

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE LA CONSTRUCCIÓN Y  
DE PROYECTOS DE INGENIERÍA CIVIL



**MODELIZACIÓN DE ELEMENTOS LINEALES  
DE HORMIGÓN ARMADO INCLUYENDO EL  
EFECTO DEL ESFUERZO CORTANTE**

TESIS DOCTORAL

AUTOR:

Juan Navarro Gregori

DIRIGIDA POR:

Dr. Pedro F. Miguel Sosa

Dr. Miguel Ángel Fernández Prada

Valencia, Diciembre de 2009



*A Joan y Adriana*

Juan Navarro Gregori

U. D. Hormigón Armado y Pretensado

Departamento de Ingeniería de la Construcción y de P. I. C.

Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH)

Edificio Caminos 2, Camino de Vera s/n

46022 Valencia (España)

Tel: +34 96 387 7007 – Ext. 75617

Fax: +34 96 387 7659

E-mail: [juanagre@cst.upv.es](mailto:juanagre@cst.upv.es)

## RESUMEN

La gran mayoría de estructuras de hormigón armado compuestas por elementos lineales desarrolla esfuerzos combinados que incluyen el esfuerzo cortante. Además, algunos colapsos estructurales han sido debidos a situaciones de acoplamiento de esfuerzos que han llevado a la estructura a un fallo frágil a cortante. Por ello, resulta necesario disponer de modelos de análisis de elementos lineales que incluyan el efecto del esfuerzo cortante correctamente.

El análisis y el dimensionamiento de las estructuras de hormigón armado se ha realizado tradicionalmente tratando por separado los esfuerzos aplicados. En la actualidad, existen pocos modelos unidimensionales de análisis no lineal que capten adecuadamente el efecto que produce el esfuerzo cortante. La fisuración diagonal, la transmisión del cortante a través de la armadura transversal o la zona no fisurada, y el fallo final del elemento, son aspectos que un modelo de cortante debe incluir eficazmente.

El objetivo general de esta tesis doctoral es el de modelizar el comportamiento resistente de elementos lineales de hormigón armado incluyendo el efecto del esfuerzo cortante. Se presenta un modelo teórico que considera simultáneamente los esfuerzos axil, flector y cortante. Se propone una nueva hipótesis cinemática para el comportamiento seccional que permite estudiar el efecto de acoplamiento entre las tensiones normales y tangenciales. Esta nueva hipótesis recibe el nombre de hipótesis de corrección de cortante, por ser el término dependiente del esfuerzo cortante el que se corrige.

La hipótesis de corrección de cortante incluye una función de interpolación general, que configura el denominado modelo general de corrección de cortante. Además, se plantea otra función de interpolación más sencilla. De este modo, y empleando tan solo tres parámetros, se define una función de interpolación que configura el denominado modelo parábola-recta de corrección de cortante. Se implementa este nuevo comportamiento cinemático en un elemento finito 1D y se sigue el método de la rigidez.

Se hace una incursión en el caso tridimensional y se constata que para algunas combinaciones de esfuerzos se obtienen resultados satisfactorios sin necesidad de recurrir a hipótesis cinemáticas refinadas.

La ecuación constitutiva adoptada en el modelo teórico de corrección de cortante está basada en las hipótesis fundamentales del Modified Compression Field Theory.

Una vez definido el modelo general de corrección de cortante, se valida empleando estructuras sencillas compuestas de material elástico y lineal, de las cuales se conocen las soluciones teóricas exactas. Además, se valida el modelo utilizando material elastoplástico, de características asimilables al acero.

A continuación, se valida experimentalmente el modelo general de corrección de cortante para el caso de elementos lineales de hormigón armado. Se comparan los resultados experimentales con los obtenidos numéricamente. Además, se contrastan los anteriores resultados con los obtenidos a partir de las clásicas teorías de vigas (Euler-Bernouilli y Timoshenko).

A continuación, se valida experimentalmente el modelo parábola-recta de corrección de cortante. A su vez, se comparan los resultados obtenidos por el modelo general y por el modelo parábola-recta. De este modo, se estudian las ventajas e inconvenientes de utilizar un modelo u otro.

Tras el proceso de validación se concluye que el modelo teórico de corrección de cortante, tanto en su versión general como parábola-recta, es una herramienta eficaz para la modelización de elementos lineales de hormigón armado que incluye el efecto del esfuerzo cortante. Su ámbito de aplicación se sitúa un paso más allá de las clásicas teorías de vigas sin complicar excesivamente la hipótesis cinemática, especialmente en el modelo parábola-recta. De esta forma, mediante el modelo se consiguen captar efectos difícilmente reproducibles con teorías clásicas de vigas clásicas y sin perder de vista el comportamiento global a nivel estructura.

## SUMMARY

Most reinforced concrete frame structures are subjected to combined loads including shear. Moreover, some structural collapses have been produced by the coupling of loads ending up in brittle shear failures. As a result, it is necessary to develop frame models including the effect of shear loading.

The analysis and design of reinforced concrete structures usually takes into account the loads applied separately. Nowadays, there are few non-linear frame models including the effect of shear loading adequately. Diagonal cracking, the shear transmission through the transverse reinforcement or the uncracked concrete zone, and the failure of the element are effects a shear model must include properly.

The main objective of this doctoral thesis is the analysis of reinforced concrete elements including the shear load. A theoretical model including combined axial, bending, and shear loads is presented. A new kinematic assumption for the section analysis is proposed. This assumption makes possible the study of coupling of normal and shear stresses. This new assumption is called the shear correction assumption, because the sectional shear strain is corrected.

The shear correction assumption makes use of a general interpolation function to develop the general shear correction model. Moreover, a more simple interpolation function is presented. Thus, a function depending on only three parameters is defined to develop the parabola-straight-line shear correction model. This new kinematic assumption is implemented in a displacement-based frame element.

An insight on the 3D frame analysis is done. Good results are obtained for some load combinations using traditional beam theories.

The shear correction model makes use of a material model based on the Modified Compression Field Theory.

The general shear correction model is validated for simple structures using linear elastic material, and results are compared with theoretical results. Moreover, the model is validated for elastic perfectly plastic material, similar to steel.

Next, the general shear correction model is validated for reinforced concrete elements. Experimental results are compared with numerical results. Additional comparisons are carried out by using the traditional Euler-Bernoulli, and Timoshenko beam theories.

Next, the parabola-straight-line shear correction model is also validated for reinforced concrete elements. Comparisons between the general and the parabola-straight-line models are carried out. Thus, advantages and disadvantages on the use of either one model or the other are described.

To conclude, the general and the parabola-straight-line shear correction models are a useful tool for the analysis of reinforced concrete frame elements including the shear loading. The scope of the models goes beyond traditional beam theories by modifying slightly the kinematics assumption, especially in the parabola-straight-line model. Thus, some effects poorly captured with traditional beam theories are reproduced. Good global response of the model at structure level is also achieved.

## RESUM

La major part d'estructures de formigó armat compostes d'elements lineals desenvolupa combinacions d'esforços que inclouen l'esforç tallant. A més a més, alguns col·lapses estructurals han estat produïts per situacions d'acoblament d'esforços que han provocat un trencament fràgil a tallant. Per això, resulta necessari disposar de models d'anàlisi d'elements lineals que incloguen l'efecte del esforç tallant correctament.

L'anàlisi i el dimensionament de les estructures de formigó armat s'ha realitzat tradicionalment tractant per separat els esforços aplicats. En la actualitat, existeixen pocs models unidimensionals d'anàlisi no lineal que captin adequadament l'efecte que produeix l'esforç tallant. La fissuració diagonal, la transmissió del tallant a través de l'armadura transversal o de la zona no fissurada, i la fallida final de l'element, són efectes que un model de tallant hauria d'incloure eficaçment.

L'objectiu general d'aquesta tesi doctoral és la de modelitzar el comportament d'elements lineals de formigó armat incloent l'efecte de l'esforç tallant. Se presenta un model teòric que considera simultàniament els esforços d'axial, flexió i tallant. Se proposa una nova hipòtesi cinemàtica per al comportament seccional que permet estudiar l'efecte d'acoblament entre les tensions normals i tangencials. A esta nova hipòtesi se la denomina hipòtesi de correcció de tallant, per ser el terme dependent del tallant el que se corregeix.

La hipòtesi de correcció de tallant se realitza mitjançant una funció de interpolació general, i se configura el model general de correcció de tallant. A més a més, se planteja una altra funció d'interpolació més senzilla. D'aquesta manera, i utilitzant tan sols tres paràmetres, se defineix una funció que configura el denominat model paràbola-recta de correcció de tallant. S'implementa aquest nou comportament cinemàtic en un element finit tipus barra i se segueix el mètode de la rigidesa.

Se fa una incursió en el cas tridimensional i s'observa que existeixen algunes combinacions d'esforços que proporcionen resultats satisfactoris sense necessitat de recórrer a hipòtesis cinemàtiques refinades.

El model de correcció de tallant utilitza una equació constitutiva basada en les hipòtesis fonamentals del Modified Compression Field Theory.

Se valida el model teòric de correcció de tallant mitjançant estructures senzilles compostes de material elàstic i lineal, de las quals se coneixen les solucions teòriques exactes. A més a més, se valida el model utilitzant un material elastoplàstic, de característiques semblants a l'acer.

A continuació, se valida experimentalment el model general de correcció de tallant per al cas d'elements lineals de formigó armat. Se comparen els resultats experimentals amb els obtinguts numèricament. A més a més, se comparen els anteriors resultats amb els obtinguts a partir de les teories clàssiques de bigues (Euler-Bernouilli i Timoshenko).

Així mateix, se valida experimentalment el model paràbola-recta de correcció de tallant. Se comparen els resultats que proporcionen el model general i el model paràbola-recta. D'aquesta manera, s'estudien els avantatges i inconvenients d'utilitzar un model o l'altre.

Després del procés de validació se conclou que el model teòric de correcció de tallant, tant a la versió general como a la paràbola-recta, és una eina eficaç per a la modelització d'elements lineals de formigó armat que inclou l'efecte de l'esforç tallant. El seu àmbit d'aplicació se situa un pas més enllà de les teories tradicionals sense complicar excessivament la hipòtesi cinemàtica, especialment en el model paràbola-recta. D'aquesta manera, mitjançant el model s'aconsegueixen captar efectes difícilment reproduïbles amb teories clàssiques de bigues i sense perdre de vista el comportament global del model a nivell estructura.

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis directores de tesis Pedro y Miguel Ángel por introducirme en el mundo de la investigación y de la docencia del hormigón estructural y por todo el tiempo que me han dedicado en mi formación como investigador y en la realización de esta tesis doctoral.

Además, quiero agradecer al profesor Filip C. Filippou por darme la oportunidad de llevar a cabo una parte de mi investigación bajo su supervisión en la Universidad de California-Berkeley en 2006. Por todos sus consejos que me han permitido clarificar mi línea de investigación y fundamentalmente por la gran amistad que siempre me ha mostrado desde que tuve la suerte de conocerle.

La estancia en Berkeley fue increíble ya que pude recoger enseñanzas que no olvidaré en mi vida y por los muchos amigos que estuvieron a mi lado entre los que me gustaría recordar a Gisela, Albert, Nic, Marco, Afsin, Paolo y Francesco.

También agradecer a los compañeros de la unidad docente y del departamento Carmen, José Rocío, José Luis, Luis, María José y Pedro Serna por su apoyo en estos años de duro trabajo. Extender también este agradecimiento al resto de compañeros del Departamento de Ingeniería de la Construcción y de P. I. C y del Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH) por su amistad y disponibilidad en el día a día.

Ya por último, quiero expresar con total sinceridad que este trabajo ha sido posible gracias al enorme apoyo que he tenido en todo momento de mi mujer Adriana y recientemente de nuestro hijo Joan, de mis padres Juan y Conchita, de mi hermano Santi y Ana, de mi hermana Inma, David y David Jr., de mis suegros Carmelo y Pepa y del resto de la familia. Gracias por estar siempre ahí y confiar tanto en mí.



# ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.....</b>	<b>2</b>
1.1 Marco general.....	2
1.2 Objetivos.....	6
1.3 Importancia de la investigación.....	7
1.4 Contenido del documento.....	7
<b>CAPÍTULO 2. ESTADO DEL ARTE.....</b>	<b>12</b>
2.1 Introducción.....	12
2.2 Evolución histórica.....	13
2.3 Modelos 1D.....	14
2.3.1 Breve revisión de las teorías de vigas.....	15
2.3.1.1 Teoría de vigas de Euler-Bernouilli (EBT).....	15
2.3.1.2 Teoría de vigas de Timoshenko (TBT).....	17
2.3.1.3 Teoría de vigas de tercer orden (Reddy).....	19
2.3.1.4 Teorías de orden superior.....	21
2.3.2 Aplicaciones a elementos de hormigón.....	22
2.3.2.1 Modelo de Guedes et al. (1994) [25].....	23
2.3.2.2 Modelo de Rahal y Collins (1995) [56].....	24
2.3.2.3 Modelo de Martinelli (1998) [37].....	27
2.3.2.4 Modelo de Ranzo y Petrangeli (1998) [58].....	29
2.3.2.5 Modelo de Marini y Spacone (2006) [36].....	30
2.3.2.6 Modelo de Navarro (1999) [44].....	31
2.3.2.7 Modelo de Petrangeli et al. (1999) [50].....	34
2.3.2.8 Modelo de Vecchio y Collins (1988) [84].....	35
2.3.2.9 Modelo de Bentz (2000) [8].....	37
2.3.2.10 Modelo de Remino (2004) [64].....	38
2.3.2.11 Modelo de Bairán (2005) [5].....	39
2.3.2.12 Modelo de Saritas (2006) [67].....	42
2.3.2.13 Modelo de Navarro et al. (2007) [45].....	42
2.3.2.14 Modelo de Ceresa et al. (2009) [13].....	44
2.3.2.15 Modelo de Kotronis (2000) [29].....	45
2.4 Modelos 2D.....	45
2.4.1 Modelo de Vecchio (1989) [85].....	45
2.4.2 Modelo de Stevens et al. (1991) [77].....	47
2.5 Modelos 3D.....	49
2.5.1 Modelo de Vecchio y Selby (1991) [87].....	49

---

<b>CAPÍTULO 3. MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE..</b>	<b>54</b>
3.1 Descripción del modelo teórico de corrección de cortante .....	54
3.1.1 Hipótesis cinemática de corrección de cortante.....	54
3.1.2 Desarrollo de la hipótesis cinemática.....	57
3.1.3 Resolución del sistema de ecuaciones.....	61
3.1.3.1 Resolución del sistema 1 .....	62
3.1.3.2 Resolución del sistema 2 .....	62
3.1.3.3 Parámetros de deformación necesarios .....	63
3.2 Modelo general de corrección de cortante.....	65
3.2.1 Interpolación lineal .....	65
3.2.2 Interpolación parabólica .....	67
3.3 Modelo parábola-recta .....	69
3.3.1 Formulación analítica de la función parábola-recta .....	70
3.4 Implementación a nivel elemento .....	73
3.5 Discretización en elementos finitos .....	74
3.5.1 Elemento finito parabólico de Timoshenko .....	74
3.5.2 Vector derivada de deformaciones seccionales .....	78
3.5.3 Elemento finito cúbico de Timoshenko.....	79
3.6 Extrapolación del modelo a 3D.....	82
<b>CAPÍTULO 4. ECUACIONES CONSTITUTIVAS.....</b>	<b>88</b>
4.1 Comportamiento del acero (1D) .....	89
4.2 Comportamiento del hormigón armado (2D).....	90
4.2.1 Ecuación constitutiva hormigón 1D.....	91
4.2.1.1 Comportamiento en compresión .....	91
4.2.1.2 Comportamiento en tracción .....	94
4.2.2 Ecuación constitutiva del acero embebido en el hormigón.....	96
4.2.3 Comportamiento bidimensional del hormigón armado.....	97
4.3 Validación experimental.....	101
4.4 Adaptación al modelo teórico de corrección de cortante.....	107
4.5 Fenómeno de tension-stiffening.....	110
4.5.1 Armaduras distribuidas .....	110
4.5.2 Armaduras discretas.....	110
<b>CAPÍTULO 5. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE .....</b>	<b>114</b>
5.1 Estructuración del programa.....	114
5.2 Bucle de corrección de cortante .....	118

<b>CAPÍTULO 6. VALIDACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE .....</b>	<b>122</b>
6.1 Comportamiento con material elástico y lineal .....	122
6.1.1 Viga ménsula rectangular con carga puntual en extremo.....	123
6.1.2 Viga biapoyada rectangular con carga puntual centrada .....	125
6.1.3 Viga biapoyada doble T con carga puntual centrada .....	129
6.2 Comportamiento con material no lineal.....	132
 <b>CAPÍTULO 7. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DEL MODELO GENERAL DE CORRECCIÓN DE CORTANTE .....</b>	 <b>140</b>
7.1 Introducción.....	140
7.2 Ensayos de Vecchio y Shim .....	140
7.2.1 Características de las vigas analizadas .....	141
7.2.2 Modelización vigas Vecchio y Shim.....	143
7.2.3 Resultados vigas Vecchio y Shim.....	148
7.2.4 Interpretación de resultados vigas Vecchio y Shim .....	161
– Probeta VS-A1 (Fig. 7.6 y Fig. 7.15).....	161
– Probeta VS-A2 (Fig. 7.7 y Fig. 7.16).....	162
– Probeta VS-A3 (Fig. 7.8 y Fig. 7.17).....	163
– Probeta VS-B1 (Fig. 7.9 y Fig. 7.18).....	164
– Probeta VS-B2 (Fig. 7.10 y Fig. 7.19).....	164
– Probeta VS-B3 (Fig. 7.11 y Fig. 7.20).....	164
– Probeta VS-C1 (Fig. 7.12 y Fig. 7.21).....	165
– Probeta VS-C2 (Fig. 7.13 y Fig. 7.22).....	165
– Probeta VS-C3 (Fig. 7.14 y Fig. 7.23).....	166
– Análisis global de la serie de Vecchio y Shim .....	166
7.3 Ensayos de Bresler y Scordelis.....	170
7.3.1 Características de las vigas analizadas .....	170
7.3.2 Modelización vigas Bresler y Scordelis .....	171
7.3.3 Resultados vigas Bresler y Scordelis.....	172
7.3.4 Interpretación de resultados vigas Bresler y Scordelis.....	185
– Probeta BS-A1 (Fig. 7.30 y Fig. 7.39).....	185
– Probeta BS-A2 (Fig. 7.31 y Fig. 7.40).....	186
– Probeta BS-A3 (Fig. 7.32 y Fig. 7.41).....	187
– Probeta BS-B1 (Fig. 7.33 y Fig. 7.42).....	187
– Probeta BS-B2 (Fig. 7.34 y Fig. 7.43).....	188
– Probeta BS-B3 (Fig. 7.35 y Fig. 7.44).....	188
– Probeta BS-C1 (Fig. 7.36 y Fig. 7.45).....	189

– Probeta BS-C2 (Fig. 7.37 y Fig. 7.46).....	189
– Probeta BS-C3 (Fig. 7.38 y Fig. 7.47).....	190
– Análisis global de la serie de Bresler y Scordelis.....	191
<b>CAPÍTULO 8. MODELO PARÁBOLA-RECTA.....</b>	<b>194</b>
8.1 Introducción.....	194
8.2 Modelización vigas Vecchio y Shim según el modelo parábola-recta.....	195
8.3 Modelización vigas Bresler y Scordelis según el modelo parábola-recta.....	207
8.4 Interpretación de resultados modelo parábola-recta.....	219
8.5 Influencia de la resistencia a tracción del hormigón.....	222
8.6 Influencia del tipo de elemento utilizado.....	226
<b>CAPÍTULO 9. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>230</b>
9.1 Resumen.....	230
9.2 Conclusiones.....	232
9.3 Futuras líneas de investigación.....	235
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>237</b>
<b>ANEJO 1 ARTÍCULO</b>	
“A 3D Numerical Model for Reinforced Concrete and Prestressed Concrete Elements Subjected to Combined Axial, Bending, Shear, and Torsion Loading”	
<b>ANEJO 2. ELEMENTO FINITO EULER-BERNOUILLI.....</b>	<b>A2-2</b>
2.1 Teoría de vigas de Euler-Bernouilli (EBT).....	A2-2
2.2 Discretización en elementos finitos.....	A2-5

## NOTACIÓN

$A$	Área de la sección transversal del elemento estructural
$A_s$	Área de las armaduras
$\alpha(z)$	Función de corrección de cortante
$\alpha(y, z) \beta(y, z)$	Funciones de corrección de cortante caso 3D
$\alpha^i(z, \boldsymbol{\varepsilon}_r)$	Función de interpolación correspondiente al tramo $i$
$\alpha_{max}$	Valor máximo parámetro tension-stiffening
$B, H$	Ancho y canto sección rectangular
$\mathbf{B}$	Matriz de deformación del elemento finito
$C_b$	Factor de efectividad de la transmisión de la adherencia
$C C_t$	Factores de adherencia entre acero y hormigón
$d$	Canto útil de la sección
$d_b$	Diámetro de las armaduras
$\mathbf{D}$	Matriz de rigidez de una capa $[D_{11} \quad D_{12}; \quad D_{21} \quad D_{22}]$
$D_{11} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1}$	
$D_{12} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_2}$	
$D_{21} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_1}$	
$D_{22} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_2}$	

$\mathbf{D}_{cp}$	Matriz de rigidez del hormigón (2D)
$\mathbf{D}_{c,prin}$	Matriz de rigidez del hormigón en direcciones principales (2D)
$\mathbf{D}_s$	Matriz de rigidez de la sección
$\mathbf{D}_{sp}$	Matriz de rigidez de las armaduras (2D)
<i>DSFM</i>	Disturbed Stress Field Model
$\delta$	Flecha o desplazamiento impuesto
$\Delta$	Distancia desde una arm. long. discreta a una capa de la sección
$E$	Módulo de elasticidad (material elástico y lineal)
$E_0$	Módulo de deformación inicial tangente del hormigón
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$	Vectores unitarios elemento finito
<i>EBT</i>	Teoría de vigas de Euler-Bernouilli
$E_p$	Módulo de deformación (rama de plastificación)
$E_s$	Módulo de elasticidad del acero
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vector de deformaciones de una capa $[\varepsilon_x \quad \gamma_{xz}]^T$
$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = [\varepsilon_x \quad \gamma_{xz}]^T$	
$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \varepsilon_z$	
$\varepsilon'_c$	Deformación del hormigón a la resistencia a compresión $f'_c$
$\varepsilon_{cr}$	Deformación de fisuración del hormigón
$\varepsilon_L$	Deformación del hormigón en la dirección longitudinal
$\boldsymbol{\varepsilon}_{prin}$	Vector de deformaciones principales (2D)

---

$\boldsymbol{\varepsilon}_r$	Vector de corrección de cortante
$\varepsilon_s$	Deformación del acero
$\boldsymbol{\varepsilon}_s$	Vector de deformaciones seccionales $[\varepsilon_0 \quad \gamma_{0xz} \quad c_y]^T$
$\varepsilon_{su}$	Deformación del acero en rotura
$\varepsilon_{sy}$	Deformación del acero correspondiente al límite elástico
$\varepsilon_T$	Deformación del hormigón en la dirección transversal
$f'_c$	Resistencia a compresión del hormigón en probeta cilíndrica
$f_{cr}$	Resistencia a tracción del hormigón
$\mathbf{f}_i^{(e)}$	Vector de fuerzas nodales internas del elemento finito
$f_{su}$	Tensión de rotura del acero
$f_{sy}$	Límite elástico del acero
$\boldsymbol{\varphi}_r$	Vector de residuos del equilibrio longitudinal
$\boldsymbol{\varphi}_s$	Vector de residuos seccionales
$\phi'_s$	Diámetro armadura longitudinal superior
$\phi_s$	Diámetro armadura longitudinal inferior
$\phi_{st} s_{st}$	Diámetro y separación armadura transversal
$G$	Módulo de deformación transversal (material elástico y lineal)
$GEN$	Teoría de vigas modelo general de corrección de cortante
$H_i$	Módulo de endurecimiento isotrópico (Modelo plasticidad J <sub>2</sub> )

---

$H_k$	Módulo de endurecimiento dinámico (Modelo plasticidad J <sub>2</sub> )
$I$	Inercia respecto al centro de gravedad de la sección
$I_n$	Matriz identidad de orden n
$k$	Factor de pérdida tensión post-rotura hormigones alta resistencia
$\mathbf{K}^{(e)}$	Matriz de rigidez del elemento finito
$k_s$	Coefficiente de corrección de cortante
$L$	Longitud del elemento
$L_1^i \quad L_2^i$	Matrices de interpolación de funciones de corrección de cortante
$\lambda_i$	Parámetro control descenso de la tensión de tracción del horm.
$MCFT$	Modified Compression Field Theory
$M_p$	Momento plástico
$n$	Parámetro de ajuste de curva tensión-deformación del hormigón
$N_i$	Funciones de forma y/o interpolación
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$O$	Centro de referencia de esfuerzos de la sección
$P$	Carga puntual aplicada sobre un elemento
$PAR$	Teoría de vigas con perfil $\alpha(z)$ fijo parabólico (Coefficiente 5/4)
$PR$	Teoría de vigas modelo parábola-recta
$\mathbf{p}_i$	Vector de fuerzas exteriores puntuales en el elemento finito
$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n$	Operador productorio

---

$\mathbf{r}^{(e)}$	Vector de desplazamientos nodales del elemento finito
$\rho_s$	Cuantía de armadura pasiva
$\rho_{s,dis}$	Cuantía equivalente de la armadura longitudinal discreta
$\rho_v$	Cuantía de armadura transversal
$\mathbf{S}$	Matriz de compatibilidad de la sección
$SF$	Coefficiente de debilitamiento de la tensión del hormigón
$\boldsymbol{\sigma}$	Vector de tensiones de una capa $[\sigma_x \quad \tau_{xz}]^T$
$\boldsymbol{\sigma}_1 = [\sigma_x \quad \tau_{xz}]^T$	
$\boldsymbol{\sigma}_2 = \sigma_z$	
$\sigma_c$	Tensión del hormigón
$\boldsymbol{\sigma}_{cp}$	Vector de tensiones en el hormigón (2D)
$\boldsymbol{\sigma}_{c,prin}$	Vector de tensiones principales en el hormigón (2D)
$\sigma_s$	Tensión del acero
$\boldsymbol{\sigma}_{sp}$	Vector de tensiones en el acero (2D)
$\boldsymbol{\sigma}_s$	Vector de esfuerzos seccionales $[N \quad \hat{V}_z \quad M_y]^T$
$\boldsymbol{\sigma}_{se}$	Vector de esfuerzos seccionales exteriores
$\sigma_y$	Límite elástico (Modelo plasticidad J <sub>2</sub> )
$\mathbf{t}$	Vector de fuerzas exteriores repartidas en el elemento finito
$\mathbf{T}$	Matriz de cambio entre direcciones cartesianas y principales
$TBT$	Teoría de vigas de Timoshenko

---

$t_f$	Espesor del ala en secciones doble T
$t_w$	Espesor del alma en secciones doble T
$\tau_{xzt}$	Tensión tangencial producida por equilibrio longitudinal
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamientos en un punto del elemento
$V_1$	Distancia desde $O$ hasta la capa superior de la sección
$V_2$	Distancia desde $O$ hasta la capa inferior de la sección
$V_{cr}$	Tensión de fisuración de un elemento 2D de hormigón armado
$V_p$	Cortante plástico
$V_u$	Tensión de agotamiento de un elemento 2D de hormigón armado
$V_{zic}$	Cortante transmitido por cálculo
$V_{zir}$	Cortante transmitido por equilibrio longitudinal
$W_{int} W_{ext}$	Trabajo generado por las fuerzas nodales internas y externas
$W_{max}$	Flecha máxima teórica
$x$	Posición de la fibra neutra desde el borde comprimido
$\xi$	Coordenada intrínseca del elemento finito

