf{A} \mathbf{u}) \tag{3.84}$$

donde las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{f}_r$  tienen la expresión:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_r &= \frac{-4 \cos(\Lambda)}{n_y} \mathbf{D}_z^T \left( \frac{\mathbf{H}^{-1}}{c} \right) \boldsymbol{\alpha}_r \\
\mathbf{A} &= \frac{-4 \cos(\Lambda)}{n_y} \mathbf{D}_z^T \left( \frac{\mathbf{H}^{-1}}{c} \right) \mathbf{D}_\alpha
\end{aligned} \tag{3.85}$$

siendo  $\mathbf{f}_r$  el término que agrupa las fuerzas exteriores al sistema que no dependen de los grados de libertad del sistema, aunque sí de la presión dinámica.

Para el caso estático que se esta tratando, las Ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{Q} \tag{3.86}$$

donde el término de la izquierda es el gradiente de la energía de deformación respecto a los grados de libertad. Si se aplica la definición de  $\mathcal{U}$  vista en (3.16) se tiene la expresión

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad \equiv \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{u}} = \left( \frac{GJ}{l} \boldsymbol{\mathcal{K}} \right) \mathbf{u} \tag{3.87}$$

Por tanto, con las ecuaciones (3.84), (3.86) y (3.87) se llega a una ecuación con la que se puede obtener la respuesta  $\mathbf{u}$  del sistema.

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = l c^2 q (\mathbf{f}_r + \mathbf{A} \mathbf{u}) \quad \equiv \quad (\mathbf{K} - l c^2 q \mathbf{A}) \mathbf{u} = l c^2 q \mathbf{f}_r \quad (3.88)$$

Si se asume la definición de  $K$  (3.20), y se divide toda la ecuación por  $GJ/l$  se obtiene un sistema cuya solución es adimensional

$$\left( \mathcal{K} - \frac{l^2 c^2}{GJ} q \mathbf{A} \right) = \frac{l^2 c^2}{GJ} q \mathbf{f}_r \quad (3.89)$$

No obstante, la presión dinámica  $q$  no se conoce. Habrá ciertos valores de  $q$  que anularan el sistema y para los cuales la respuesta se hace infinita. Matemáticamente se pueden encontrar mediante la resolución del sistema de autovalores homogéneo

$$\left( \mathcal{K} - \frac{q}{\left(\frac{GJ}{l^2 c^2}\right)} \mathbf{A} \right) \mathbf{u} = 0 \quad (3.90)$$

Si se considera  $\frac{GJ}{l^2 c^2}$  como una presión dinámica de referencia  $q_{D0}$ , y  $\lambda = \frac{q_D}{q_{D0}}$  el sistema queda

$$(\mathcal{K} - \lambda \mathbf{A}) \mathbf{u} = 0 \quad (3.91)$$

Los autovalores del sistema anterior son los valores de la presión dinámica de divergencia que provocan la respuesta infinita. No obstante, el valor mas pequeño es el único que tiene sentido desde un punto de vista físico ya que los valores superiores son inalcanzables, y se trata únicamente de estados teóricos.

# 4

## Resultados

A lo largo del trabajo se ha buscado un modo de calcular la divergencia en las alas oblicuas. Para ello, en los Capítulos 2 y 3 se han desarrollado 2 métodos distintos para llegar a una ecuación válida con la que obtenerla. En el Capítulo 2 se determina de manera analítica mediante la *Strip Theory*, mientras que en el Capítulo 3 se desarrolla de modo numérico haciendo uso del *Vortex Lattice Method* para su cálculo. En este capítulo se aplicarán las soluciones obtenidas anteriormente a un aeronave concreta con características similares al avión experimental AD-1 1.6 de modo que se pueda evaluar las limitaciones de actuación provocadas por la divergencia. Además, se variarán distintos elementos estructurales para poder ver el efecto que producen sobre la divergencia, y de este modo poder evaluar diversas mejoras que se puede aplicar sobre el aeronave para poder mejorar la respuesta de las misma frente a este fenómeno aeroelástico. Las principales características que modificaran en busca de una mejor respuesta son las rigideces a flexión y torsión, así como la distancia entre el eje elástico y aerodinámico y la longitud total del ala.

Inicialmente se ha realizado un análisis con con las características que vienen recogidas en la Tabla 4.1

Por tanto, si se aplican las expresiones obtenidas en los capitulos anteriores para el cálculo de la presión dinámica de divergencia y se representa en función de la flecha se obtiene

Aquí se puede ver como a medida que el ángulo de flecha de la aeronave

CARACTERÍSTICA	VALOR
Cuerda ( $c$ )	0,9 m
Envergadura ( $b$ )	20 m
Distancia $CA$ y $EE$ ( $e$ )	$c/4$
Ángulo de ataque ( $^\circ$ )	$2^\circ$

Cuadro 4.1: Características iniciales de la simulación

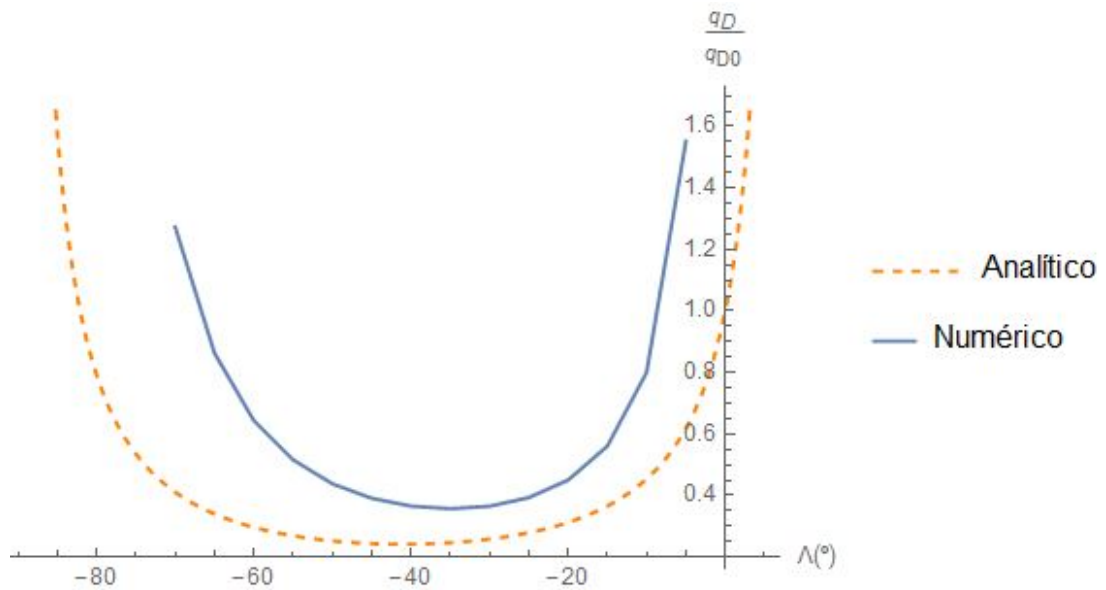


Figura 4.1: Presión dinámica de divergencia en función de la flecha

aumenta hacia valores negativos, la presión dinámica de divergencia decrece de modo exponencial, hasta llegar a un mínimo situado entre los treinta y cuarenta grados negativos. Sin embargo, a medida que se aumenta hacia ángulos de flecha positivos  $q$  tiende hacia el infinito, por lo que las restricciones las impone la flecha negativa. Esto se debe a la distinta deformación estructural que presenta cada tipo de flecha en las alas flexibles. Mientras que en la flecha positiva la deformación tiende a disminuir el ángulo de ataque del ala, en la flecha negativa es al contrario, por lo que al aumentar el ángulo de ataque de las secciones del ala provocará que se lleguen antes a las velocidades críticas de la misma.

Tal y como se puede observar en la Tabla 4.2, así como en la Figura 4.3 los resultados en ambos métodos difieren un poco, obteniendo mayores

ÁNGULO	ANALÍTICO	NUMÉRICO
-5°	0.618	1.55
-10°	0.454	0.8
-15°	0.365	0.56
-20°	0.312	0.45
-25°	0.279	0.392
-30°	0.258	0.365
-35°	0.246	0.357
-40°	0.242	0.365
-45°	0.243	0.391
-50°	0.252	0.438
-55°	0.269	0.516
-60°	0.296	0.643

Cuadro 4.2: Presiones dinámicas de divergencia adimensionales

resultados en el caso del modelo numérico. La principal causa de esta variación se debe a las simplificaciones realizadas en el caso del modelo analítico. Este método es muy práctico para un análisis inicial, ya que da resultados bastante decentes de modo que se pueda hacer una idea general de la respuesta que tendrá el sistema. Sin embargo, cuando se requiere precisión deja de tener validez.

Otro punto a destacar es que en el caso que se está tratando de las alas oblicuas, la Strip-Theory no deja analizar las dos semialas a la vez, ya que la flecha es distinta en ambos casos. A causa de este análisis por separado, se pierde el efecto de interacción que se produce entre las dos semialas al estar una por delante de la otra. Contrariamente, en el modelo numérico si se tiene en cuenta esta interacción a la hora de evaluar la sustentación del ala. En la Figura 4.2 se puede ver como en la semi-ala izquierda con una flecha negativa, la sustentación crece en la raíz, mientras que en la semiala derecha, ésta aumenta a medida que se acerca a punta de ala.

En términos de control de la aeronave esto es muy importante, ya que las zonas que suelen entrar antes en pérdida son los extremos del ala. Esta característica hace que las alas en flecha sean extremadamente eficaces para mantener la gobernabilidad en un avión. Por ello, la combinación de los dos tipos de ala en un avión con ala oblicua hace que éste tenga las características buenas, pero también malas, de cada tipo de ala, aunque a cierta escala.

Otro buen modo de evaluar la divergencia es analizar los parámetros que

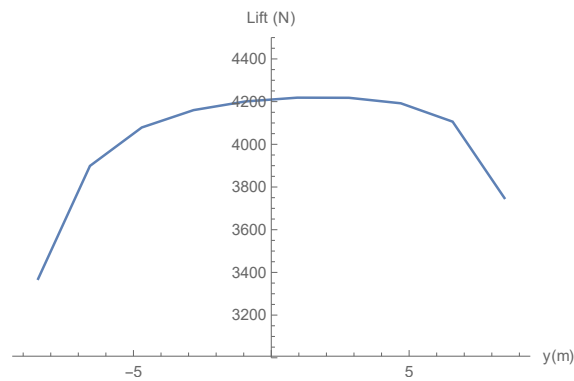


Figura 4.2: Presión dinámica de divergencia en función de la flecha

influyen en la presión dinámica, para saber los límites a los que pueden establecerse. La presión dinámica de divergencia viene dada por  $q = \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2$ , por lo que la velocidad y la altura de vuelo serán las características básicas para evitar o no la divergencia. Por esto, entre otros motivos, los aviones llevan en su manual de vuelo un dominio de vuelo que no pueden sobrepasar, ya que si se sobrepasan los límites en la estructura podrían aparecer los efectos aeroelásticos entre otras muchas cosas.

Para evaluar las velocidades a las que puede entrar un avión en divergencia, se han realizado cálculos a varias altitudes (5000m y 10000m) de modo que se pueda conocer como influyen estos dos parámetros. Se ha utilizado el método analítico, ya que para obtener resultados numéricos ofrece una mayor precisión

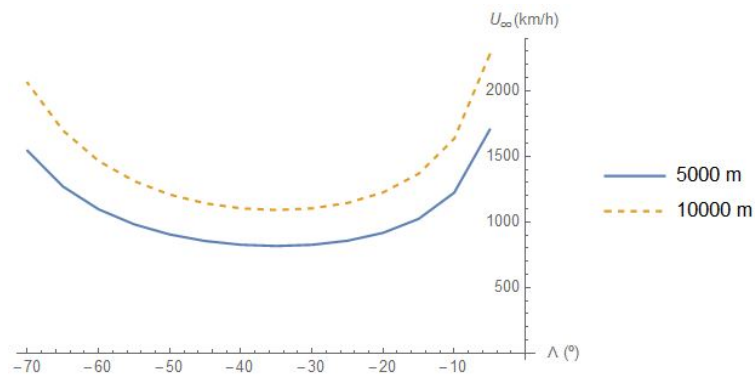


Figura 4.3: Velocidad de divergencia en km/h en función de la flecha

Tal y como se aprecia en la figura, a medida que la flecha se hace más grande, la velocidad de divergencia disminuye hasta alcanzar velocidades asumibles por gran parte de las aeronaves que operan hoy en día. Además, se puede ver como al aumentar la altitud se produce un aumento de la velocidad de divergencia. Esto se produce por la disminución de la densidad del aire, lo que producirá que las fuerzas sustentadoras que se producen en las alas sean menores, y por tanto aumenten los valores de las condiciones necesarias para que se produzca la divergencia. No obstante, no siempre se puede aumentar la altitud de modo que se evite la entrada en divergencia, por lo que se han de buscar otros métodos para intentar en mayor o menor medida que se produzca este fenómeno. Hasta ahora, tan solo se han visto los parámetros en la operación de la aeronave que pueden influir en la divergencia, pero también influyen en gran medida parámetros geométricos y estructurales del propio avión. Por ello se han realizado diversos cálculos variando la relación entre rigideces y la envergadura así como la posición del centro aerodinámico respecto al eje elástico, ya que son los parámetros referentes a la propia aeronave más influyentes.

#### Variación de $e$

El primer caso a estudiar se trata de la variación de la posición del eje elástico respecto al eje aerodinámico. Esta distancia se denomina  $e$ , y en la inmensa mayoría de las aeronaves suele ser positiva, lo que indica que el centro aerodinámico se encuentra por delante del eje elástico.

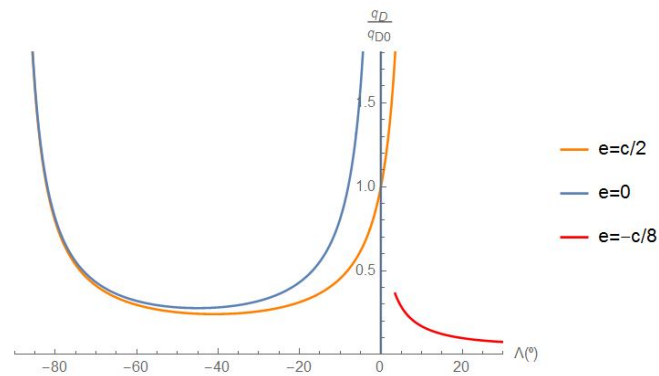


Figura 4.4: Presión dinámica de divergencia en función de  $e$

Tal y como se puede apreciar en la Figura 4.4 a medida que se acerca el eje elástico al aerodinámico  $q_D$  empieza a retrasar su aparición hacia ángulos de flecha menores, aunque la presión mínima sigue siendo constante, hasta que llega a un caso único cuando ambos ejes coinciden. En este caso, la divergencia por torsión desaparece, ya que las fuerzas externas no ejercen

momento sobre el eje elástico al estar aplicadas en el mismo punto. Además, una vez la posición del eje elástico sobrepasa al centro aerodinámico, es decir, esta delante, la presión dinámica de divergencia ocurre con flechas positivas, y no con negativas. Esto es muy importante para las alas con flecha negativa, ya que si se consiguiera construir el ala con el eje elástico más cerca del borde de ataque que el centro aerodinámico se podría evitar la aparición de la divergencia en este tipo de geometría alar. No obstante, la construcción de una ala con este tipo de estructura no suele ser nada habitual, ya que es mucho más compleja de construir.

### Variación de $l$

Otro parámetro constructivo del avión y que puede afectar al comportamiento del mismo frente a la divergencia es la envergadura. En este caso, al tratarse de un avión con ala oblicua con flecha variable, la envergadura vendrá definida por la longitud del ala y la flecha que se tenga. Si se grafica la influencia de este parámetro para  $q_D$  se obtiene

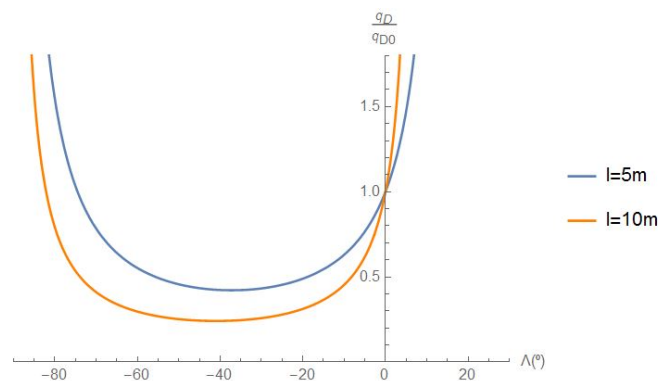


Figura 4.5: Presión dinámica de divergencia en función de  $l$

Al observar la Figura 4.5 se ve claramente como tener una gran envergadura afecta negativamente a la divergencia, bajando el valor de la presión dinámica a la que empieza a producirse este efecto. Esto se debe a que cuanto mayor envergadura tenga un aeroplano suele ser más flexible, por lo que se empezará a deformarse con unas perturbaciones menores.

### Variación de $\beta = \frac{GJ}{EI}$

Por último, uno de los parámetros muy importantes es la rigidez del ala, tanto a flexión como a torsión. Normalmente ambas están relacionadas, y en este caso su relación se ha definido mediante el parámetro  $\beta$ . Este valor suele



corresponder a valores entre 0,5 – 1,5. La representación de  $q_D$  en función de este valor queda

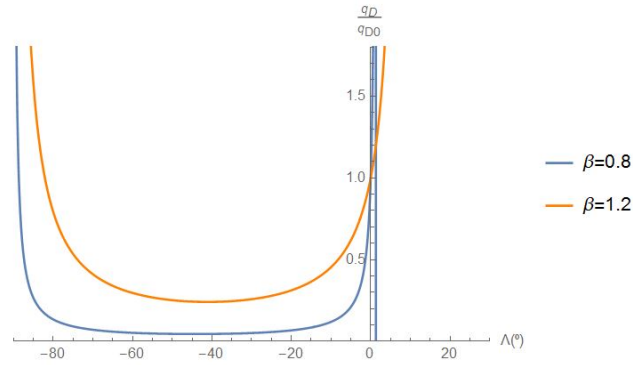


Figura 4.6: Presión dinámica de divergencia en función de  $\beta$

Como se puede apreciar en la Figura 4.6 a medida que la rigidez a torsión se hace mayor a la de flexión la presión dinámica de divergencia aumenta de manera notable sobretodo con flechas bajas. Esto se debe a que la deformación producida por la torsión del ala es mucho más influyente en la divergencia que la deformación por flexión, ya que ésta tan solo empieza a influir de manera notoria en el ángulo de ataque cuando se tienen alas con una flecha alta.

# 5

## Conclusiones

### 5.1. Introducción

En el presente Trabajo se ha buscado hallar la solución a la divergencia para aeronaves con ala oblicua mediante dos métodos:

- Resolución analítica basada en la *Strip Theory*
- Resolución numérica basada en el *Vortex Lattice Method*

La realización del cálculo mediante ambos métodos ha servido para validar el método numérico desarrollado en el Anexo II mediante la comparación con un modelo sencillo como es la *Strip Theory*. Como se ha podido comprobar en el capítulo anterior (4) los resultados son muy parecidos, aunque difieren en los extremos.

### 5.2. Conclusiones

Las discrepancias entre ambos modelos se deben principalmente a que el método analítico es muy bueno debido a su sencillez para evaluar mediante una primera aproximación el comportamiento que puede tener una aeronave, pero no sirve cuando se quieren obtener resultados con cierta precisión debido a las simplificaciones que se han realizado en su desarrollo. Contrariamente, la resolución numérica se puede adaptar a cualquier tipo de geometría y tiene en cuenta muchos más factores que el modelo analítico, como la interacción entre alas, así como la resolución del modelo aerodinámico en tres dimensiones, a diferencia de la *Strip Theory* que trabaja de manera

bidimensional.

Atendiendo a los resultados de la presión dinámica de divergencia en función de la flecha se puede determinar que la limitación de operabilidad viene dada principalmente por el comportamiento del ala en flecha negativa, ya que alcanzará antes la  $q_D$  provocando los efectos aeroelásticos en el ala de divergencia.

No obstante, se han visto distintos modos de conseguir retrasar esta entrada en divergencia de un aeronave mediante elementos estructurales y geométricos de la misma. Referente a las rigideces, se debe buscar siempre conseguir la mayor rigidez a torsión posible. Sin embargo, conseguir un aumento de  $GJ$  suele venir acompañado de un mayor peso y tiene que encontrarse un compromiso entre ambas partes, es por esto por lo que se inició la construcción de cajones de torsión, los cuales aumentan en gran medida la rigidez sin aumentar sobremanera el peso. Por otra parte, la envergadura del avión también será importante elegirla bien, ya que es una característica muy importante en el diseño de un aeronave. Influye en gran parte de las características del avión, y no se puede disminuir buscando aumentar  $q_D$  sin tener en consideración que puede bajar la sustentación proporcionada hasta tal punto que la aeronave no sea capaz de volar.

Por último, otro aspecto a tener en cuenta es la localización del eje elástico, ya que su posición también afecta en gran medida a la presión dinámica de divergencia, siendo más pronunciado el efecto a bajos ángulos de flecha. El movimiento del eje elástico hacia delante, hasta el punto de sobrepasar el eje aerodinámico en las alas en flechas negativa sería lo idóneo desde un punto de vista aeroelástico, ya que la divergencia tan sólo se produciría con flecha positiva.

Para un avión de ala oblicua como se trata, la configuración idónea sería tener un ala con el eje elástico adelantado respecto al aerodinámico con la otra de modo inverso. Esto evitaría que se produjese la divergencia, aunque estructuralmente es casi imposible de llevarlo a la práctica.

### 5.3. Estudios Futuros

Debido a los pocos estudios realizados sobre alas oblicuas y sus buenas propiedades frente a los modelos tradicionales, sería interesante la realización de diversos estudios que continuasen el trabajo expuesto en este documento.

Se ha realizado un análisis aeroelástico estático, sin tener en cuenta las dependencias del tiempo, sin embargo, también existen fenómenos aeroelásticos no estáticos. Sería interesante la continuación de este estudio

mediante el análisis del flameo en este tipo de alas, así como de la inversión de mando. Por otra parte la maniobrabilidad y controlabilidad de este tipo de aviones no se ha estudiado en profundidad desde que se tienen ayudas computacionales para el vuelo y la instrumentación de las aeronaves, por lo que el estudio del vuelo y la implementación de un sistema de control y estabilidad para este tipo de aeronaves puede ser un trabajo muy interesante.

Por otra parte, la esencia de este trabajo ha sido profundamente teórica, con la realización de un método bastante genérico para el cálculo de la divergencia en alas en flecha. No obstante, sería recomendable contrastar los resultados con estudios experimentales en túnel de viento, por lo que se deja la puerta abierta a este tipo de ensayos.

## Bibliografía

- [1] John D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill Education Ltd, 2010.
- [2] Raymond L. Bisplinghoff. *Principles of Aeroelasticity*. DOVER PUBL INC, 2013.
- [3] Robert E Curry and Alex G Sim. Unique flight characteristics of the ad-1 oblique-wing research airplane. *Journal of Aircraft*, 20(6):564–568, 1983.
- [4] Michael J Hirschberg, David M Hart, and Thomas J Beutner. A summary of a half-century of oblique wing research. *AIAA Paper*, 150:2007, 2007.
- [5] G. Alvin Pierce Dewey H. Hodges. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. CAMBRIDGE UNIV PR, 2013.
- [6] Robert T Jones. The oblique wing  $\frac{1}{2}$  aircraft design for transonic and low supersonic speeds. *Acta Astronautica*, 4(1-2):99–109, 1977.
- [7] Robert T Jones and James W Nisbet. Transonic transport wings-oblique or swept. 1974.
- [8] Walter P Nelms Jr. Applications of oblique-wing technology-an overview. 1976.
- [9] Engineering Raymond L. Bisplinghoff. *Aeroelasticity*. DOVER PUBL INC, 1996.
- [10] William H. Mason David R. McDaniel Russell M. Cummings, Scott A. Morton. *A Applied Computational Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2015.
- [11] AR Seebass. Oblique flying wing studies. In *New Design Concepts for High Speed Air Transport*, pages 317–336. Springer, 1997.
- [12] CD Wiler and SN White. Projected advantage of an oblique wing design on a fighter mission. In *AIAA, AHS, ASEE, Aircraft Design Systems and Operations Meeting, San Diego, CA*, 1984.

- [13] Richard M Wood and Steven XS Bauer. Flying wings/flying fuselages. *AIAA paper*, 311:2001, 2001.

# Appendices



# Presupuesto

## **A.1. Introducción**

En este documento se realiza un desglose de los costes que conlleva el realizar este Trabajo de fin de grado para finalizar con el presupuesto total del mismo. Para ello se describirán todos los costes parciales ocasionados por el proyecto, donde con la suma de todos ellos se puede obtener el coste global del proyecto.

Los distintos costes parciales que se han de tener en cuenta son tanto los coste de materiales como de personal, así como el coste de amortización de los equipos. Respecto al coste de personal, se ha de tener en cuenta todas las personas que han participado en el proyecto y evaluar el coste del trabajo de cada uno de los participantes. Además, se debe tener en consideración el incremento que supone del 21 % el Impuesto sobre el Valor Añadido (IVA). El tiempo total que se le ha dedicado a este trabajo han sido 3 meses durante 8 horas al día durante 20 días laborables cada mes.

## **A.2. Presupuestos Parciales**

### **A.2.1. Mano de obra**

Los costes que se computan a la mano de obra son los sueldos de las personas que han estado involucradas en el trabajo. En este caso la dedicación ha sido entera durante los 3 meses que ha durado el proyecto por parte de un alumno, y de 1 día a la semana por parte del profesor a media jornada. Por tanto, el coste asociado al personal viene dado a continuación



CONCEPTO	TIEMPO	COSTE UNITARIO	IMPORTE TOTAL
BSc Engineer	480 horas	20 €/hora	9600 €
Profesor	25 horas	50 €/hora	1250 €
TOTAL sin IVA			10850 €
TOTAL c/IVA		2278.5 €	<b>13128.5 €</b>

Cuadro A.1: Costes de la Mano de Obra

### A.2.2. Licencias de programas

Los costes de licencias vienen dados por el coste de adquisición de las mismas de los programas informáticos que se han utilizado para la realización de este proyecto. Estos costes están exentos del IVA. Las licencias de los programas son de 1 año

CONCEPTO	UNIDADES	COSTE UNITARIO	IMPORTE TOTAL
Licencia Matlab	1	398 €/unidad	398 €
Licencia Mathematica	1	3185 €/unidad	3185 €
Licencia Autodesk Inventor	1	18300 €/unidad	18300 €
TOTAL			<b>21883 €</b>

Cuadro A.2: Costes de las licencias

Los costes de los equipos informáticos no se incluyen en el presupuesto, ya que han sido adquiridos con anterioridad al desarrollo del proyecto, por lo que ya se encuentran amortizados.

# B

## Código Modelo Numérico

### **B.1. Introducción**

En este documento se expone el código desarrollado en *Mathematica* del modelo numérico desarrollado en el capítulo 3 de modo que se pueda utilizar para evaluar distintas condiciones a las expuestas en el presente trabajo.

# ANÁLISIS AEROELÁSTICO DE UN ALA OBLICUA

## MÉTODO NUMÉRICO

Mediante este método se obtendrán resultados numéricos específicos para el problema tratado

### INTRODUCCIÓN

A continuación se va a calcular la divergencia de un ala oblicua según el ángulo de flecha de la misma. Para poder evaluarla se debe realizar un análisis energético del sistema mediante las ecuaciones de Lagrange, para lo que se debe modelar la parte estructural, así como de fuerzas que actúan en el sistema.

Inicialmente se realizará un análisis de la estructura dividiendo ésta en seis nodos, tres a cada lado de la raíz, para poder obtener la matriz de rigidez del sistema. Posteriormente, mediante el método de Vortex Lattice se realizará un estudio de la fuerza de sustentación sobre el ala, de modo que se tengan tanto las energías internas como externas para poder aplicar el método de Lagrange y poder obtener una solución al problema de la divergencia en un ala oblicua.

### CONSIDERACIONES

Las consideraciones iniciales que se van a tomar van a ser las mismas que en el cálculo mediante Strip Theory. Esto va a permitir comparar los resultados obtenidos entre ambos métodos y conocer como de acertada es la Strip Theory con respecto al comportamiento real del ala.

- Rigidez a Torsion  $GJ$  constante a lo largo de todo el ala
- Rigidez a Flexión  $EI$  constante a lo largo de todo el ala
- Caso estacionario, sin dependencias del tiempo

## MODELIZACIÓN ESTRUCTURAL

```
In[5769]:= ClearAll["Global`*"]  
|borra todo
```

En primer lugar se va a realizar el cálculo estructural del ala. El ala se modelará como una viga, y el ángulo de ataque dependerá de la posición a lo largo de la envergadura por la rotación de la misma ( $\theta$ ) y el desplazamiento vertical debido a la flexión ( $w$ ).