## LISTA DE FIGURAS

<b>Fig. 2.1</b>	Modelo básico de celosía .....	13
<b>Fig. 2.2</b>	Viga con comportamiento Euler-Bernouilli (EBT) .....	15
<b>Fig. 2.3</b>	Viga con comportamiento Timoshenko (TBT) .....	17
<b>Fig. 2.4</b>	Modelo de celosía de Guedes et al. (1994) [25] .....	23
<b>Fig. 2.5</b>	Compatibilidad de desplazamientos y equilibrio de fuerzas, Guedes et al. (1994) [25] ..	24
<b>Fig. 2.6</b>	Modelo de celosía espacial de ángulo variable, Rabat y Collins (1978) [54] .....	25
<b>Fig. 2.7</b>	Modelización de la sección, modelos 1D y 2D, Rahal y Collins (1995) [56] .....	26
<b>Fig. 2.8</b>	Subdivisión vertical de paneles, Rahal y Collins (2003) [57] .....	27
<b>Fig. 2.9</b>	Grados de libertad del elemento utilizado por Martinelli (1998) [37] .....	27
<b>Fig. 2.10</b>	(a) Biela inclinada, (b) Círculo de Mohr, (c) Ensamblaje, Martinelli (1998) [37] .....	28
<b>Fig. 2.11</b>	Funciones de esfuerzos y grados de libertad, Ranzo y Petrangeli (1998) [58] .....	29
<b>Fig. 2.12</b>	Modelo bielas y tirantes, Ranzo y Petrangeli (1998) [58] .....	29
<b>Fig. 2.13</b>	Esfuerzos y grados de libertad del elemento, Marini (2006) [36] .....	30
<b>Fig. 2.14</b>	Ley de comportamiento seccional a cortante, Marini (2006) [36] .....	31
<b>Fig. 2.15</b>	Descomposición en modelos 1D y 2D, Navarro (1999) [44] .....	32
<b>Fig. 2.16</b>	Discretización sistema esfuerzos rasantes, Navarro (1999) [44] .....	32
<b>Fig. 2.17</b>	Panel fisurado de hormigón armado, Navarro (1999) [44] .....	33
<b>Fig. 2.18</b>	Comportamiento a nivel sección y fibra, Petrangeli et al. (1999) [50] .....	34
<b>Fig. 2.19</b>	Modelo de cálculo seccional, Vecchio y Collins (1988) [84] .....	35
<b>Fig. 2.20</b>	Modelo de fibras, Remino (2004) [64] .....	38
<b>Fig. 2.21</b>	Definición del elemento finito utilizado, Navarro et al. (2007) [45] .....	43
<b>Fig. 2.22</b>	Subdivisión de la sección en regiones, Navarro et al. (2007) [45] .....	43
<b>Fig. 2.23</b>	Elemento membrana, Vecchio (1989) [85] .....	46
<b>Fig. 2.24</b>	Ecuaciones constitutivas y módulos secantes, Vecchio (1989) [85] .....	46
<b>Fig. 2.25</b>	Ecuaciones constitutivas hormigón a compresión, Stevens et al. (1991) [77] .....	48
<b>Fig. 2.26</b>	Elemento finito hexaédrico, Vecchio y Selby (1991) [87] .....	49
<b>Fig. 3.1</b>	Tensiones y deformaciones consideradas .....	55
<b>Fig. 3.2</b>	Esfuerzos seccionales .....	57
<b>Fig. 3.3</b>	Función de corrección de cortante .....	59
<b>Fig. 3.4</b>	Esfuerzos y tensiones tangenciales rasantes .....	60
<b>Fig. 3.5</b>	Significado físico del esfuerzo cortante .....	64
<b>Fig. 3.6</b>	Cortes practicados. Delimitación de tramos .....	65
<b>Fig. 3.7</b>	Interpolación lineal de la función de corrección de cortante .....	66
<b>Fig. 3.8</b>	Función de corrección sección rectangular de hormigón armado sin fisurar .....	69
<b>Fig. 3.9</b>	Función de corrección de cortante. Modelo parábola-recta .....	70
<b>Fig. 3.10</b>	Cortes practicados en el modelo parábola-recta .....	72
<b>Fig. 3.11</b>	Discretización de elemento viga en elementos finitos 1D .....	73
<b>Fig. 3.12</b>	Elemento finito de 3 nodos. Funciones de interpolación parabólicas .....	75
<b>Fig. 3.13</b>	Elemento Finito de 4 nodos. Funciones de interpolación cúbicas .....	79
<b>Fig. 3.14</b>	Tensiones y deformaciones consideradas modelo 3D .....	82
<b>Fig. 3.15</b>	Esfuerzos seccionales modelo 3D .....	84

<b>Fig. 4.1</b>	Ecuación constitutiva acero 1D.....	89
<b>Fig. 4.2</b>	Elemento 2D de hormigón armado fisurado .....	91
<b>Fig. 4.3</b>	Ecuación constitutiva del hormigón en compresión, Popovics (1973) [52].....	92
<b>Fig. 4.4</b>	Coefficiente de debilitamiento de la tensión de compresión del hormigón (SF) .....	93
<b>Fig. 4.5</b>	Ecuación constitutiva hormigón 1D en tracción .....	94
<b>Fig. 4.6</b>	Ecuación constitutiva del acero embebido en el hormigón .....	96
<b>Fig. 4.7</b>	Círculo de Mohr para la obtención de las direcciones principales .....	100
<b>Fig. 4.8</b>	Adaptación de la ecuación constitutiva 2D al cálculo seccional.....	107
<b>Fig. 4.9</b>	Algoritmo de resolución según el método de Newton-Raphson .....	109
<b>Fig. 4.10</b>	Tension-stiffening con presencia de armaduras discretas.....	111
<b>Fig. 5.1</b>	Determinación del estado de un elemento.....	115
<b>Fig. 5.2</b>	Procedimiento de corrección de cortante para un escalón de carga.....	119
<b>Fig. 6.1</b>	Viga ménsula rectangular con carga puntual en extremo .....	123
<b>Fig. 6.2</b>	Viga biapoyada rectangular con carga puntual centrada.....	125
<b>Fig. 6.3</b>	Sección transversal de pared delgada doble T .....	129
<b>Fig. 6.4</b>	Distribución de tensiones tangenciales en sección doble T (Ud. MPa) .....	131
<b>Fig. 6.5</b>	Conector metálico de cortante, Hjelmstad y Popov (1983) [27] .....	132
<b>Fig. 6.6</b>	Comparación curvas $V_z-\gamma_{0xz}$ (Conector metálico de cortante).....	134
<b>Fig. 6.7</b>	Distribución de tensiones tangenciales y deformaciones angulares.....	135
<b>Fig. 6.8</b>	Curvas $V_z-\gamma_{0xz}$ (Conector metálico de cortante) .....	136
<b>Fig. 6.9</b>	Curvas $V_z-\gamma_{0xz}$ L=0 (Conector metálico de cortante).....	138
<b>Fig. 7.1</b>	Dispositivo experimental vigas Vecchio y Shim (2004) [90].....	141
<b>Fig. 7.2</b>	Secciones transversales vigas Vecchio y Shim (2004) [90].....	142
<b>Fig. 7.3</b>	Distribución en regiones vigas Vecchio y Shim .....	144
<b>Fig. 7.4</b>	Discretización en elementos finitos Vecchio y Shim. Elem. TBT parabólico .....	145
<b>Fig. 7.5</b>	Regiones B y D vigas Vecchio y Shim .....	147
<b>Fig. 7.6</b>	Comparación resultados probeta VS-A1.....	150
<b>Fig. 7.7</b>	Comparación resultados probeta VS-A2.....	151
<b>Fig. 7.8</b>	Comparación resultados probeta VS-A3.....	152
<b>Fig. 7.9</b>	Comparación resultados probeta VS-B1 .....	153
<b>Fig. 7.10</b>	Comparación resultados probeta VS-B2.....	154
<b>Fig. 7.11</b>	Comparación resultados probeta VS-B3 .....	155
<b>Fig. 7.12</b>	Comparación resultados probeta VS-C1 .....	156
<b>Fig. 7.13</b>	Comparación resultados probeta VS-C2.....	157
<b>Fig. 7.14</b>	Comparación resultados probeta VS-C3.....	158
<b>Fig. 7.15</b>	Estado de agotamiento probeta VS-A1. Modelo general .....	159
<b>Fig. 7.16</b>	Estado de agotamiento probeta VS-A2. Modelo general .....	159
<b>Fig. 7.17</b>	Estado de agotamiento probeta VS-A3. Modelo general .....	159
<b>Fig. 7.18</b>	Estado de agotamiento probeta VS-B1. Modelo general .....	159
<b>Fig. 7.19</b>	Estado de agotamiento probeta VS-B2. Modelo general .....	159
<b>Fig. 7.20</b>	Estado de agotamiento probeta VS-B3. Modelo general .....	160
<b>Fig. 7.21</b>	Estado de agotamiento probeta VS-C1. Modelo general .....	160
<b>Fig. 7.22</b>	Estado de agotamiento probeta VS-C2. Modelo general .....	160

<b>Fig. 7.23</b>	Estado de agotamiento probeta VS-C3. Modelo general .....	160
<b>Fig. 7.24</b>	Direcciones principales viga VS-B2 .....	167
<b>Fig. 7.25</b>	Tensiones armadura transversal probeta VS-B2 (MPa). Modelo general .....	169
<b>Fig. 7.26</b>	Tensiones armadura transversal probeta VS-B2 (MPa). Modelo parabólico .....	169
<b>Fig. 7.27</b>	Tensiones armadura transversal probeta VS-B2 (MPa). Viga Timoshenko .....	169
<b>Fig. 7.28</b>	Dispositivo experimental vigas Bresler y Scordelis (1963) [10] .....	170
<b>Fig. 7.29</b>	Secciones transversales vigas Bresler y Scordelis (1963) [10] .....	170
<b>Fig. 7.30</b>	Comparación resultados probeta BS-A1 .....	174
<b>Fig. 7.31</b>	Comparación resultados probeta BS-A2 .....	175
<b>Fig. 7.32</b>	Comparación resultados probeta BS-A3 .....	176
<b>Fig. 7.33</b>	Comparación resultados probeta BS-B1 .....	177
<b>Fig. 7.34</b>	Comparación resultados probeta BS-B2 .....	178
<b>Fig. 7.35</b>	Comparación resultados probeta BS-B3 .....	179
<b>Fig. 7.36</b>	Comparación resultados probeta BS-C1 .....	180
<b>Fig. 7.37</b>	Comparación resultados probeta BS-C2 .....	181
<b>Fig. 7.38</b>	Comparación resultados probeta BS-C3 .....	182
<b>Fig. 7.39</b>	Estado de agotamiento probeta BS-A1. Modelo general .....	183
<b>Fig. 7.40</b>	Estado de agotamiento probeta BS-A2. Modelo general .....	183
<b>Fig. 7.41</b>	Estado de agotamiento probeta BS-A3. Modelo general .....	183
<b>Fig. 7.42</b>	Estado de agotamiento probeta BS-B1. Modelo general.....	183
<b>Fig. 7.43</b>	Estado de agotamiento probeta BS-B2. Modelo general.....	183
<b>Fig. 7.44</b>	Estado de agotamiento probeta BS-B3. Modelo general.....	184
<b>Fig. 7.45</b>	Estado de agotamiento probeta BS-C1. Modelo general.....	184
<b>Fig. 7.46</b>	Estado de agotamiento probeta BS-C2. Modelo general.....	184
<b>Fig. 7.47</b>	Estado de agotamiento probeta BS-C3. Modelo general.....	184
<b>Fig. 8.1</b>	Aplicación del modelo parábola-recta vigas Vecchio y Shim.....	195
<b>Fig. 8.2</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-A1 .....	196
<b>Fig. 8.3</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-A2 .....	197
<b>Fig. 8.4</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-A3 .....	198
<b>Fig. 8.5</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-B1 .....	199
<b>Fig. 8.6</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-B2 .....	200
<b>Fig. 8.7</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-B3 .....	201
<b>Fig. 8.8</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-C1 .....	202
<b>Fig. 8.9</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-C2 .....	203
<b>Fig. 8.10</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-C3 .....	204
<b>Fig. 8.11</b>	Estado de agotamiento probeta VS-A1. Modelo parábola-recta.....	205
<b>Fig. 8.12</b>	Estado de agotamiento probeta VS-A2. Modelo parábola-recta.....	205
<b>Fig. 8.13</b>	Estado de agotamiento probeta VS-A3. Modelo parábola-recta.....	205
<b>Fig. 8.14</b>	Estado de agotamiento probeta VS-B1. Modelo parábola-recta.....	205
<b>Fig. 8.15</b>	Estado de agotamiento probeta VS-B2. Modelo parábola-recta.....	205
<b>Fig. 8.16</b>	Estado de agotamiento probeta VS-B3. Modelo parábola-recta.....	206
<b>Fig. 8.17</b>	Estado de agotamiento probeta VS-C1. Modelo parábola-recta.....	206
<b>Fig. 8.18</b>	Estado de agotamiento probeta VS-C2. Modelo parábola-recta.....	206
<b>Fig. 8.19</b>	Estado de agotamiento probeta VS-C3. Modelo parábola-recta.....	206
<b>Fig. 8.20</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-A1 .....	208
<b>Fig. 8.21</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-A2 .....	209

<b>Fig. 8.22</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-A3 .....	210
<b>Fig. 8.23</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-B1 .....	211
<b>Fig. 8.24</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-B2.....	212
<b>Fig. 8.25</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-B3.....	213
<b>Fig. 8.26</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-C1.....	214
<b>Fig. 8.27</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-C2.....	215
<b>Fig. 8.28</b>	Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-C3.....	216
<b>Fig. 8.29</b>	Estado de agotamiento probeta BS-A1. Modelo parábola-recta .....	217
<b>Fig. 8.30</b>	Estado de agotamiento probeta BS-A2. Modelo parábola-recta .....	217
<b>Fig. 8.31</b>	Estado de agotamiento probeta BS-A3. Modelo parábola-recta .....	217
<b>Fig. 8.32</b>	Estado de agotamiento probeta BS-B1. Modelo parábola-recta .....	217
<b>Fig. 8.33</b>	Estado de agotamiento probeta BS-B2. Modelo parábola-recta .....	217
<b>Fig. 8.34</b>	Estado de agotamiento probeta BS-B3. Modelo parábola-recta .....	218
<b>Fig. 8.35</b>	Estado de agotamiento probeta BS-C1. Modelo parábola-recta .....	218
<b>Fig. 8.36</b>	Estado de agotamiento probeta BS-C2. Modelo parábola-recta .....	218
<b>Fig. 8.37</b>	Estado de agotamiento probeta BS-C3. Modelo parábola-recta .....	218
<b>Fig. 8.38</b>	Direcciones principales probeta VS-B2. Modelo parábola-recta .....	220
<b>Fig. 8.39</b>	Tensiones armadura transversal probeta VS-B2 (MPa). Modelo parábola-recta.....	220
<b>Fig. 8.40</b>	Sensibilidad $f_{cr}$ probeta BS-A1. Modelo parábola-recta .....	223
<b>Fig. 8.41</b>	Sensibilidad $f_{cr}$ probeta BS-A2. Modelo parábola-recta .....	223
<b>Fig. 8.42</b>	Sensibilidad $f_{cr}$ probeta BS-A3. Modelo parábola-recta .....	223
<b>Fig. 8.43</b>	Sensibilidad $f_{cr}$ probeta BS-B1. Modelo parábola-recta .....	224
<b>Fig. 8.44</b>	Sensibilidad $f_{cr}$ probeta BS-B2. Modelo parábola-recta .....	224
<b>Fig. 8.45</b>	Sensibilidad $f_{cr}$ probeta BS-B3. Modelo parábola-recta .....	224
<b>Fig. 8.46</b>	Sensibilidad $f_{cr}$ probeta BS-C1. Modelo parábola-recta .....	225
<b>Fig. 8.47</b>	Sensibilidad $f_{cr}$ probeta BS-C2. Modelo parábola-recta .....	225
<b>Fig. 8.48</b>	Sensibilidad $f_{cr}$ probeta BS-C3. Modelo parábola-recta .....	225
<b>Fig. 8.49</b>	Comparación elemento TBT parabólico y cúbico. Probeta BS-C1 .....	227
<b>Fig. A2.1</b>	Discretización de elemento viga en elementos finitos 1D (EBT) .....	A2-3
<b>Fig. A2.2</b>	Elemento finito EBT de 3 nodos. Funciones de interpolación parabólicas.....	A2-5

## LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 4.1</b>	Deformaciones consideradas para cada hormigón 1D .....	99
<b>Tabla 4.2</b>	Datos paneles serie PV .....	103
<b>Tabla 4.3</b>	Resultados paneles serie PV .....	104
<b>Tabla 4.4</b>	Datos paneles serie PB .....	105
<b>Tabla 4.5</b>	Resultados paneles serie PB.....	106
<b>Tabla 6.1</b>	Flecha máxima y % error en extremo de voladizo .....	124
<b>Tabla 6.2</b>	Flecha máxima teórica viga biapoyada rectangular con carga puntual centrada .....	126
<b>Tabla 6.3</b>	% error en estimación de flecha máxima. Elemento cuadrático TBT .....	127
<b>Tabla 6.4</b>	% error en estimación de flecha máxima. Elemento cúbico TBT .....	128
<b>Tabla 6.5</b>	Flecha teórica máxima en viga biapoyada doble T con carga puntual centrada .....	130
<b>Tabla 6.6</b>	Estimación numérica del factor de corrección de cortante.....	130
<b>Tabla 7.1</b>	Detalles vigas Vecchio y Shim (2004) [90] .....	142
<b>Tabla 7.2</b>	Aceros vigas Vecchio y Shim (2004) [90] .....	143
<b>Tabla 7.3</b>	Modelización secciones transversales vigas Vecchio y Shim .....	144
<b>Tabla 7.4</b>	Módulos de endurecimiento aceros vigas Vecchio y Shim.....	145
<b>Tabla 7.5</b>	Resumen de resultados vigas Vecchio y Shim .....	161
<b>Tabla 7.6</b>	Detalles vigas Bresler y Scordelis (1963) [10] .....	171
<b>Tabla 7.7</b>	Aceros vigas Bresler y Scordelis (1963) [10] .....	171
<b>Tabla 7.8</b>	Modelización secciones transversales vigas Bresler y Scordelis.....	172
<b>Tabla 7.9</b>	Módulos de endurecimiento aceros vigas Bresler y Scordelis.....	172
<b>Tabla 7.10</b>	Resumen de resultados vigas Bresler y Scordelis .....	185
<b>Tabla 8.1</b>	Resumen de resultados vigas Vecchio y Shim. Modelo parábola-recta.....	207
<b>Tabla 8.2</b>	Resumen de resultados vigas Bresler y Scordelis. Modelo parábola-recta.....	219



# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

# CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

## 1.1 MARCO GENERAL

La práctica totalidad de sistemas estructurales compuestos por elementos lineales desarrolla esfuerzos de axil, flector y cortante de forma combinada. Este es el caso de vigas y soportes en construcciones de edificación convencionales, tableros de puentes, pilas, etc. Dadas las dimensiones habituales de las estructuras, resulta conveniente modelizarlas o discretizarlas en elementos lineales. Por ello, se necesita disponer de modelos 1D fiables que permitan captar el efecto del esfuerzo cortante en combinación con los esfuerzos de axil y flexión.

El análisis y el dimensionamiento de las estructuras compuestas por estos elementos lineales y, en particular, las estructuras de hormigón armado, se ha llevado a cabo tradicionalmente tratando por separado los esfuerzos aplicados. Habitualmente, se estudian, por una parte, los esfuerzos de flexión y axil, y por otra, el esfuerzo cortante.

Los métodos de diseño que implementan las normativas referentes al hormigón estructural (ACI 318-08 [1], CAN/CSA-A23.3-04 [11], EHE-08 [20], EC2 EN-1992-1-1:2004 [22]) incluyen diferentes aspectos a considerar para tener en cuenta el efecto de la interacción entre los esfuerzos. Por ejemplo, la tradicional regla del decalaje para considerar el efecto de interacción entre el esfuerzo flector y el cortante en elementos viga de hormigón armado.

Estos métodos que aparecen en las normativas son aptos para el dimensionamiento, aunque impiden conocer con exactitud el comportamiento de la estructura. En ocasiones se necesitan realizar estudios más rigurosos, habitualmente dentro del campo del análisis no lineal. De este modo, se puede llegar a conocer con más precisión la máxima capacidad portante de una estructura o su comportamiento a cualquier nivel de carga.

Muchos modelos de análisis no lineal de elementos lineales, tanto de acero como de hormigón armado no incluyen el efecto del esfuerzo cortante. Esto se debe a que la rotura frágil del hormigón por fallo de cortante es un efecto que tiene poca importancia en ciertos problemas. Si el efecto del cortante se introduce en la formulación resulta difícil de reproducir numéricamente en elementos de hormigón armado. Efectos como el instante en el que se produce la fisuración diagonal o el fallo final del elemento por cortante son puntos críticos para los modelos sobre todo a efectos de estabilidad numérica. Además, se generan redistribuciones de

tensiones normales y sobre todo tangenciales dentro en la sección y son difíciles de captar adecuadamente debido a los bruscos cambios de rigidez que sufren estos elementos.

Cada tipo de modelo numérico puede responder de forma diferente en los distintos niveles de análisis. Por ejemplo, si se quiere analizar estructuras completas, los modelos deben ser suficientemente sencillos y rápidos. Sin embargo, si se quiere conocer mejor el comportamiento interno a nivel sección y/o fibra, se deben refinar más los modelos; esto origina una penalización importante en gasto computacional. Por lo tanto, en función del objetivo que se persiga se deberían emplear unos métodos u otros. Además, cada modelo que se plantee debe indicar con claridad qué nivel de precisión consigue y para qué tipo de análisis está desarrollado.

Los modelos que incluyen eficazmente el efecto del esfuerzo cortante, deben ser capaces de predecir el tipo de fisuración que se produce: fisuras por flexión, fisuras diagonales por cortante. También, deben captar el tipo de rotura, aparte de estimar con suficiente precisión las cargas de rotura. En estos modelos, cuanto mejor se quiera conocer su comportamiento, más refinada deberá ser la hipótesis cinemática con la que se sustenta toda su formulación.

Sería conveniente conocer el alcance de las tradicionales teorías de vigas, como la de Euler-Bernouilli, de Timoshenko, su campo de aplicabilidad y en qué situaciones su uso debe estar limitado. A su vez, el alcance de modelos en los que se impone un perfil fijo para las deformaciones angulares. Y también, otras hipótesis de más alto nivel de complejidad que descienden a nivel fibra con el fin de conocer de forma muy local el comportamiento de las fibras y la sección. Ante todo el abanico de posibilidades, se debería poder elegir entre diferentes modelos, todo ello en función de la exactitud que requiera el análisis a realizar.

Es un hecho constatado en las últimas décadas el creciente uso de los métodos de análisis no lineal. Se han mejorado las formulaciones y se han incrementado enormemente las capacidades computacionales para implementarlas. Esto permite que los diseñadores e investigadores puedan utilizarlos para un estudio más exhaustivo que el llevado a cabo hasta ahora.

En las dos últimas décadas han sido muy importantes las aportaciones basadas en los denominados elementos lineales de fibras (*fibre beam elements*). Su utilización más habitual se ha basado en el uso de ecuaciones constitutivas unidimensionales en las que se tratan conjuntamente los esfuerzos de flexión y axil.

En estos modelos no se considera de forma totalmente acoplada el efecto del esfuerzo cortante.

En la literatura más reciente, y gracias a las presentaciones de modelos constitutivos bidimensionales para el hormigón armado, se han introducido algunos modelos que tratan de captar la interacción de esfuerzos a nivel sección y fibra a fibra. Evidentemente, esto ha originado un aumento en la complejidad del problema a tratar y un reto en la implementación numérica. Han sido constatadas por diversos autores las dificultades numéricas que conlleva la implementación de un modelo acoplado de tensiones normales y tangenciales para el caso del hormigón armado que descienda a tan detallado nivel de análisis.

Cuanto más refinada sea una teoría de vigas, y por consiguiente, su hipótesis cinemática, más refinado debe ser el modelo constitutivo en el que se sustenta, pues se le va a pedir mucho más al material. Además, en el caso del hormigón armado se producen variaciones de rigidez importantes y de forma repentina sobre todo a cortante, lo que condiciona en gran medida la robustez y consistencia del modelo constitutivo a emplear.

Se debe trabajar con la finalidad de buscar hipótesis cinemáticas para captar el cortante, lo más sencillas posibles, que permitan un análisis fiable en términos de carga de rotura, tipo de rotura, red de fisuración y comportamiento en servicio. Más que un objetivo, éste es un reto que permitiría avanzar aún más en la propuesta que ya en 1973 se planteó en el "ASCE-ACI Committee 426 on Shear and Torsion" [2]: *"Las reglas de diseño a esfuerzo cortante pueden ser unificadas, simplificadas y se les debe dar un significado físico para que los proyectistas puedan abordar problemas de diseño inusuales de una forma racional"*.

En este sentido, el salto a una teoría de vigas exacta y útil a la vez puede resultar bastante complejo. Se necesita tener en cuenta en todo momento cómo varía la rigidez de la sección en función del nivel de carga aplicada. Cuando se habla de rigidez seccional se entiende que se trata de rigidez a flexión, cortante y sus posibles interacciones. La determinación de las rigideces de cada fibra de la sección requiere un conocimiento muy detallado del acoplamiento entre las tensiones normales y tangenciales. El comportamiento en cada fibra es muy variable en función del nivel de carga. Además, cada fibra se comporta de una manera muy diferente a todo el resto.

Si se echa una mirada transversal a las teorías de orden superior habituales del campo de investigación de los materiales compuestos, se observa que el

hormigón se puede considerar, en cierto modo, como un material compuesto. Cada una de sus fibras o capas tiene un comportamiento ciertamente caprichoso en cuanto al acoplamiento entre tensiones normales y tangenciales, puesto que es un comportamiento con alto grado de no linealidad. Esto es un grado de complejidad añadido a los materiales compuestos; ahora bien, el hecho de que cada capa de material se estudie teniendo en cuenta un comportamiento elástico y lineal simplifica enormemente el problema.

El uso de modelos que incluyan el efecto del esfuerzo cortante puede mejorar la comprensión de las estructuras que estén sometidas a sismo. Muchos desastres ocurridos han sido debidos a situaciones de acoplamiento de esfuerzos axiales, flectores y cortantes, que han llevado al colapso de la estructura por un fallo frágil a cortante, con todo lo que ese desastre puede implicar en riesgo de vidas humanas.

La introducción de modelos que incluyan directamente el efecto del esfuerzo cortante puede facilitar, a su vez, la aplicación a hormigones especiales modificando básicamente el comportamiento constitutivo del hormigón a emplear. Esto requeriría el uso de ecuaciones constitutivas robustas para que las teorías de vigas con hipótesis cinemáticas más sofisticadas puedan llegar a ser operativas.

La caracterización de los materiales y el hecho de emplear ecuaciones constitutivas que realmente den buenos resultados es fundamental. Muchos de los problemas que tienen los modelos constitutivos que tienen en cuenta el acoplamiento entre las tensiones normales y tangenciales en el hormigón armado, es que el modelo es muy dependiente de parámetros básicos como la resistencia a tracción. La resistencia a tracción y la rigidez que proporciona el hormigón entre fisuras es un efecto que puede afectar enormemente a los resultados de los modelos. Por lo tanto, tan importante debe ser la elección del modelo a emplear como lo puede ser la exactitud con la que se caractericen los materiales.

El caso del esfuerzo cortante es preocupante, puesto que un parámetro básico es la resistencia a tracción y su variabilidad puede ser importante dentro de un mismo elemento de estudio. Además, efectos como la presencia cercana de armaduras transversales puede inducir la proliferación de fisuras en esos planos de debilidad, incluso el efecto de la retracción en estructuras con coacciones impuestas puede alterar los resultados. En definitiva, un problema de difícil solución, a priori. Todo ello conduce a que, de entrada, la precisión en los resultados esperables pueda ser pobre dada la propia falta de precisión de ciertos parámetros básicos en los que se basa toda la formulación.

## 1.2 OBJETIVOS

El objetivo general de esta tesis doctoral es el de modelizar el comportamiento de elementos lineales de hormigón armado incluyendo el efecto del esfuerzo cortante. Para ello, se quiere desarrollar un modelo teórico capaz de tener en cuenta simultáneamente los esfuerzos de axil, flexión y cortante.

Dentro del marco del objetivo general se persiguen los siguientes objetivos particulares:

1. Proponer nuevas hipótesis cinemáticas para el comportamiento seccional que permitan estudiar el efecto de acoplamiento entre las tensiones normales y tangenciales originadas por una combinación de esfuerzos sobre la sección; fundamentalmente el acoplamiento entre el esfuerzo cortante que produce tensiones normales y tangenciales, y los esfuerzos de axil y flexión que originan principalmente tensiones normales.
2. Implementar este nuevo comportamiento cinemático en un elemento finito tipo barra con el fin de que se pueda emplear directamente en el análisis a nivel estructura para el caso de cargas monótonas y crecientes.
3. Validar el modelo con diferentes tipos de ecuaciones constitutivas aumentando progresivamente el grado de complejidad: material elástico y lineal, o material elastoplástico asimilable al acero
4. Validar el modelo propuesto empleando como material el hormigón armado. Se pretende conocer el grado de exactitud del mismo en términos de carga de rotura, tipo de rotura, aparición y propagación de la fisuración, así como el comportamiento general a cualquier nivel de carga.
5. Comparar la nueva hipótesis cinemática con los resultados obtenidos con las teorías tradicionales de vigas tipo Euler-Bernouilli o Timoshenko; incluso con otras hipótesis cinemáticas que incluyen el efecto del esfuerzo cortante y que están basadas en imposiciones de perfiles fijos de las deformaciones transversales en la sección. Esta comparación se debe realizar para diferentes tipos de materiales: elástico y lineal, acero, y fundamentalmente para el hormigón armado.
6. Establecer las ventajas e inconvenientes de la utilización de estas nuevas hipótesis con respecto a las tradicionales con el fin de dar información al analista de estructuras, y en particular al analista de estructuras de hormigón armado. Es importante que se conozca el ámbito de aplicación

de cada una de las hipótesis cinemáticas. También interesa conocer las situaciones en las que un determinado comportamiento cinemático se debe evitar.

7. Proponer hipótesis cinemáticas, lo más sencillas posible para los elementos lineales de hormigón armado, que sean capaces de captar el efecto de interacción entre el flector y cortante sin que suponga un incremento importante en la dificultad de la formulación planteada y/o de implementación numérica.