### ■ VECTOR $u$ (Grados de libertad)

Primero se define el número total de nodos (T) en los que se desea dividir la respuesta estructural del ala. Es recomendable que sea un número par, de modo que se tenga el mismo número de nodos en cada semi - ala. En este caso se divide el ala en 6 nodos, por lo que se tendrán 12 grados de libertad, 2 por nodo, los cuales se agrupan en el vector u.

```
In[5770]:= T = 6; (*Número de nodos*)
u1 = Flatten[
  |aplana
  Table[If[i == 1, wi / c, If[Mod[i, 2] == 1, WIntegerPart[i/2]+1 / c, 0]], {i, 1, 2 T}]];
  |tabla |si |si |operación módulo
u2 = Flatten[Table[If[Mod[i, 2] == 0, θi/2, 0], {i, 1, 2 T}]];
  |aplana |tabla |si |operación módulo
u := u1 + u2
u // MatrixForm
  |forma de matriz
```

Out[5774]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ c \\ \theta_1 \\ w_2 \\ c \\ \theta_2 \\ w_3 \\ c \\ \theta_3 \\ w_4 \\ c \\ \theta_4 \\ w_5 \\ c \\ \theta_5 \\ w_6 \\ c \\ \theta_6 \end{pmatrix}$$

## ■ MATRIZ DE RIGIDEZ

### ALA DERECHA

#### CALCULO $w_D(Y)$ (ALA DERECHA)

```
In[5775]:= wD[Y_] := a0 + a1 Y + a2 Y2 + a3 Y3 + a4 Y4 + a5 Y5 + a6 Y6
```

#### Calculo Constantes

Ambas semialas

```
In[5776]:= CC1 = wD[0] == 0;
CC2 = wD'[0] == 0;
CC3 = wD''[1] == 0;
CC4 = wD'''[1] == 0;
```

Semiala derecha

```
In[5780]:= CC5 = wD[Y1] == w1;
          CC6 = wD[Y2] == w2;
          CC7 = wD[Y3] == w3;
```

```
In[5783]:= Y1 = 1/3;
          Y2 = 2/3;
          Y3 = 1;
```

```
In[5786]:= Clear[a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6]
          borra
```

```
In[5787]:= SolwD =
          Flatten[Solve[{CC1, CC2, CC3, CC4, CC5, CC6, CC7}, {a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6}]]
          aplana resuelve
```

```
Out[5787]= {a0 -> 0, a1 -> 0, a2 -> -\frac{-7776 w_1 + 4131 w_2 - 1232 w_3}{148 l^2},
          a3 -> -\frac{24 543 w_1 - 17 253 w_2 + 5461 w_3}{111 l^3}, a4 -> -\frac{-76 059 w_1 + 61 479 w_2 - 21 023 w_3}{222 l^4},
          a5 -> -\frac{3 (5751 w_1 - 5022 w_2 + 1793 w_3)}{74 l^5}, a6 -> \frac{3 (2916 w_1 - 2673 w_2 + 980 w_3)}{148 l^6}}
```

```
In[5788]:= a0 = a0 /. SolwD;
          a1 = a1 /. SolwD;
          a2 = a2 /. SolwD;
          a3 = a3 /. SolwD;
          a4 = a4 /. SolwD;
          a5 = a5 /. SolwD;
          a6 = a6 /. SolwD;
```

```
In[5795]:= wD[Y]
```

```
Out[5795]= -\frac{Y^4 (-76 059 w_1 + 61 479 w_2 - 21 023 w_3)}{222 l^4} -
          \frac{Y^2 (-7776 w_1 + 4131 w_2 - 1232 w_3)}{148 l^2} + \frac{3 Y^6 (2916 w_1 - 2673 w_2 + 980 w_3)}{148 l^6} -
          \frac{3 Y^5 (5751 w_1 - 5022 w_2 + 1793 w_3)}{74 l^5} - \frac{Y^3 (24 543 w_1 - 17 253 w_2 + 5461 w_3)}{111 l^3}
```

```
In[5796]:= Collect[wD[Y], {w1, w2, w3}]
          agrupa coeficientes
```

```
Out[5796]= \left( \frac{1944 Y^2}{37 l^2} - \frac{8181 Y^3}{37 l^3} + \frac{25 353 Y^4}{74 l^4} - \frac{17 253 Y^5}{74 l^5} + \frac{2187 Y^6}{37 l^6} \right) w_1 +
          \left( -\frac{4131 Y^2}{148 l^2} + \frac{5751 Y^3}{37 l^3} - \frac{20 493 Y^4}{74 l^4} + \frac{7533 Y^5}{37 l^5} - \frac{8019 Y^6}{148 l^6} \right) w_2 +
          \left( \frac{308 Y^2}{37 l^2} - \frac{5461 Y^3}{111 l^3} + \frac{21 023 Y^4}{222 l^4} - \frac{5379 Y^5}{74 l^5} + \frac{735 Y^6}{37 l^6} \right) w_3
```

## VECTOR NwD

```
In[5797]:= NwD[Y_] = Table[NwDIntegerPart[i/2]+1 = D[wD[Y], If[Mod[i, 2] == 1, u[[i]] c, u[[i]]]],
      {i, 1, 2 T}, {j, 1, 1}];
      NwD[Y] // MatrixForm
```

Out[5798]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1944 Y^2}{37 1^2} - \frac{8181 Y^3}{37 1^3} + \frac{25353 Y^4}{74 1^4} - \frac{17253 Y^5}{74 1^5} + \frac{2187 Y^6}{37 1^6} \\ 0 \\ -\frac{4131 Y^2}{148 1^2} + \frac{5751 Y^3}{37 1^3} - \frac{20493 Y^4}{74 1^4} + \frac{7533 Y^5}{37 1^5} - \frac{8019 Y^6}{148 1^6} \\ 0 \\ \frac{308 Y^2}{37 1^2} - \frac{5461 Y^3}{111 1^3} + \frac{21023 Y^4}{222 1^4} - \frac{5379 Y^5}{74 1^5} + \frac{735 Y^6}{37 1^6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[5799]:= NwD<sub>1</sub>

NwD<sub>2</sub>

NwD<sub>3</sub>

Out[5799]=  $\frac{1944 Y^2}{37 1^2} - \frac{8181 Y^3}{37 1^3} + \frac{25353 Y^4}{74 1^4} - \frac{17253 Y^5}{74 1^5} + \frac{2187 Y^6}{37 1^6}$

Out[5800]=  $-\frac{4131 Y^2}{148 1^2} + \frac{5751 Y^3}{37 1^3} - \frac{20493 Y^4}{74 1^4} + \frac{7533 Y^5}{37 1^5} - \frac{8019 Y^6}{148 1^6}$

Out[5801]=  $\frac{308 Y^2}{37 1^2} - \frac{5461 Y^3}{111 1^3} + \frac{21023 Y^4}{222 1^4} - \frac{5379 Y^5}{74 1^5} + \frac{735 Y^6}{37 1^6}$

## Solución wD (Y)

```
In[5802]:= wD[Y_] = (c Transpose[NwD[Y]] . u) [[1]]
```

Out[5802]= 
$$c \left( \frac{\left( \frac{1944 Y^2}{37 1^2} - \frac{8181 Y^3}{37 1^3} + \frac{25353 Y^4}{74 1^4} - \frac{17253 Y^5}{74 1^5} + \frac{2187 Y^6}{37 1^6} \right) w_1}{c} + \frac{\left( -\frac{4131 Y^2}{148 1^2} + \frac{5751 Y^3}{37 1^3} - \frac{20493 Y^4}{74 1^4} + \frac{7533 Y^5}{37 1^5} - \frac{8019 Y^6}{148 1^6} \right) w_2}{c} + \frac{\left( \frac{308 Y^2}{37 1^2} - \frac{5461 Y^3}{111 1^3} + \frac{21023 Y^4}{222 1^4} - \frac{5379 Y^5}{74 1^5} + \frac{735 Y^6}{37 1^6} \right) w_3}{c} \right)$$

## CALCULO $\theta D(Y)$

```
In[5803]:=  $\theta D[Y_] := b_0 + b_1 Y + b_2 Y^2 + b_3 Y^3 + b_4 Y^4$ 
```

## Calculo Constantes

In[5804]:=  $CC1\theta = \theta D[0] == 0;$

$CC2\theta = \theta D'[0] == 0;$

$CC3\theta = \theta D[Y1] == \theta_1;$

$CC4\theta = \theta D[Y2] == \theta_2;$

$CC5\theta = \theta D[Y3] == \theta_3;$

In[5809]:=  $Y1 = b/3;$

$Y2 = 2b/3;$

$Y3 = b;$

In[5812]:= `Clear[b0, b1, b2, b3, b4]`

`|borra`

In[5813]:= `Sol0D = Flatten[Solve[{CC10, CC20, CC30, CC40, CC50}, {b0, b1, b2, b3, b4}]]`

`|aplana |resuelve`

Out[5813]=  $\left\{ b0 \rightarrow 0, b1 \rightarrow 0, b2 \rightarrow -\frac{-108\theta_1 + 27\theta_2 - 4\theta_3}{4l^2}, \right.$   
 $\left. b3 \rightarrow -\frac{9(15\theta_1 - 6\theta_2 + \theta_3)}{2l^3}, b4 \rightarrow \frac{9(18\theta_1 - 9\theta_2 + 2\theta_3)}{4l^4} \right\}$

In[5814]:=  $b0 = b0 /. Sol0D;$

$b1 = b1 /. Sol0D;$

$b2 = b2 /. Sol0D;$

$b3 = b3 /. Sol0D;$

$b4 = b4 /. Sol0D;$

In[5819]:=  $\theta D[Y]$

Out[5819]=  $-\frac{Y^2(-108\theta_1 + 27\theta_2 - 4\theta_3)}{4l^2} - \frac{9Y^3(15\theta_1 - 6\theta_2 + \theta_3)}{2l^3} + \frac{9Y^4(18\theta_1 - 9\theta_2 + 2\theta_3)}{4l^4}$

In[5820]:=  $D[\theta D[Y], \theta_1]$

`|deriva`

Out[5820]=  $\frac{27Y^2}{l^2} - \frac{135Y^3}{2l^3} + \frac{81Y^4}{2l^4}$

## VECTOR NØD

```
In[5821]:= NØD[Y_] = Table[
  |tabla
  NØDi/2 = D[ØD[Y], If[Mod[i, 2] == 1, u[[i]] c, u[[i]]]], {i, 1, 2 T}, {j, 1, 1}];
  |deriva |si |operación módulo
NØD[Y] // MatrixForm
  |forma de matriz
```

Out[5822]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{27 Y^2}{1^2} - \frac{135 Y^3}{2 1^3} + \frac{81 Y^4}{2 1^4} \\ 0 \\ -\frac{27 Y^2}{4 1^2} + \frac{27 Y^3}{1^3} - \frac{81 Y^4}{4 1^4} \\ 0 \\ \frac{Y^2}{1^2} - \frac{9 Y^3}{2 1^3} + \frac{9 Y^4}{2 1^4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[5823]:= NØD<sub>1</sub>

NØD<sub>2</sub>

NØD<sub>3</sub>

Out[5823]=  $\frac{27 Y^2}{1^2} - \frac{135 Y^3}{2 1^3} + \frac{81 Y^4}{2 1^4}$

Out[5824]=  $-\frac{27 Y^2}{4 1^2} + \frac{27 Y^3}{1^3} - \frac{81 Y^4}{4 1^4}$

Out[5825]=  $\frac{Y^2}{1^2} - \frac{9 Y^3}{2 1^3} + \frac{9 Y^4}{2 1^4}$

## Solución ØD (Y)

```
In[5826]:= ØD[Y_] = (Transpose[NØD[Y]] . u) [[1]]
  |transposición
```

Out[5826]=  $\left(\frac{27 Y^2}{1^2} - \frac{135 Y^3}{2 1^3} + \frac{81 Y^4}{2 1^4}\right) \theta_1 + \left(-\frac{27 Y^2}{4 1^2} + \frac{27 Y^3}{1^3} - \frac{81 Y^4}{4 1^4}\right) \theta_2 + \left(\frac{Y^2}{1^2} - \frac{9 Y^3}{2 1^3} + \frac{9 Y^4}{2 1^4}\right) \theta_3$

In[5827]:=



## MATRIZ DE RIGIDEZ DERECHA

### MATRIZ DE RIGIDEZ A FLEXIÓN

$$\text{In[5828]:= } \mathbf{KfD} = \int_0^1 \mathbf{EI} \, c^2 \left( \underset{\text{deriva}}{D[\text{NwD}[\mathbf{Y}], \{\mathbf{Y}, 2\}]} \right) \cdot \left( \underset{\text{transposición}}{\text{Transpose}} \left[ \underset{\text{deriva}}{D[\text{NwD}[\mathbf{Y}], \{\mathbf{Y}, 2\}]} \right] \right) d\mathbf{Y};$$

**KfD // MatrixForm**  
 [forma de matriz]

$$\text{Out[5829]/MatrixForm=}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{31512483 \, c^2 \, \text{EI}}{47915 \, 1^3} & 0 & -\frac{158507199 \, c^2 \, \text{EI}}{383320 \, 1^3} & 0 & \frac{5644566 \, c^2 \, \text{EI}}{47915 \, 1^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{158507199 \, c^2 \, \text{EI}}{383320 \, 1^3} & 0 & \frac{36157671 \, c^2 \, \text{EI}}{95830 \, 1^3} & 0 & -\frac{51794073 \, c^2 \, \text{EI}}{383320 \, 1^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5644566 \, c^2 \, \text{EI}}{47915 \, 1^3} & 0 & -\frac{51794073 \, c^2 \, \text{EI}}{383320 \, 1^3} & 0 & \frac{2677457 \, c^2 \, \text{EI}}{47915 \, 1^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### MATRIZ DE RIGIDEZ A TORSIÓN

$$\text{In[5830]:= } \mathbf{K\theta D} = \int_0^1 \mathbf{GJ} \left( \underset{\text{deriva}}{D[\text{N\theta D}[\mathbf{Y}], \{\mathbf{Y}\}]} \right) \cdot \left( \underset{\text{transposición}}{\text{Transpose}} \left[ \underset{\text{deriva}}{D[\text{N\theta D}[\mathbf{Y}], \{\mathbf{Y}\}]} \right] \right) d\mathbf{Y};$$

**KθD // MatrixForm**  
 [forma de matriz]

$$\text{Out[5831]/MatrixForm=}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2673 \, \text{GJ}}{140 \, 1} & 0 & -\frac{7047 \, \text{GJ}}{560 \, 1} & 0 & \frac{423 \, \text{GJ}}{140 \, 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7047 \, \text{GJ}}{560 \, 1} & 0 & \frac{486 \, \text{GJ}}{35 \, 1} & 0 & -\frac{3177 \, \text{GJ}}{560 \, 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{423 \, \text{GJ}}{140 \, 1} & 0 & -\frac{3177 \, \text{GJ}}{560 \, 1} & 0 & \frac{1667 \, \text{GJ}}{420 \, 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_D$ 

```
In[5832]:= KD = KFD + KØD (* /. 1 -> b/2 / cos[Δ] *) ;
```

```
KD // MatrixForm
```

```
forma de matriz
```

```
Out[5833]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{31512483 c^2 EI}{47915 l^3} & 0 & -\frac{158507199 c^2 EI}{383320 l^3} & 0 & \frac{5644566 c^2 EI}{47915 l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2673 GJ}{140 l} & 0 & -\frac{7047 GJ}{560 l} & 0 & \frac{423 GJ}{140 l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{158507199 c^2 EI}{383320 l^3} & 0 & \frac{36157671 c^2 EI}{95830 l^3} & 0 & -\frac{51794073 c^2 EI}{383320 l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7047 GJ}{560 l} & 0 & \frac{486 GJ}{35 l} & 0 & -\frac{3177 GJ}{560 l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5644566 c^2 EI}{47915 l^3} & 0 & -\frac{51794073 c^2 EI}{383320 l^3} & 0 & \frac{2677457 c^2 EI}{47915 l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{423 GJ}{140 l} & 0 & -\frac{3177 GJ}{560 l} & 0 & \frac{1667 GJ}{420 l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## ALA IZQUIERDA

### CALCULO wI(Y) (ALA IZQUIERDA)

```
In[5834]:= wI[Y_] := c0 + c1 Y + c2 Y^2 + c3 Y^3 + c4 Y^4 + c5 Y^5 + c6 Y^6
```

#### Calculo Constantes

Ambas semialas