### **1.3 IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN**

La parte fundamental de esta investigación radica en la propuesta de nuevas hipótesis cinemáticas que permitan estudiar la interacción de los esfuerzos de axil, flexión y cortante. En definitiva, y descendiendo a nivel fibra, estudiar el acoplamiento entre las tensiones normales y tangenciales. Se presenta una hipótesis de corrección de cortante con una función de interpolación general, que ha sido utilizada con éxito en el análisis de elementos tipo viga.

Además, en base a la función general de corrección de cortante se plantean otras funciones de interpolación más sencillas controladas por unos pocos parámetros. De este modo, se llegan a utilizar hasta tan sólo tres parámetros en la función de interpolación. Este es el caso de la función de corrección parábola-recta que se propone para los elementos tipo viga de hormigón armado.

Se ha realizado una incursión en el caso tridimensional en el cual se demuestra que existen algunas combinaciones de esfuerzos en las que se obtienen resultados bastante satisfactorios sin necesidad de recurrir a complicadas funciones de corrección de cortante. Esto implica la no necesidad de recurrir a hipótesis cinemáticas de elevado orden o complejidad en todos los análisis a realizar.

Se lleva a cabo una comparación entre diferentes teorías de vigas lo cual permite conocer mejor las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas. De este modo, el analista puede optar por el tipo de teoría de vigas más adecuada en función del problema al que se tenga que enfrentar.

### **1.4 CONTENIDO DEL DOCUMENTO**

La presente tesis doctoral está compuesta de nueve capítulos, de los cuales el primero corresponde a la presente introducción, y dos anejos.

El segundo capítulo corresponde al estado del arte. En el mismo se ha llevado a cabo una prospección bibliográfica centrada en la búsqueda de modelos de análisis no lineal que incluyen el efecto del esfuerzo cortante. Se enumeran y describen brevemente los diferentes modelos teóricos de análisis de elementos 1D que incluyen el efecto del esfuerzo cortante de forma combinada con los esfuerzos de axil, flexión y en ocasiones torsión. Además, se presentan y explican los aspectos más relevantes de algunos modelos 2D y 3D que por su significancia permiten captar satisfactoriamente el efecto de la interacción de esfuerzos.

En el capítulo tres se presenta el modelo teórico de corrección de cortante en el que se cimenta esta tesis doctoral. Se formula el modelo de corrección de cortante dentro de un contexto 2D. Se define una nueva hipótesis cinemática para la sección que permite, a través de una función de corrección de cortante, establecer el equilibrio longitudinal entre las diferentes capas que componen la sección. Además, se plantean dos alternativas de trabajo para la función de corrección de cortante: una función de corrección general y otra función particularizada para los elementos lineales de hormigón armado denominada parábola-recta. En este capítulo, se incluye también la implementación del modelo propuesto utilizando elementos finitos con comportamiento 1D. Finalmente, se realiza una extrapolación del modelo teórico al caso tridimensional.

En el capítulo cuatro se describen las ecuaciones constitutivas que requiere el modelo teórico de corrección de cortante para su aplicación a elementos lineales de hormigón armado. Se describe, en primer lugar, el comportamiento para el acero que simula las armaduras longitudinales de la sección. A continuación, se presenta la formulación de las ecuaciones constitutivas bidimensionales que caracterizan el comportamiento del hormigón armado. En tercer lugar, se lleva a cabo una validación experimental de las ecuaciones constitutivas. Seguidamente, se explica cómo implementar estas ecuaciones constitutivas en el modelo teórico de corrección de cortante. Finalmente, se trata el fenómeno de *tension-stiffening* en aquellos casos con presencia de armaduras longitudinales de forma discreta.

En el quinto capítulo se describe la implementación numérica del modelo teórico de corrección de cortante. Se establece la estructuración llevada a cabo con la herramienta numérica empleada en el análisis y se describen brevemente los diferentes métodos de resolución numérica empleados.

En el capítulo seis se lleva a cabo la validación numérica del modelo teórico de corrección de cortante. Se empieza la validación con elementos lineales

compuestos de material elástico y lineal. Se hace especial hincapié en el efecto de bloqueo por cortante con el fin de evitarlo o minimizarlo. A continuación, se realizan validaciones con material con comportamiento elastoplástico asimilables al comportamiento del acero. En todas las validaciones se comparan las teorías tradicionales de vigas tradicionales (Euler-Bernouilli ó Timoshenko) con la nueva propuesta de corrección de cortante.

En el séptimo capítulo se procede a verificar experimentalmente el modelo general de corrección de cortante frente a elementos tipo viga de hormigón armado. Se recurre para ello a resultados experimentales ampliamente empleados en la bibliografía para la validación de modelos teóricos. Se lleva a cabo una validación desde el punto de vista del análisis a nivel estructura, pero se desciende también a nivel sección con el fin de analizar cómo se comportan las diferentes capas que la configuran. Al igual que en el capítulo seis, se comparan las teorías clásicas de vigas con la nueva propuesta de corrección de cortante mediante interpolación general.

En el octavo capítulo se lleva a cabo la aplicación del modelo de corrección de cortante a elementos de hormigón armado a través de la función de corrección parábola-recta. Se comparan los resultados que se obtienen con la función de corrección con interpolación general y con interpolación parábola-recta. De la comparación se extraen las ventajas e inconvenientes de emplear una función de corrección de cortante u otra.

En el último capítulo se hace un resumen con las conclusiones más importantes obtenidas del presente trabajo. Asimismo, se plantean una serie de futuras líneas de investigación.

Finalmente, se incluyen dos anejos a esta tesis doctoral. En el anejo 1 se presenta un artículo firmado por el autor en la revista *Engineering Structures* titulado: "A 3D numerical model for reinforced and prestressed concrete elements subjected to combined axial, bending, shear and torsion loading". Este artículo complementa el trabajo llevado a cabo por el autor en este trabajo. Ya por último, en el anejo 2, se presenta la formulación del elemento finito con comportamiento Euler-Bernouilli que se emplea en las validaciones numéricas que se realizan en los capítulos sexto y séptimo.



# CAPÍTULO 2

## ESTADO DEL ARTE

## CAPÍTULO 2. ESTADO DEL ARTE

### 2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta una síntesis de la prospección bibliográfica realizada en esta investigación.

Existen numerosas aportaciones en la literatura científica de modelos analíticos y numéricos aplicables a elementos de hormigón armado y que tienen en cuenta la interacción de los esfuerzos de axil, flexión, cortante y torsión. Estos modelos se han concebido desde enfoques muy distintos.

Los modelos que tienen en cuenta la interacción de esfuerzos se pueden clasificar en modelos 1D, 2D y 3D.

En cuanto a las ecuaciones constitutivas, los modelos se pueden clasificar según Ceresa et al. (2007) [12] en:

- Teorías de la plasticidad.
- Mecánica de la fractura.
- Mecánica del daño.
- Mecánica del daño + Teorías de la plasticidad
- Modelos hipoelásticos:
  - Modelos de fisuración discreta
  - Modelos de fisuración distribuida

Los modelos que tienen en cuenta la interacción de esfuerzos requieren un conocimiento suficientemente profundo de la interacción entre las tensiones normales y tangenciales que se producen en el material. La mayor parte de ecuaciones constitutivas han sido aplicadas y validadas con bastante éxito en 2D. Por otro lado, los modelos de material 3D son menos frecuentes y, en ocasiones, sus formulaciones están basadas en ecuaciones primeramente aplicadas al caso 2D.

Dado que este trabajo de investigación está destinado al estudio de elementos 1D capaces de incluir el efecto del esfuerzo cortante en la formulación y de forma consistente, se hace especial hincapié en la revisión bibliográfica de este tipo de modelos.

En el primer apartado de este capítulo se presenta un breve resumen de la evolución histórica de los modelos que han sido empleados en el estudio del esfuerzo cortante. Se incluyen también algunos modelos que consideran la torsión, por tratarse de un esfuerzo ligado al estudio de la interacción de las tensiones normales y tangenciales.

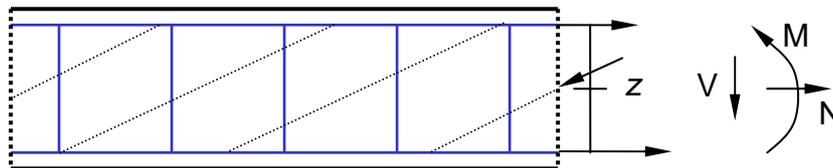
En el segundo apartado se describen los modelos 1D más relevantes que han sido publicados, tras realizar una breve revisión de las teorías de vigas.

Finalmente, en los apartados tercero y cuarto se exponen algunas aportaciones significativas de modelos 2D y 3D.

## 2.2 EVOLUCIÓN HISTÓRICA

El estudio del comportamiento de elementos de hormigón armado sometidos a tensiones tangenciales inducidas por el cortante o la torsión se realiza habitualmente utilizando modelos de celosía.

En general, un modelo de celosía, como el indicado en la Fig. 2.1, trata de interpretar el comportamiento de un cierto panel de hormigón armado sometido a tensiones tangenciales. Estas tensiones se pueden transmitir gracias a la presencia de una serie de bielas y tirantes que configuran un entramado que responde del mismo modo que una viga de celosía.



*Fig. 2.1 Modelo básico de celosía*

Cuando el panel se somete a esfuerzos tangenciales significativos se produce su fisuración. Las fisuras aparecen en la dirección de la compresión principal del panel y se configura el entramado de celosía, formado por bielas y tirantes. Las bielas están formadas por el hormigón a compresión que queda entre las fisuras diagonales, mientras que los tirantes los constituyen las armaduras transversales.

El primer modelo de celosía fue introducido por Ritter (1899) [65] y Mörsch (1902) [42]. Estos modelos de celosía se han desarrollado a la par que el propio hormigón armado como material estructural. Según Hsu (1996) [28], este modelo se puede denominar *45° Truss Model*, por asumir un ángulo de  $45^\circ$  para las bielas.

A raíz del modelo de Ritter y Mörsch, que sirvió para analizar las vigas a cortante, el propio Mörsch (1922) [43] y Rausch (1929) [60] proponen un modelo de celosía espacial con el fin de analizar secciones sometidas a esfuerzos de torsión. El esfuerzo torsor que actúa sobre la sección, según la analogía de Bredt (en Timoshenko (1975) [80]), se transmite mediante tensiones tangenciales por el contorno de la sección. En este contorno se generan un conjunto de paneles creando una celosía espacial. Se asumió para cada panel que la inclinación de las fisuras era de  $45^\circ$ . Este modelo recibe el nombre de *45° Space Truss Model*, según Hsu (1996) [28].

Nielsen (1968) [46] y Lampert (1971) [32] proponen que el ángulo de inclinación de las bielas pueda ser variable en función de las cuantías de armadura longitudinal y transversal, ya que el hecho de adoptar un ángulo de inclinación de bielas igual a  $45^\circ$  no era la solución óptima. Por este motivo, se le dio a este modelo el nombre de *Variable Angle Truss Model* según Hsu (1996) [28].

Elfgren (1972) [21] utiliza el modelo de celosía de ángulo variable para el estudio de elementos sometidos a esfuerzos combinados de flexión, cortante y torsión. Hsu (1996) [28] define este modelo como *Plasticity Truss Model*, por estar basado en la plastificación de las armaduras.

Las únicas ecuaciones que se habían utilizado hasta ese momento eran las de equilibrio. Fue Collins (1978) [17] el que incorporó las ecuaciones de compatibilidad y estudió el comportamiento en deformaciones. Se observó que el uso de la ley constitutiva del hormigón obtenida en probeta cilíndrica quedaba del lado de la inseguridad. Esto se debe a que las bielas de hormigón en la dirección ortogonal a su directriz presentan deformaciones transversales de tracción. Por este motivo, la resistencia a compresión de las bielas disminuye. Aquellos modelos que consideran el efecto de debilitamiento del hormigón reciben el nombre de *Softened Truss Models* según Hsu (1996) [28]. El modelo propuesto por Collins se publicó bajo el nombre de *Compression Field Theory* (CFT).

## 2.3 MODELOS 1D

Dentro de los modelos 1D se van a revisar, en primer lugar, las teorías de vigas que se han empleado más habitualmente.

### 2.3.1 BREVE REVISIÓN DE LAS TEORÍAS DE VIGAS

#### 2.3.1.1 Teoría de vigas de Euler-Bernoulli (EBT)

La teoría de vigas de Euler-Bernoulli es la teoría más simple para el análisis de elementos 1D. Se basa en la hipótesis cinemática de que las secciones planas permanecen planas tras la deformación, y además, perpendiculares a la directriz del elemento, según aparece en la Fig. 2.2.

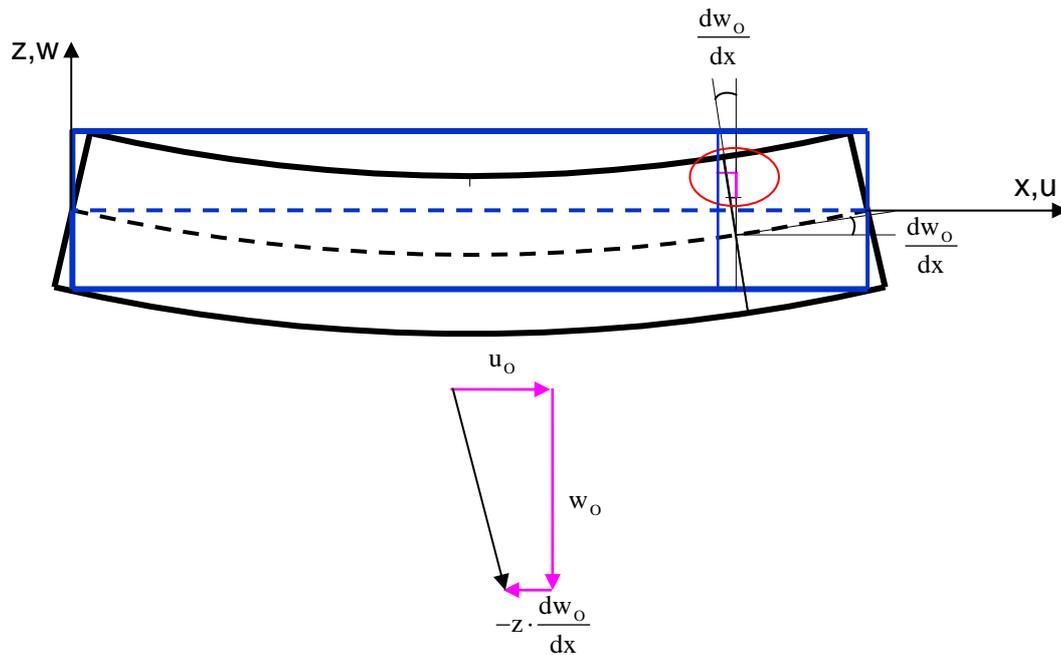


Fig. 2.2 Viga con comportamiento Euler-Bernoulli (EBT)

Siguiendo la nomenclatura que aparece en Reddy (1993) [62] y (1997) [63], la hipótesis cinemática se puede expresar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) - z \cdot \frac{dw_0(x)}{dx} \\ w(x, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (2-1)$$

Las deformaciones de cada punto de la sección y las deformaciones seccionales son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \varepsilon_0 + z \cdot c_y \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

siendo:  $\varepsilon_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ ;  $c_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$ , las dos deformaciones seccionales.

La relación entre las deformaciones de cada fibra y las deformaciones seccionales es igual a:

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ c_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_x; \boldsymbol{\sigma} = \sigma_x; \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (2-3)$$

siendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ c_y \end{bmatrix} \text{ el vector de deformaciones seccionales y}$$

$\mathbf{S}$  la matriz de compatibilidad de la sección

Aplicando el principio de los trabajos virtuales se obtienen los esfuerzos seccionales:

$$\iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \iint_A \begin{bmatrix} \sigma_x \\ z \cdot \sigma_x \end{bmatrix} \cdot dA = \begin{bmatrix} N \\ M_y \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

Finalmente, derivando la anterior ecuación se obtiene la matriz de rigidez de la sección:

$$\mathbf{D}_s = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \left[ \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA \right] = \iint_A \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \cdot dA = \iint_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot dA \quad (2-5)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} = D_{11} \quad \mathbf{D}_s = \iint_A \begin{bmatrix} D_{11} & z \cdot D_{11} \\ z \cdot D_{11} & z^2 \cdot D_{11} \end{bmatrix} \cdot dA$$

En el caso de material elástico y lineal:

$$\mathbf{D} = E \quad \mathbf{D}_s = E \cdot \begin{bmatrix} A & S_z \\ S_z & I_z \end{bmatrix}$$

### 2.3.1.2 Teoría de vigas de Timoshenko (TBT)

La teoría de vigas de Timoshenko se basa en la siguiente hipótesis cinemática: las secciones planas permanecen planas tras la deformación y no se mantienen perpendiculares a la directriz del elemento (Fig. 2.3).

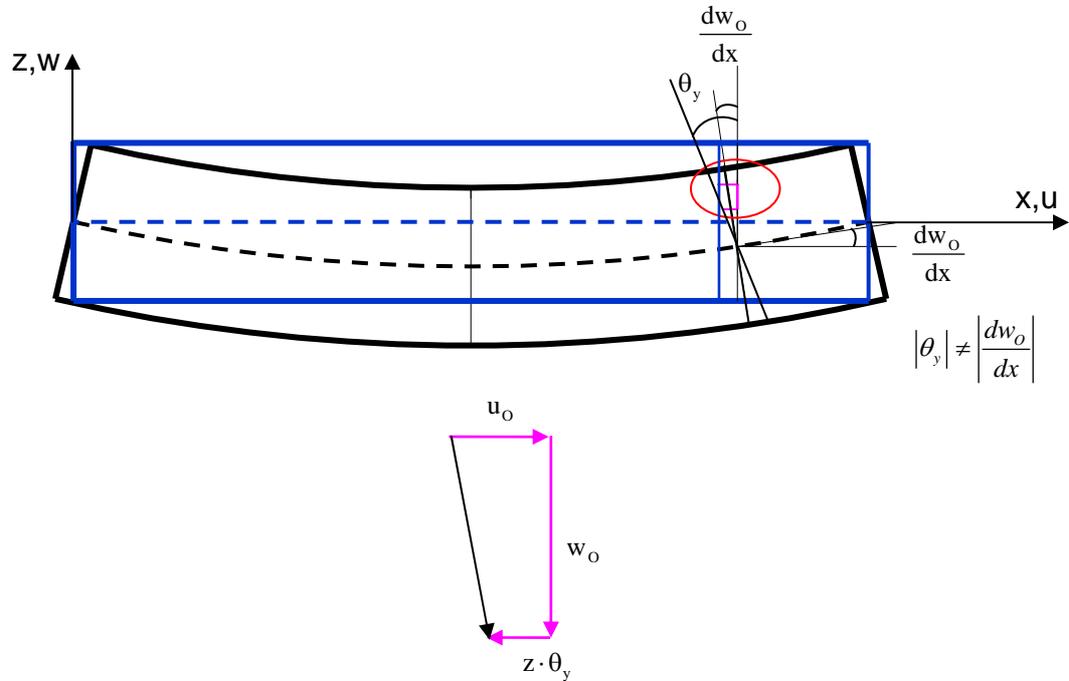


Fig. 2.3 Viga con comportamiento Timoshenko (TBT)

Esta hipótesis cinemática se formula como sigue:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) + z \cdot \theta_y(x) \\ w(x, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (2-6)$$

Esta teoría de vigas se desarrolla de forma resumida y de manera análoga al apartado anterior.

Deformaciones de un punto de la sección:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \varepsilon_0 + z \cdot c_y \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (2-7)$$

$$\text{Deformaciones seccionales: } \varepsilon_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; c_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \gamma_{0xz} = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

Relación de compatibilidad entre deformaciones de un punto y seccionales:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \gamma_{0xz} \\ C_y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (2-8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \gamma_{0xz} \\ C_y \end{bmatrix}$$

siendo los esfuerzos seccionales:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \iint_A \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \\ z \cdot \sigma_x \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} N \\ V_z \\ M_y \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

y la matriz de rigidez de la sección:

$$\mathbf{D}_s = \iint_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot dA$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial \gamma_{xz}} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \gamma_{xz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_s = \iint_A \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & z \cdot D_{11} \\ D_{21} & D_{22} & z \cdot D_{21} \\ z \cdot D_{11} & z \cdot D_{21} & z^2 \cdot D_{11} \end{bmatrix} \cdot dA \quad (2-10)$$

En caso de material elástico y lineal:

$$\mathbf{D}_{elas} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{s,elas} = \begin{bmatrix} E \cdot A & 0 & E \cdot S_z \\ 0 & G \cdot A & 0 \\ E \cdot S_z & 0 & E \cdot I_z \end{bmatrix}$$

El comportamiento de viga TBT no tiene en cuenta el comportamiento real a cortante. Las distribuciones de tensiones tangenciales que se obtienen directamente de la teoría difieren de las obtenidas por equilibrio longitudinal en la sección. Con el fin de tener en cuenta el comportamiento real, en el caso de material elástico y lineal, se aplica un coeficiente corrector de cortante  $k_s$  al término 22 de la matriz de rigidez, tal y como se indica en la siguiente expresión:

$$\mathbf{D}_{s,elas} = \begin{bmatrix} E \cdot A & 0 & E \cdot S_z \\ 0 & G \cdot A \cdot k_s & 0 \\ E \cdot S_z & 0 & E \cdot I_z \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

### 2.3.1.3 Teoría de vigas de tercer orden (Reddy)

La teoría de vigas de tercer orden de Reddy (1984) [61] no requiere la introducción de un factor de corrección de cortante en el caso de secciones compuestas de material elástico y lineal. Esto se debe a que se propone una distribución parabólica para las deformaciones transversales derivada de la siguiente hipótesis cinemática:

$$u(x,z) = u_0(x) + z \cdot \theta_y(x) - c_1 \cdot z^3 \cdot \left( \theta_y(x) + \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \right) \quad (2-12)$$

$$w(x,z) = w_0(x)$$

$$\text{siendo } c_1 = 4/3H^2$$

Las deformaciones de cada punto de la sección se expresan en función de cinco parámetros de deformación seccionales, tal y como se indica a continuación:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z \cdot \varepsilon_x^1 + z^2 \cdot \varepsilon_x^2 \quad (2-13)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}^0 + z^2 \cdot \gamma_{xz}^2$$

Agrupando matricialmente la anterior ecuación se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_x^2 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{xz}^2 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s$$

Las deformaciones seccionales en esta teoría quedan del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_x^2 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{xz}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ -c_2 \cdot \left( \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

$$c_2 = 4/H^2$$

Por otra parte, los esfuerzos seccionales que se deducen de esta hipótesis cinemática son:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \iint_A \begin{bmatrix} \sigma_x \\ z \cdot \sigma_x \\ z^3 \cdot \sigma_x \\ \tau_{xz} \\ z^2 \cdot \tau_{xz} \end{bmatrix} \cdot dA = \begin{bmatrix} N \\ M_y \\ P_y \\ V_z \\ R_z \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

Finalmente la matriz de rigidez queda como:

$$\mathbf{D}_s = \iint_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot dA$$

$$\mathbf{D}_s = \iint_A \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11} \cdot z & D_{11} \cdot z^2 & D_{12} & D_{12} \cdot z^2 \\ D_{11} \cdot z & D_{11} \cdot z^2 & D_{11} \cdot z^3 & D_{12} \cdot z & D_{12} \cdot z^3 \\ D_{11} \cdot z^2 & D_{11} \cdot z^3 & D_{11} \cdot z^4 & D_{12} \cdot z^2 & D_{12} \cdot z^4 \\ D_{21} & D_{21} \cdot z & D_{21} \cdot z^2 & D_{22} & D_{22} \cdot z^2 \\ D_{21} \cdot z^2 & D_{21} \cdot z^3 & D_{21} \cdot z^4 & D_{22} \cdot z^2 & D_{22} \cdot z^4 \end{bmatrix} \cdot dA \quad (2-17)$$

Y para el caso de material elástico y lineal:

$$\mathbf{D}_{s,elas} = \iint_A \begin{bmatrix} E & E \cdot z & E \cdot z^2 & 0 & 0 \\ E \cdot z & E \cdot z^2 & E \cdot z^3 & 0 & 0 \\ E \cdot z^2 & E \cdot z^3 & E \cdot z^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & G \cdot z^2 \\ 0 & 0 & 0 & G \cdot z^2 & G \cdot z^4 \end{bmatrix} \cdot dA$$

#### 2.3.1.4 Teorías de orden superior

Se han desarrollado muchas teorías para captar la deformación por cortante que han sido aplicadas a materiales compuestos y se han implementado en el análisis de elementos tipo placa. Estas teorías, denominadas de orden superior, pretenden ajustar más adecuadamente la deformación por cortante a lo largo del espesor de una placa o del canto de una sección. Estas teorías se dividen en dos grandes grupos: (1) Teorías de la capa única equivalente (*Equivalent single layer theories*); y (2) Teorías de discretización de capas (*Discrete layer theories*).

Las teorías del tipo (1) se basan en la definición de un campo de desplazamientos siguiendo una serie polinomial a lo largo de todo el espesor. Las teorías más representativas de este grupo son la *First-order shear deformation theory* (FSDT) de Yang (1966) [91], o la misma teoría de tercer orden de Reddy (1984) [61].

Con el fin de solucionar la problemática de las discontinuidades en las leyes de tensiones tangenciales a lo largo del espesor de la losa se han planteado una serie de teorías denominadas *discrete layer theories*, que son las correspondientes al tipo 2. Existen muchas teorías de este estilo que difieren en el número de incógnitas que manejan. En algunas teorías el número de incógnitas depende del número de capas de materiales presentes (Srinivas (1973) [75], Toledano y Murakami (1987) [81], Li y Liu (1992) [33], y Robbins y Reddy (1993) [66]). Por otra parte, estos últimos, Robbins y Reddy (1993) [66], propusieron una teoría capaz de aproximar el campo de desplazamientos mediante funciones de interpolación para el grado de aproximación deseado. En ese sentido, se han utilizado funciones de interpolación con polinomios de *Lagrange* o de *L'Hermite*. A pesar de que las *discrete layerwise theories* aproximan de forma muy adecuada el comportamiento de los materiales compuestos, su uso en el análisis real de una estructura resulta costoso, ya que habitualmente se busca la máxima eficiencia numérica.

El enfoque dado a estas teorías podría, en cierto modo, ser aplicable a los elementos de hormigón armado. En una sección de hormigón armado existe, al igual que para el caso de los materiales compuestos, un comportamiento muy diferente en diferentes zonas debido a los efectos de la fisuración, la plastificación de las armaduras o la rotura del hormigón. En realidad, si se discretiza una sección en capas, cada una de ellas se comporta de una manera totalmente diferente al resto.

### 2.3.2 APLICACIONES A ELEMENTOS DE HORMIGÓN

Los modelos 1D que representan el comportamiento de elementos de hormigón armado están basados en la discretización de la sección en capas (para comportamientos 2D) o fibras (para comportamientos 3D). A este tipo de modelos se les puede denominar modelos de fibras o multifibra.

Se han desarrollado modelos multifibra basados en la hipótesis cinemática de Euler-Bernoulli. En estos modelos se requiere exclusivamente una ecuación constitutiva con comportamiento unidimensional. Entre los modelos más destacados cabe citar las aportaciones de Chan (1982) [15], Scordelis (1984) [71], y Spacone et al. (1996) [74]. Estos modelos son muy apropiados en el caso de que el efecto del esfuerzo cortante sea poco dominante, principalmente cuando el efecto de la interacción de esfuerzos sea poco importante. Por lo tanto, la utilización de estos modelos está indicada principalmente para vigas esbeltas.

Si se quiere un modelo capaz de considerar el efecto del cortante de forma más realista es necesario recurrir a la hipótesis cinemática de Timoshenko, o incluso a otras hipótesis que representen correctamente la deformación por cortante. Siguiendo el criterio de clasificación propuesto por Ceresa et al. (2007) [12], los modelos capaces de incluir el esfuerzo cortante se pueden dividir en dos grandes grupos:

a) Modelos en los que se superponen dos comportamientos desacoplados: por una parte, el comportamiento frente a esfuerzos de axil y flexión, y por otra, el comportamiento frente a cortante y torsión. Dentro de este grupo se pueden incluir las siguientes aportaciones: Guedes et al. (1994) [25], Rahal y Collins (1995) [56], Martinelli (1998) [37], Ranzo y Petrangeli (1998) [58], Marini y Spacone (2006) [36], y Navarro (1999) [44].

b) Modelos que tienen en cuenta el acoplamiento entre todos los esfuerzos. Se requiere el uso de ecuaciones constitutivas que capten simultáneamente la interacción entre las tensiones normales y tangenciales. Estos modelos se pueden subdividir a su vez en los siguientes tres subgrupos en función del tipo de ecuaciones constitutivas utilizadas:

- Modelos basados en la teoría del microplano (Petrangeli et al. (1999) [50])
- Modelos basados en la teoría de la fisuración distribuida: Vecchio y Collins (1988) [84], Bentz (2000) [8], Remino (2004) [64], Bairán (2005)

[6], Saritas (2006) [67], Navarro et al. (2007) [45] y Ceresa et al. (2009) [13].

- Modelos basados en la mecánica del daño: Kotronis (2000) [29].

A continuación se describen los aspectos más relevantes de los modelos citados en la anterior clasificación.