```
In[5835]:= CC1 = wI[0] == 0 ;
```

```
CC2 = wI'[0] == 0 ;
```

```
CC3 = wI''[1] == 0 ;
```

```
CC4 = wI'''[1] == 0 ;
```

Semiala derecha

```
In[5839]:= CC5 = wI[Y4] == w4 ;
```

```
CC6 = wI[Y5] == w5 ;
```

```
CC7 = wI[Y6] == w6 ;
```

```
In[5842]:= Y4 = 1 / 3 ;
```

```
Y5 = 2 / 3 ;
```

```
Y6 = 1 ;
```

```
In[5845]:= Clear[c0, c1, c2, c3, c4, c5, c6]
```

```
borra
```

In[5846]:= **SolwI =**

**Flatten[Solve[{CC1, CC2, CC3, CC4, CC5, CC6, CC7}, {c0, c1, c2, c3, c4, c5, c6}]]**  
[\[aplana\]](#) [\[resolver\]](#)

$$\text{Out[5846]= } \left\{ \begin{array}{l} c0 \rightarrow 0, c1 \rightarrow 0, c2 \rightarrow -\frac{-7776 w_4 + 4131 w_5 - 1232 w_6}{148 1^2}, \\ c3 \rightarrow -\frac{24 543 w_4 - 17 253 w_5 + 5461 w_6}{111 1^3}, c4 \rightarrow -\frac{-76 059 w_4 + 61 479 w_5 - 21 023 w_6}{222 1^4}, \\ c5 \rightarrow -\frac{3 (5751 w_4 - 5022 w_5 + 1793 w_6)}{74 1^5}, c6 \rightarrow \frac{3 (2916 w_4 - 2673 w_5 + 980 w_6)}{148 1^6} \end{array} \right\}$$

In[5847]:= **c0 = c0 /. SolwI;**

**c1 = c1 /. SolwI;**

**c2 = c2 /. SolwI;**

**c3 = c3 /. SolwI;**

**c4 = c4 /. SolwI;**

**c5 = c5 /. SolwI;**

**c6 = c6 /. SolwI;**

In[5854]:= **wI[Y]**

$$\text{Out[5854]= } -\frac{Y^4 (-76 059 w_4 + 61 479 w_5 - 21 023 w_6)}{222 1^4} - \frac{Y^2 (-7776 w_4 + 4131 w_5 - 1232 w_6)}{148 1^2} + \frac{3 Y^6 (2916 w_4 - 2673 w_5 + 980 w_6)}{148 1^6} - \frac{3 Y^5 (5751 w_4 - 5022 w_5 + 1793 w_6)}{74 1^5} - \frac{Y^3 (24 543 w_4 - 17 253 w_5 + 5461 w_6)}{111 1^3}$$

## VECTOR NwI

In[5855]:= **NwI[Y\_] = Table[NwIIntegerPart[i/2]+1 = D[wI[Y], If[Mod[i, 2] == 1, u[[i]] c, u[[i]]]],**  
[\[tabla\]](#) [\[deriva\]](#) [\[si\]](#) [\[operación módulo\]](#)

**{i, 1, 2 T}, {j, 1, 1}];**

**NwI[Y] // MatrixForm**

[\[forma de matriz\]](#)

Out[5856]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1944 Y^2}{37 1^2} - \frac{8181 Y^3}{37 1^3} + \frac{25353 Y^4}{74 1^4} - \frac{17253 Y^5}{74 1^5} + \frac{2187 Y^6}{37 1^6} \\ 0 \\ -\frac{4131 Y^2}{148 1^2} + \frac{5751 Y^3}{37 1^3} - \frac{20493 Y^4}{74 1^4} + \frac{7533 Y^5}{37 1^5} - \frac{8019 Y^6}{148 1^6} \\ 0 \\ \frac{308 Y^2}{37 1^2} - \frac{5461 Y^3}{111 1^3} + \frac{21023 Y^4}{222 1^4} - \frac{5379 Y^5}{74 1^5} + \frac{735 Y^6}{37 1^6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[5857]:= **NwI<sub>4</sub>****NwI<sub>5</sub>****NwI<sub>6</sub>**

$$\text{Out[5857]} = \frac{1944 Y^2}{37 1^2} - \frac{8181 Y^3}{37 1^3} + \frac{25353 Y^4}{74 1^4} - \frac{17253 Y^5}{74 1^5} + \frac{2187 Y^6}{37 1^6}$$

$$\text{Out[5858]} = -\frac{4131 Y^2}{148 1^2} + \frac{5751 Y^3}{37 1^3} - \frac{20493 Y^4}{74 1^4} + \frac{7533 Y^5}{37 1^5} - \frac{8019 Y^6}{148 1^6}$$

$$\text{Out[5859]} = \frac{308 Y^2}{37 1^2} - \frac{5461 Y^3}{111 1^3} + \frac{21023 Y^4}{222 1^4} - \frac{5379 Y^5}{74 1^5} + \frac{735 Y^6}{37 1^6}$$

## Solución wI (Y)

In[5860]:= **wI[Y\_] = (c Transpose[NwI[Y]] . u) [[1]]**

|transposición

$$\text{Out[5860]} = c \left( \frac{\left( \frac{1944 Y^2}{37 1^2} - \frac{8181 Y^3}{37 1^3} + \frac{25353 Y^4}{74 1^4} - \frac{17253 Y^5}{74 1^5} + \frac{2187 Y^6}{37 1^6} \right) w_4}{c} + \frac{\left( -\frac{4131 Y^2}{148 1^2} + \frac{5751 Y^3}{37 1^3} - \frac{20493 Y^4}{74 1^4} + \frac{7533 Y^5}{37 1^5} - \frac{8019 Y^6}{148 1^6} \right) w_5}{c} + \frac{\left( \frac{308 Y^2}{37 1^2} - \frac{5461 Y^3}{111 1^3} + \frac{21023 Y^4}{222 1^4} - \frac{5379 Y^5}{74 1^5} + \frac{735 Y^6}{37 1^6} \right) w_6}{c} \right)$$

## CALCULO $\theta$ (X)

In[5861]:=  **$\theta I[Y_] := d0 + d1 Y + d2 Y^2 + d3 Y^3 + d4 Y^4$** 

### Calculo Constantes

In[5862]:= **CC1 $\theta$  =  $\theta I[0] == 0;$** **CC2 $\theta$  =  $\theta I'[0] == 0;$** **CC3 $\theta$  =  $\theta I[Y4] == \theta_4;$** **CC4 $\theta$  =  $\theta I[Y5] == \theta_5;$** **CC5 $\theta$  =  $\theta I[Y6] == \theta_6;$** In[5867]:= **Y4 = 1/3;****Y5 = 2/3;****Y6 = 1;**In[5870]:= **Clear[d0, d1, d2, d3, d4]**

|borra

In[5871]:= **Sol $\theta I$  = Flatten[Solve[{CC1 $\theta$ , CC2 $\theta$ , CC3 $\theta$ , CC4 $\theta$ , CC5 $\theta$ }, {d0, d1, d2, d3, d4}]]**

|aplana |resuelve

$$\text{Out[5871]} = \left\{ d0 \rightarrow 0, d1 \rightarrow 0, d2 \rightarrow -\frac{-108 \theta_4 + 27 \theta_5 - 4 \theta_6}{4 1^2}, \right. \\ \left. d3 \rightarrow -\frac{9 (15 \theta_4 - 6 \theta_5 + \theta_6)}{2 1^3}, d4 \rightarrow \frac{9 (18 \theta_4 - 9 \theta_5 + 2 \theta_6)}{4 1^4} \right\}$$

```
In[5872]:= d0 = d0 /. Sol0I;
d1 = d1 /. Sol0I;
d2 = d2 /. Sol0I;
d3 = d3 /. Sol0I;
d4 = d4 /. Sol0I;
```

```
In[5877]:= 0I[Y]
```

$$\text{Out[5877]} = -\frac{Y^2 (-108 \theta_4 + 27 \theta_5 - 4 \theta_6)}{4 1^2} - \frac{9 Y^3 (15 \theta_4 - 6 \theta_5 + \theta_6)}{2 1^3} + \frac{9 Y^4 (18 \theta_4 - 9 \theta_5 + 2 \theta_6)}{4 1^4}$$

## VECTOR N0I

```
In[5878]:= N0I[Y_] = Table[
```

```
  tabla
```

```
  N0I_{i/2} = D[0I[Y], If[Mod[i, 2] == 1, u[[i]] c, u[[i]]], {i, 1, 2 T}, {j, 1, 1}];
```

```
  deriva si operación módulo
```

```
  N0I[Y] // MatrixForm
```

```
  forma de matriz
```

```
Out[5879]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{27 Y^2}{1^2} - \frac{135 Y^3}{2 1^3} + \frac{81 Y^4}{2 1^4} \\ 0 \\ -\frac{27 Y^2}{4 1^2} + \frac{27 Y^3}{1^3} - \frac{81 Y^4}{4 1^4} \\ 0 \\ \frac{Y^2}{1^2} - \frac{9 Y^3}{2 1^3} + \frac{9 Y^4}{2 1^4} \end{pmatrix}$$

```
In[5880]:= N0I_4
```

```
N0I_5
```

```
N0I_6
```

$$\text{Out[5880]} = \frac{27 Y^2}{1^2} - \frac{135 Y^3}{2 1^3} + \frac{81 Y^4}{2 1^4}$$

$$\text{Out[5881]} = -\frac{27 Y^2}{4 1^2} + \frac{27 Y^3}{1^3} - \frac{81 Y^4}{4 1^4}$$

$$\text{Out[5882]} = \frac{Y^2}{1^2} - \frac{9 Y^3}{2 1^3} + \frac{9 Y^4}{2 1^4}$$

## Solución 0I (Y)

```
In[5883]:= 0I[Y_] = (Transpose[N0I[Y]] . u) [[1]]
```

```
  transposición
```

$$\text{Out[5883]} = \left( \frac{27 Y^2}{1^2} - \frac{135 Y^3}{2 1^3} + \frac{81 Y^4}{2 1^4} \right) \theta_4 + \left( -\frac{27 Y^2}{4 1^2} + \frac{27 Y^3}{1^3} - \frac{81 Y^4}{4 1^4} \right) \theta_5 + \left( \frac{Y^2}{1^2} - \frac{9 Y^3}{2 1^3} + \frac{9 Y^4}{2 1^4} \right) \theta_6$$

## MATRIZ DE RIGIDEZ IZQUIERDA

### MATRIZ DE RIGIDEZ A FLEXIÓN

### MATRIZ DE RIGIDEZ A TORSIÓN

$K_I$

## K

Se introduce un parámetro  $\beta$  que relaciona la rigidez a torsión con la de flexión

In[5890]:=  $EI = \beta GJ$ ;

In[5891]:=  $K = KD + KI$ ;

**K // MatrixForm**

[forma de matriz

Out[5892]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
 \frac{31\,512\,483\,c^2\,GJ\,\beta}{47\,915\,1^3} & 0 & -\frac{158\,507\,199\,c^2\,GJ\,\beta}{383\,320\,1^3} & 0 & \frac{5\,644\,566\,c^2\,GJ\,\beta}{47\,915\,1^3} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{2673\,GJ}{140\,1} & 0 & -\frac{7047\,GJ}{560\,1} & 0 & \frac{423\,GJ}{140\,1} & 0 \\
 -\frac{158\,507\,199\,c^2\,GJ\,\beta}{383\,320\,1^3} & 0 & \frac{36\,157\,671\,c^2\,GJ\,\beta}{95\,830\,1^3} & 0 & -\frac{51\,794\,073\,c^2\,GJ\,\beta}{383\,320\,1^3} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{7047\,GJ}{560\,1} & 0 & \frac{486\,GJ}{35\,1} & 0 & -\frac{3177\,GJ}{560\,1} & 0 \\
 \frac{5\,644\,566\,c^2\,GJ\,\beta}{47\,915\,1^3} & 0 & -\frac{51\,794\,073\,c^2\,GJ\,\beta}{383\,320\,1^3} & 0 & \frac{2\,677\,457\,c^2\,GJ\,\beta}{47\,915\,1^3} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{423\,GJ}{140\,1} & 0 & -\frac{3177\,GJ}{560\,1} & 0 & \frac{1667\,GJ}{420\,1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{31\,512\,483\,c^2\,GJ\,\beta}{47\,915\,1^3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{158\,507\,199\,c^2\,GJ\,\beta}{383\,320\,1^3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5\,644\,566\,c^2\,GJ\,\beta}{47\,915\,1^3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Para una mejor comprensión del caso y poder realizar comparaciones futuras, se adimensionaliza la matriz de rigidez

In[5893]:= **Kadim** =  $\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{GJ} / l}$ ; **Kadim** // **MatrixForm**  
 [forma de matriz]

Out[5893]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{31512483 c^2 \beta}{47915 l^2} & 0 & -\frac{158507199 c^2 \beta}{383320 l^2} & 0 & \frac{5644566 c^2 \beta}{47915 l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2673}{140} & 0 & -\frac{7047}{560} & 0 & \frac{423}{140} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{158507199 c^2 \beta}{383320 l^2} & 0 & \frac{36157671 c^2 \beta}{95830 l^2} & 0 & -\frac{51794073 c^2 \beta}{383320 l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7047}{560} & 0 & \frac{486}{35} & 0 & -\frac{3177}{560} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5644566 c^2 \beta}{47915 l^2} & 0 & -\frac{51794073 c^2 \beta}{383320 l^2} & 0 & \frac{2677457 c^2 \beta}{47915 l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{423}{140} & 0 & -\frac{3177}{560} & 0 & \frac{1667}{420} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{31512483 c^2 \beta}{47915 l^2} & 0 & -\frac{1585071}{38332} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2673}{140} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{158507199 c^2 \beta}{383320 l^2} & 0 & \frac{36157671}{95830} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7047}{560} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5644566 c^2 \beta}{47915 l^2} & 0 & -\frac{51794073}{38332} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{423}{140} & 0 \end{pmatrix}$$

## ■ ÁNGULOS DE ATAQUE

### ÁNGULO DE ATAQUE ALA DERECHA

In[5894]:=  $\varphi\mathbf{D}[\mathbf{Y}_-] := \mathbf{c} \mathbf{D}[\mathbf{NwD}[\mathbf{Y}], \mathbf{Y}]$   
 [derivada]

$\varphi\mathbf{D}[\mathbf{Y}]$  // **MatrixForm**  
 [forma de matriz]

Out[5895]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c} \left( \frac{3888 \mathbf{Y}}{37 l^2} - \frac{24543 \mathbf{Y}^2}{37 l^3} + \frac{50706 \mathbf{Y}^3}{37 l^4} - \frac{86265 \mathbf{Y}^4}{74 l^5} + \frac{13122 \mathbf{Y}^5}{37 l^6} \right) \\ 0 \\ \mathbf{c} \left( -\frac{4131 \mathbf{Y}}{74 l^2} + \frac{17253 \mathbf{Y}^2}{37 l^3} - \frac{40986 \mathbf{Y}^3}{37 l^4} + \frac{37665 \mathbf{Y}^4}{37 l^5} - \frac{24057 \mathbf{Y}^5}{74 l^6} \right) \\ 0 \\ \mathbf{c} \left( \frac{616 \mathbf{Y}}{37 l^2} - \frac{5461 \mathbf{Y}^2}{37 l^3} + \frac{42046 \mathbf{Y}^3}{111 l^4} - \frac{26895 \mathbf{Y}^4}{74 l^5} + \frac{4410 \mathbf{Y}^5}{37 l^6} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[5896]:= **Transpose**[ $\varphi\mathbf{D}[\mathbf{Y}]$ ].**u**  
 [transposición]

Out[5896]=  $\left\{ \left( \frac{3888 \mathbf{Y}}{37 l^2} - \frac{24543 \mathbf{Y}^2}{37 l^3} + \frac{50706 \mathbf{Y}^3}{37 l^4} - \frac{86265 \mathbf{Y}^4}{74 l^5} + \frac{13122 \mathbf{Y}^5}{37 l^6} \right) \mathbf{w}_1 + \left( -\frac{4131 \mathbf{Y}}{74 l^2} + \frac{17253 \mathbf{Y}^2}{37 l^3} - \frac{40986 \mathbf{Y}^3}{37 l^4} + \frac{37665 \mathbf{Y}^4}{37 l^5} - \frac{24057 \mathbf{Y}^5}{74 l^6} \right) \mathbf{w}_2 + \left( \frac{616 \mathbf{Y}}{37 l^2} - \frac{5461 \mathbf{Y}^2}{37 l^3} + \frac{42046 \mathbf{Y}^3}{111 l^4} - \frac{26895 \mathbf{Y}^4}{74 l^5} + \frac{4410 \mathbf{Y}^5}{37 l^6} \right) \mathbf{w}_3 \right\}$

In[5897]= **NαD[y\_]** :=

$$\text{N}\partial\left[\frac{y}{\text{Cos}[\Delta]}\right] \text{Cos}[\Delta] - c \left( \text{D}[\text{NwD}[y], y] /. \{y \rightarrow \frac{y}{\text{Cos}[\Delta]}\} \right) \text{Sin}[\Delta] // \text{FullSimplify}$$

[coseno] [deriva] [seno] [simplifica completar]

**NαD[y]** // **MatrixForm**  
[forma de matriz]

Out[5898]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{81 c y (96 l^4 + y \text{Sec}[\Delta] (-606 l^3 + y \text{Sec}[\Delta] (1252 l^2 + 3 y \text{Sec}[\Delta] (-355 l + 108 y \text{Sec}[\Delta]))) \text{Tan}[\Delta]}{74 l^6} \\ \frac{27 y^2 (l^2 + 3 y^2 - 5 l y \text{Cos}[\Delta] + l^2 \text{Cos}[2 \Delta]) \text{Sec}[\Delta]^3}{2 l^4} \\ \frac{81 c y (51 l^4 + y \text{Sec}[\Delta] (-426 l^3 + y \text{Sec}[\Delta] (1012 l^2 + 3 y \text{Sec}[\Delta] (-310 l + 99 y \text{Sec}[\Delta]))) \text{Tan}[\Delta]}{74 l^6} \\ -\frac{27 y^2 \text{Sec}[\Delta] (1 - 3 y \text{Sec}[\Delta]) (1 - y \text{Sec}[\Delta])}{4 l^4} \\ c y (-3696 l^4 + y \text{Sec}[\Delta] (32766 l^3 + y \text{Sec}[\Delta] (-84092 l^2 + 45 y \text{Sec}[\Delta] (1793 l - 588 y \text{Sec}[\Delta]))) \text{Tan}[\Delta]}{222 l^6} \\ \frac{y^2 \text{Sec}[\Delta] (1 - 3 y \text{Sec}[\Delta]) (2 l - 3 y \text{Sec}[\Delta])}{2 l^4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[5899]= **αD[y\_]** := **(Transpose[NαD[y]] . u) [[1]]**  
[transposición]

In[5900]= **αD[y]**

Out[5900]=

$$\frac{27 y^2 (l^2 + 3 y^2 - 5 l y \text{Cos}[\Delta] + l^2 \text{Cos}[2 \Delta]) \text{Sec}[\Delta]^3 \theta_1}{2 l^4} -$$

$$\frac{27 y^2 \text{Sec}[\Delta] (1 - 3 y \text{Sec}[\Delta]) (1 - y \text{Sec}[\Delta]) \theta_2}{4 l^4} +$$

$$\frac{y^2 \text{Sec}[\Delta] (1 - 3 y \text{Sec}[\Delta]) (2 l - 3 y \text{Sec}[\Delta]) \theta_3}{2 l^4} - \frac{1}{74 l^6}$$

$$81 y (96 l^4 + y \text{Sec}[\Delta] (-606 l^3 + y \text{Sec}[\Delta] (1252 l^2 + 3 y \text{Sec}[\Delta] (-355 l + 108 y \text{Sec}[\Delta]))) \left( w_1 \text{Tan}[\Delta] + \frac{1}{74 l^6} \right)$$

$$81 y (51 l^4 + y \text{Sec}[\Delta] (-426 l^3 + y \text{Sec}[\Delta] (1012 l^2 + 3 y \text{Sec}[\Delta] (-310 l + 99 y \text{Sec}[\Delta]))) \left( w_2 \text{Tan}[\Delta] + \frac{1}{222 l^6} y (-3696 l^4 + y \text{Sec}[\Delta] (32766 l^3 + y \text{Sec}[\Delta] (-84092 l^2 + 45 y \text{Sec}[\Delta] (1793 l - 588 y \text{Sec}[\Delta]))) \right) w_3 \text{Tan}[\Delta]$$



## ÁNGULO DE ATAQUE IZQUIERDA

In[5901]:=  $\phi I[Y\_]$  :=  $c D[NwI[Y], Y]$   
| deriva

$\phi I[Y]$  // **MatrixForm**  
| forma de matriz

Out[5902]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \left( \frac{3888 Y}{37 1^2} - \frac{24 543 Y^2}{37 1^3} + \frac{50 706 Y^3}{37 1^4} - \frac{86 265 Y^4}{74 1^5} + \frac{13 122 Y^5}{37 1^6} \right) \\ 0 \\ c \left( -\frac{4131 Y}{74 1^2} + \frac{17 253 Y^2}{37 1^3} - \frac{40 986 Y^3}{37 1^4} + \frac{37 665 Y^4}{37 1^5} - \frac{24 057 Y^5}{74 1^6} \right) \\ 0 \\ c \left( \frac{616 Y}{37 1^2} - \frac{5461 Y^2}{37 1^3} + \frac{42 046 Y^3}{111 1^4} - \frac{26 895 Y^4}{74 1^5} + \frac{4410 Y^5}{37 1^6} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[5903]:= **Transpose** $[\phi I[Y]] \cdot u$   
| transposición

Out[5903]=  $\left\{ \left( \frac{3888 Y}{37 1^2} - \frac{24 543 Y^2}{37 1^3} + \frac{50 706 Y^3}{37 1^4} - \frac{86 265 Y^4}{74 1^5} + \frac{13 122 Y^5}{37 1^6} \right) w_4 + \right.$   
 $\left( -\frac{4131 Y}{74 1^2} + \frac{17 253 Y^2}{37 1^3} - \frac{40 986 Y^3}{37 1^4} + \frac{37 665 Y^4}{37 1^5} - \frac{24 057 Y^5}{74 1^6} \right) w_5 +$   
 $\left. \left( \frac{616 Y}{37 1^2} - \frac{5461 Y^2}{37 1^3} + \frac{42 046 Y^3}{111 1^4} - \frac{26 895 Y^4}{74 1^5} + \frac{4410 Y^5}{37 1^6} \right) w_6 \right\}$

In[5904]:=  $N\alpha I[y\_]$  :=  $\left( -N\theta I\left[\frac{-Y}{\text{Cos}[\Delta]}\right] \text{Cos}[\Delta] + c \left( D[NwI[Y], Y] / \left\{ Y \rightarrow \frac{-Y}{\text{Cos}[\Delta]} \right\} \right) \text{Sin}[\Delta] \right)$   
| coseno | deriva | seno

$N\alpha I[y]$  // **MatrixForm**  
| forma de matriz

Out[5905]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \left( -\frac{3888 y \text{Sec}[\Delta]}{37 1^2} - \frac{24 543 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{37 1^3} - \frac{50 706 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{37 1^4} - \frac{86 265 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{74 1^5} - \frac{13 122 y^5 \text{Sec}[\Delta]^5}{37 1^6} \right) \text{Sin}[\Delta] \\ \text{Cos}[\Delta] \left( -\frac{27 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{1^2} - \frac{135 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{2 1^3} - \frac{81 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{2 1^4} \right) \\ c \left( \frac{4131 y \text{Sec}[\Delta]}{74 1^2} + \frac{17 253 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{37 1^3} + \frac{40 986 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{37 1^4} + \frac{37 665 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{37 1^5} + \frac{24 057 y^5 \text{Sec}[\Delta]^5}{74 1^6} \right) \text{Sin}[\Delta] \\ \text{Cos}[\Delta] \left( \frac{27 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{4 1^2} + \frac{27 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{1^3} + \frac{81 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{4 1^4} \right) \\ c \left( -\frac{616 y \text{Sec}[\Delta]}{37 1^2} - \frac{5461 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{37 1^3} - \frac{42 046 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{111 1^4} - \frac{26 895 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{74 1^5} - \frac{4410 y^5 \text{Sec}[\Delta]^5}{37 1^6} \right) \text{Sin}[\Delta] \\ \text{Cos}[\Delta] \left( -\frac{y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{1^2} - \frac{9 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{2 1^3} - \frac{9 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{2 1^4} \right) \end{pmatrix}$$

In[5906]:=  $\alpha I[y\_]$  := **Transpose** $[N\alpha I[y]] \cdot u$  [[1]]  
| transposición

In[5907]:=  $\alpha \mathbf{I}[\mathbf{y}]$

$$\text{Out[5907]} = \left( -\frac{3888 y \text{Sec}[\Lambda]}{37 1^2} - \frac{24 543 y^2 \text{Sec}[\Lambda]^2}{37 1^3} - \frac{50 706 y^3 \text{Sec}[\Lambda]^3}{37 1^4} - \frac{86 265 y^4 \text{Sec}[\Lambda]^4}{74 1^5} - \frac{13 122 y^5 \text{Sec}[\Lambda]^5}{37 1^6} \right) \text{Sin}[\Lambda] w_4 +$$

$$\left( \frac{4131 y \text{Sec}[\Lambda]}{74 1^2} + \frac{17 253 y^2 \text{Sec}[\Lambda]^2}{37 1^3} + \frac{40 986 y^3 \text{Sec}[\Lambda]^3}{37 1^4} + \frac{37 665 y^4 \text{Sec}[\Lambda]^4}{37 1^5} + \frac{24 057 y^5 \text{Sec}[\Lambda]^5}{74 1^6} \right) \text{Sin}[\Lambda] w_5 +$$

$$\left( -\frac{616 y \text{Sec}[\Lambda]}{37 1^2} - \frac{5461 y^2 \text{Sec}[\Lambda]^2}{37 1^3} - \frac{42 046 y^3 \text{Sec}[\Lambda]^3}{111 1^4} - \frac{26 895 y^4 \text{Sec}[\Lambda]^4}{74 1^5} - \frac{4410 y^5 \text{Sec}[\Lambda]^5}{37 1^6} \right) \text{Sin}[\Lambda] w_6 +$$

$$\text{Cos}[\Lambda] \left( -\frac{27 y^2 \text{Sec}[\Lambda]^2}{1^2} - \frac{135 y^3 \text{Sec}[\Lambda]^3}{2 1^3} - \frac{81 y^4 \text{Sec}[\Lambda]^4}{2 1^4} \right) \theta_4 +$$

$$\text{Cos}[\Lambda] \left( \frac{27 y^2 \text{Sec}[\Lambda]^2}{4 1^2} + \frac{27 y^3 \text{Sec}[\Lambda]^3}{1^3} + \frac{81 y^4 \text{Sec}[\Lambda]^4}{4 1^4} \right) \theta_5 +$$

$$\text{Cos}[\Lambda] \left( -\frac{y^2 \text{Sec}[\Lambda]^2}{1^2} - \frac{9 y^3 \text{Sec}[\Lambda]^3}{2 1^3} - \frac{9 y^4 \text{Sec}[\Lambda]^4}{2 1^4} \right) \theta_6$$

## ■ DESPLAZAMIENTO VERTICAL

In[5908]:=  $\mathbf{xE} = \frac{3}{4} \mathbf{c};$

In[5909]:=  $\mathbf{r}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-] = \mathbf{x} - \mathbf{xE} - \mathbf{y} \text{Tan}[\Lambda];$   
| tangente

## DESPLAZAMIENTO VERTICAL A LA DERECHA

In[5910]:=  $\text{NAD}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-] := \text{NwD}\left[\frac{\mathbf{y}}{\text{Cos}[\Lambda]}\right] - \text{N}\alpha\text{D}[\mathbf{y}] \frac{\mathbf{r}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]}{\mathbf{c}}$

**NAD[x, y] // MatrixForm**  
| forma de matriz

Out[5911]//MatrixForm=

$$\left( \frac{1944 y^2 \text{Sec}[\Lambda]^2}{37 1^2} - \frac{8181 y^3 \text{Sec}[\Lambda]^3}{37 1^3} + \frac{25 353 y^4 \text{Sec}[\Lambda]^4}{74 1^4} - \frac{17 253 y^5 \text{Sec}[\Lambda]^5}{74 1^5} + \frac{2187 y^6 \text{Sec}[\Lambda]^6}{37 1^6} + \frac{81 y (96 1^4 + y \text{Sec}[\Lambda]) (-606}{27 y^2 (1^2 + 3 y^2 - 5 1 y \text{Cos}[\Lambda] + 1^2 \text{Cos}[2 \Lambda]) \text{Sec}[\Lambda]^3 \left(-\frac{3c}{4}\right)} \right.$$

$$- \frac{4131 y^2 \text{Sec}[\Lambda]^2}{148 1^2} + \frac{5751 y^3 \text{Sec}[\Lambda]^3}{37 1^3} - \frac{20 493 y^4 \text{Sec}[\Lambda]^4}{74 1^4} + \frac{7533 y^5 \text{Sec}[\Lambda]^5}{37 1^5} - \frac{8019 y^6 \text{Sec}[\Lambda]^6}{148 1^6} - \frac{81 y (51 1^4 + y \text{Sec}[\Lambda]) (-426}{27 y^2 \text{Sec}[\Lambda] (1 - 3 y \text{Sec}[\Lambda]) (1 - y \text{Sec}[\Lambda]) \left(-\frac{3c}{4} + x - y\right)} \right.$$

$$\frac{308 y^2 \text{Sec}[\Lambda]^2}{37 1^2} - \frac{5461 y^3 \text{Sec}[\Lambda]^3}{111 1^3} + \frac{21 023 y^4 \text{Sec}[\Lambda]^4}{222 1^4} - \frac{5379 y^5 \text{Sec}[\Lambda]^5}{74 1^5} + \frac{735 y^6 \text{Sec}[\Lambda]^6}{37 1^6} - \frac{y (-3696 1^4 + y \text{Sec}[\Lambda]) (32 766 1^3 +}{y^2 \text{Sec}[\Lambda] (1 - 3 y \text{Sec}[\Lambda]) (2 1 - 3 y \text{Sec}[\Lambda]) \left(-\frac{3c}{4} + x -\right)} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

```
In[5912]:= zAD[x_, y_] := c Transpose[NAD[x, y]] . u
      |
      |transposición
```

## DESPLAZAMIENTO VERTICAL ALA IZQUIERDA

```
In[5913]:= NAI[x_, y_] := NwI[ $\frac{-y}{\text{Cos}[\Delta]}$ ] - NαI[y]  $\frac{r[x, y]}{c}$ 
```

```
NAI[x, y] // MatrixForm
      |
      |forma de matriz
```

```
Out[5914]//MatrixForm=
```