## MODELOS TIPO (a)

### 2.3.2.1 Modelo de Guedes et al. (1994) [25]

Guedes et al. (1994 [25], 1997 [26]) desarrollan un modelo numérico para analizar elementos lineales de hormigón armado con el fin de captar la influencia del esfuerzo cortante. El modelo está subdividido en dos submodelos. Un primer submodelo que tiene en cuenta las componentes normales y un segundo submodelo en el que se considera el cortante mediante la utilización de un modelo de bielas y tirantes (Fig. 2.4).

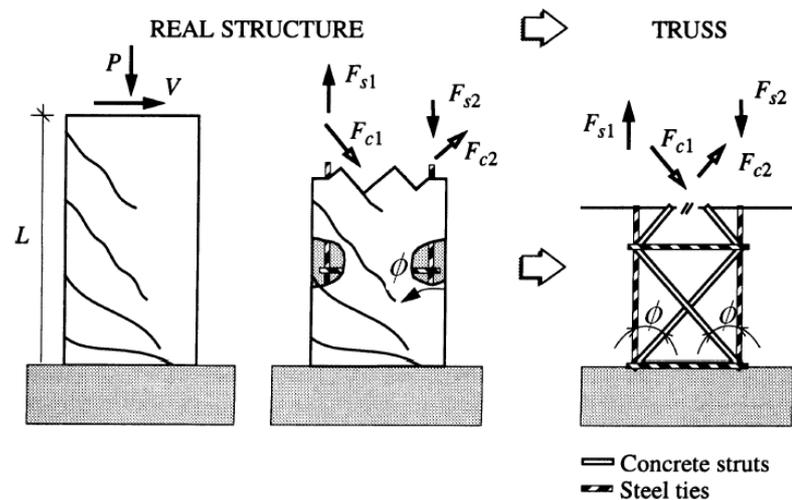


Fig. 2.4 Modelo de celosía de Guedes et al. (1994) [25]

El modelo de componentes normales está formulado en 3D y se utiliza un elemento finito de Timoshenko de dos nodos y seis grados de libertad por nodo (tres desplazamientos y tres rotaciones). El submodelo de cortante está formado por dos bielas de hormigón diagonales y tirantes de acero en dirección longitudinal y vertical.

Los dos submodelos interaccionan entre sí compatibilizando la deformación longitudinal media que se calcula para cada una de las secciones transversales. Además, se impone que los esfuerzos seccionales del modelo de componentes

normales estén equilibrados con las componentes internas del modelo de bielas y tirantes (Fig. 2.5).

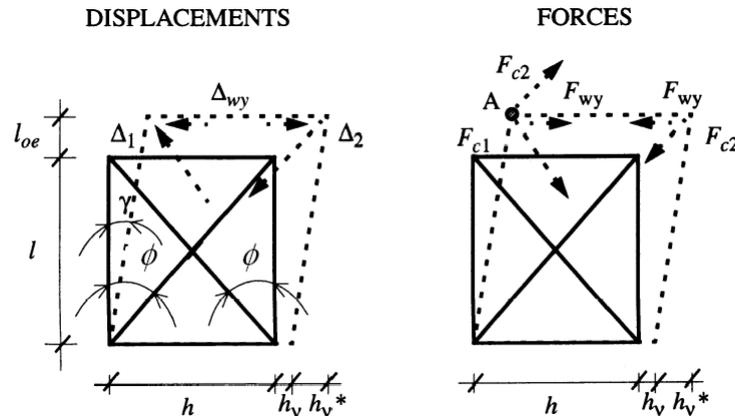


Fig. 2.5 Compatibilidad de desplazamientos y equilibrio de fuerzas, Guedes et al. (1994) [25]

En cuanto a las ecuaciones constitutivas se utiliza un comportamiento unidimensional para el hormigón. En compresión se considera un comportamiento parabólico hasta la deformación pico. En tracción se tiene en cuenta un comportamiento lineal hasta la fisuración y una rama descendente para tener en cuenta el efecto de *tension-stiffening*. La implementación numérica permite el uso en situaciones con cargas cíclicas. Para el acero se emplea un modelo de histéresis basado en la propuesta de Menegotto y Pinto (1973) [40].

Según Ceresa et al. (2007) [12], si bien el modelo está formulado en 3D, el efecto del cortante se tiene en cuenta en un solo plano. No se incluyen mecanismos de cortante tales como el efecto pasador, el efecto arco, el engranamiento de áridos o la contribución a cortante del hormigón en la zona no fisurada. Además, el ángulo de inclinación de las bielas queda abierto (se proponen ángulos de inclinación de bielas de 30° y 45°) dado que no se emplean ecuaciones constitutivas que tratan conjuntamente las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad. La compatibilidad de deformaciones entre los dos submodelos es parcial dado que sólo se utiliza la deformación longitudinal media de la sección.

### 2.3.2.2 Modelo de Rahal y Collins (1995) [56]

Se trata de un modelo para el análisis de secciones sometidas a acciones complejas. En 1978 Rabat y Collins [54] desarrollan un modelo de celosía espacial basado en la analogía del ángulo móvil capaz de analizar secciones sometidas a esfuerzos combinados. Este modelo se aplica a secciones rectangulares de hormigón pretensado sometidas a esfuerzos combinados de flexión, torsión y

cortante. La sección transversal se modeliza a partir de cuatro cordones longitudinales situados en las esquinas de la sección (Fig. 2.6) en los cuales se incluye el comportamiento conjunto del hormigón y de las armaduras. Los cordones se unen entre sí a partir de paredes de hormigón que contienen toda la armadura transversal. Estas paredes son las encargadas de resistir los esfuerzos tangenciales producidos por los esfuerzos de cortante y torsión.

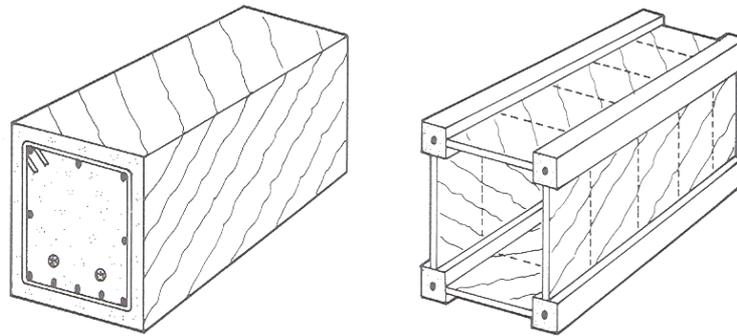


Fig. 2.6 Modelo de celosía espacial de ángulo variable, Rabat y Collins (1978) [54]

Rahal y Collins (1995) [55] [56] desarrollan el modelo de Rabat y Collins (1978) [54]. Proponen un nuevo modelo de celosía espacial capaz de analizar secciones de hormigón armado sometidas a esfuerzos de axil, flexión, cortante biaxial y torsión. Este modelo se encuentra basado en el *Modified Compression Field Theory* (MCFT) propuesto por Vecchio y Collins (1982) [82] y (1986) [83]. Este modelo presenta ciertas ventajas respecto de otros de análisis de secciones frente a acciones complejas. Tiene en cuenta el debilitamiento de las bielas de compresión, admite la posibilidad de que el hormigón absorba tracciones y considera el efecto del *spalling*.

El modelo 3D que constituye la sección se subdivide en un submodelo 1D y otro 2D (véase Fig. 2.7).

El modelo 1D capta las tensiones normales, debidas a los esfuerzos de axil y flexión biaxial  $N$ ,  $M_z$  y  $M_y$ . También considera las tensiones normales inducidas por la fisuración diagonal que producen el cortante y la torsión.

El modelo 2D analiza los elementos sometidos a tensiones tangenciales inducidas por el cortante  $V_y$  y  $V_z$  y la torsión  $T$ . Este modelo 2D consta de cuatro paneles (para el caso de secciones rectangulares) con un espesor y un ángulo de inclinación de las fisuras variable según el panel.

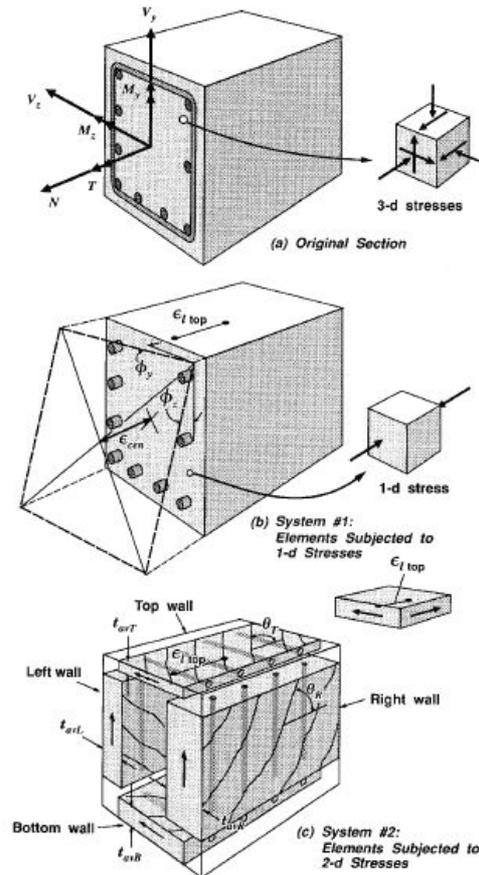


Fig. 2.7 Modelización de la sección, modelos 1D y 2D, Rahal y Collins (1995) [56]

La interacción entre ambos sistemas se produce en las *deformaciones longitudinales* (se obtienen en el modelo 1 y luego se emplean en el 2) y en las *tensiones longitudinales* (obtenidas en el 2 y empleadas en el 1). La interacción se da, por lo tanto, a nivel de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones.

Los requisitos que se imponen para que la interacción entre ambos submodelos sea correcta son los siguientes:

- *Sobre la sección*: equilibrio entre las tensiones tangenciales y longitudinales y los esfuerzos exteriores aplicados. Además, se impone compatibilidad de deformaciones longitudinales.
- *Sobre cada panel*: ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y ecuaciones constitutivas del hormigón y el acero siguiendo la ecuación constitutiva del MCFT. También se impone compatibilidad de curvaturas entre los paneles.

Se asumen las hipótesis de Euler-Bernoulli y de adherencia perfecta entre el hormigón y el acero.

A su vez, Rahal y Collins (2003) [57] presentan una ampliación de este modelo. Se modifica el modelo original considerando en el comportamiento de los paneles la variación que se produce en las deformaciones longitudinales (Fig. 2.8). De este modo, el comportamiento de los paneles encargados de resistir el cortante y la torsión se ajusta más a la realidad. Sin embargo, en este artículo se continúa aplicando el modelo únicamente a secciones rectangulares y el cortante biaxial que se aplica se reparte según los estribos verticales y horizontales.

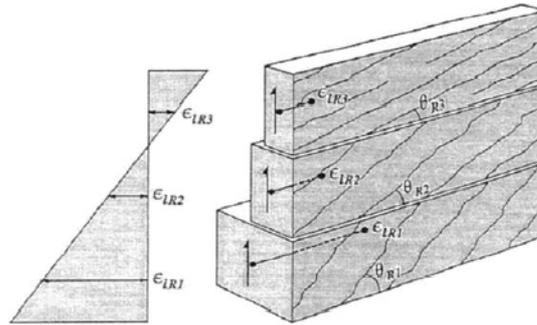


Fig. 2.8 Subdivisión vertical de paneles, Rahal y Collins (2003) [57]

Este modelo de esfuerzos combinados sólo se plantea en secciones rectangulares y queda poco claro cómo abordar otro tipo de secciones diferentes. Además, la formulación a nivel sección no se extiende a nivel elemento.

### 2.3.2.3 Modelo de Martinelli (1998) [37]

Martinelli (1998) [37] propone un modelo compuesto por el acoplamiento de un modelo tridimensional que considera los esfuerzos de axil y flexión con otro modelo de celosía con el fin de captar la deformación por cortante. Este último modelo está compuesto por tirantes de armadura transversal y bielas de hormigón a compresión y tracción. El modelo 1D está basado en la hipótesis cinemática de Timoshenko y se formula, por el método de la rigidez, un elemento finito con los grados de libertad que aparecen en la Fig. 2.9.

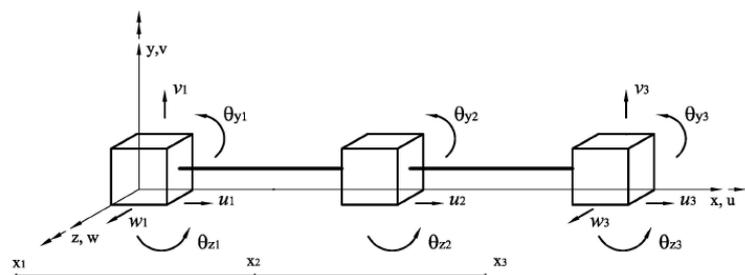


Fig. 2.9 Grados de libertad del elemento utilizado por Martinelli (1998) [37]

La respuesta a cortante tiene en cuenta el efecto arco, el engranamiento de áridos, la contribución del hormigón al esfuerzo cortante en la sección no fisurada, aparte del mecanismo de celosía.

El efecto arco, que está esquematizado en la Fig. 2.10a, se recoge teniendo en cuenta la inclinación de la biela de hormigón a partir de los esfuerzos flectores en los nodos y el centro de gravedad de las tensiones de compresión. A continuación, conociendo el valor del ángulo de inclinación de las bielas  $\alpha$ , y la deformación longitudinal en la dirección del elemento, y asumiendo nula la deformación transversal, se obtiene el correspondiente círculo de Mohr (Fig. 2.10b) que permite, junto con la utilización de una ecuación constitutiva para el hormigón unidimensional, evaluar las tensiones normales y tangenciales a lo largo de toda la sección. En la Fig. 2.10c aparece el ensamblaje entre el modelo de celosía utilizado y el modelo 1D descrito al principio, donde se observa la componente correspondiente a la armadura transversal  $k_s$  y las dos componentes debidas a las bielas de compresión y tracción  $k_{c1}$  y  $k_{c2}$ . A partir de este mecanismo *Martinelli (1998) [37]* deduce la correspondiente rigidez a cortante de la sección y lo hace para los dos planos de trabajo del cortante.

En cuanto a las ecuaciones constitutivas se utiliza un comportamiento uniaxial basado en la propuesta de Stevens et al. (1987) [77], mientras que para el acero se utiliza el modelo de Monti y Nuti (1992) [41].

Este modelo resulta interesante desde el punto de vista que tiene en cuenta diferentes tipos de mecanismos de cortante. Sin embargo, en la formulación numérica de la sección, se considera que las componentes de rigidez de cortante están totalmente desacopladas del resto, lo que resta generalidad al modelo.

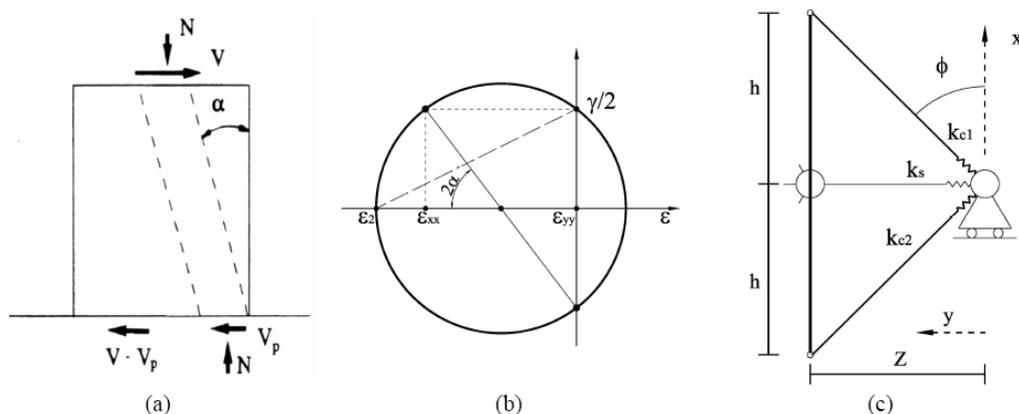


Fig. 2.10 (a) Biela inclinada, (b) Círculo de Mohr, (c) Ensamblaje, Martinelli (1998) [37]

2.3.2.4 *Modelo de Ranzo y Petrangeli (1998) [58]*

El modelo de Ranzo y Petrangeli (1998) [58] y (2000) [59] está basado en un elemento multifibra 2D que está formulado en flexibilidad. El comportamiento frente a los esfuerzos de axil y flexión se obtiene del elemento. El comportamiento a cortante se deduce mediante la utilización de un modelo de celosía no lineal. Ambos modelos se compatibilizan a nivel sección y se integran a nivel de todo el elemento. En la Fig. 2.11 se pueden apreciar cuáles son las funciones de forma de los esfuerzos y los grados de libertad empleados en el modelo.

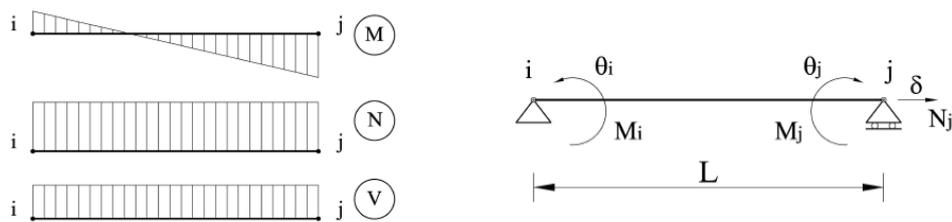


Fig. 2.11 *Funciones de esfuerzos y grados de libertad, Ranzo y Petrangeli (1998) [58]*

A nivel sección, la matriz de rigidez de la sección es igual a:

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \iint_A E \cdot dA & 0 & \iint_A y \cdot E \cdot dA \\ 0 & \frac{\partial V}{\partial \gamma} & 0 \\ \iint_A y \cdot E \cdot dA & 0 & \iint_A E \cdot dA \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

La componente de rigidez a cortante no se evalúa por integración a lo largo de todas las capas, sino a partir de una relación entre el esfuerzo cortante  $V$  aplicado en la sección y la distorsión angular  $\gamma$  de la sección. La curva  $V-\gamma$  se obtiene independientemente a través de un modelo de bielas y tirantes tal y como se esquematiza en la Fig. 2.12.

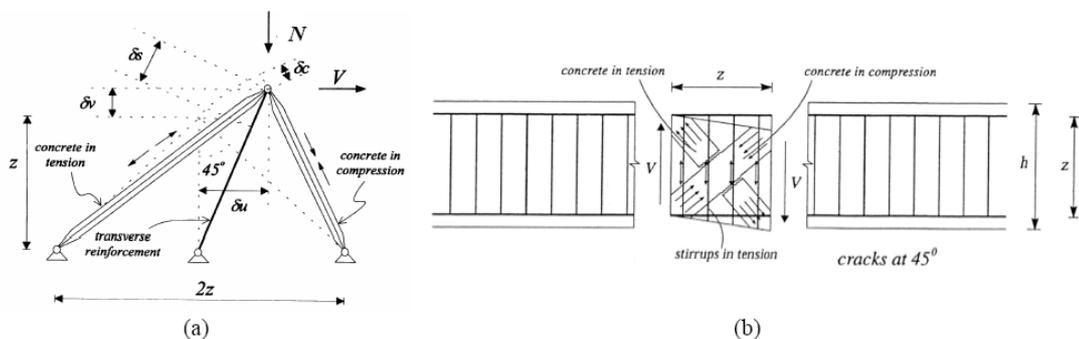


Fig. 2.12 *Modelo bielas y tirantes, Ranzo y Petrangeli (1998) [58]*

La curva se obtiene dando valores incrementales al esfuerzo cortante  $V$ , y tras medir los desplazamientos en el modelo de bielas y tirantes, se lleva a cabo una estimación de la distorsión angular  $\gamma$ , que se aproxima al valor  $\delta u/z$  (véase Fig. 2.12). La estimación de estas curvas permite la identificación de la fisuración, la plastificación y la rotura del mecanismo de celosía de cortante.

En cuanto a las ecuaciones constitutivas, se emplean ecuaciones unidimensionales tanto para el acero como para el hormigón. En el caso del hormigón, se emplea la propuesta de Mander et al. (1988) [35], mientras que para el acero se utiliza el modelo de Menegoto y Pinto (1973) [40].

El modelo presentado tiene en cuenta de forma incompleta la interacción entre los esfuerzos de cortante y flexión. Esto se ve claramente al analizar las componentes nulas que aparecen en la matriz de rigidez de la sección propuesta. Además, parte de la formulación del modelo está basada en la utilización de una serie de parámetros a validar experimentalmente. Por este motivo, existe una limitación importante puesto que para cada caso de estudio se requiere calibrar adecuadamente los parámetros de los que depende el modelo.

### 2.3.2.5 Modelo de Marini y Spacone (2006) [36]

El modelo propuesto por Marini y Spacone (2006) [36] permite el análisis de elementos de hormigón armado sometidos a esfuerzos de axil, flexión y cortante (Fig. 2.13). Está formulado siguiendo la hipótesis cinemática de Timoshenko. Se asume una deformación transversal constante a lo largo de todo el canto de la sección sin incluir ningún término de corrección de cortante. Además, el elemento está formulado siguiendo el método de la flexibilidad.

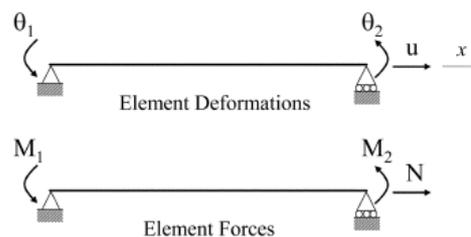


Fig. 2.13 Esfuerzos y grados de libertad del elemento, Marini (2006) [36]

Los esfuerzos de flexión y axil se consideran de la misma forma que en un modelo multifibra tradicional. El esfuerzo cortante, por el contrario, se encuentra desacoplado con respecto al resto de esfuerzos. Sin embargo, se necesita evaluar la rigidez a cortante de la sección para poder utilizar adecuadamente la hipótesis

cinemática de Timoshenko. Para ello, se emplea una curva no lineal  $V-\gamma$  tal y como se aprecia en la Fig. 2.14.

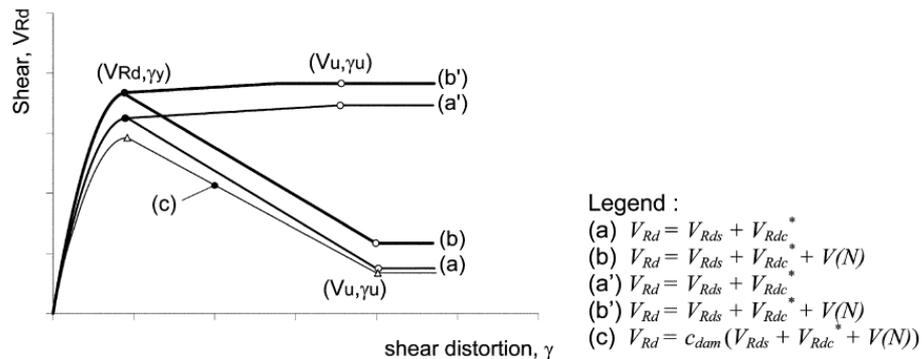


Fig. 2.14 Ley de comportamiento seccional a cortante, Marini (2006) [36]

Los parámetros de los que dependen las curvas propuestas siguen las formulaciones que aparecen en la mayor parte de códigos normativos. Se considera, a su vez, la disminución de la resistencia a cortante esperable conforme progresa la fisura.

Esta propuesta es de fácil implementación, aunque la influencia del esfuerzo cortante se lleva a cabo de una manera totalmente desacoplada. El modelo es similar al desarrollado por Ranzo y Petrangeli (1998) [58]. La principal diferencia se encuentra en el procedimiento que se sigue en la obtención de la relación entre el esfuerzo cortante y la distorsión angular de la sección.

### 2.3.2.6 Modelo de Navarro (1999) [44]

Este modelo de análisis seccional [44] tiene en cuenta los esfuerzos axil, flector y cortante actuando estos dos últimos en cualquier dirección.

El modelo propuesto se basa en la combinación adecuada de otros dos modelos: un modelo 1D y otro modelo 2D (véase Fig. 2.15).

Mediante el modelo 1D se consideran las tensiones longitudinales que producen los esfuerzos exteriores de axil y flexión, además de las componentes normales resultado de la interacción entre la flexión y el cortante. El modelo 1D se rige de la misma forma que en un modelo multifibra.

Por otro lado, el modelo 2D es el encargado de considerar las tensiones tangenciales producidas por el esfuerzo cortante y proporcionar unas componentes normales que interaccionan con el modelo 1D. Este modelo 2D está compuesto por

un conjunto de paneles delimitados por las armaduras longitudinales y que siguen la disposición de la armadura transversal.

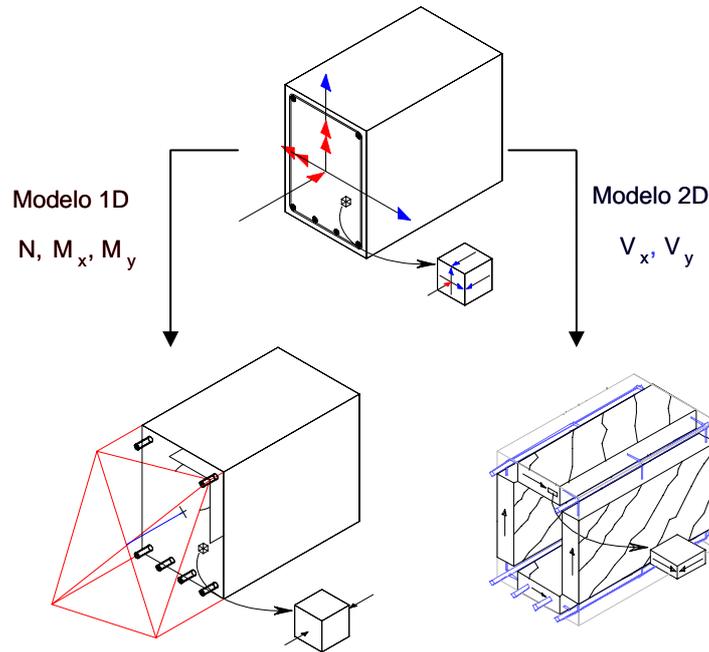


Fig. 2.15 Descomposición en modelos 1D y 2D, Navarro (1999) [44]

La interacción de esfuerzos se realiza compatibilizando el comportamiento de los modelos 1D y 2D a nivel de ecuaciones de equilibrio.

Dado que los paneles definidos en el modelo 2D se rigen por un estado de tensión plana, se concentran las variaciones de las tensiones normales por unidad de longitud (esfuerzos rasantes) obtenidas del modelo 1D en las aristas de intersección entre paneles. Esto obliga a buscar un sistema discreto de esfuerzos rasantes en la sección (Fig. 2.16).

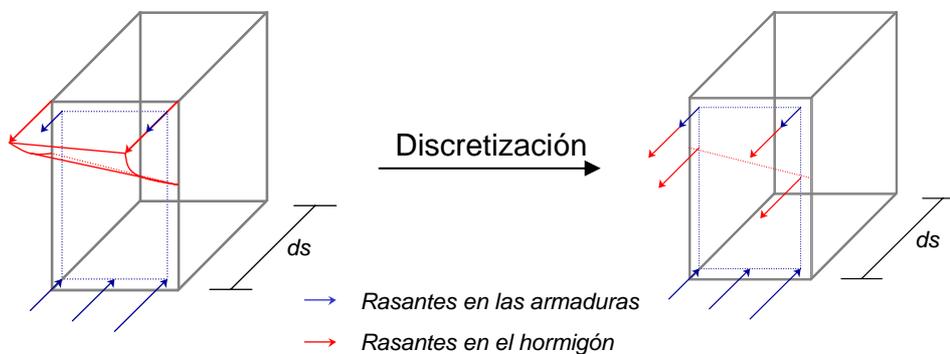


Fig. 2.16 Discretización sistema esfuerzos rasantes, Navarro (1999) [44]

Además, el equilibrio de esfuerzos por unidad de longitud en la arista entre paneles contiguos permite establecer la relación existente entre los rasantes de las fibras longitudinales y las tensiones tangenciales inducidas por éstos en los paneles. Se sigue un proceso asimilando el modelo 2D a un sección de pared delgada cerrada en la cual se obtiene la distribución de tensiones tangenciales. En este proceso se precisa estimar el módulo de rigidez transversal para todos los paneles. Se considera como módulo de rigidez transversal para los paneles el propuesto por Park y Paulay (1975) [49].

Conocida la tensión tangencial en cada panel se obtiene el cortante resistido en cada uno de ellos. Por otra parte, las bielas en los paneles fisurados producen unos esfuerzos cuyas componentes normales  $C_{w,j}$  se consideran en el equilibrio del modelo 1D, tal y como se indica en la Fig. 2.17 y en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 N_d &= \sum_i A_i \cdot \sigma_i + \sum_j C_{w,j} \\
 M_{xd} &= \sum_i A_i \cdot \sigma_i \cdot x_i + \sum_j C_{w,j} \cdot x_j \\
 M_{yd} &= \sum_i A_i \cdot \sigma_i \cdot y_i + \sum_j C_{w,j} \cdot y_j
 \end{aligned}
 \tag{2-19}$$

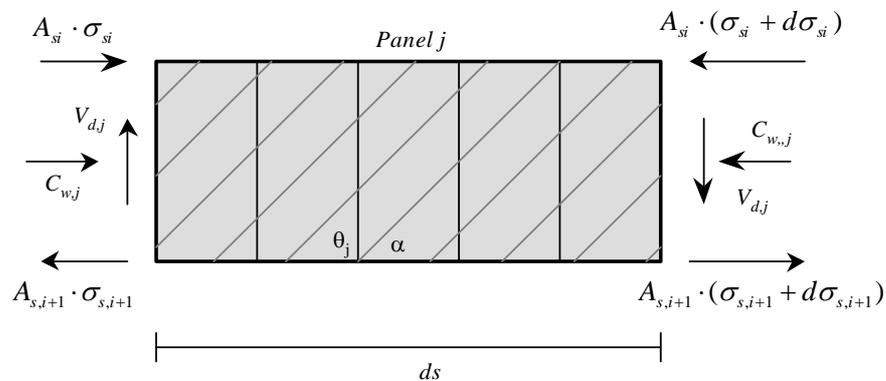


Fig. 2.17 Panel fisurado de hormigón armado, Navarro (1999) [44]

La ecuación constitutiva empleada en el modelo 1D se obtiene del modelo propuesto por el CM-90 [16], mientras que para el acero se emplea un típico diagrama bilineal. En el modelo 2D se controla para cada panel el agotamiento de las bielas de hormigón y la plastificación de la armadura transversal.

Este modelo se encuentra formulado a nivel sección únicamente y el análisis seccional requiere un proceso iterativo entre los submodelos 1D y 2D.

## MODELOS TIPO (b)

### 2.3.2.7 Modelo de Petrangeli et al. (1999) [50]

El modelo desarrollado por Petrangeli et al. (1999) [50] y [51] está basado en el método de flexibilidad y se formula incluyendo los esfuerzos de axil, flexión y cortante simultáneamente. La hipótesis cinemática a nivel sección destaca porque se asumen tres parámetros de deformación seccional (deformación longitudinal  $\varepsilon_0$ , curvatura de la sección  $\chi$  y deformación transversal de la sección  $\gamma$ ) como si se tratara de la hipótesis cinemática de Timoshenko. Sin embargo, los autores emplean una función de corrección de las deformaciones transversales para cada punto de la sección siguiendo una distribución parabólica (Fig. 2.18). Concretamente se adopta una función parabólica correctora de coeficiente 3/2 en el centro de la sección.

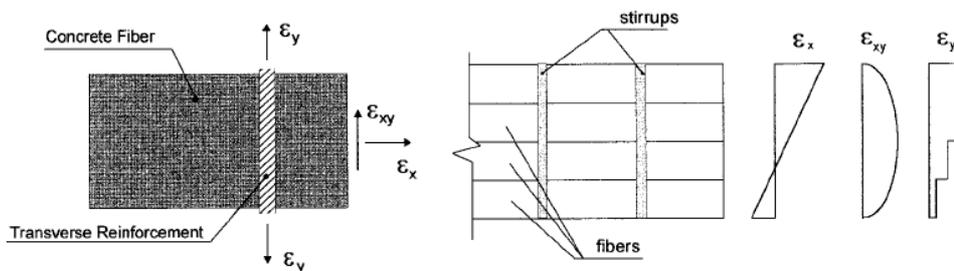


Fig. 2.18 Comportamiento a nivel sección y fibra, Petrangeli et al. (1999) [50]

En cada una de las fibras de la sección, se emplea un modelo constitutivo bidimensional. Para la definición del mismo se debe conocer la deformación longitudinal  $\varepsilon_x$  y la deformación transversal  $\gamma_{xz}$ . Con el fin de poder completar el estado de tensión plana se precisa conocer, además, la deformación longitudinal  $\varepsilon_y$ , para cuya obtención se plantean dos opciones:

Opción 1: imponer que la tensión  $\sigma_y$  sobre cada fibra es nula.

Opción 2: imponer el equilibrio vertical considerando todas las capas a la vez. En cada capa  $i$  se impone el siguiente equilibrio vertical entre el hormigón y los estribos:

$$\sigma'_{y,c} \cdot A'_{y,c} + \sigma_{y,s} \cdot A_{y,s} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_c \quad (2-20)$$

En este caso, se supone que la armadura transversal tiene una tensión constante a lo largo de toda la altura del estribo y se asume para el mismo la siguiente deformación media:

$$\bar{\epsilon}_{y,s} = \frac{\sum_{i=1}^{nc} \epsilon_{y,c}^i \cdot A_{x,c}^i}{\sum_{i=1}^{nc} A_{x,c}^i} \quad (2-21)$$

Para armonizar el comportamiento general de tensión plana con la hipótesis cinemática se realiza un proceso de condensación de la componente correspondiente a la deformación transversal  $\epsilon_y$ .

La ecuación constitutiva que se necesita implementar tiene que ser bidimensional. Petrangeli introduce una relación constitutiva basada en la aproximación de la teoría del microplano. Para el acero se asume la propuesta por Menegoto y Pinto (1973) [40].

### 2.3.2.8 Modelo de Vecchio y Collins (1988) [84]

Vecchio y Collins (1988) [84], aplican la ecuación constitutiva del MCFT al análisis de vigas sometidas a esfuerzos de axil, flexión y cortante. Para ello, se subdivide toda la sección en un conjunto de capas de hormigón y acero. Cada una de las capas se analiza por separado con su correspondiente comportamiento constitutivo. Se imponen, por una parte, las ecuaciones de equilibrio en la sección y, por otra, una ecuación de compatibilidad siguiendo la hipótesis cinemática de Euler-Bernouilli (Fig. 2.19).

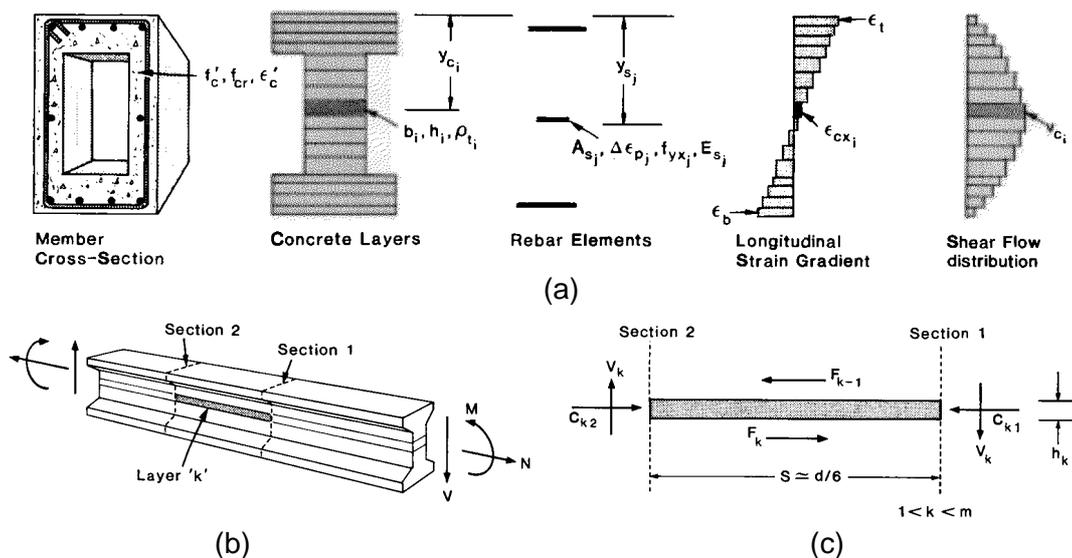


Fig. 2.19 Modelo de cálculo seccional, Vecchio y Collins (1988) [84]

En el acero, se utiliza una ecuación constitutiva tipo bilineal. Para cada una de las capas de hormigón se analiza el comportamiento de un material sometido a un estado de tensiones y deformaciones en su plano. El comportamiento constitutivo que se sigue para el material es el MCFT.

El procedimiento analítico requiere que se estimen primeramente la distribución de deformaciones longitudinales y la distribución de tensiones normales y tangenciales en la sección de estudio. Para ello, se aplican las siguientes ecuaciones de equilibrio y se tiene que asumir un determinado perfil de deformaciones angulares en la sección:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m f_{cxi} \cdot b_i \cdot h_i + \sum_{j=1}^n f_{sxj} \cdot A_{sj} &= N \\ \sum_{i=1}^m f_{cxi} \cdot b_i \cdot h_i \cdot (y_{ci} - y_0) + \sum_{j=1}^n f_{sxj} \cdot A_{sj} \cdot (y_{sj} - y_0) &= M \\ \sum_{i=1}^m v_{ci} \cdot b_i \cdot h_i &= V \end{aligned} \quad (2-22)$$

A continuación, se vuelve a estimar la distribución de tensiones tangenciales pero imponiendo las ecuaciones de equilibrio en dirección longitudinal. Para determinar correctamente este perfil de distribución de tensiones tangenciales se plantea capa a capa el equilibrio longitudinal entre dos secciones contiguas situadas a una distancia igual a  $H/6$ .

El esfuerzo axial que actúa sobre una determinada capa  $i$  es igual a:

$$C_i = f_{cxi} \cdot b_i \cdot h_i + C_{si} \quad (2-23)$$

El esfuerzo rasante actuante en cada capa se evalúa teniendo en cuenta la diferencia de esfuerzo axial entre las dos secciones (1 y 2):

$$F_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (C_{i2} - C_{i1}) \quad (2-24)$$

$$F_k = F_{k-1} + C_{k1} - C_{k2} \quad (2-25)$$

Por lo tanto, el cortante transmitido a lo largo de una determinada capa es igual a:

$$V_k = \frac{(F_k + F_{k-1})}{2} \cdot \frac{h_k}{S} \quad (2-26)$$

siendo la tensión tangencial transmitida igual a:

$$v_k = \frac{V_k}{b_k \cdot h_k} \quad (2-27)$$

Seguidamente se comparan las distribuciones de tensiones tangenciales obtenidas directamente del modelo y a partir de la imposición del equilibrio longitudinal. En el caso de que no sean iguales se repite el proceso imponiendo un nuevo perfil de deformaciones transversales sobre la sección. Este bucle se repite hasta que ambas distribuciones de tensiones tangenciales coincidan.

### 2.3.2.9 Modelo de Bentz (2000) [8]

El modelo presentado por Bentz (2000) [8] es una extensión del modelo de Vecchio y Collins (1988) [84]. Bentz presenta este modelo implementado en el programa Response-2000. En este método, se analiza un elemento diferencial en lugar de considerar dos secciones consecutivas.

El comportamiento constitutivo a lo largo de la sección consiste en el análisis de una serie de nodos con comportamiento biaxial según el MCFT. Gracias a esta teoría, es relativamente sencillo calcular la matriz de rigidez del comportamiento bidimensional. Se puede calcular la variación de los esfuerzos en función de las deformaciones de cada una de las fibras o capas según la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \sigma_y}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \gamma_{xy}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} = K_i \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

Se asume la hipótesis de despreciar las tensiones normales en la dirección vertical  $\sigma_y = 0$ . Al imponer esta condición de contorno en cada fibra, se puede condensar la expresión de la anterior matriz de rigidez del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \frac{b \cdot d}{e} & c - \frac{b \cdot f}{e} \\ g - \frac{h \cdot d}{e} & i - \frac{h \cdot f}{e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} = K'_i \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

Con este método resulta mucho más sencilla la obtención del diagrama de tensiones tangenciales a lo largo de todo el canto de la viga por equilibrio longitudinal.

El procedimiento del modelo de Bentsz necesita, como el modelo de Vecchio y Collins (1988) [84], de un bucle en el que se busca el perfil de deformaciones angulares que iguala la distribución de tensiones tangenciales obtenidas directamente del modelo y la obtenida por equilibrio longitudinal. La búsqueda de este perfil de deformaciones transversales está formulada en rigidez secante. Ciertos problemas de ajuste numérico son detectados por Bentsz con el fin de poder imponer la condición de equilibrio longitudinal entre fibras. Además, este modelo no extiende la formulación de una manera consistente a nivel elemento.

### 2.3.2.10 Modelo de Remino (2004) [64]

Remino (2004) [64] desarrolla en su tesis doctoral un modelo de fibras basado en la hipótesis cinemática de Timoshenko. Está formulado siguiendo el método de flexibilidad según el modelo de Spacone et al. (1996) [74]. Emplea un elemento de dos nodos (Fig. 2.20) en el que se establece la siguiente relación entre las fuerzas nodales  $\mathbf{P}$  y los esfuerzos seccionales  $\mathbf{p}(x)$ :

$$\mathbf{p}(x) = \mathbf{N}^{sf}(x) \cdot \mathbf{P} \quad (2-30)$$

$$\mathbf{p}(x) = \begin{bmatrix} N \\ M \\ V \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^{sf}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x/L - 1 & x/L \\ 0 & x/L & x/L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} N \\ M \\ V \end{bmatrix}$$

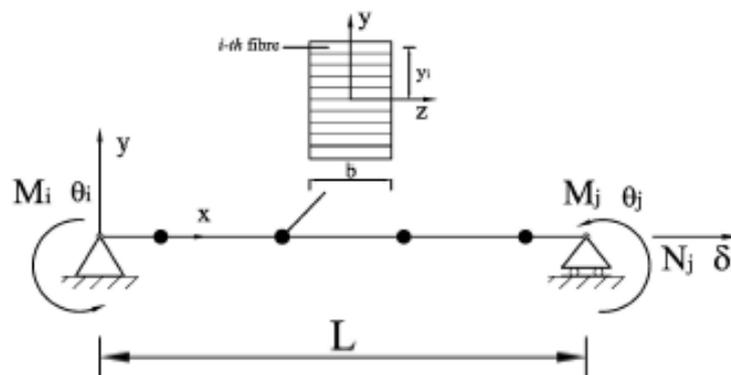


Fig. 2.20 Modelo de fibras, Remino (2004) [64]

La matriz de rigidez de la sección se evalúa numéricamente empleando el método de las diferencias finitas. Cualquier término  $(m,n)$  de esta matriz de rigidez se evalúa del siguiente modo:

$$k_{mn} = \frac{p_m(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}_n) - p_m(\mathbf{q})}{\delta q_n} \quad (2-31)$$

siendo  $p_m$  la componente  $m$  del vector de esfuerzos y  $\mathbf{q}$  el vector de deformaciones seccionales.

El modelo constitutivo empleado para el hormigón está basado en el MCFT con ligeras modificaciones relativas a la definición de las ecuaciones constitutivas. Es importante indicar que en cada una de las fibras se impone la condición de tensión normal nula en la dirección vertical. En cuanto al acero se utiliza la ecuación constitutiva de Menegotto y Pinto (1973) [40].

Este modelo se asemeja en cierto modo al modelo de Petrangeli et al. (1999) [50] en el sentido de que emplea un elemento formulado en flexibilidad y utiliza a nivel fibra una ecuación constitutiva 2D con la que considerar la interacción entre las tensiones normales y tangenciales. Además, se constatan dificultades en la resolución numérica como consecuencia del tipo de ecuación constitutiva utilizada.

### 2.3.2.11 Modelo de Bairán (2005) [5]

Se trata de un modelo capaz de analizar secciones transversales de forma cualquiera bajo cualquier combinación de esfuerzos (Bairán 2005 [5], Bairán y Marí 2006 [6], Bairán y Marí 2007 [7]). La descripción que se presenta del modelo es resumida. Se recomienda consultar la bibliografía indicada con el fin de ampliar información sobre el modelo en cuanto a formulación y/o notación.

El modelo se basa en la utilización de un campo de distorsión ( $\mathbf{u}^w$ ) en el comportamiento cinemático de la sección transversal. A éste se le suma el campo de desplazamientos derivado de la hipótesis de Navier-Bernouilli ( $\mathbf{u}^{ps}$ ) como sigue:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{ps} + \mathbf{u}^w \quad (2-32)$$

Los campos de deformación y tensión se descomponen igualmente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{ps} + \boldsymbol{\varepsilon}^w \quad (2-33)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{ps} + \boldsymbol{\sigma}^w \quad (2-34)$$

El campo de distorsión y alabeo es un campo vectorial de 3 componentes (uno para el alabeo y dos para la distorsión dentro de la sección) que debe satisfacer la condición de ortogonalidad respecto a los desplazamientos de sección plana según se indica en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{u}^R = \iint_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -z & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^w \\ v^w \\ w^w \end{bmatrix} dA = \mathbf{0} \quad (2-35)$$

Como simplificación, se considera que el campo de distorsión es función únicamente de las coordenadas del plano  $y$ - $z$ . De este modo, se capturan todas las deformaciones de cortante y deformaciones normales dentro del plano. Por otro lado, las deformaciones longitudinales normales al plano de la sección se derivan de la hipótesis cinemática de Euler-Bernouilli.

Las componentes del campo de desplazamientos se obtienen a partir de una formulación que relaciona de forma local el campo alabeo-distorsión y el campo de deformación plana. Esto se consigue con la siguiente formulación variacional de la ecuación de equilibrio.

$$R(x) = \iint_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{E}_x^T \boldsymbol{\sigma}' dA - \iint_A \mathbf{L}_{yz} (\delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dA = 0 \quad (2-36)$$

Sustituyendo la ecuación (2-32) en la (2-36) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$R^{ps}(x) = G^{ps}(\boldsymbol{\sigma}') - F^{ps}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2-37a)$$

$$R^w(x) = G^w(\boldsymbol{\sigma}') - F^w(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2-37b)$$

La metodología propuesta consiste en satisfacer la ecuación (2-37b) en cada punto de integración del elemento viga empleado. Esto se consigue poniendo  $\mathbf{u}^w$  como una función de  $\mathbf{u}^{ps}$ , tal y como se indica en la ecuación (2-38). De esta forma, se resuelve el problema 3D como la suma de un modelo 1D a nivel viga y un modelo 2D a nivel sección.

$$\boldsymbol{\sigma}^w = F^{w-1} \{ G^w(\boldsymbol{\sigma}') - F^w(\boldsymbol{\sigma}^{ps}) \} = H^w(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma}^{ps}) \quad (2-38)$$

La ecuación (2-38) se resuelve para secciones de geometría y materiales arbitrarios. Además, se debe satisfacer la ecuación (2-35). Para resolver este problema se recurre a la utilización de un modelo 2D de elementos finitos de la sección transversal.

El campo de distorsión y el alabeo se obtienen a partir de los valores nodales en la sección, como se indica en las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{u}^w = \mathbf{N}^w \mathbf{d}^w \quad (2-39)$$

$$\mathbf{d}^w = \mathbf{A}_1^* \mathbf{e}_s^* + \mathbf{A}_2^* \mathbf{e}_s^{*'} = \mathbf{A}^* \boldsymbol{\xi}^* \quad (2-40)$$

$$\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_s \quad (2-41)$$

Los esfuerzos seccionales, energéticamente consistentes, pueden ser calculados según la ecuación obtenida por aplicación del principio de los trabajos virtuales.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{ps} = \mathbf{D} \mathbf{B}^{ps} \dot{\mathbf{e}}_s \quad (2-42)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^w = \mathbf{D} \mathbf{B}_{yz}^w \mathbf{A}^* \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\Omega} \dot{\mathbf{e}}_s \quad (2-43)$$

$$\mathbf{s}_s = \iint_A \mathbf{B}^{psT} \boldsymbol{\sigma} dA + \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{A}^{*T} \iint_A \mathbf{B}_{yz}^w \boldsymbol{\sigma} dA \quad (2-44)$$

Finalmente, la matriz de rigidez de la sección queda como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s = & \iint_A \mathbf{B}^{psT} \mathbf{D} \mathbf{B}^{ps} dA + \iint_A \mathbf{B}^{psT} \mathbf{D} \mathbf{B}_{yz}^w dA \mathbf{A}^* \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{A}^{*T} \iint_A \mathbf{B}_{yz}^w \mathbf{D} \mathbf{B}^{ps} dA + \dots \\ & \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{A}^{*T} \iint_A \mathbf{B}_{yz}^w \mathbf{D} \mathbf{B}^{ps} dA + \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{A}^{*T} \iint_A \mathbf{B}_{yz}^w \mathbf{D} \mathbf{B}_{yz}^w dA \mathbf{A}^* \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \quad (2-45)$$

El modelo constitutivo empleado está basado en los modelos de fisuración distribuida e incluye la posibilidad de cargas cíclicas. Se formula el material de forma tridimensional a través de la descripción del comportamiento unidimensional en las direcciones principales. Para el hormigón en compresión se utiliza la ecuación propuesta por Vecchio y Selby (1991) [87]. En tracción se adopta la curva de *tension-stiffening* utilizada por Cervenka (1985) [14].

Cabe destacar la importancia de esta aportación dado el grado en que mejora las teorías de viga tradicionales adoptadas por la mayor parte del resto de modelos que se presentan. La respuesta de la sección tiene en cuenta el acoplamiento entre las tensiones normales y tangenciales bajo cualquier sollicitación de esfuerzos. Es el único modelo que considera el efecto de la distorsión junto con el alabeo. Este último aspecto es de suma importancia para tener en cuenta la anisotropía inducida por la fisuración. El grado de implementación de las ecuaciones de compatibilidad y de equilibrio interno es mayor que en el resto de modelos, dado que se establecen conjuntamente tanto en dirección longitudinal como en el plano de la sección. En definitiva, es un modelo que permite captar de forma muy adecuada el complejo comportamiento tridimensional que se genera en cada una de las fibras que componen la sección transversal.

#### 2.3.2.12 Modelo de Saritas (2006) [68]

El modelo desarrollado (Saritas (2006) [68], Saritas y Filippou (2009) [69]) guarda ciertas similitudes con el modelo propuesto por Petrangeli et al. (1999) [50]. Está basado en el método de flexibilidad, e incluye en el análisis los esfuerzos de axil, flexión y cortante simultáneamente. En la formulación se ha empleado el principio variacional de *Hu-Washizu* (Taylor et al. (2003) [79]).

La hipótesis cinemática a nivel sección asume tres parámetros de deformación seccional, como si se tratara de la hipótesis cinemática de Timoshenko. Se asume una función de corrección de cortante parabólica con un valor de 5/4 en el centro de la sección. Se considera, por lo tanto, la solución exacta de la función de corrección de cortante para secciones rectangulares con comportamiento elástico y lineal.

En cada una de las capas de la sección, se emplea un modelo constitutivo bidimensional en el cual se consideran exclusivamente la deformación longitudinal  $\varepsilon_x$  y la deformación transversal  $\gamma_{xz}$ , así como las tensiones  $\sigma_x$  y  $\tau_{xz}$ . Se asume para cada una de las capas que el resto de tensiones son iguales a cero.

El modelo se aplica a elementos con diferentes tipos de materiales: elásticos, acero y también hormigón armado. En este último caso, la ecuación constitutiva que se utiliza está basada conjuntamente en la mecánica de la fractura y en la teoría de la plasticidad. Estas teorías se basan en la idea de que el hormigón puede desarrollar un comportamiento como si de un material plástico se tratase y, a su vez, es un material que experimenta daño. El material está tratado con un comportamiento totalmente 3D. Esto implica la necesidad de condensar las

componentes de deformaciones no incluidas en la formulación de la viga, a través de imponer nulas aquellas tensiones en el material que no se tienen en cuenta en la hipótesis cinemática. La formulación de la ecuación constitutiva permite la utilización de este material tanto para carga monótona creciente como para carga cíclica.

### 2.3.2.13 Modelo de Navarro et al. (2007) [45]

Este modelo forma parte de los primeros trabajos de realización de esta investigación y todos los detalles del mismo (formulación, implementación numérica y validación) se pueden consultar en el anejo 1 de este documento. A continuación, se presenta un breve resumen.

Se trata de un modelo para el análisis de elementos lineales de hormigón armado y pretensado sometidos a esfuerzos combinados de axil, flexión biaxial, cortante biaxial y torsión (Fig. 2.21). El modelo está basado en la hipótesis cinemática de Timoshenko. Se aplica a elementos lineales en 3D y permite el análisis de secciones transversales de cualquier forma.

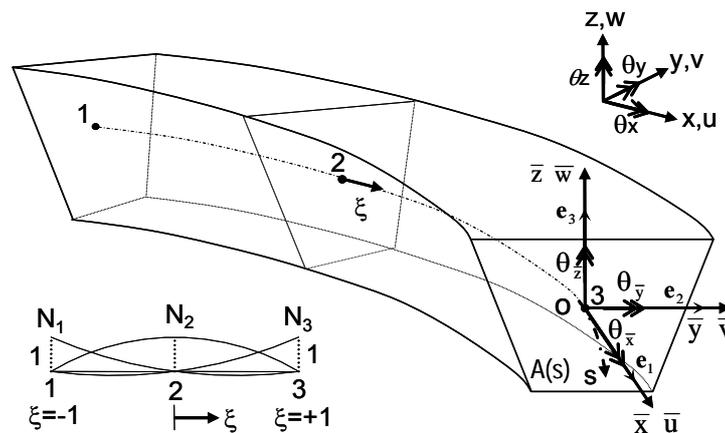


Fig. 2.21 Definición del elemento finito utilizado, Navarro et al. (2007) [45]

La principal característica del modelo es que las secciones transversales se subdividen en un conjunto de regiones que pueden tener comportamiento 1D, 2D y 3D según se indica en la Fig. 2.22. Las regiones 1D están compuestas por las armaduras longitudinales que se quieran considerar de forma discreta. Las regiones 2D se sitúan en aquellas zonas de la sección con presencia de armadura transversal en una sola dirección. Finalmente, las regiones 3D se localizan en aquellas zonas de la sección con presencia de armadura transversal en más de una dirección, como en el caso de las esquinas de una sección rectangular, o en zonas sin armadura transversal.

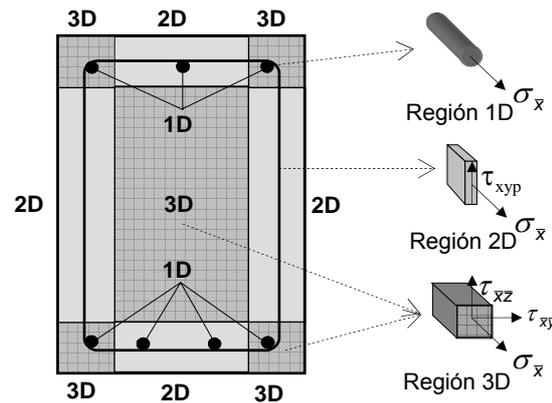


Fig. 2.22 Subdivisión de la sección en regiones, Navarro et al. (2007) [45]

Para cada una de estas regiones (1D, 2D y 3D) se requiere de la definición de un modelo constitutivo 1D, 2D y 3D, respectivamente. La ecuación constitutiva bidimensional y tridimensional utilizada sigue las hipótesis básicas del MCFT, Vecchio y Collins (1986) [83]. Toda la formulación de este modelo se realiza por el método de rigidez.

La validación del modelo incluye una variación de combinaciones de esfuerzos incluyendo el flector, el cortante y la torsión. La comparación de los resultados es bastante exacta en cuanto a la carga y el tipo de rotura, así como la respuesta a cualquier nivel de carga, fundamentalmente para aquellas combinaciones de esfuerzos en las que el cortante no es dominante.

#### 2.3.2.14 Modelo de Ceresa et al. (2009) [13]

Ceresa et al. (2009) [13] desarrollan un modelo para el análisis de elementos lineales frente a esfuerzos combinados de axil, flexión y cortante. La formulación del elemento está basada en el método de rigidez y sigue la hipótesis cinemática de Timoshenko. Se trata de un elemento con tres grados de libertad por nodo  $u$ ,  $w$ ,  $\theta$ . La interpolación es lineal, por lo que el elemento presenta problemas de bloqueo de cortante. Para evitar este problema se añade a las funciones de interpolación del elemento un término adicional para el desplazamiento vertical  $w$  del elemento.

Siguiendo la hipótesis cinemática de Timoshenko se consideran tres parámetros de deformación seccional: deformación longitudinal, curvatura de la sección y deformación transversal de la sección. Se considera constante la deformación transversal para cada una de las fibras de la sección.

Se emplea un modelo constitutivo bidimensional en el cual se consideran exclusivamente la deformación longitudinal  $\varepsilon_x$ , la deformación transversal  $\gamma_{xz}$  y las

tensiones  $\sigma_x$  y  $\tau_{xz}$ . Se asume para cada una de las fibras que el resto de tensiones son nulas. La ecuación constitutiva empleada está basada en el *MCFT*, así como las mejoras introducidas con el *DSFM* propuesto por Vecchio (2000) [88] y (2001) [89].

En este modelo se lleva a cabo un esfuerzo importante por tratar de adaptar el modelo constitutivo para que sea adecuada su utilización frente a cargas cíclicas. Se constatan dificultades numéricas significativas en la utilización de esta ecuación constitutiva.

### 2.3.2.15 Modelo de Kotronis (2000) [29]

Este modelo (Kotronis (2000) [29], Kotronis y Mazars (2005) [30]) destaca por tener en cuenta el daño o fatiga que se produce en el hormigón como consecuencia de la acción de las cargas cíclicas.

El modelo que propone es 3D y está formulado en rigidez siguiendo la hipótesis cinemática de Timoshenko. Para evitar el fenómeno de bloqueo de cortante se utilizan funciones de interpolación cúbica y cuadrática según los polinomios de Lagrange. El elemento finito empleado tiene dos nodos y un total de seis grados de libertad por cada nodo.