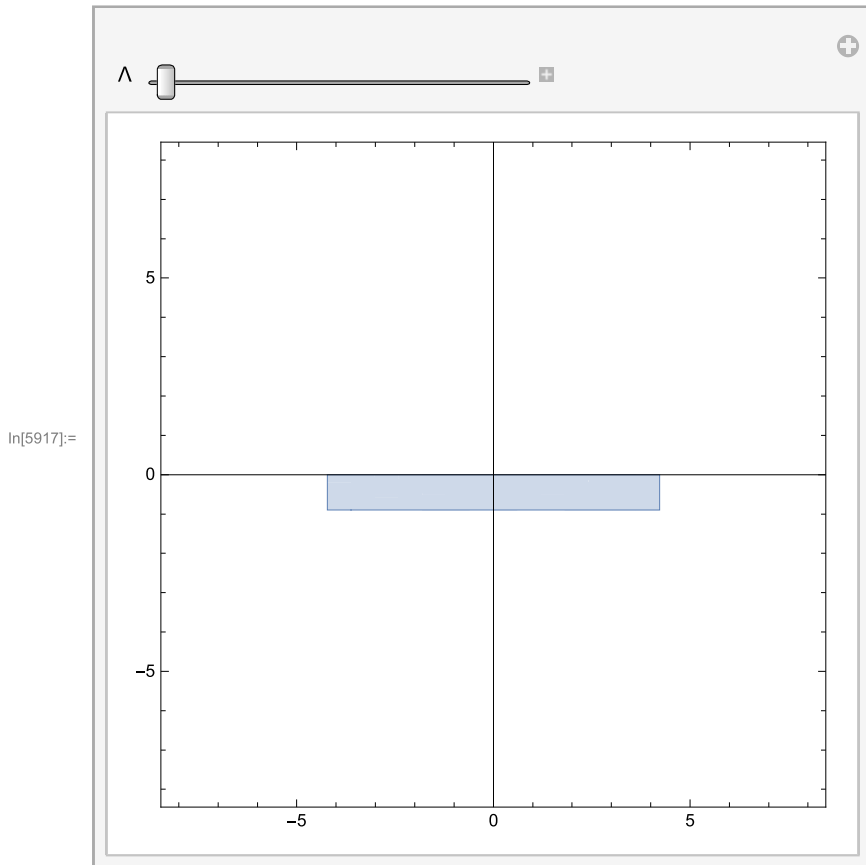
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1944 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{37 1^2} + \frac{8181 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{37 1^3} + \frac{25353 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{74 1^4} + \frac{17253 y^5 \text{Sec}[\Delta]^5}{74 1^5} + \frac{2187 y^6 \text{Sec}[\Delta]^6}{37 1^6} - \left( -\frac{3888 y \text{Sec}[\Delta]}{37 1^2} - \frac{24543 y}{3} \right. \\ \left. - \frac{\text{Cos}[\Delta] \left( -\frac{27 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{1^2} - \frac{135 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{2 1^3} - \frac{81 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{2} \right)}{c} \right) \\ - \frac{4131 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{148 1^2} - \frac{5751 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{37 1^3} - \frac{20493 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{74 1^4} - \frac{7533 y^5 \text{Sec}[\Delta]^5}{37 1^5} - \frac{8019 y^6 \text{Sec}[\Delta]^6}{148 1^6} - \left( \frac{4131 y \text{Sec}[\Delta]}{74 1^2} + \frac{17253 y}{37} \right. \\ \left. - \frac{\text{Cos}[\Delta] \left( \frac{27 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{4 1^2} + \frac{27 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{1^3} + \frac{81 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{4 1^4} \right)}{c} \right) \\ \frac{308 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{37 1^2} + \frac{5461 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{111 1^3} + \frac{21023 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{222 1^4} + \frac{5379 y^5 \text{Sec}[\Delta]^5}{74 1^5} + \frac{735 y^6 \text{Sec}[\Delta]^6}{37 1^6} - \left( -\frac{616 y \text{Sec}[\Delta]}{37 1^2} - \frac{5461 y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{37} \right. \\ \left. - \frac{\text{Cos}[\Delta] \left( -\frac{y^2 \text{Sec}[\Delta]^2}{1^2} - \frac{9 y^3 \text{Sec}[\Delta]^3}{2 1^3} - \frac{9 y^4 \text{Sec}[\Delta]^4}{2 1^4} \right)}{c} \right) \end{pmatrix}$$

```
In[5915]:= zAI[x_, y_] := c Transpose[NAI[x, y]] . u
      |
      |transposición
```

# MODELIZACIÓN AERODINÁMICA

## Representación Ala

```
In[5916]:= (*c=0.9;
b=9.85; (*Envergadura*)
Manipulate[
      |
      |manipula
      ParametricPlot[{x Cos[Δ π/180]-z Sin[Δ π/180], z Cos[Δ π/180]+x Sin[Δ π/180]},
      |gráfico paramétrico |coseno |seno |coseno |seno
      {x, -b/2, b/2}, {z, 0, -c}, PlotRange->{{-b, b}, {-b, b}, {-b/2, b/2}}, {{Δ, 0}, 0, -60}] *)
      |
      |rango de representación
```



## DESARROLLO

El ala se va a dividir en un número  $n$ . Estas divisiones se hacen tanto a lo largo del eje  $x$  ( $n_x$ ) como de eje  $y$  ( $n_y$ ), y la multiplicación de ambas dará el número total de paneles ( $n$ ).

```
In[5918]:= nx = 1;
ny = 10;
n = nx ny
```

Out[5920]= 10

Al tratarse de un ala esbelta, tan solo se van a realizar divisiones a lo largo del eje  $y$ , todas ellas equidistantes, con una longitud de  $b/n_y$ . Por tanto, se puede proceder al cálculo de la final y la columna que ocupará cada panel mediante las ecuaciones (X) y (X) vistas de A y B.

```
In[5921]:= A[j_] = IntegerPart[j / ny]; B[j_] = Mod[j, ny];
           parte entera operación módulo
```

Se realiza una tabla de dimensiones  $3 \times n$ , donde cada fila corresponde a un panel. En la primera columna se indica que panel se considera, el la segunda columna la fila que ocupa en la división, y la tercera y última columna indica la columna que ocupa el panel.

```
In[5922]:= (*PANEL FILA COLUMNA*)
```

```
In[5923]:= PanelesFilaColumna =
  Table[{j, If[B[j] == 0, A[j], A[j] + 1], If[B[j] == 0, ny, B[j]]}, {j, 1, n}];
  |tabla      |si      |
  {"Panel", "Fila", "Columna"} // MatrixForm
  |panel      |forma de matriz
  PanelesFilaColumna // MatrixForm
  |forma de matriz
```

```
Out[5924]//MatrixForm=
  ( Panel Fila Columna )
```

```
Out[5925]//MatrixForm=
  ( 1 1 1
    2 1 2
    3 1 3
    4 1 4
    5 1 5
    6 1 6
    7 1 7
    8 1 8
    9 1 9
    10 1 10 )
```

Con el comando que sigue se obtiene la fila seleccionada de la matriz anterior. Por tanto, se puede seleccionar la fila del panel que se desee averiguar su posición y de un modo rápido ver la fila y columna del mismo

```
In[5926]:= PanelesFilaColumna[[7]]
```

```
Out[5926]= {7, 1, 7}
```

## MATRIZ DE CONEXIONES

```
In[5927]:= (*PANEL      E1      E2      E3      E4*)
```

```
In[5928]:= MatrizConexiones = Table[{j, E1 = j + PanelesFilaColumna[[j, 2]] - 1,
  |tabla
  E1 + 1, E1 + ny + 1, E1 + ny + 2}, {j, 1, n}];
  {"Panel", "E1", "E2", "E3", "E4"} // MatrixForm
  |panel      |forma de matriz
  MatrizConexiones // MatrixForm
  |forma de matriz
```

```
Out[5929]//MatrixForm=
  ( Panel E1 E2 E3 E4 )
```

```
Out[5930]//MatrixForm=
  ( 1 1 2 12 13
    2 2 3 13 14
    3 3 4 14 15
    4 4 5 15 16
    5 5 6 16 17
    6 6 7 17 18
    7 7 8 18 19
    8 8 9 19 20
    9 9 10 20 21
    10 10 11 21 22 )
```

```
In[5931]:= MatrizConexiones[[5]]
```

```
Out[5931]= {5, 5, 6, 16, 17}
```

## MATRIZ DE NODOS

```
In[5932]:= Px = nx + 1; (*Número de puntos en x*)
          Py = ny + 1; (*Número de puntos en y*)
          P = Px Py
```

```
Out[5934]= 22
```

```
In[5935]:= An[j_] = IntegerPart[j / Py]; Bn[j_] = Mod[j, Py];
           |parte entera                |operación módulo
```

```
In[5936]:= (*NODO      FILA      COLUMNA*)
```

```
In[5937]:= MatrizNodos =
           Table[{j, If[Bn[j] == 0, An[j], An[j] + 1], If[Bn[j] == 0, Py, Bn[j]]}, {j, 1, P}];
           |tabla      |si                |si
           |transposición |forma de matriz
           { {Nodo, Fila, Columna} } // Transpose // MatrixForm
           |transposición |forma de matriz
           MatrizNodos // Transpose // MatrixForm
           |transposición |forma de matriz
```

```
Out[5938]//MatrixForm=
  (  Nodo
    Fila
    Columna )
```

```
Out[5939]//MatrixForm=
  ( 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 )
  ( 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 )
  ( 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 )
```

```
In[5940]:= MatrizNodos[[5]]
```

```
Out[5940]= {5, 1, 5}
```

## DEFINICION GEOMETRICA

```
In[5941]:= { {"COORDENADAS PUNTOS EXTREMOS"}, {" ", "x", "y"},
           {" ", " ", " "}, {"CF", 0, 0}, {"CR", "c", 0}, {" ", " ", " "},
           {"LF", "- $\frac{b}{2}\text{Tan}[\Delta]$ ", "- $\frac{b}{2}$ "}, {"LR", "- $\frac{b}{2}\text{Tan}[\Delta]+c$ ", "- $\frac{b}{2}$ "}, {" ", " ", " "},
           {"RF", " $\frac{b}{2}\text{Tan}[\Delta]$ ", " $\frac{b}{2}$ "}, {"RR", " $\frac{b}{2}\text{Tan}[\Delta]+c$ ", " $\frac{b}{2}$ "} // TableForm
           |tángente                |tángente                |forma de tabla
```

```
Out[5941]//TableForm=
COORDENADAS PUNTOS EXTREMOS
```

	x	y
CF	0	0
CR	c	0
LF	$-\frac{b}{2}\text{Tan}[\Delta]$	$-\frac{b}{2}$
LR	$-\frac{b}{2}\text{Tan}[\Delta]+c$	$-\frac{b}{2}$
RF	$\frac{b}{2}\text{Tan}[\Delta]$	$\frac{b}{2}$
RR	$\frac{b}{2}\text{Tan}[\Delta]+c$	$\frac{b}{2}$

```
In[5942]:= CF = {0, 0, 0};
CR = {c, 0, 0};
LF = { -b/2 Tan[Δ], -b/2, 0};
LR = { -b/2 Tan[Δ] + c, -b/2, 0};
RF = { b/2 Tan[Δ], b/2, 0};
RR = { b/2 Tan[Δ] + c, b/2, 0};
```

```
In[5948]:= MExtremos = {CF, CR, LF, LR, RF, RR};
MExtremos // MatrixForm
```

```
Out[5949]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} b \tan[\Delta] & -\frac{b}{2} & 0 \\ c - \frac{1}{2} b \tan[\Delta] & -\frac{b}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} b \tan[\Delta] & \frac{b}{2} & 0 \\ c + \frac{1}{2} b \tan[\Delta] & \frac{b}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

## POSICIÓN NODOS

```
In[5950]:= MatrizNodos[[3]]
```

```
Out[5950]= {3, 1, 3}
```

```
In[5951]:= (*NODO ξ η*)
```

```
In[5952]:= MatrizPosicionNodosAD =
```

```
Table[{j, 1 - (MatrizNodos[[j, 2]] - 1)/nx, 2 (MatrizNodos[[j, 3]] - 1)/ny - 1}, {j, 1, P}];
```

```
{ {Nodo, ξ, η} } // Transpose // MatrixForm
```

```
MatrizPosicionNodosAD // Transpose // MatrixForm
```

```
Out[5953]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \text{Nodo} \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

```
Out[5954]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 & -1 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[5955]:= RQD[ξ_, η_] := (1 - η) ξ CR + η ξ RR + η (1 - ξ) RF
```

```
In[5956]:= RQI[ξ_, η_] := (1 + η) ξ CR - η ξ LR - η (1 - ξ) LF
```

```
In[5957]:= MatrizPosicionNodosDIM = Table[
    [tabla
    {j, If[MatrizPosicionNodosAD[[j, 3]] < 0, RQI[MatrizPosicionNodosAD[[j, 2]],
    [si
    MatrizPosicionNodosAD[[j, 3]], RQD[MatrizPosicionNodosAD[[j, 2]],
    MatrizPosicionNodosAD[[j, 3]]]}], {j, 1, P}];
{"Nodo", "R"} // MatrixForm
[forma de matriz
MatrizPosicionNodosDIM // N // MatrixForm
[val... [forma de matriz
```

```
Out[5958]//MatrixForm=
(Nodo R)
```

```
Out[5959]//MatrixForm=
(
1. {c - 0.5 b Tan[Δ], -0.5 b, 0.}
2. {0.2 c + 0.8 (c - 0.5 b Tan[Δ]), -0.4 b, 0.}
3. {0.4 c + 0.6 (c - 0.5 b Tan[Δ]), -0.3 b, 0.}
4. {0.6 c + 0.4 (c - 0.5 b Tan[Δ]), -0.2 b, 0.}
5. {0.8 c + 0.2 (c - 0.5 b Tan[Δ]), -0.1 b, 0.}
6. {c, 0., 0.}
7. {0.8 c + 0.2 (c + 0.5 b Tan[Δ]), 0.1 b, 0.}
8. {0.6 c + 0.4 (c + 0.5 b Tan[Δ]), 0.2 b, 0.}
9. {0.4 c + 0.6 (c + 0.5 b Tan[Δ]), 0.3 b, 0.}
10. {0.2 c + 0.8 (c + 0.5 b Tan[Δ]), 0.4 b, 0.}
11. {c + 0.5 b Tan[Δ], 0.5 b, 0.}
12. {-0.5 b Tan[Δ], -0.5 b, 0.}
13. {-0.4 b Tan[Δ], -0.4 b, 0.}
14. {-0.3 b Tan[Δ], -0.3 b, 0.}
15. {-0.2 b Tan[Δ], -0.2 b, 0.}
16. {-0.1 b Tan[Δ], -0.1 b, 0.}
17. {0., 0., 0.}
18. {0.1 b Tan[Δ], 0.1 b, 0.}
19. {0.2 b Tan[Δ], 0.2 b, 0.}
20. {0.3 b Tan[Δ], 0.3 b, 0.}
21. {0.4 b Tan[Δ], 0.4 b, 0.}
22. {0.5 b Tan[Δ], 0.5 b, 0.}
)
```

```
In[5960]:= R[k_] := MatrizPosicionNodosDIM[[k, 2]]
```

```
In[5961]:= R[7]
```

```
Out[5961]= {  $\frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Delta] \right), \frac{b}{10}, 0 \}$ 
```

## PUNTOS DE CONTROL

```
In[5962]:= RCC[j_] :=  $\frac{3}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 2]]] + \frac{3}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 3]]] +$ 
 $\frac{1}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 4]]] + \frac{1}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 5]]];$ 
```



```
In[5963]:= Table[{j, RCC[j]}, {j, 1, n}] // MatrixForm
|tabla |forma de matriz
```

```
Out[5963]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \left\{ -\frac{9}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{9b}{20}, 0 \right\} \\ 2 & \left\{ -\frac{7}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{7b}{20}, 0 \right\} \\ 3 & \left\{ -\frac{1}{16} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{b}{4}, 0 \right\} \\ 4 & \left\{ -\frac{3}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{3b}{20}, 0 \right\} \\ 5 & \left\{ \frac{3c}{8} - \frac{1}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{b}{20}, 0 \right\} \\ 6 & \left\{ \frac{3c}{8} + \frac{1}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{b}{20}, 0 \right\} \\ 7 & \left\{ \frac{3}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{3b}{20}, 0 \right\} \\ 8 & \left\{ \frac{1}{16} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{b}{4}, 0 \right\} \\ 9 & \left\{ \frac{7}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{7b}{20}, 0 \right\} \\ 10 & \left\{ \frac{9}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{9b}{20}, 0 \right\} \end{pmatrix}$$

```
In[5964]:= PosicionPuntosControlDIM =
```

```
Table[{j,  $\left( \frac{3}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 2]]] + \frac{3}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 3]]] + \frac{1}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 4]]] + \frac{1}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 5]]] \right)$ }, {j, 1, n}];
```

```
|"Panel", "RC"} // MatrixForm
|panel |forma de matriz
```

```
PosicionPuntosControlDIM // MatrixForm
|forma de matriz
```

```
Out[5965]//MatrixForm=
```

```
( Panel RC )
```

```
Out[5966]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \left\{ -\frac{9}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{9b}{20}, 0 \right\} \\ 2 & \left\{ -\frac{7}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{7b}{20}, 0 \right\} \\ 3 & \left\{ -\frac{1}{16} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{b}{4}, 0 \right\} \\ 4 & \left\{ -\frac{3}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{3b}{20}, 0 \right\} \\ 5 & \left\{ \frac{3c}{8} - \frac{1}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{b}{20}, 0 \right\} \\ 6 & \left\{ \frac{3c}{8} + \frac{1}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{b}{20}, 0 \right\} \\ 7 & \left\{ \frac{3}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{3b}{20}, 0 \right\} \\ 8 & \left\{ \frac{1}{16} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{b}{4}, 0 \right\} \\ 9 & \left\{ \frac{7}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{7b}{20}, 0 \right\} \\ 10 & \left\{ \frac{9}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{9b}{20}, 0 \right\} \end{pmatrix}$$

```
In[5967]:= (*Vector Columna de la Posición del punto de control del panel j en x,y*)
```

```
In[5968]:= RC[j_] := PosicionPuntosControlDIM[[j, 2]]
```

```
In[5969]:= RC[7] // MatrixForm
          |
          | forma de matriz
```

```
Out[5969]//MatrixForm=

$$\left( \begin{array}{c} \frac{3}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{3}{8} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right) \\ \frac{3b}{20} \\ 0 \end{array} \right)$$

```

## POSICION PUNTOS A Y B DE CADA PANEL

```
In[5970]:= PosicionPuntosAyB =
```

```
Table[{j,  $\left( \frac{1}{4} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 2]]] + \frac{3}{4} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 4]]] \right)$ ,
      |
      | tabla
      |
      |  $\left( \frac{1}{4} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 3]]] + \frac{3}{4} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 5]]] \right)$ }, {j, 1, n}];
{"Panel", "RA", "RB"} // MatrixForm
      |
      | panel
      |
      | forma de matriz
```

```
PosicionPuntosAyB // MatrixForm
      |
      | forma de matriz
```

```
Out[5971]//MatrixForm=
( Panel RA RB )
```

```
Out[5972]//MatrixForm=
```

1	$\left\{ -\frac{3}{8} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right), -\frac{b}{2}, 0 \right\}$	$\left\{ -\frac{3}{10} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \right) \right), -\frac{2b}{5}, 0 \right\}$
2	$\left\{ -\frac{3}{10} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{2b}{5}, 0 \right\}$	$\left\{ -\frac{9}{40} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \right) \right), -\frac{3b}{10}, 0 \right\}$
3	$\left\{ -\frac{9}{40} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{3b}{10}, 0 \right\}$	$\left\{ -\frac{3}{20} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \right) \right), -\frac{b}{5}, 0 \right\}$
4	$\left\{ -\frac{3}{20} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{b}{5}, 0 \right\}$	$\left\{ -\frac{3}{40} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \right) \right), -\frac{b}{10}, 0 \right\}$
5	$\left\{ -\frac{3}{40} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), -\frac{b}{10}, 0 \right\}$	$\left\{ \frac{c}{4}, 0, 0 \right\}$
6	$\left\{ \frac{c}{4}, 0, 0 \right\}$	$\left\{ \frac{3}{40} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \right) \right), \frac{b}{10}, 0 \right\}$
7	$\left\{ \frac{3}{40} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{b}{10}, 0 \right\}$	$\left\{ \frac{3}{20} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \right) \right), \frac{b}{5}, 0 \right\}$
8	$\left\{ \frac{3}{20} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{b}{5}, 0 \right\}$	$\left\{ \frac{9}{40} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \right) \right), \frac{3b}{10}, 0 \right\}$
9	$\left\{ \frac{9}{40} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{3b}{10}, 0 \right\}$	$\left\{ \frac{3}{10} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \right) \right), \frac{2b}{5}, 0 \right\}$
10	$\left\{ \frac{3}{10} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( \frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left( c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda] \right) \right), \frac{2b}{5}, 0 \right\}$	$\left\{ \frac{3}{8} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{4} \left( c + \frac{1}{2} b \right) \right\}$

```
In[5973]:= (*Vectores Columna de la Posición de los puntos A B del panel j en x,
            y por donde pasa el vórtice de torbellinos*)
```

```
In[5974]:= RA[j_] := PosicionPuntosAyB[[j, 2]];
            RB[j_] := PosicionPuntosAyB[[j, 3]];
```

## POSICION CENTRO AERODINAMICO

El centro aerodinamico se encuentra en c/4 del ala

In[5976]:= PosicionCentroAerodinamico =

```
Table[{j,  $\left(\frac{1}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 2]]] + \frac{1}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 3]]] + \frac{3}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 4]]] + \frac{3}{8} R[\text{MatrizConexiones}[[j, 5]]]\right)$ }, {j, 1, n}];
```

["Panel", "RCA"] // MatrixForm

PosicionCentroAerodinamico // MatrixForm

Out[5977]//MatrixForm=

( Panel RCA )

Out[5978]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & \left\{-\frac{27}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{8} \left(c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left(c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right), -\frac{9b}{20}, 0\right\} \\ 2 & \left\{-\frac{21}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{8} \left(\frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left(c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left(c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right), -\frac{7b}{20}, 0\right\} \\ 3 & \left\{-\frac{3}{16} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{8} \left(\frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left(c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left(c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right), -\frac{b}{4}, 0\right\} \\ 4 & \left\{-\frac{9}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{8} \left(\frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left(c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left(c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right), -\frac{3b}{20}, 0\right\} \\ 5 & \left\{\frac{c}{8} - \frac{3}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{8} \left(\frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left(c - \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right), -\frac{b}{20}, 0\right\} \\ 6 & \left\{\frac{c}{8} + \frac{3}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{8} \left(\frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left(c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right), \frac{b}{20}, 0\right\} \\ 7 & \left\{\frac{9}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{8} \left(\frac{4c}{5} + \frac{1}{5} \left(c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left(c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right), \frac{3b}{20}, 0\right\} \\ 8 & \left\{\frac{3}{16} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{8} \left(\frac{3c}{5} + \frac{2}{5} \left(c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left(c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right), \frac{b}{4}, 0\right\} \\ 9 & \left\{\frac{21}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{8} \left(\frac{2c}{5} + \frac{3}{5} \left(c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left(c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right), \frac{7b}{20}, 0\right\} \\ 10 & \left\{\frac{27}{80} b \tan[\Lambda] + \frac{1}{8} \left(c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right) + \frac{1}{8} \left(\frac{c}{5} + \frac{4}{5} \left(c + \frac{1}{2} b \tan[\Lambda]\right)\right), \frac{9b}{20}, 0\right\} \end{pmatrix}$$

In[5979]:= RCA[j\_] := PosicionCentroAerodinamico[[j, 2]]

# MODELIZACIÓN AERODINÁMICA II

## CARACTERÍSTICAS AVIÓN

In[5980]:=  $l = 10$ ;  $b = 21 \cos[\Lambda]$ ;  $c = 0.9$ ;  $\Lambda = 20 \frac{\pi}{180}$ ;  $\alpha_{\text{Ataque}} = 2$ ;  $\beta = 1.2$ ;  $GJ = 4.3 \times 10^6$ ;

## VELOCIDAD VERTICAL

In[5981]:= Vp[rp\_, rGamma\_, e\_, Gamma\_] :=

$$\left( \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\text{Cross}\left[\mathbf{e}, \frac{\mathbf{rp}-\mathbf{r}\Gamma}{\text{Norm}[\mathbf{rp}-\mathbf{r}\Gamma]}\right]}{\text{Norm}[\mathbf{rp}-\mathbf{r}\Gamma]} \frac{1}{1 + \text{Dot}\left[\mathbf{e}, \frac{\mathbf{rp}-\mathbf{r}\Gamma}{\text{Norm}[\mathbf{rp}-\mathbf{r}\Gamma]}\right]} \right) \text{[[3]] // FullSimplify}$$

[simplifica completa]

```
In[5982]:= Rz = {{Cos[Δ], Sin[Δ], 0}, {-Sin[Δ], Cos[Δ], 0}, {0, 0, 1}};
```

```

      |coseno |seno      |seno |coseno
Rz // MatrixForm
      |forma de matriz

```

```
Out[5983]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\pi}{9}\right] & \sin\left[\frac{\pi}{9}\right] & 0 \\ -\sin\left[\frac{\pi}{9}\right] & \cos\left[\frac{\pi}{9}\right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[5984]:= eAB[5]
```

```
Out[5984]= eAB[5]
```

```
In[5985]:= e = {-1, 0, 0};
```

```
eAB[j_] := 
$$\frac{RB[j] - RA[j]}{\text{Norm}[RB[j] - RA[j]]};$$

```

```
In[5987]:= VpTOTAL =
```

```

      Table[(Vp[RC[j], RA[k], e, Γk] + Vp[RC[j], RB[k], eAB[k], Γk] + Vp[RC[j], RA[k],
      |tabla
      eAB[k], -Γk] + Vp[RC[j], RB[k], e, -Γk]), {j, 1, n}, {k, 1, n}];
VpTOTAL // MatrixForm
      |forma de matriz

```

```
Out[5988]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.578645 \Gamma_1 & 0.0539658 \Gamma_2 & 0.00869617 \Gamma_3 & 0.00352635 \Gamma_4 & 0.00190846 \Gamma_5 & 0.00119591 \\ 0.0881171 \Gamma_1 & -0.578645 \Gamma_2 & 0.0539658 \Gamma_3 & 0.00869617 \Gamma_4 & 0.00352635 \Gamma_5 & 0.00190846 \\ 0.0162716 \Gamma_1 & 0.0881171 \Gamma_2 & -0.578645 \Gamma_3 & 0.0539658 \Gamma_4 & 0.00869617 \Gamma_5 & 0.00352635 \\ 0.00681032 \Gamma_1 & 0.0162716 \Gamma_2 & 0.0881171 \Gamma_3 & -0.578645 \Gamma_4 & 0.0539658 \Gamma_5 & 0.00869617 \\ 0.00373946 \Gamma_1 & 0.00681032 \Gamma_2 & 0.0162716 \Gamma_3 & 0.0881171 \Gamma_4 & -0.578645 \Gamma_5 & 0.0539658 \\ 0.00236296 \Gamma_1 & 0.00373946 \Gamma_2 & 0.00681032 \Gamma_3 & 0.0162716 \Gamma_4 & 0.0881171 \Gamma_5 & -0.578645 \\ 0.0016282 \Gamma_1 & 0.00236296 \Gamma_2 & 0.00373946 \Gamma_3 & 0.00681032 \Gamma_4 & 0.0162716 \Gamma_5 & 0.0881171 \\ 0.00118999 \Gamma_1 & 0.0016282 \Gamma_2 & 0.00236296 \Gamma_3 & 0.00373946 \Gamma_4 & 0.00681032 \Gamma_5 & 0.0162716 \\ 0.000907677 \Gamma_1 & 0.00118999 \Gamma_2 & 0.0016282 \Gamma_3 & 0.00236296 \Gamma_4 & 0.00373946 \Gamma_5 & 0.00681032 \\ 0.000715166 \Gamma_1 & 0.000907677 \Gamma_2 & 0.00118999 \Gamma_3 & 0.0016282 \Gamma_4 & 0.00236296 \Gamma_5 & 0.00373946 \end{pmatrix}$$

Cada fila corresponde a un panel

```
In[5989]:= MatrizH = Table[(Vp[RC[j], RA[k], e, 1] + Vp[RC[j], RB[k], eAB[k], 1] +
```

```

      |tabla
      Vp[RC[j], RA[k], eAB[k], -1] + Vp[RC[j], RB[k], e, -1]), {j, 1, n}, {k, 1, n}];
MatrizH // MatrixForm
      |forma de matriz

```

```
Out[5990]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -0.578645 & 0.0539658 & 0.00869617 & 0.00352635 & 0.00190846 & 0.00119591 & 0.00081951 \\ 0.0881171 & -0.578645 & 0.0539658 & 0.00869617 & 0.00352635 & 0.00190846 & 0.0011959 \\ 0.0162716 & 0.0881171 & -0.578645 & 0.0539658 & 0.00869617 & 0.00352635 & 0.0019084 \\ 0.00681032 & 0.0162716 & 0.0881171 & -0.578645 & 0.0539658 & 0.00869617 & 0.0035263 \\ 0.00373946 & 0.00681032 & 0.0162716 & 0.0881171 & -0.578645 & 0.0539658 & 0.0086961 \\ 0.00236296 & 0.00373946 & 0.00681032 & 0.0162716 & 0.0881171 & -0.578645 & 0.0539658 \\ 0.0016282 & 0.00236296 & 0.00373946 & 0.00681032 & 0.0162716 & 0.0881171 & -0.57864 \\ 0.00118999 & 0.0016282 & 0.00236296 & 0.00373946 & 0.00681032 & 0.0162716 & 0.0881171 \\ 0.000907677 & 0.00118999 & 0.0016282 & 0.00236296 & 0.00373946 & 0.00681032 & 0.0162716 \\ 0.000715166 & 0.000907677 & 0.00118999 & 0.0016282 & 0.00236296 & 0.00373946 & 0.0068103 \end{pmatrix}$$

```
In[5991]:= VpPunto[j_] := Sum[VpTOTAL[[j, k]], {k, n}]
```

```

      |suma

```

In[5992]= **VpPunto**[9]

Out[5992]=  $0.000907677 \Gamma_1 + 0.00118999 \Gamma_2 + 0.0016282 \Gamma_3 + 0.00236296 \Gamma_4 + 0.00373946 \Gamma_5 +$   
 $0.00681032 \Gamma_6 + 0.0162716 \Gamma_7 + 0.0881171 \Gamma_8 - 0.578645 \Gamma_9 + 0.0539658 \Gamma_{10}$

## Primera Matriz de Acoplamiento $D_\alpha$

Con esta matriz se consigue averiguar el ángulo de ataque de cada uno de los paneles.