A nivel seccional, la matriz de rigidez se obtiene de manera análoga al modelo de Guedes et al. (1994) [25]. Para el acero se adopta un modelo clásico de plasticidad según Armstrong y Frederick (1966) [3]. Para el hormigón se ha utilizado la versión 1D del modelo de daño de La Borderie (1991) [31]. No requiere la utilización de un comportamiento constitutivo bidimensional en cada fibra, lo cual resta generalidad al modelo cuando la fisuración se produce debido a la acción del esfuerzo cortante.

Otro modelo que sigue la línea del presentado y que merece la pena citarse es el desarrollado por Mazars et al. (2005) [39].

## 2.4 MODELOS 2D

### 2.4.1 MODELO DE VECCHIO (1989) [85]

Vecchio (1989) [85] y (1990) [86] presenta un procedimiento de análisis no lineal basado en el método de los elementos finitos para elementos bidimensionales sometidos a cargas en su plano. Emplea un método basado en una formulación de rigidez secante utilizando elementos finitos sencillos con pocos grados de libertad.

Este modelo adopta la formulación del MCFT. Se plantean las ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y constitutivas en términos de valores medios. Se representa un único estado de tensiones y de deformaciones para un elemento fisurado de hormigón armado (Fig. 2.23). Una vez definidos estos estados es relativamente sencillo obtener los valores de los módulos de deformación secantes que se van a necesitar emplear en la formulación.

Las ecuaciones constitutivas empleadas se encuentran representadas y resumidas en la Fig. 2.24.

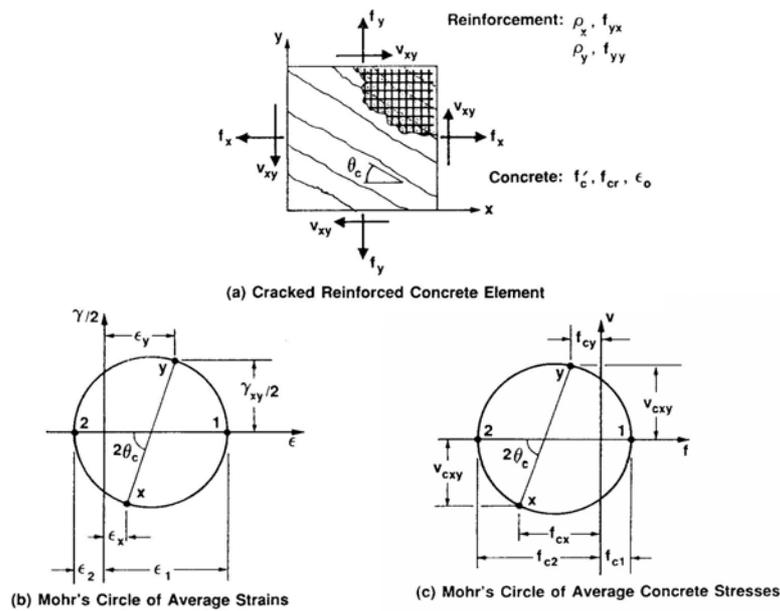


Fig. 2.23 Elemento membrana, Vecchio (1989) [85]

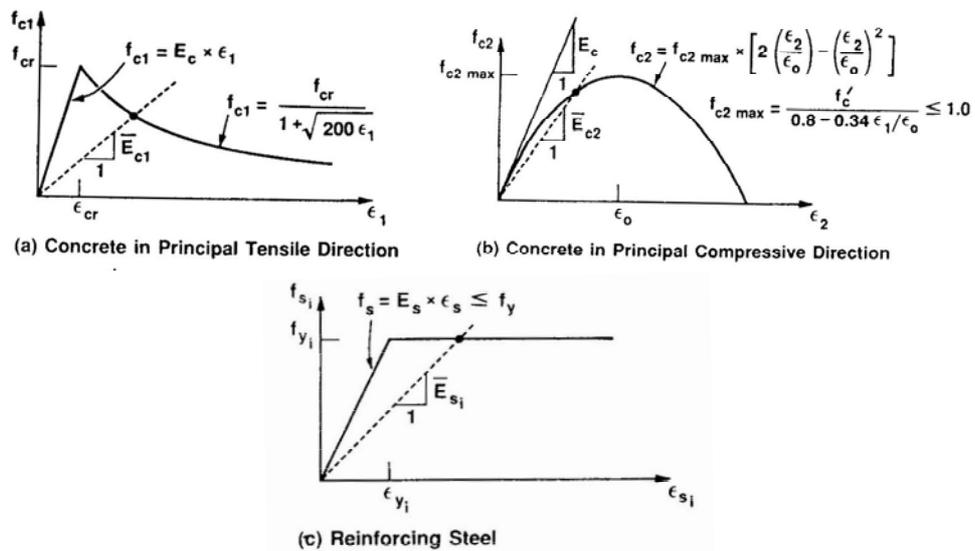


Fig. 2.24 Ecuaciones constitutivas y módulos secantes, Vecchio (1989) [85]

La matriz de rigidez correspondiente al hormigón en direcciones principales se formula como sigue:

$$[D_c] = \begin{bmatrix} \bar{E}_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}_{c1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G}_c \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

donde se puede estimar como  $\bar{G}_c \approx \frac{(\bar{E}_{c1} \cdot \bar{E}_{c2})}{(\bar{E}_{c1} + \bar{E}_{c2})}$

Análogamente, la matriz de rigidez del acero se representa en la dirección de cada dirección de armado:

$$[D]_{si} = \begin{bmatrix} \rho_{si} \cdot \bar{E}_{si} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

#### 2.4.2 MODELO DE STEVENS ET AL. (1991) [77]

El modelo de Stevens et al. (1987) [76], (1991) [77] [78], extiende la teoría del *MCFT* con la finalidad de que se pueda implementar en una formulación basada en los elementos finitos. La principal ventaja que representa este modelo es que no precisa de un chequeo de la fisura, tal y como se hace en la presentación del modelo original del *MCFT*.

La principal diferencia que existe con respecto a la formulación de Vecchio (1989) [85] es la utilización de un procedimiento de cálculo basado en la formulación de rigidez tangente. Esto implica que el procedimiento numérico de resolución resulta bastante más complejo, aunque tiene el beneficio de ser un procedimiento que puede mejorar los procesos de convergencia numérica.

Las hipótesis básicas en las cuales se fundamenta este modelo son las dos siguientes:

- Las direcciones principales de tensiones y deformaciones coinciden. Es decir, se tiene un modelo de fisuración distribuida de ángulo variable (*rotating angle*).
- La tensión máxima que puede soportar el hormigón es función de las deformaciones transversales de tracción que se puedan generar. De

este modo, para niveles altos de estas deformaciones la resistencia del hormigón se ve disminuida considerablemente.

Se asume la misma respuesta en el hormigón que la propuesta en el MCFT. Sin embargo, la rama post-pico se modifica empleando una ecuación cúbica hasta una cierta deformación en la que se considera un porcentaje de tensión residual en el hormigón (Fig. 2.25).

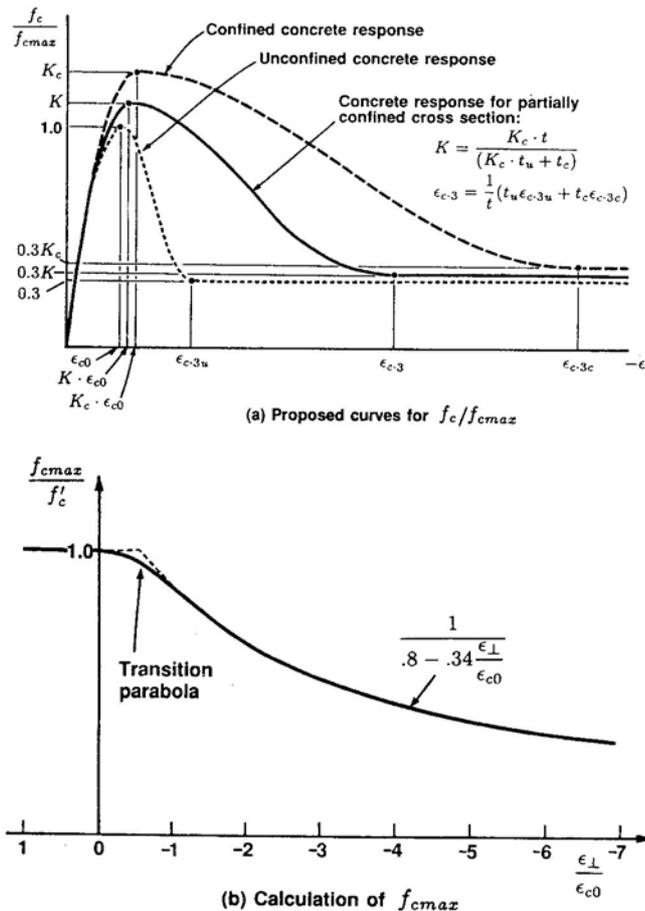


Fig. 2.25 Ecuaciones constitutivas hormigón a compresión, Stevens et al. (1991) [77]

Además, se considera que la tensión de tracción media en el hormigón nunca se anula cuando se llega a la plastificación de la armadura en la fisura. Por este motivo, la tensión media en el acero es siempre menor que su límite elástico. El acero entre fisuras no llega a su plastificación dado que el hormigón que lo rodea es capaz de admitir un cierto nivel de tracciones.

El hormigón presenta un comportamiento elástico y lineal hasta que se alcanza la resistencia a tracción  $f_{cr}$ . Tras la fisuración, el hormigón continúa admitiendo tracciones pero éstas son función de la disposición de la armadura pasiva colocada.

Para modelizar la respuesta a tracción del hormigón se incluye el efecto que producen cada uno de los paquetes de armado según su cuantía y orientación. Al trabajar con tensiones medias, no se necesita chequear que las tensiones de tracción se puedan transmitir a lo largo de las fisuras.

Con la finalidad de aprovechar al máximo la naturaleza difusa de las ecuaciones constitutivas, se emplean pocos elementos finitos pero con un número alto de grados de libertad. Por este motivo, la formulación del elemento finito se basa en una función cúbica para interpolar los desplazamientos. Sólo se consideran grados de libertad en los nodos con el fin de compatibilizar el comportamiento de este elemento finito con el comportamiento de elementos lineales de armadura.

Existen otros modelos como el propuesto por Bhide y Collins (1987) [9]. En este modelo se introduce el efecto pasador además de los fenómenos anteriormente indicados.

## 2.5 MODELOS 3D

### 2.5.1 MODELO DE VECCHIO Y SELBY (1991) [87]

Vecchio y Selby (1991) [87] presentan un modelo basado en los elementos finitos capaz de analizar el comportamiento tridimensional de elementos de hormigón armado. Se utiliza un modelo de fisuración distribuida y con inclinación variable (*smearred rotating angle*). Todo el modelo está formulado en rigidez secante de una manera similar a la que utilizó Vecchio (1989) [85] en el caso de elementos bidimensionales. En cuanto al comportamiento constitutivo resulta interesante observar cómo se lleva a cabo una adaptación del MCFT al caso del análisis tridimensional.

El elemento finito empleado es de 8 nodos y con un total de 24 gdl (3 por nodo) (Fig. 2.26). Las funciones de interpolación de los desplazamientos son lineales. Se trata de elementos finitos *low-powered* pero que permiten, con un número suficiente de elementos, llegar a resultados muy satisfactorios.

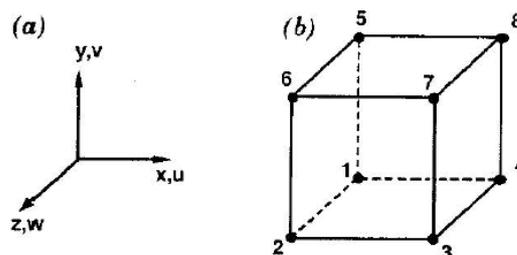


Fig. 2.26 Elemento Finito Hexaédrico, Vecchio y Selby (1991) [87]

En cada uno de los puntos de integración de este elemento se consideran seis componentes de tensiones y de deformaciones.

$$\begin{aligned}
 f &= D \cdot \varepsilon \\
 f &= [f_x \quad f_y \quad f_z \quad v_{xy} \quad v_{yz} \quad v_{xz}]^T \\
 \varepsilon &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}]^T
 \end{aligned}
 \tag{2-48}$$

En cuanto al comportamiento constitutivo se considera que el material es elástico y lineal antes de fisurar. Después de la fisuración la matriz de rigidez del hormigón armado se obtiene sumando la parte que contribuye el hormigón y la debida a las armaduras.

$$D = D_c + \sum_{i=1}^n D_{si}
 \tag{2-49}$$

La parte correspondiente al hormigón se obtiene de forma similar al caso bidimensional a partir de las direcciones principales de deformaciones.

$$D'_c = \begin{bmatrix} \frac{f_{c1}}{\varepsilon_{c1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{c2}}{\varepsilon_{c2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_{c3}}{\varepsilon_{c3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_{c1} \cdot E_{c2}}{E_{c1} + E_{c2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_{c2} \cdot E_{c3}}{E_{c2} + E_{c3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_{c1} \cdot E_{c3}}{E_{c1} + E_{c3}} \end{bmatrix}
 \tag{2-50}$$

Como se ha indicado al principio del apartado, estas ecuaciones constitutivas para el hormigón se fundamentan en el MCFT y se extrapola al caso 3D. En cuanto a la consideración del debilitamiento del hormigón como consecuencia de la presencia de deformaciones transversales de tracción, y a falta de modelos más exactos, se utiliza en todo momento la deformación mayor  $\varepsilon_{c1}$ , es decir, la más traccionada.

En cuanto al hormigón en tracción, se emplea la misma ecuación constitutiva en tracción empleada originalmente en el MCFT y con un control de transmisión de tensiones en la fisura.

La resistencia a tracción del hormigón se toma igual a:

$$f_{cr} = 0.33 \cdot \sqrt{f'_c} \quad (2-51)$$

mientras que el módulo de deformación del hormigón se toma igual a:

$$E_c = \frac{2 \cdot f'_c}{\varepsilon'_c} \quad (2-52)$$

En cuanto al comportamiento del acero se utiliza un típico diagrama bilineal.

El modelo se encuentra implementado en el programa SPARCS y proporciona buenos resultados en el caso de elementos de hormigón armado y pretensado sometidos a esfuerzos combinados. Por ejemplo, la verificación experimental respecto a ensayos experimentales de elementos sometidos a esfuerzos de flexión y torsión combinada de Onsongo (1978) [47].

El principal inconveniente de este modelo radica en la gran cantidad de recursos computacionales necesarios. Los autores del modelo dejan abierta la conveniencia de disminuir estas necesidades mediante la imposición de alguna condición adicional (por ejemplo, imponer que las secciones planas permanezcan planas tras la deformación). Una aplicación en este sentido es llevada a cabo por Navarro et al. (2007) [45].

Este modelo de comportamiento tridimensional ha sido también empleado de manera satisfactoria por Selby et al. (1996) [72] en los estudios llevados a cabo en la Universidad de Toronto con el fin de analizar elementos de hormigón armado sometidos a esfuerzos combinados de axil y cortante. También se llevaron a cabo una serie de investigaciones por parte de Collins et al. (1997) [18] con el fin de analizar los problemas derivados de la rotura por cortante de la plataforma off-shore Sleipner A en el Mar del Norte.

Por otra parte, Selby y Vecchio (1997) [73] presentan una ampliación de la formulación tridimensional del hormigón armado con el fin de captar adecuadamente los procesos de confinamiento del hormigón debido a la presencia de armaduras transversales, así como la deformación lateral (efecto Poisson) como consecuencia de la presencia de grandes niveles de compresión. Este trabajo ha sido utilizado en el proceso de verificación experimental de otros ya presentados como el modelo 1D propuesto por Rahal y Collins (2003) [57].



# CAPÍTULO 3

## MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE

## **CAPÍTULO 3. MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE**

En este capítulo se describe el modelo teórico de corrección de cortante concebido en esta tesis doctoral. Se trata de un modelo capaz de analizar elementos lineales de hormigón armado incluyendo la interacción entre los esfuerzos axil, flector y cortante. Este modelo está basado en la teoría de vigas de Timoshenko (en adelante TBT) e incluye una función de corrección en el término de deformación por cortante. De este modo, se corrige la deformación transversal generalizada de la sección para cada una de las fibras o capas que componen la sección. El modelo se formula en 1D y se consideran los esfuerzos de axil, flexión y cortante en una sola dirección. El modelo permite un análisis tanto a nivel sección como a nivel elemento.

En el primer apartado se describe y formula de forma general el modelo teórico de corrección de cortante. Se hace énfasis en aquellos aspectos novedosos que lo diferencian de aportaciones anteriores.

En el segundo y tercer apartados se presentan particularizaciones al modelo teórico general. Se proponen correcciones de deformación por cortante simplificadas sin perder el rigor de la formulación general. Se pretende captar la interacción axil-flexión-cortante a partir de una hipótesis cinemática sencilla.

En el cuarto apartado se extiende la formulación del modelo a nivel elemento. Se presenta la formulación analítica de un elemento 1D que incluye la hipótesis cinemática de corrección de cortante previamente descrita.

A continuación, en el quinto apartado se completa la formulación a nivel elemento mediante discretización por elementos finitos.

Finalmente, se presenta un apartado en el que se plantea la extensión del modelo teórico de corrección de cortante cuando actúan solicitaciones totalmente generales y que incluyen los esfuerzos axil, cortante biaxial, flexión biaxial y torsión.

### **3.1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE**

#### **3.1.1 HIPÓTESIS CINEMÁTICA DE CORRECCIÓN DE CORTANTE**

Se parte de una sección transversal compuesta por un conjunto de puntos de integración en forma de capas. El modelo teórico de corrección de cortante está

basado en un comportamiento bidimensional en tensión plana de cada una de estas capas. Se consideran sólo las componentes normal y transversal tanto de deformaciones ( $\epsilon$ ) como de tensiones ( $\sigma$ ), según se indica a continuación y se observa en la Fig. 3.1:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

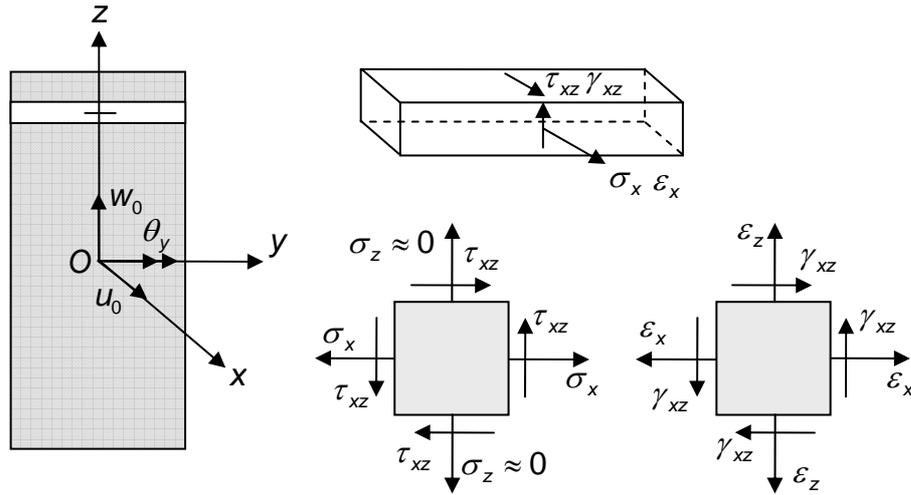


Fig. 3.1 Tensiones y deformaciones consideradas

El comportamiento en tensión plana requiere, además del vector de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ , de la tensión normal vertical  $\sigma_z$ . Dado que la aplicación del modelo se destina a regiones B, se asume que esta tensión es nula. Además, la componente de deformación vertical  $\epsilon_z$ , no incluida en (3-1), se utiliza posteriormente como parámetro para anular la tensión normal vertical  $\sigma_z$ . En el capítulo 4 se desarrolla un algoritmo numérico de condensación de esta componente vertical no incluida en la formulación.

Al igual que en la TBT, revisada en el capítulo 2, se emplean las tres deformaciones seccionales siguientes:

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_{0xz} \\ c_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

donde:  $u_0, w_0, \theta_y$  son los desplazamientos y el giro del centro de referencia de la sección.

$\varepsilon_0, \gamma_{0,xz}, C_y$  son las deformaciones seccionales consideradas en el modelo.

Siguiendo la hipótesis cinemática de TBT, la relación entre las deformaciones de una capa de la sección y las deformaciones seccionales se puede expresar del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}_{TBT}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (3-3)$$

siendo:

$$\mathbf{S}_{TBT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix} \text{ la matriz de compatibilidad según TBT.}$$

En este modelo se propone corregir la hipótesis cinemática de Timoshenko exclusivamente en el término correspondiente a la deformación por cortante. Además, se expresa esta hipótesis en forma incremental, dado que se va a suponer que la nueva matriz de compatibilidad  $\mathbf{S}$  es variable en función del nivel de carga. Por lo tanto:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^T \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (3-4)$$

$$\text{siendo la matriz de compatibilidad: } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha(z) \\ z & 0 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

y  $\alpha(z)$  es la función de corrección de cortante.

La función de corrección de cortante  $\alpha(z)$  es variable para cada una de las capas en dirección  $z$  y variable para cada nivel de carga. Además, debe ser una función continua y derivable para cualquier coordenada  $z$ . La forma de obtener esta función de corrección de cortante es el objetivo principal de este modelo.

La corrección de la hipótesis cinemática de Timoshenko se realiza directamente sobre las deformaciones en lugar de hacerse sobre el campo de desplazamientos. Con el modelo se pretende captar las variaciones de rigidez a cortante en la sección y esto se puede conseguir mediante una función de

corrección aplicable directamente sobre el vector de deformaciones. En todo caso, los desplazamientos se podrían obtener mediante integración de las deformaciones.

### 3.1.2 DESARROLLO DE LA HIPÓTESIS CINEMÁTICA

Si se aplica el principio de los trabajos virtuales a toda la sección se obtienen los esfuerzos seccionales del modelo, según se indica en la siguiente expresión:

$$\iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \iint_A \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \quad (3-6)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}_s$  es el vector de esfuerzos seccionales (Fig. 3.2):

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \begin{bmatrix} \iint_A \sigma_x \cdot dA \\ \iint_A \alpha \cdot \tau_{xz} \cdot dA \\ \iint_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ \hat{V}_z \\ M_y \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

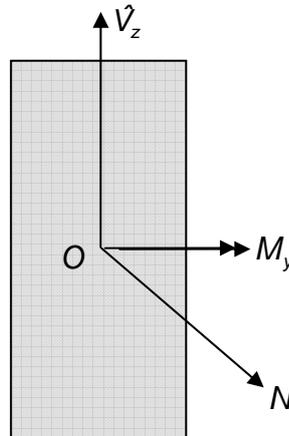


Fig. 3.2 Esfuerzos seccionales

Los esfuerzos seccionales obtenidos coinciden con los de la hipótesis cinemática de Timoshenko exceptuando el esfuerzo cortante. Esto es consecuencia de la inclusión de la función de corrección de cortante.

El comportamiento a nivel sección está gobernado por las siguientes incógnitas: por una parte, el vector de deformaciones seccionales  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ , y por otra, la función de corrección de cortante  $\alpha(z)$ .

Se imponen las tres ecuaciones de equilibrio seccional entre los esfuerzos exteriores  $\boldsymbol{\sigma}_{se}$  e internos  $\boldsymbol{\sigma}_s$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \sigma_{se} \\ \varphi_s &= \sigma_{se} - \sigma_s = 0\end{aligned}\tag{3-8}$$

siendo:

$$\sigma_{se} = \begin{bmatrix} N_e \\ \hat{V}_{ze} \\ M_{ye} \end{bmatrix} \text{ el vector de esfuerzos exteriores aplicado a la sección y}$$

$\varphi_s$  el vector de residuos seccionales, que debe ser nulo cuando se produzca el equilibrio.

La función de corrección se hace depender de una serie de parámetros, que se incluyen en el siguiente vector de corrección de cortante  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ , por lo que:

$$\alpha = \alpha(\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}_r)\tag{3-9}$$

La función  $\alpha$  es totalmente arbitraria; se puede elegir el número de parámetros a incluir en el vector  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ , así como el tipo de interpolación. Ahora bien, la función debe ser continua, derivable y disponer de un número suficiente de parámetros para la interpolación.

El número de parámetros incluidos en el vector de corrección de cortante  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  genera un conjunto de incógnitas a evaluar. Para poder calcularlas, se introduce un número suficiente de condiciones. Se impone un conjunto de ecuaciones de equilibrio longitudinal en partes de la sección. Cada condición se establece tras practicar un corte horizontal en la sección y equilibrar en dirección longitudinal  $x$  la zona afectada por el corte. Se practican tantos cortes como número de componentes contenga el vector de corrección de cortante.

Si se expresa el vector de corrección como  $\boldsymbol{\varepsilon}_r = [\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_{m-1}]^T$ , el número de cortes a practicar debe ser igual a  $m-2$ . En la Fig. 3.3 se muestra una sección en la que se han practicado  $m-2$  cortes entre las coordenadas  $z_2$  y  $z_{m-1}$

La función de corrección de cortante  $\alpha$  debe anularse tanto en la capa superior ( $z_1$ ) como en la inferior de la sección ( $z_m$ ). Esta condición se impone para poder cumplir las condiciones de contorno, ya que la tensión tangencial es nula en los bordes exteriores de las capas extremas. La condición de tensión tangencial nula se cumple directamente anulando la deformación transversal en los bordes extremos a través de la función de corrección de cortante.

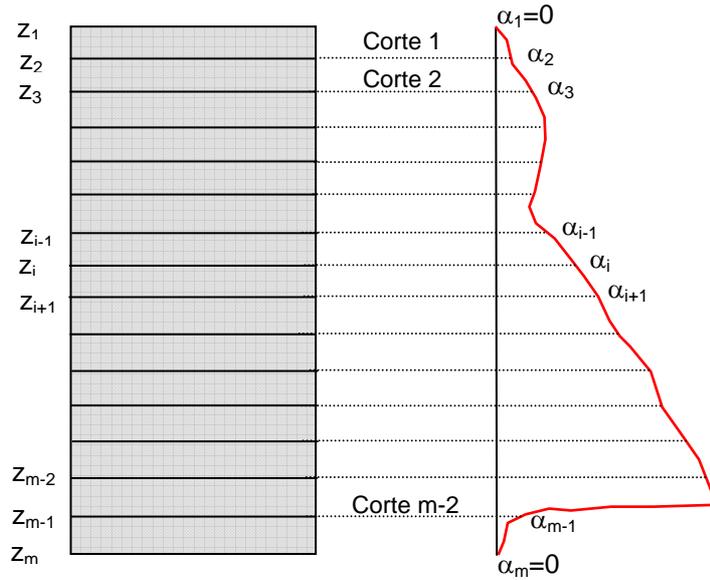


Fig. 3.3 Función de corrección de cortante

Tras practicar un determinado corte en una coordenada  $z_i$ , se considera la porción de sección comprendida entre el corte  $z_i$  y el borde superior  $z_1$ . Es posible obtener el cortante transmitido en cada corte de dos maneras distintas: una de ellas conducirá al que se denomina cortante transmitido por cálculo  $V_{zic}$  y, la otra, al que se denomina cortante por equilibrio longitudinal  $V_{zir}$ .

El cortante transmitido por cálculo  $V_{zic}$ , para un corte de cota  $z_i$ , se obtiene por integración, a lo largo de todo el corte, de las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  calculadas directamente del modelo:

$$V_{zic} = \iint_{A(z_i)} \tau_{xz} \cdot dA \tag{3-10}$$

siendo  $A(z_i)$  el área de la sección comprendida entre las cotas  $z_i$  y  $z_1$

El cortante transmitido por equilibrio longitudinal  $V_{zir}$ , para un corte de cota  $z_i$ , se obtiene por integración, a lo largo de todo el corte, de las tensiones tangenciales  $\tau_{xzi}$  obtenidas por equilibrio longitudinal:

$$V_{zir} = \iint_{A(z_i)} \tau_{xzi} \cdot dA \tag{3-11}$$

A continuación, se indica cómo se calcula la tensión tangencial por equilibrio longitudinal  $\tau_{xzi}$  (Fig. 3.4):

$$\tau_{xzt}(z) = \frac{\iint_{A(z)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dA}{B(z)} \quad (3-12)$$

siendo:

$A(z)$  el área de la sección comprendida entre las cotas  $z$  y  $z_1$

$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$  la variación de la tensión  $\sigma_x$  por unidad de longitud  $x$  (esfuerzo rasante).

$B(z)$  el ancho de la sección a la altura de la coordenada  $z$ .

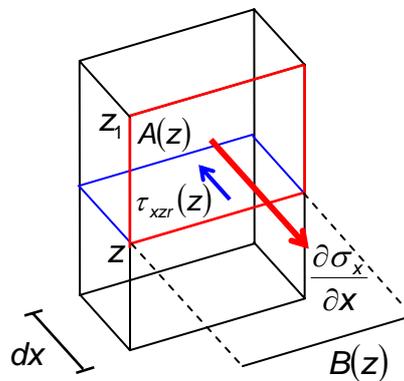


Fig. 3.4 Esfuerzos y tensiones tangenciales rasantes

La variación de la tensión normal por unidad de longitud  $x$  se calcula derivando con respecto a  $x$  la expresión (3-1) tal y como se indica a continuación:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_s} \cdot \frac{\partial \epsilon_s}{\partial x} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \frac{\partial \epsilon_s}{\partial x} \quad (3-13)$$

Si se extrae la primera componente de la ecuación anterior:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \epsilon_x} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial \gamma_{xz}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \frac{\partial \epsilon_s}{\partial x} = [D_{11} \quad D_{12}] \cdot \mathbf{S}^T \cdot \frac{\partial \epsilon_s}{\partial x} \quad (3-14)$$

Se puede observar que las variaciones de las tensiones normales en dirección longitudinal dependen, a su vez, de las variaciones en dirección longitudinal de las deformaciones seccionales.