In[5993]= **RC**[7]

Out[5993]=  $\{1.70106, 3 \cos\left[\frac{\pi}{9}\right], 0\}$

In[5994]= **RC**[7][[2]]

Out[5994]=  $3 \cos\left[\frac{\pi}{9}\right]$

In[5995]= **D $\alpha$  = Table**[[**If**[**RC**[j][[2]] ≤ 0, **Transpose**[**NaI**[**RC**[j][[2]]]],

**Transposición**

**Transposición** **NaD**[**RC**[j][[2]]]]] // **Flatten**, {j, 1, n}];

**D $\alpha$  // MatrixForm**

**forma de matriz**

Out[5996]/MatrixForm=

0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.0276375
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-0.0524212
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-0.115822
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.007575
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.157981
-0.157981	0.194094	0.0593671	-0.0399604	-0.0163931	0.00559117	0.	0.
-0.007575	0.879129	-0.0851535	-0.0399604	0.0220335	0.00465148	0.	0.
0.115822	0.792866	-0.112663	0.396433	0.00664686	-0.0293654	0.	0.
0.0524212	-0.186482	0.0235784	1.02565	-0.0624066	0.0253247	0.	0.
-0.0276375	-0.719288	0.127717	0.873421	-0.10759	0.452885	0.	0.

In[5997]=  **$\alpha$  = Table**[[ **$\alpha$ Ataque**  $\frac{\pi}{180}$ ], {j, 1, n}];

**tabla**

In[5998]=  **$\alpha$  =  $\alpha$  + D $\alpha$ .u;**

In[5999]=  **$a$  = - $\alpha$ ;**

**$a$  // MatrixForm**

**forma de matriz**

Out[6000]/MatrixForm=

-0.0349066 - 0.0307084 $w_4$ + 0.141907 $w_5$ - 0.119544 $w_6$ - 0.719288 $\theta_4$ + 0.873421 $\theta_5$ + 0.45
-0.0349066 + 0.0582458 $w_4$ + 0.0261983 $w_5$ - 0.0693407 $w_6$ - 0.186482 $\theta_4$ + 1.02565 $\theta_5$ + 0.02
-0.0349066 + 0.128691 $w_4$ - 0.125181 $w_5$ + 0.0073854 $w_6$ + 0.792866 $\theta_4$ + 0.396433 $\theta_5$ - 0.02
-0.0349066 - 0.00841666 $w_4$ - 0.094615 $w_5$ + 0.0244817 $w_6$ + 0.879129 $\theta_4$ - 0.0399604 $\theta_5$ + 0.00
-0.0349066 - 0.175534 $w_4$ + 0.0659635 $w_5$ - 0.0182146 $w_6$ + 0.194094 $\theta_4$ - 0.0399604 $\theta_5$ + 0.00
-0.0349066 + 0.175534 $w_1$ - 0.0659635 $w_2$ + 0.0182146 $w_3$ - 0.194094 $\theta_1$ + 0.0399604 $\theta_2$ - 0.00
-0.0349066 + 0.00841666 $w_1$ + 0.094615 $w_2$ - 0.0244817 $w_3$ - 0.879129 $\theta_1$ + 0.0399604 $\theta_2$ - 0.00
-0.0349066 - 0.128691 $w_1$ + 0.125181 $w_2$ - 0.0073854 $w_3$ - 0.792866 $\theta_1$ - 0.396433 $\theta_2$ + 0.02
-0.0349066 - 0.0582458 $w_1$ - 0.0261983 $w_2$ + 0.0693407 $w_3$ + 0.186482 $\theta_1$ - 1.02565 $\theta_2$ - 0.02
-0.0349066 + 0.0307084 $w_1$ - 0.141907 $w_2$ + 0.119544 $w_3$ + 0.719288 $\theta_1$ - 0.873421 $\theta_2$ - 0.45

## Segunda Matriz de Acoplamiento $D_z$

Con esta matriz se consigue averiguar el desplazamiento vertical del punto de control de todos los paneles. Usando la definición matricial se obtiene  $D_z$  :

```
In[6001]:= RCA[8][[1]] // N
          |vε
RCA[6][[2]] // N
          |vε

Out[6001]= 1.9351

Out[6002]= 0.939693

In[6003]:= Dz = Table[{If[RCC[j][[2]] ≤ 0, Transpose[NAI[RCC[j][[1]], RCC[j][[2]]]],
          |tabla   |si           |transposición
          Transpose[NAD[RCC[j][[1]], RCC[j][[2]]]]} // Flatten, {j, 1, n}];
          |transposición                                     |aplana
Dz // MatrixForm
          |forma de matriz

Out[6004]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & - \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & - \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & : \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0 \\ 0.336286 & -3.59145 \times 10^{-17} & -0.149401 & 7.39416 \times 10^{-18} & 0.0428078 & -1.03457 \times 10^{-18} & \\ 1.01039 & -2.16895 \times 10^{-16} & -0.103336 & 9.85889 \times 10^{-18} & 0.02574 & -1.1476 \times 10^{-18} & \\ 0.547297 & 1.95613 \times 10^{-16} & 0.658467 & 9.78064 \times 10^{-17} & -0.111205 & -7.24492 \times 10^{-18} & \\ -0.066293 & 1.84033 \times 10^{-16} & 0.988522 & -1.01218 \times 10^{-15} & 0.0611838 & -2.49921 \times 10^{-17} & \\ -0.104267 & 0. & 0.431829 & 0. & 0.643468 & 0. & \end{pmatrix}$$


In[6005]:= zA = c Dz .u // Expand;
          |expande fa

zA // MatrixForm
          |forma de matriz

Out[6006]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.104267 w_4 + 0.431829 w_5 + 0.643468 w_6 \\ 0. - 0.066293 w_4 + 0.988522 w_5 + 0.0611838 w_6 \\ 0. + 0.547297 w_4 + 0.658467 w_5 - 0.111205 w_6 \\ 0. + 1.01039 w_4 - 0.103336 w_5 + 0.02574 w_6 \\ 0. + 0.336286 w_4 - 0.149401 w_5 + 0.0428078 w_6 \\ 0. + 0.336286 w_1 - 0.149401 w_2 + 0.0428078 w_3 - 3.23231 \times 10^{-17} \theta_1 + 6.65475 \times 10^{-18} \theta_2 - 9.311 \\ 0. + 1.01039 w_1 - 0.103336 w_2 + 0.02574 w_3 - 1.95206 \times 10^{-16} \theta_1 + 8.873 \times 10^{-18} \theta_2 - 1.03284 \\ 0. + 0.547297 w_1 + 0.658467 w_2 - 0.111205 w_3 + 1.76052 \times 10^{-16} \theta_1 + 8.80258 \times 10^{-17} \theta_2 - 6.520 \\ 0. - 0.066293 w_1 + 0.988522 w_2 + 0.0611838 w_3 + 1.65629 \times 10^{-16} \theta_1 - 9.10961 \times 10^{-16} \theta_2 - 2.249 \\ 0. - 0.104267 w_1 + 0.431829 w_2 + 0.643468 w_3 \end{pmatrix}$$


```

## REPRESENTACIÓN NODOS, PUNTOS CONTROL Y CENTROS AERODINAMICOS

### PUNTOS

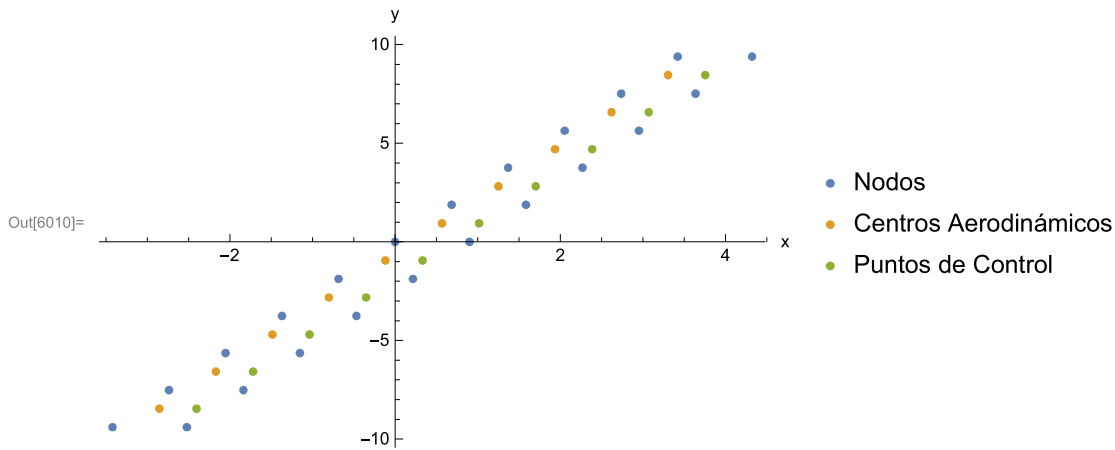
```
In[6007]:= PosCA = Table[{PosicionCentroAerodinamico[[j, 2]][[1]],
          |tabla
          PosicionCentroAerodinamico[[j, 2]][[2]]}, {j, 1, n}];
```

```
In[6008]:= PosPC = Table[{PosicionPuntosControlDIM[[j, 2]][[1]],
  PosicionPuntosControlDIM[[j, 2]][[2]]}, {j, 1, n};
```

```
In[6009]:= PosNodos = Table[{MatrizPosicionNodosDIM[[j, 2]][[1]],
  MatrizPosicionNodosDIM[[j, 2]][[2]]}, {j, 1, P};
```

## REPRESENTACIÓN

```
In[6010]:= ListPlot[{PosNodos, PosCA, PosPC},
  PlotLegends → {"Nodos", "Centros Aerodinámicos", "Puntos de Control"},
  AxesLabel → {"x", "y"}]
```



## RESOLUCION SISTEMA

### CÁLCULOS

```
In[6011]:= fr =  $\frac{-4 \text{Cos}[\Lambda]}{ny} \text{Transpose}[Dz] \cdot \frac{\text{Inverse}[MatrizH]}{c} \cdot ar;$ 
```

In[6012]:=  $\mathbf{Am} = \frac{-4 \cos[\Lambda]}{ny} \text{Transpose}[\mathbf{Dz}] \cdot \frac{\text{Inverse}[\mathbf{MatrizH}]}{c} \cdot \mathbf{Da};$

MatrixForm[Am]

[forma de matriz]

Out[6013]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.0111881 & 1.23774 & -0.109852 & 0.0902146 & 0.02163 & 0 \\ 3.22276 \times 10^{-17} & -4.35882 \times 10^{-17} & -2.70319 \times 10^{-18} & 2.30544 \times 10^{-16} & -1.20436 \times 10^{-17} & 5 \\ 0.114874 & 0.0686451 & -0.00658405 & 1.4467 & -0.088633 & 0 \\ -4.09566 \times 10^{-17} & 1.30194 \times 10^{-16} & -1.98732 \times 10^{-17} & -8.44363 \times 10^{-16} & 5.34874 \times 10^{-17} & -4 \\ -0.0189101 & -0.370936 & 0.0687914 & 0.50898 & -0.058504 & 0 \\ -1.64287 \times 10^{-18} & -4.61503 \times 10^{-18} & 3.98719 \times 10^{-19} & -2.45599 \times 10^{-17} & 1.31489 \times 10^{-18} & -1 \\ -0.00682858 & 0.0298367 & 0.00094747 & 0.00966741 & -0.00107603 & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0 \\ 0.0006144 & 0.00303116 & -0.00041244 & 0.00462133 & -0.000191602 & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0 \\ -0.000615363 & 0.00304838 & 0.0000737888 & 0.00143052 & -0.000131967 & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0 \end{pmatrix}$$

In[6014]:=  $\mathbf{Kadim} - \lambda \mathbf{Am} // \text{MatrixForm}$

[forma de matriz]

Out[6014]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 6.3926 + 0.0111881 \lambda & -1.23774 \lambda & -4.01933 + 0.109852 \lambda & -0.0902146 & 0 & 0 \\ -3.22276 \times 10^{-17} \lambda & \frac{2673}{140} + 4.35882 \times 10^{-17} \lambda & 2.70319 \times 10^{-18} \lambda & -\frac{7047}{560} - 2.30544 \times 10^{-16} & 0 & 0 \\ -4.01933 - 0.114874 \lambda & -0.0686451 \lambda & 3.66746 + 0.00658405 \lambda & -1.4467 & 0 & 0 \\ 4.09566 \times 10^{-17} \lambda & -\frac{7047}{560} - 1.30194 \times 10^{-16} \lambda & 1.98732 \times 10^{-17} \lambda & \frac{486}{35} + 8.44363 \times 10^{-16} & 0 & 0 \\ 1.14505 + 0.0189101 \lambda & 0.370936 \lambda & -1.31336 - 0.0687914 \lambda & -0.50898 & 0 & 0 \\ 1.64287 \times 10^{-18} \lambda & \frac{423}{140} + 4.61503 \times 10^{-18} \lambda & -3.98719 \times 10^{-19} \lambda & -\frac{3177}{560} + 2.45599 \times 10^{-17} & 0 & 0 \\ 0.00682858 \lambda & -0.0298367 \lambda & -0.00094747 \lambda & -0.00966741 & 0 & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0 \\ -0.0006144 \lambda & -0.00303116 \lambda & 0.00041244 \lambda & -0.00462133 & 0 & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0 \\ 0.000615363 \lambda & -0.00304838 \lambda & -0.0000737888 \lambda & -0.00143052 & 0 & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0 \end{pmatrix}$$

In[6015]:=  $\text{Det}[\mathbf{Kadim} - \lambda \mathbf{Am} // \text{Chop}]$

[determinante] [cambiar]

Out[6015]=  $12968.7 (0.0454101 + 0.00360461 \lambda - 0.232315 \lambda^2 - 0.00102532 \lambda^3 + 0.00177793 \lambda^4 - 9.7437 \times 10^{-7} \lambda^5 - 6.45361 \times 10^{-7} \lambda^6)$

## SOLUCIÓN

In[6016]:=  $\text{Solve}[\text{Det}[\mathbf{Kadim} - \lambda \mathbf{Am} // \text{Chop}] == 0, \lambda] // \mathbf{N}$

[resuelve] [determinante] [cambiar números pe... [valor numérico]

Out[6016]=  $\{\{\lambda \rightarrow -52.2731\}, \{\lambda \rightarrow -11.3735\}, \{\lambda \rightarrow -0.435148\}, \{\lambda \rightarrow 0.449843\}, \{\lambda \rightarrow 12.0829\}, \{\lambda \rightarrow 50.0392\}\}$

In[6017]:=  $\text{Solve}[\text{Det}[\mathbf{Kadim} - \frac{q}{\left(\frac{GJ}{1^2 c^2}\right)} \mathbf{Am} // \text{Chop}] == 0, q] // \mathbf{N}$

[resuelve] [determinante] [cambiar números pe... [valor numérico]

Out[6017]=  $\{\{q \rightarrow -2.77499 \times 10^6\}, \{q \rightarrow -603777.\}, \{q \rightarrow -23100.5\}, \{q \rightarrow 23880.6\}, \{q \rightarrow 641436.\}, \{q \rightarrow 2.6564 \times 10^6\}\}$