Para cada corte  $z_i$  practicado se iguala el esfuerzo cortante obtenido por cálculo y por equilibrio longitudinal, es decir:

$$V_{zic} = V_{zir} \quad (3-15)$$

La ecuación de equilibrio (3-15) está expresada en términos de esfuerzos totales. Es posible reformular esta ecuación en términos incrementales. Por lo tanto, se impone la condición de que los incrementos de cortante transmitidos por cálculo y por equilibrio longitudinal sean iguales. Esto se expresa del siguiente modo:

$$\varphi_{ri} = \Delta V_{zir} - \Delta V_{zic} = \iint_{A(z_i)} \Delta \tau_{xzt} \cdot dA - \iint_{A(z_i)} \Delta \tau_{xz} \cdot dA = \iint_{A(z_i)} (\Delta \tau_{xz} - \Delta \tau_{xzt}) \cdot dA \quad (3-16)$$

donde  $\varphi_{ri}$  es el residuo generado de la condición de equilibrio longitudinal tras practicar un corte en la coordenada  $z_i$ . Este residuo debe anularse para verificar el equilibrio longitudinal en el corte practicado. Además, la variación de cortante por equilibrio longitudinal se puede desarrollar como:

$$\Delta V_{zir} = \iint_{A(z_i)} \Delta \tau_{xzt} \cdot dA = \iint_{A(z_i)} \left( \frac{\iint_{A(z)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \epsilon} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \Delta \left( \frac{\partial \epsilon_s}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot dA}{B(z)} \right) \cdot dA \quad (3-17)$$

Si se extiende la ecuación (3-16) a cada uno de los  $m-2$  cortes se obtiene el siguiente vector de residuos:

$$\varphi_r = [\varphi_{r2} \quad \varphi_{r3} \quad \dots \quad \varphi_{r(m-1)}]^T \quad (3-18)$$

Hasta aquí se han planteado un total de 3 ecuaciones correspondientes a las ecuaciones de equilibrio seccionales (3-8) y  $m-2$  ecuaciones de equilibrio longitudinal (3-18) planteadas tras practicar un total de  $m-2$  cortes.

Por otra parte, se tienen 3 incógnitas correspondientes a las deformaciones seccionales  $\epsilon_s$  y  $m-2$  incógnitas correspondientes al vector  $\epsilon_r$ , cuyas componentes se precisan para la definición de la función de corrección de cortante  $\alpha(z)$ .

Por lo tanto, se tiene un sistema de ecuaciones compatible y determinado de orden  $m+1$ , formado por un *sistema 1* de orden 3 y un *sistema 2* de orden  $m-2$ .

### 3.1.3 RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Entre los sistemas 1 y 2 existe un acoplamiento. Sin embargo, se resuelve el sistema de ecuaciones planteado de forma desacoplada. Para soslayar este

inconveniente se mantiene en todo momento el sistema 2 de forma interna. De este modo, se resuelve el sistema 2 de forma completa cada vez que se imponen unas determinadas deformaciones seccionales  $\epsilon_s$ . Esto sucede repetidamente durante el proceso de resolución del sistema 1 cada vez que se lleva a cabo una iteración.

A continuación, se incluyen algunos aspectos relativos al modo en que se resuelven cada uno de los dos sistemas de ecuaciones. Sin embargo, es en el capítulo 5 donde se detalla pormenorizadamente toda la implementación numérica del modelo propuesto y se incluyen los pasos a seguir en la resolución de los dos sistemas.

### 3.1.3.1 Resolución del sistema 1

El proceso numérico de resolución del sistema 1 precisa de la matriz de rigidez tangente de este sistema tal y como se expone a continuación:

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial \epsilon_s} = D_s = \frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \left[ \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA \right] = \iint_A \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \epsilon_s} \cdot dA = \iint_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot dA \quad (3-19)$$

### 3.1.3.2 Resolución del sistema 2

Análogamente al subapartado anterior, se deduce la matriz de rigidez tangente del sistema 2. Se obtiene, en primer lugar, la derivada de cada componente i:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial \epsilon_r} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon_r} \iint_{A(z_i)} (\Delta \tau_{x_zr} - \Delta \tau_{xz}) \cdot dA = \iint_{A(z_i)} \left( \frac{\partial \Delta \tau_{x_zr}}{\partial \epsilon_r} - \frac{\partial \Delta \tau_{xz}}{\partial \epsilon_r} \right) \cdot dA = \\ &= \iint_{A(z_i)} \left( \frac{\partial (\tau_{x_zr} - \tau_{xzr0})}{\partial \epsilon_r} - \frac{\partial (\tau_{xz} - \tau_{xz0})}{\partial \epsilon_r} \right) \cdot dA = \iint_{A(z_i)} \left( \frac{\partial \tau_{x_zr}}{\partial \epsilon_r} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \epsilon_r} \right) \cdot dA \end{aligned}$$

siendo  $\tau_{xz0}, \tau_{x_zr0}$  las tensiones tangenciales por cálculo y por equilibrio longitudinal iniciales.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \epsilon_r} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \gamma_{xz}} \cdot \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial \epsilon_r} = \gamma_{0xz} \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \gamma_{xz}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon_r}$$

$$\frac{\partial \tau_{x_zr}}{\partial \epsilon_r} = \frac{1}{B(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon_r} \iint_{A(z_i)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dA = \frac{1}{B(z)} \cdot \iint_{A(z_i)} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial \epsilon_r} \cdot dA$$

$$\frac{\partial \tau_{xzt}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} = \frac{1}{B(z)} \cdot \iint_{A(z_i)} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial \gamma_{xz}} \cdot \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} \cdot dA \approx \mathbf{0}_{1 \times (m-1)}$$

y dado que, para un nivel de carga dado, es razonable despreciar la segunda derivada de la tensión del material con respecto a sus deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial \gamma_{xz}} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial \gamma_{xz} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}{\partial x} = \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial \gamma_{xz} \partial \boldsymbol{\varepsilon}_x} \rightarrow 0 \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial \gamma_{xz}^2} \rightarrow 0 \right] \cdot \mathbf{S}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}{\partial x} \approx 0$$

Por lo tanto, la rigidez tangente correspondiente a la componente  $i$  del sistema 2 se puede aproximar mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} = - \iint_{A(z_i)} \gamma_{0,xz} \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \gamma_{xz}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} \cdot dA \quad i=2 \dots m-1 \quad (3-20)$$

### 3.1.3.3 Parámetros de deformación necesarios

Los parámetros de deformación que intervienen en el cálculo seccional son el vector de deformaciones seccionales  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$  y el vector de corrección de cortante  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ . Según (3-14), los esfuerzos rasantes dependen también de las variaciones con respecto a la dirección  $x$  del vector de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ .

El modelo propuesto se ha formulado sin tener en cuenta explícitamente el vector  $\Delta(\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x)$  que se necesita en (3-17).

El vector incremento de las variaciones con respecto a  $x$  de las deformaciones seccionales se obtiene despejando de la ecuación (3-19) como sigue:

$$\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_s^{-1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \cdot \partial \boldsymbol{\sigma}_s \rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_s^{-1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_s}{\partial x} \rightarrow \Delta \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}{\partial x} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_s^{-1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \cdot \Delta \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_s}{\partial x} \right) \quad (3-21)$$

Se consideran las siguientes simplificaciones: se desprecian las variaciones del esfuerzo axial y del cortante con respecto al eje  $x$ .

Además, la variación del esfuerzo flector en dirección longitudinal, o bien vector de esfuerzos rasantes, es igual al esfuerzo cortante aplicado. Esto lleva a la siguiente expresión expresada en términos totales e incrementales:

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{V}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial x} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{V}_z \end{bmatrix} \rightarrow \Delta \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} \right) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{V}_z \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

En un cálculo seccional, estas simplificaciones resultan suficientes en la mayor parte de las situaciones. En el caso de que se tenga una variación de esfuerzos diferente y conocida es posible corregir este vector. A partir del vector de esfuerzos rasantes se puede obtener la distribución de tensiones tangenciales por equilibrio longitudinal.

Además, en el supuesto de practicar un corte que cubra toda la sección, y tras realizar el correspondiente equilibrio longitudinal, se deduce que:

$$\iint_A \tau_{xz} \cdot dA = V_z = \iint_A \tau_{xzt} \cdot dA \quad (3-23)$$

De la anterior expresión, se desprende que la tradicional definición del esfuerzo cortante según TBT es igual al esfuerzo cortante calculado según la teoría de vigas con corrección de cortante planteada. Esta afirmación es cierta sí y solo sí se imponen las ecuaciones de equilibrio longitudinal y será más exacta cuanto mayor sea el número de cortes que se practique.

Esta relación resulta de gran utilidad, puesto que proporciona un sentido físico completo a la definición del esfuerzo cortante (Fig. 3.5). Además, la adaptación de elementos finitos formulados según la teoría clásica de Timoshenko a la nueva propuesta es directa. Por lo tanto, se puede decir que:

$$V_z = \hat{V}_z \quad (3-24)$$

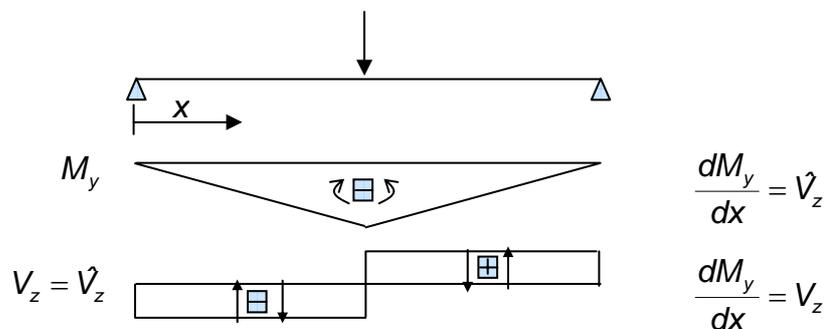


Fig. 3.5 Significado físico del esfuerzo cortante

### 3.2 MODELO GENERAL DE CORRECCIÓN DE CORTANTE

Se presenta una metodología general con la que definir la función de corrección de cortante  $\alpha(z)$ . Se supone que se realizan sobre la sección un total de  $m-2$  cortes según se ha indicado previamente en la Fig. 3.3.

Los cortes practicados permiten definir un conjunto de  $m-1$  tramos, tal y como se indica en la Fig. 3.6. Se define para cada uno de los tramos  $T_i$  una función de interpolación  $\alpha^i(z, \boldsymbol{\varepsilon}_r)$ .

La interpolación se hace en función de la coordenada  $z$  y de las componentes del vector de corrección  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ . En este caso, cada una de las componentes del vector  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  representa el valor de la función  $\alpha$  para la coordenada  $z$  de cada corte practicado. Además, se impone que la función se anula en los extremos de la sección para cumplir con las condiciones de contorno.

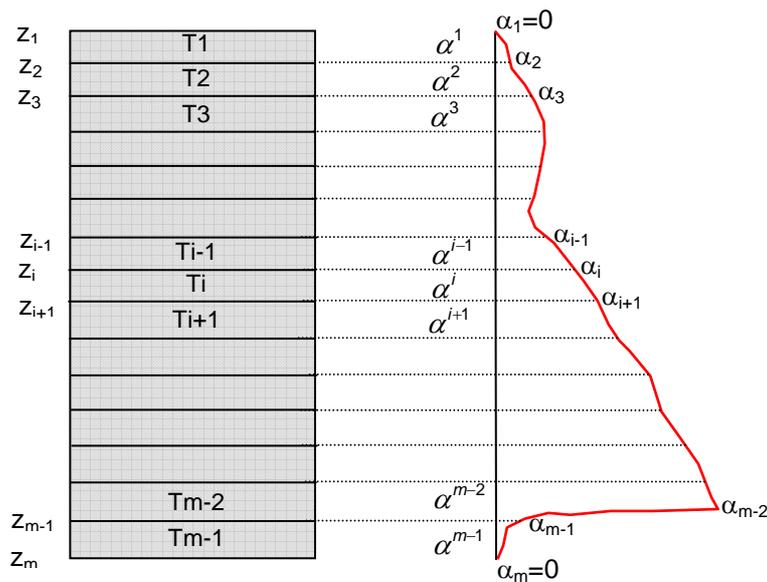


Fig. 3.6 Cortes practicados. Delimitación de tramos

A continuación, se proponen dos tipos de interpolación para este modelo general de corrección de cortante: uno basado en funciones lineales y otro en funciones parabólicas.

#### 3.2.1 INTERPOLACIÓN LINEAL

La interpolación en el tramo  $T_i$ , correspondiente a dos cortes consecutivos  $z_i$  y  $z_{i+1}$ , se hace depender exclusivamente de los coeficientes  $\alpha_i$  y  $\alpha_{i+1}$ . Además, para

plantear de forma consistente esta interpolación se emplean las funciones de forma lineales  $N_1$  y  $N_2$ , que están definidas de forma adimensional, tal y como se indica en la Fig. 3.7.

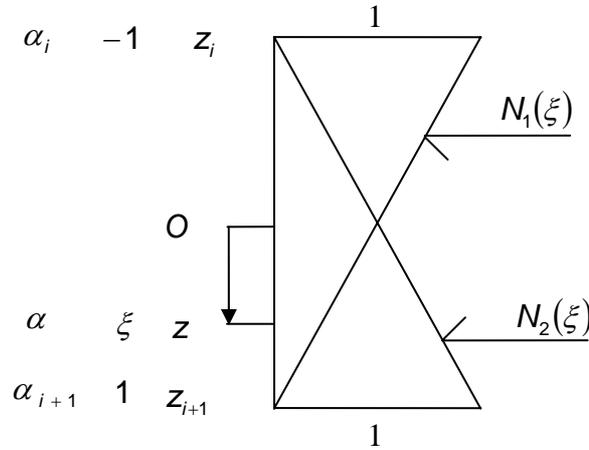


Fig. 3.7 Interpolación lineal de la función de corrección de cortante

$\xi = 1 - 2 \cdot \frac{z - z_{i+1}}{z_i - z_{i+1}}$  es la coordenada adimensional correspondiente a la coordenada  $z$ , de valor comprendido entre  $-1$  y  $1$ .

Las expresiones que adoptan las funciones de forma son:

$$N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad N_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \quad (3-25)$$

y la función de interpolación para cada tramo  $T_i$  queda del siguiente modo:

$$\alpha^i(z, \boldsymbol{\varepsilon}_r) = N_1(\xi) \cdot \alpha_i + N_2(\xi) \cdot \alpha_{i+1} = \mathbf{L}_1^i(\xi) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r \quad i = 2 \dots m - 2 \quad (3-26)$$

siendo:  $\mathbf{L}_1^i(\xi) = [0 \quad \dots \quad N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad \dots \quad 0]$   $i = 2 \dots m - 2$

Este vector tiene sólo dos componentes no nulas (columnas  $i$  e  $i+1$ ) para el punto  $z$  del tramo  $i$  considerado.

En los tramos extremos,  $T_1$  y  $T_{m-1}$ , la función de interpolación queda del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \alpha^1(z, \boldsymbol{\varepsilon}_r) &= N_2(\xi) \cdot \alpha_1 = \mathbf{L}_1^1(\xi) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r \\ \mathbf{L}_1^1(\xi) &= [N_2(\xi) \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \\ \alpha^{m-1}(z, \boldsymbol{\varepsilon}_r) &= N_1(\xi) \cdot \alpha_{m-1} = \mathbf{L}_1^{m-1}(\xi) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r \\ \mathbf{L}_1^{m-1}(\xi) &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad N_1(\xi)] \end{aligned} \quad (3-27)$$

La derivada de la función de interpolación con respecto al vector de corrección  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  coincide con la matriz  $\mathbf{L}_1^i$ , ya que:

$$\frac{\partial \alpha^i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} = \mathbf{L}_1^i(\boldsymbol{\xi}) \quad i = 1..m-1 \quad (3-28)$$

### 3.2.2 INTERPOLACIÓN PARABÓLICA

En este caso se propone una interpolación parabólica desde el tramo 1 al tramo  $m-2$ . El tramo  $m-1$  se finaliza con una interpolación lineal. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \alpha^i(\mathbf{z}) &= a_i \cdot \mathbf{z}^2 + b_i \cdot \mathbf{z} + c_i \quad i = 1..m-2 \\ \alpha^{m-1}(\mathbf{z}) &= b_{m-1} \cdot \mathbf{z} + c_{m-1} \end{aligned} \quad (3-29)$$

El número de incógnitas es igual a  $3m-4$ . Para que el sistema sea compatible determinado se deben plantear el mismo número de ecuaciones. Para ello, se aplican condiciones de continuidad y derivada continua en cada tramo, lo que proporciona un total de  $2(m-1)+m-2=3m-4$  ecuaciones, igual al número de incógnitas.

$$\begin{aligned} \alpha^i(\mathbf{z}_i) &= \alpha_i \\ \alpha^i(\mathbf{z}_{i+1}) &= \alpha_{i+1} \quad i=1..m-1 \\ \frac{d}{dz}(\alpha^i(\mathbf{z}_i)) &= \frac{d}{dz}(\alpha^{i+1}(\mathbf{z}_i)) \quad i=1..m-2 \end{aligned} \quad (3-30)$$

Si se sustituyen las anteriores condiciones en las funciones:

$$\begin{aligned} a_i \cdot \mathbf{z}_i^2 + b_i \cdot \mathbf{z}_i + c_i &= \alpha_i \quad i = 1..m-2 \\ a_i \cdot \mathbf{z}_{i+1}^2 + b_i \cdot \mathbf{z}_{i+1} + c_{i+1} &= \alpha_{i+1} \quad i = 1..m-2 \\ 2 \cdot a_i \cdot \mathbf{z}_i + b_i &= 2 \cdot a_{i+1} \cdot \mathbf{z}_{i+1} + b_{i+1} \quad i = 1..m-3 \\ b_{m-1} \cdot \mathbf{z}_{m-1} + c_{m-1} &= \alpha_{m-1} \\ b_{m-1} \cdot \mathbf{z}_m + c_{m-1} &= \alpha_m \\ 2 \cdot a_{m-2} \cdot \mathbf{z}_{m-1} + b_{m-2} &= b_{m-1} \end{aligned} \quad (3-31)$$

Expresando matricialmente las anteriores ecuaciones se tiene que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (3-32)$$

siendo:

$$\mathbf{x} = [a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad \dots \quad a_{m-2} \quad b_{m-2} \quad c_{m-2} \quad b_{m-1} \quad c_{m-1}]^T$$

$$\mathbf{y} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad 0 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 0 \quad \dots \quad \alpha_{m-2} \quad \alpha_{m-1} \quad 0 \quad \alpha_{m-1} \quad \alpha_m]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} z_1^2 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2^2 & z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2z_1 & 1 & 0 & -2z_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2^2 & z_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_3^2 & z_3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z_{m-2}^2 & z_{m-2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z_{m-1}^2 & z_{m-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2z_{m-2} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & z_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & z_m & 1 \end{bmatrix}$$

donde se puede obtener el vector  $\mathbf{x}$ , que permite definir todos los coeficientes correspondientes a cada una de las funciones de interpolación  $\alpha^i$ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} \tag{3-33}$$

A su vez, se puede obtener el vector  $\mathbf{x}$  directamente en función del vector  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  reorganizando la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$ . Para conseguirlo, se eliminan las columnas en las que la correspondiente componente del vector  $\mathbf{y}$  es nula, y se suman las filas en las que las componentes del vector  $\mathbf{y}$  son iguales. Todo ello da lugar a una nueva matriz  $\mathbf{C}$  de dimensión  $3m-4 \times m-1$ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r \tag{3-34}$$

Finalmente, la función de interpolación en cada uno de los tramos se puede expresar como:

$$\alpha^i(z, \boldsymbol{\varepsilon}_r) = [\mathbf{C}_{(3i-2,:)} \cdot z^2 + \mathbf{C}_{(3i-1,:)} \cdot z + \mathbf{C}_{(3i,:)}] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{L}_2^i(z) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r \quad i=1..m-2$$

$$\alpha^{m-1}(z, \boldsymbol{\varepsilon}_r) = [\mathbf{C}_{(3m-5,:)} \cdot z + \mathbf{C}_{(3m-4,:)}] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{L}_2^{m-1}(z) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r \tag{3-35}$$

La derivada de la función de interpolación es igual a:

$$\frac{\partial \alpha^i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} = \mathbf{L}_2^i(\xi) \quad i = 1..m-1 \tag{3-36}$$

### 3.3 MODELO PARÁBOLA-RECTA

Una función de corrección parábola-recta se propone para ser aplicada a secciones rectangulares de hormigón armado sometidas a axil, flexión y cortante constituyendo el denominado modelo parábola-recta.

Antes de que aparezca la fisuración por flexión se puede asumir con suficiente exactitud un comportamiento elástico y lineal del material. En estos casos, la función de corrección de cortante que se puede adoptar con el fin de minimizar el desequilibrio longitudinal es (Fig. 3.8):

$$\alpha(z) = \frac{5}{4H^2} \cdot (H^2 - z^2) \quad (3-37)$$

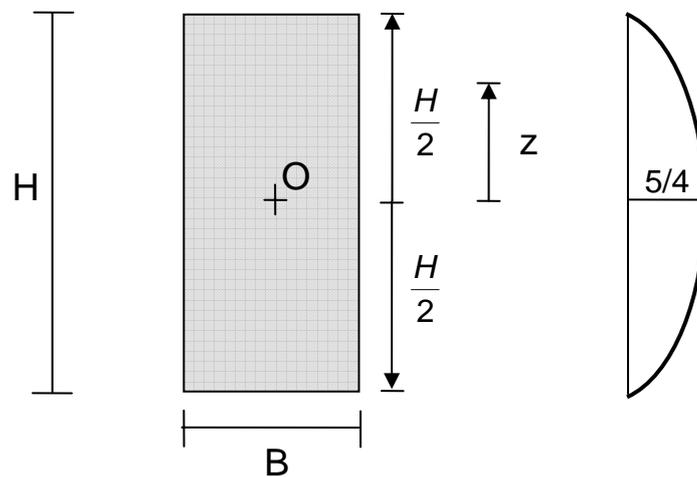


Fig. 3.8 Función de corrección sección rectangular de hormigón armado sin fisurar

Cuando los esfuerzos exteriores fisuran la sección generan dos zonas con valores de rigidez a cortante muy distintas. La parte sin fisurar presenta una mayor rigidez a cortante que la parte fisurada.

La parte de la sección sin fisurar se comporta básicamente como un material elástico y lineal. Por este motivo, se va a suponer que en esta zona la función de corrección de cortante adopta una forma parabólica. Ahora bien, se trata de una parábola que se anula en la fibra superior y no cierra en su parte inferior. Se considera, de forma aproximada, que la zona fisurada acaba a la altura de la fibra neutra ( $x$ ) de la sección (Fig. 3.9).

En la parte fisurada y hasta la posición de la armadura longitudinal traccionada ( $d$ ) se supone que la función de corrección es una recta.

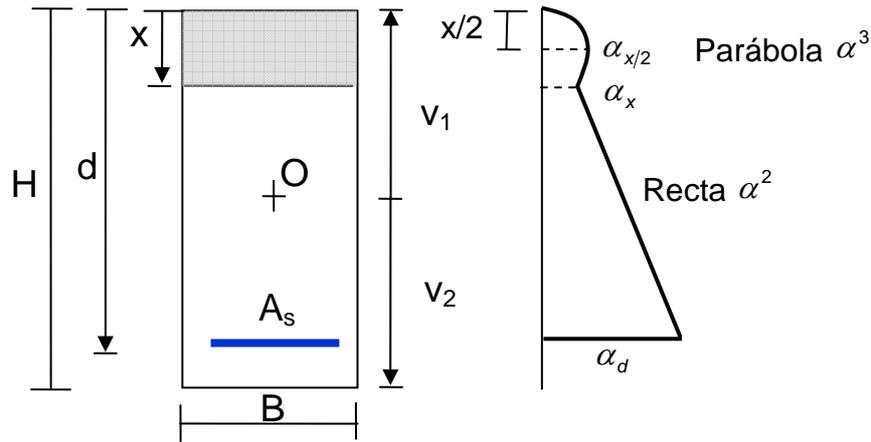


Fig. 3.9 Función de corrección de cortante. Modelo parábola-recta

A continuación, se presenta la formulación correspondiente al modelo parábola-recta suponiendo que siempre fisura la cara inferior. El caso con fisuración en cara superior se trataría de manera análoga.

### 3.3.1 FORMULACIÓN ANALÍTICA DE LA FUNCIÓN PARÁBOLA-RECTA

En primer lugar, se fija la posición de la fibra neutra  $x$ :

$$\varepsilon_x = 0 = \varepsilon_0 + (v_1 - x) \cdot c_y \rightarrow x = v_1 + \frac{\varepsilon_0}{c_y} \quad (3-38)$$

El vector de corrección de cortante se define en función de los tres parámetros siguientes:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \begin{bmatrix} \alpha_{x/2} \\ \alpha_x \\ \alpha_d \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

y se define la función de corrección de cortante por tramos:

$$\alpha(z, \boldsymbol{\varepsilon}_r) = \begin{cases} \alpha^1 = 0 \rightarrow z \in [v_2 & v_1 - d[ \\ \alpha^2 = \text{Recta} \rightarrow z \in [v_1 - d & v_1 - x[ \\ \alpha^3 = \text{Parabola} \rightarrow z \in [v_1 - x & v_1] \end{cases}$$

Se presenta ahora la formulación analítica correspondiente a cada tramo.

- *Ecuación tramo recto*  $\alpha^2 \rightarrow z \in [v_1 - d \quad v_1 - x[$

Se imponen los dos puntos de paso siguientes:

$$\alpha^2(v_1 - x) = \alpha_x \quad y \quad \alpha^2(v_1 - d) = \alpha_d$$

Por lo que:

$$\alpha^2(z, \epsilon_r) = \frac{\alpha_d - \alpha_x}{x - d} (z + x - v_1) + \alpha_x \quad (3-40)$$

- *Ecuación tramo parabólico*  $\alpha^3 \rightarrow z \in [v_1 - x \quad v_1]$

La función parabólica se pone en función de tres parámetros como se indica en la siguiente expresión:

$$\alpha^3 = p_1 \cdot z^2 + p_2 \cdot z + p_3 \quad (3-41)$$

Para evaluar estos parámetros se imponen las siguientes tres condiciones que se deducen de la Fig. 3.9.

$$\alpha^3(v_1) = 0 \quad \alpha^3\left(v_1 - \frac{x}{2}\right) = \alpha_{x/2} \quad y \quad \alpha^3(v_1 - x) = \alpha_x \quad (3-42)$$

Sustituyendo (3-42) en (3-41) y agrupando matricialmente se tiene que:

$$\begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 & 1 \\ \left(v_1 - \frac{x}{2}\right)^2 & v_1 - \frac{x}{2} & 1 \\ (v_1 - x)^2 & v_1 - x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_{x/2} \\ \alpha_x \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{p} = \boldsymbol{\alpha}_p \rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{A}^{*-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}_p$$

dado que:

$$\mathbf{A}^{*-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}^*|} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} & \Delta_{31} \\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} & -\Delta_{32} \\ \Delta_{13} & -\Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

Se deduce que los coeficientes  $\mathbf{p}$  de la parábola son:

$$p_1 = \frac{-\alpha_{x/2} \cdot \Delta_{21} + \alpha_x \cdot \Delta_{31}}{|\mathbf{A}^*|} \quad p_2 = \frac{\alpha_{x/2} \cdot \Delta_{22} - \alpha_x \cdot \Delta_{32}}{|\mathbf{A}^*|} \quad p_3 = \frac{-\alpha_{x/2} \cdot \Delta_{23} + \alpha_x \cdot \Delta_{33}}{|\mathbf{A}^*|} \quad (3-43)$$

Las expresiones de las derivadas de la función con respecto a los parámetros de los que depende se deducen a continuación:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} = \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_d} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_x} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{x/2}} \right] \quad (3-44)$$

y desarrollando las expresiones correspondientes se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha^1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} &= [0 \quad 0 \quad 0] \\ \frac{\partial \alpha^2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} &= \left[ \frac{z+x-v_1}{x-d} \quad \frac{-z+v_1-d}{x-d} \quad 0 \right] \\ \frac{\partial \alpha^3}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_r} &= \left[ 0 \quad \frac{\Delta_{31} \cdot z^2 - \Delta_{32} \cdot z + \Delta_{33}}{|\mathbf{A}^*|} \quad \frac{-\Delta_{21} \cdot z^2 + \Delta_{22} \cdot z - \Delta_{23}}{|\mathbf{A}^*|} \right] \end{aligned} \quad (3-45)$$

Para plantear correctamente el sistema completo de ecuaciones de equilibrio es suficiente con practicar tres cortes en la sección. Los cortes seleccionados aparecen en la Fig. 3.10 y corresponden a la posición de la fibra neutra a una longitud igual a la mitad de la fibra neutra y a la posición de la fibra inferior. La posición de los cortes podría ser distinta, pero se estima que esta propuesta puede ser bastante representativa del comportamiento general de la sección. Se trata de posiciones importantes que permiten captar el cortante total transmitido (corte 1), o bien, el cortante transmitido en la zona sin fisurar (cortes 2 y 3).

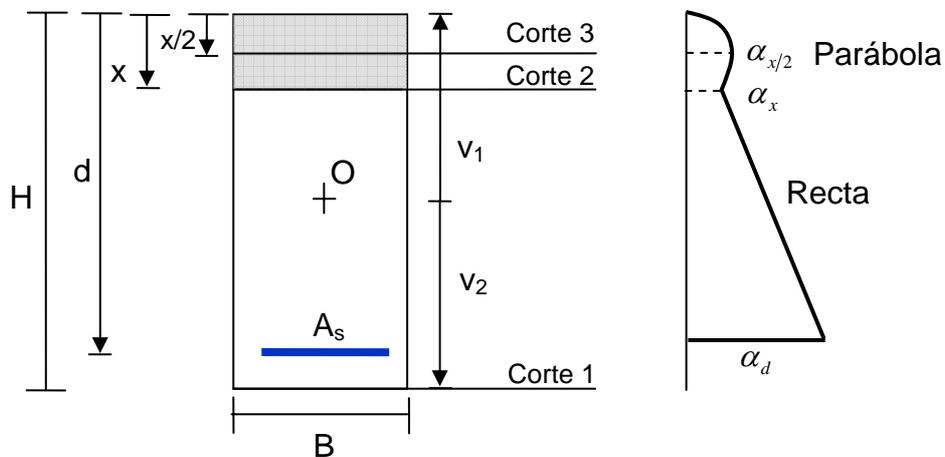


Fig. 3.10 Cortes practicados en el modelo parábola-recta

### 3.4 IMPLEMENTACIÓN A NIVEL ELEMENTO

Se va llevar a cabo la implementación del cálculo seccional en un elemento 1D (Fig. 3.11) que sea capaz de integrar el comportamiento descrito en el apartado 3.1 mediante la hipótesis cinemática de corrección de cortante. En el cálculo a nivel elemento se consideran exclusivamente las deformaciones seccionales  $\varepsilon_s$  mientras que las deformaciones de corrección de cortante  $\varepsilon_r$  se utilizan internamente en la sección. Por lo tanto, la formulación a nivel elemento es similar a la del elemento viga de Timoshenko.

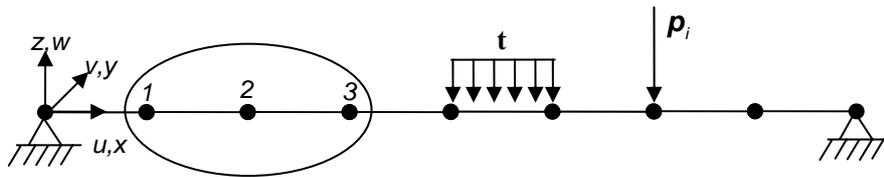


Fig. 3.11 Discretización de elemento viga en elementos finitos 1D

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta_y \end{bmatrix}$  es el vector de desplazamientos en cualquier punto de la barra.

Los vectores unitarios se toman como sigue:

$$\mathbf{e}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T \quad \mathbf{e}_2 = (0 \ 1 \ 0)^T \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales a lo largo de todo el elemento se debe cumplir que el trabajo generado por las fuerzas internas debe ser igual al trabajo producido por las fuerzas externas:

$$W_{int} = W_{ext} \tag{3-46}$$

$$W_{int} = \iiint_V (\delta\varepsilon_x \cdot \sigma_x + \delta\gamma_{xz} \cdot \tau_{xz}) \cdot dV \tag{3-47}$$

Las variaciones de las deformaciones se pueden calcular como:

$$\delta\varepsilon_x = \delta\varepsilon_0 + \mathbf{z} \cdot \delta\mathbf{c}_y = \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \mathbf{z} \cdot \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

$$\delta\gamma_{xz} = \alpha \cdot \delta\gamma_{0xz} = \alpha \cdot \delta \left( \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (3-47):

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left( \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \cdot \sigma_x + z \cdot \delta \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \cdot \sigma_x + \alpha \cdot \delta \left( \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right) \cdot dV = \\ & \int_0^L \left[ \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \cdot \iint_A \sigma_x \cdot dA + \delta \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \cdot \iint_A z \cdot \sigma_x \cdot dA + \delta \left( \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \cdot \iint_A \alpha \cdot \tau_{xz} \cdot dA \right] \cdot dl = \quad (3-48) \\ & = \int_0^L \left[ \delta \varepsilon_0 \cdot N + \delta c_y \cdot M_y + \delta \gamma_{0xz} \cdot V_z \right] \cdot dl = \int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl \end{aligned}$$

Por otra parte, el trabajo ejercido por las fuerzas exteriores es igual a:

$$W_{ext} = \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} \cdot dl + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{p}_i \quad (3-49)$$

siendo:

$\mathbf{t} = [t_x \quad t_z \quad m_y]^T$  el vector de fuerzas exteriores repartidas en el elemento y

$\mathbf{p}_i = [P_{x_i} \quad P_{z_i} \quad M_{y_i}]^T$  el vector fuerzas exteriores puntuales en el elemento

Por lo tanto, el principio de los trabajos virtuales se puede formular a través de una integral a lo largo de la directriz del elemento como se indica a continuación:

$$\int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl = \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} \cdot dl + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{p}_i \quad (3-50)$$

### 3.5 DISCRETIZACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS

#### 3.5.1 ELEMENTO FINITO PARABÓLICO DE TIMOSHENKO

Se va considerar un elemento finito 1D de 3 nodos con 3 grados de libertad por nodo. Se sigue una formulación similar a la llevada a cabo por Oñate (1992) [48]. Como base de la formulación se toman los desplazamientos nodales en cada uno de los tres nodos  $\mathbf{r}_i^{(e)}$ . En cada nodo, se tienen en cuenta dos desplazamientos y un giro tal y como aparece en la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_{y_i} \end{bmatrix} \quad i=1,2,3 \quad (3-51)$$

Los desplazamientos de un punto cualquiera de la directriz del elemento se obtienen a partir de tres funciones de interpolación cuadráticas mediante las siguientes ecuaciones (Fig. 3.12):

$$\begin{aligned} u(\xi) &= N_1(\xi) \cdot u_1 + N_2(\xi) \cdot u_2 + N_3(\xi) \cdot u_3 \\ w(\xi) &= N_1(\xi) \cdot w_1 + N_2(\xi) \cdot w_2 + N_3(\xi) \cdot w_3 \\ \theta_y(\xi) &= N_1(\xi) \cdot \theta_{y1} + N_2(\xi) \cdot \theta_{y2} + N_3(\xi) \cdot \theta_{y3} \end{aligned} \quad (3-52)$$

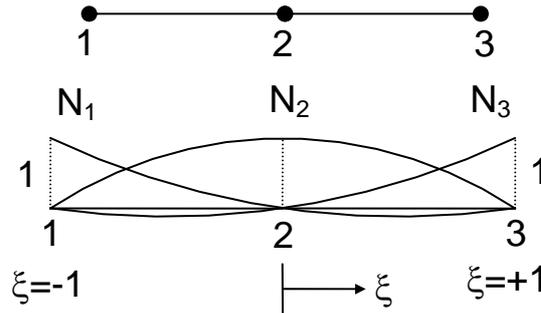


Fig. 3.12 Elemento finito de 3 nodos. Funciones de interpolación parabólicas

siendo las funciones de forma:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\xi - 1) \quad N_2(\xi) = -(\xi + 1) \cdot (\xi - 1) \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\xi + 1) \quad (3-53)$$

y  $\xi = \frac{2}{L} \cdot \left( x - \frac{L}{2} \right)$  con  $\xi \in [-1 \ 1]$ , la coordenada intrínseca empleada para

representar cualquier punto de integración del elemento.

La expresión anterior se puede expresar en forma matricial como sigue:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 N_i \cdot \mathbf{I}_3 \cdot \mathbf{r}_i^{(e)} \quad (3-54)$$

donde  $\mathbf{I}_3$  es la matriz identidad de orden 3.

A continuación, se obtienen las ecuaciones cinemáticas que relacionan las deformaciones seccionales con los desplazamientos nodales. Para ello, se sustituyen las funciones interpoladas de los desplazamientos en la ecuación (3-2).

Por lo tanto:

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^3 N_i \cdot u_i \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot u_i$$

$$\gamma_{0xz} = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 N_i \cdot \theta_i + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^3 N_i \cdot w_i \right) = \sum_{i=1}^3 N_i \cdot \theta_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot w_i$$

$$c_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^3 N_i \cdot \theta_{yi} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \theta_{yi} \quad (3-55)$$

Si se agrupan los tres vectores de desplazamientos nodales en un solo vector, se puede deducir la matriz de deformaciones del elemento **B** que relaciona las deformaciones seccionales con los desplazamientos.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}^{(e)} \quad (3-56)$$

siendo:

$$\mathbf{r}^{(e)} = \left[ \mathbf{r}_1^{(e)} \quad \mathbf{r}_2^{(e)} \quad \mathbf{r}_3^{(e)} \right]^T \text{ el vector general de desplazamientos nodales.}$$

La matriz de deformaciones se obtiene como la composición de tres submatrices con la formulación que aparece en las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] \quad (3-57)$$

donde:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & N_i \\ 0 & 0 & \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

$$\frac{\partial N_i(\xi)}{\partial x} = \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi}$$

$$\text{asumiendo que: } \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} = \frac{1}{J}$$

$$\frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} = \xi - \frac{1}{2} \quad \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} = -2 \cdot \xi \quad \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} = \xi + \frac{1}{2}$$

Por otra parte, se pueden obtener las variaciones de las deformaciones generalizadas de la sección en la dirección del elemento. Estas expresiones se deducen derivando la ecuación (3-56).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] \cdot \mathbf{r}^{(e)} \right) = \left[ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \mathbf{B}_3}{\partial \mathbf{x}} \right] \cdot \mathbf{r}^{(e)} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{r}^{(e)} \quad (3-59)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J^2} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J^2} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} & \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J^2} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi^2} = 1 \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 N_3}{\partial \xi^2} = 1$$

Una vez obtenida la matriz de deformaciones se calcula la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales del elemento. Si se opera sobre la ecuación (3-50) y sustituyendo en la misma las deformaciones seccionales a partir de la ecuación (3-56) se tiene que:

$$\int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl = \int_0^L \delta \mathbf{r}^{(e)T} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl = \delta \mathbf{r}^{(e)T} \cdot \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl = \delta \mathbf{r}^{(e)T} \cdot \mathbf{f}_i^{(e)} \quad (3-60)$$

donde  $\mathbf{f}_i^{(e)}$  es el vector de fuerzas nodales internas del elemento.

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl \quad (3-61)$$

Ya por último, se procede a derivar las fuerzas nodales internas con respecto al vector de desplazamientos nodales y se obtiene la matriz de rigidez del elemento.

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^{(e)}}{\partial \mathbf{r}^{(e)}} = \frac{\int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \partial \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl}{\partial \mathbf{r}^{(e)}} = \frac{\int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_s \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s \cdot dl}{\partial \mathbf{r}^{(e)}} = \frac{\int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{r}^{(e)} \cdot dl}{\partial \mathbf{r}^{(e)}}$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{B} \cdot dl \quad (3-62)$$

### 3.5.2 VECTOR DERIVADA DE DEFORMACIONES SECCIONALES

La formulación del modelo teórico de corrección de cortante precisa de la evaluación del vector  $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x$ . En realidad se necesita evaluar el vector  $\Delta(\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x)$ . Se pueden seguir dos caminos para evaluarlo. La exposición se plantea para la evaluación del vector  $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x$ . El caso del vector  $\Delta(\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x)$  es totalmente análogo.

Un primer camino (camino 1) consiste en derivar  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$  expresado en función de la matriz de deformaciones  $\mathbf{B}$  y del vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{r}$ , según se indica en la ecuación (3-59). La interpolación del elemento finito anterior permite las siguientes aproximaciones en relación con las deformaciones seccionales: (1)  $\varepsilon_0$  y  $c_y$  se interpolan con funciones lineales, y sus derivadas  $\partial \varepsilon_0 / \partial x$  y  $\partial c_y / \partial x$  adoptan valores constantes para todo el elemento; (2)  $\gamma_{0xz}$  se interpola de forma parabólica, y su derivada  $\partial \gamma_{0xz} / \partial x$  se aproxima linealmente.

Un segundo camino (camino 2) para obtener  $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x$  consiste en mantener este vector interno en la formulación seccional y evaluarlo según la ecuación (3-21). El hecho de seguir este camino 2 requiere asumir la hipótesis de que la variación del axil y el cortante tienen que ser cero a lo largo del elemento. Si se evalúa de esta forma, el vector  $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x$  está desacoplado con respecto a la formulación a nivel elemento y no se necesita evaluarlo a este nivel. Además, por el camino 2 y dado que en un elemento se integra generalmente más de una sección, se tiene más de un valor para el vector  $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x$ . Por lo general, este vector varía para cada sección considerada.

En principio los dos caminos proporcionan resultados diferentes. Por ejemplo, las componentes 1 y 3 del vector  $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x$  son siempre constantes según el camino 1 y, en principio, variables por el camino 2. En este trabajo se sigue el camino 2.

Aunque existe desacoplamiento del vector  $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x$  con respecto de la formulación del elemento, se ha optado por aumentar el grado de interpolación del elemento finito.

Por ello, en el apartado 3.5.3, se formula un elemento finito basado en la hipótesis cinemática de Timoshenko con funciones de interpolación cúbicas. Mediante este nuevo elemento todas las componentes del vector  $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x$  son variables a lo largo de la directriz del elemento finito. Se prueban las dos

formulaciones con el objetivo de verificar que realmente se produce el desacoplamiento del vector  $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x$  con respecto a la formulación del elemento finito.

### 3.5.3 ELEMENTO FINITO CÚBICO DE TIMOSHENKO

Ahora se tiene en cuenta un elemento finito 1D de 4 nodos con 3 grados de libertad por nodo. En cada nodo se consideran dos desplazamientos y un giro:

$$\mathbf{r}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad i=1,2,3,4 \quad (3-63)$$

Los desplazamientos de un punto cualquiera de la directriz se obtienen con tres funciones de interpolación cúbicas, según muestra la Fig. 3.13 y las siguientes ecuaciones:

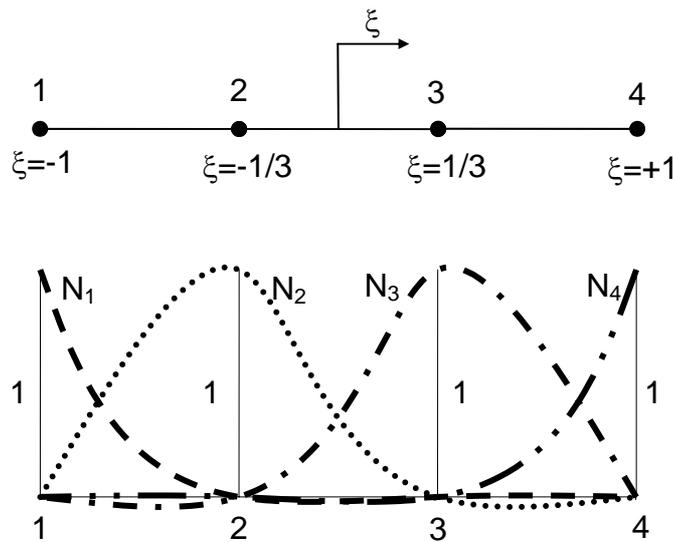


Fig. 3.13 Elemento Finito de 4 nodos. Funciones de interpolación cúbicas

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot \mathbf{I}_4 \cdot \mathbf{r}_i^{(e)} \quad (3-64)$$

donde  $\mathbf{I}_4$  es la matriz identidad de orden 4 y siendo las funciones de forma:

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \left( \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \quad i=1,2,3,4 \quad (3-65)$$

Desarrollando la expresión anterior se deduce que:

$$N_1(\xi) = -\frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \cdot \left( \xi - \frac{1}{3} \right) \cdot (\xi - 1) \quad N_2(\xi) = \frac{27}{16} \cdot (\xi + 1) \cdot \left( \xi - \frac{1}{3} \right) \cdot (\xi - 1)$$

$$N_3(\xi) = -\frac{27}{16} \cdot (\xi + 1) \cdot \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \cdot (\xi - 1) \quad N_4(\xi) = \frac{9}{16} \cdot (\xi + 1) \cdot \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \cdot \left( \xi - \frac{1}{3} \right)$$

Las ecuaciones cinemáticas que relacionan las deformaciones seccionales con los desplazamientos nodales se obtienen a continuación:

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot u_i$$

$$\gamma_{0xz} = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot \theta_i + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot w_i$$

$$c_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \theta_{yi} \quad (3-66)$$

Reagrupando los desplazamientos nodales en un solo vector, se obtiene la matriz de deformaciones **B** de este elemento:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}^{(e)} \quad (3-67)$$

siendo:

$$\mathbf{r}^{(e)} = \left[ \mathbf{r}_1^{(e)} \quad \mathbf{r}_2^{(e)} \quad \mathbf{r}_3^{(e)} \quad \mathbf{r}_4^{(e)} \right]^T \text{ el vector general de desplazamientos nodales.}$$

La matriz de deformación se obtiene como la composición de las siguientes cuatro submatrices:

$$\mathbf{B} = \left[ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4 \right] \quad (3-68)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & N_i \\ 0 & 0 & \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3-69)$$

$$\frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{16} \cdot (27 \cdot \xi^2 - 18 \cdot \xi - 1) \quad \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} = \frac{9}{16} \cdot (9 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi - 3)$$

$$\frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{9}{16} \cdot (9 \cdot \xi^2 + 2 \cdot \xi - 3) \quad \frac{\partial N_4(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{16} \cdot (27 \cdot \xi^2 + 18 \cdot \xi - 1)$$

Las variaciones de las deformaciones seccionales en la dirección del elemento se deducen derivando directamente la ecuación (3-67).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4] \cdot \mathbf{r}^{(e)} \right) = \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{B}_3}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{B}_4}{\partial x} \right] \cdot \mathbf{r}^{(e)} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \cdot \mathbf{r}^{(e)} \end{aligned} \quad (3-70)$$

siendo:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J^2} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J^2} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} & \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J^2} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \end{bmatrix}$$

y las segundas derivadas de las funciones de forma:

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi^2} = -\frac{9}{8} \cdot (3 \cdot \xi - 1) \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} = \frac{9}{8} \cdot (9 \cdot \xi - 1)$$

$$\frac{\partial^2 N_3}{\partial \xi^2} = -\frac{9}{8} \cdot (9 \cdot \xi + 1) \quad \frac{\partial^2 N_4}{\partial \xi^2} = \frac{9}{8} \cdot (3 \cdot \xi + 1)$$

A diferencia del elemento finito de Timoshenko cuadrático, el vector  $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s / \partial x$  es variable. Las componentes 1 y 3 se interpolan linealmente, mientras que la componente 2 se aproxima de forma cuadrática.

La matriz de rigidez del elemento se puede determinar de forma totalmente análoga a la seguida en el caso del elemento cuadrático. Por consiguiente:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{B} \cdot dl \quad (3-71)$$

### 3.6 EXTRAPOLACIÓN DEL MODELO A 3D

En este apartado se extrapola el modelo teórico de corrección de cortante a una situación de solicitaciones totalmente general, de naturaleza tridimensional. Se considera el esfuerzo axial, el flector biaxial, el cortante biaxial y la torsión.

Se parte de una sección transversal compuesta por un conjunto fibras. En cada una de estas fibras el material responde con un comportamiento tridimensional. El vector de deformaciones ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) y de tensiones ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) que se consideran son (Fig. 3.14):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (3-72)$$

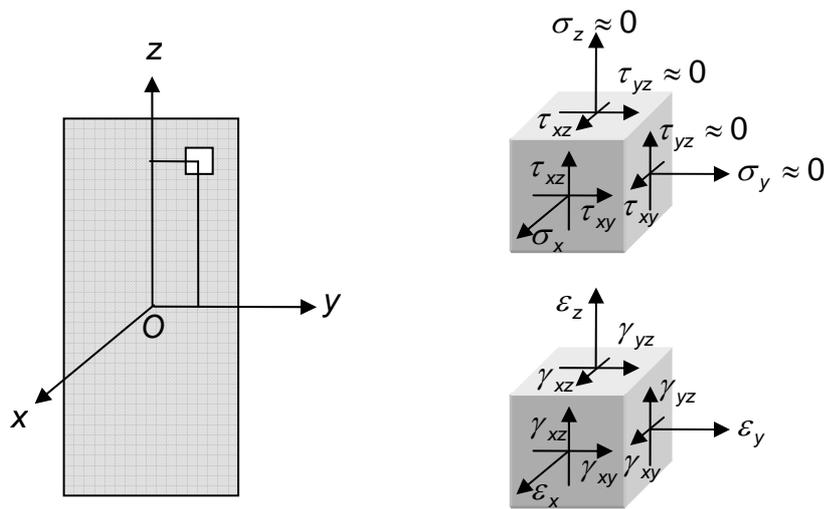


Fig. 3.14 Tensiones y deformaciones consideradas modelo 3D

Dado que la aplicación del modelo se destina a regiones B, se razonable asumir que las tensiones normales  $\sigma_y, \sigma_z$  y la tensión tangencial  $\tau_{yz}$  son iguales a cero.

Siguiendo la presentación de Oñate (1992) [48], se necesitan emplear las seis deformaciones seccionales siguientes:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ c_y \\ c_z \\ c_x \\ \gamma_{0xy} \\ \gamma_{0xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial \theta_y / \partial x \\ -\partial \theta_z / \partial x \\ \partial \theta_x / \partial x \\ \partial v_0 / \partial x - \theta_z \\ \partial w_0 / \partial x + \theta_y \end{bmatrix} \quad (3-73)$$

Siguiendo la hipótesis cinemática de Timoshenko, la relación entre las deformaciones de una fibra de la sección y las deformaciones seccionales se puede expresar del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}_{TBT}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (3-74)$$

siendo:

$$\mathbf{S}_{TBT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & -z & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ la matriz de compatibilidad según TBT.}$$

Se propone, de manera análoga al caso 2D, corregir la hipótesis cinemática de Timoshenko sólo en los términos correspondientes a la deformación por cortante. Además, se expresa esta hipótesis en forma incremental. Por lo tanto:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^T \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (3-75)$$

siendo la matriz de compatibilidad  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & -z & y \\ 0 & \beta(y,z) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(y,z) \end{bmatrix} \quad (3-76)$$

donde  $\alpha(y,z)$  y  $\beta(y,z)$  son las funciones de corrección de cortante.

Las funciones  $\alpha(y,z)$  y  $\beta(y,z)$  son variables para cada fibra y para cada nivel de carga. Además, deben ser funciones continuas y derivables en todos los puntos de la sección.

La aplicación del principio de los trabajos virtuales extendido a toda la sección permite obtener los esfuerzos seccionales (Fig. 3.15), según indica la siguiente expresión:

$$\sigma_s = \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \iint_A \begin{bmatrix} \sigma_x \\ z \cdot \sigma_x \\ y \cdot \sigma_x \\ -z \cdot \tau_{xy} + y \cdot \tau_{xz} \\ \beta \cdot \tau_{xy} \\ \alpha \cdot \tau_{xz} \end{bmatrix} \cdot dA = \begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \\ T \\ \hat{V}_y \\ \hat{V}_z \end{bmatrix} \quad (3-77)$$

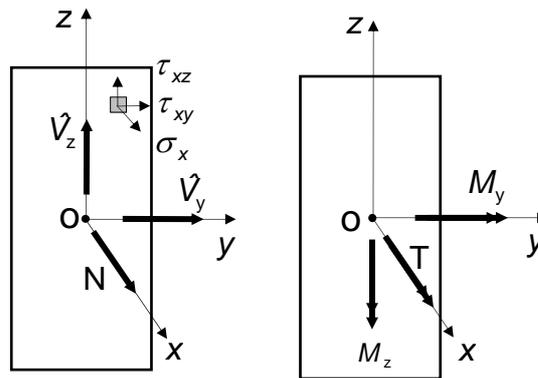


Fig. 3.15 Esfuerzos seccionales modelo 3D

Todos los esfuerzos seccionales obtenidos coinciden con los de la hipótesis cinemática de Timoshenko exceptuando los dos esfuerzos cortantes, cuyas expresiones están afectadas por las funciones de corrección de cortante.

El análisis a nivel sección está determinado por el vector de deformaciones seccionales  $\boldsymbol{\epsilon}_s$  y por las funciones de corrección de cortante  $\alpha(y,z)$  y  $\beta(y,z)$ .

Todas las deformaciones seccionales  $\boldsymbol{\epsilon}_s$  se pueden obtener tras imponer las seis ecuaciones de equilibrio que igualan los esfuerzos exteriores con los esfuerzos internos de la sección.

Las funciones de corrección se hacen depender de una serie de parámetros, que se incluyen en los vectores de corrección de cortante  $\boldsymbol{\epsilon}_{r\alpha}$  y  $\boldsymbol{\epsilon}_{r\beta}$ . Por lo tanto:

$$\alpha = \alpha(y, z, \boldsymbol{\varepsilon}_{r\alpha}) \quad \beta = \beta(y, z, \boldsymbol{\varepsilon}_{r\beta}) \quad (3-78)$$

Las anteriores funciones  $\alpha$  y  $\beta$  son arbitrarias, ya que se puede elegir libremente el número de parámetros a incluir en los vectores  $\boldsymbol{\varepsilon}_{r\alpha}$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_{r\beta}$ , y el tipo de interpolación. Ahora bien, ambas funciones deben tener continuidad y ser derivables en el dominio de la sección.

El número de parámetros incluidos en los vectores de corrección generan un conjunto de incógnitas que hay que evaluar. Para su obtención se tienen que introducir un número suficiente de condiciones.

A falta de desarrollar un algoritmo que permita evaluar las funciones de corrección de cortante, se sugiere seguir el procedimiento de dividir la sección en una serie de cortes. En cada zona de la sección aislada por cada corte se puede aplicar la condición de equilibrio longitudinal. En primera instancia, se podría aplicar la misma estrategia seguida para el caso 2D, pero realizando tanto cortes horizontales como verticales. Ahora bien, cabe la posibilidad de establecer estrategias que permitan realizar una corrección a cortante más ajustada.

Por otra parte, este modelo 3D se ha implementado en elementos lineales de hormigón armado sin llevar a cabo la corrección por cortante. En el anejo 1 se adjunta un artículo publicado en revista internacional en el que se detalla la formulación empleada, el tipo de ecuaciones constitutivas utilizado, la implementación numérica realizada y la verificación experimental del modelo. (Se insta al lector a consultar la citada publicación en el anejo 1)



# CAPÍTULO 4

## ECUACIONES CONSTITUTIVAS

## CAPÍTULO 4. ECUACIONES CONSTITUTIVAS

El modelo descrito en el capítulo anterior requiere para su utilización de la definición de unas ecuaciones constitutivas adecuadas. En este trabajo, se han adoptado ecuaciones constitutivas que han sido validadas y aplicadas de manera satisfactoria. Ya en el capítulo segundo correspondiente al estado del arte se han citado algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas e idóneas para poder llevar a cabo el análisis de elementos lineales considerando el efecto del esfuerzo cortante.

De la formulación propuesta para el modelo se desprende la necesidad de describir un comportamiento bidimensional para el hormigón armado. Debe ser un modelo constitutivo consistente, que sea capaz de representar perfectamente efectos tales como la fisuración, el fenómeno de *tension-stiffening*, o el debilitamiento de la resistencia del hormigón debido a la presencia de deformaciones transversales de tracción. Por lo general, unas ecuaciones constitutivas que aglutinen los mecanismos resistentes a cortante dependientes de la presencia de armadura transversal y los otros mecanismos que habitualmente se engloban dentro de la denominada contribución del hormigón al esfuerzo cortante.

Aparte del modelo constitutivo bidimensional, se incluye también el comportamiento unidimensional del acero con el fin de que en el modelo se pueda considerar, si se desea, el comportamiento de las armaduras pasivas longitudinales de forma discreta.

En este capítulo se presenta, en primer lugar, la ecuación constitutiva para el acero que se considere de forma discreta. En segundo lugar, se presenta la formulación de las ecuaciones constitutivas bidimensionales que caracterizan el comportamiento del hormigón armado. A continuación, se lleva a cabo una validación de las ecuaciones constitutivas propuestas haciendo una comparativa entre los resultados teóricos y los experimentales. En cuarto lugar, se indica cómo se deben utilizar las ecuaciones constitutivas descritas en el modelo teórico de corrección de cortante enunciado en el capítulo anterior. Finalmente, se describe cómo se debe tener en cuenta el fenómeno de *tension-stiffening* cuando se introducen armaduras longitudinales discretas.

#### 4.1 COMPORTAMIENTO DEL ACERO (1D)

El modelo constitutivo del acero 1D, que se emplea para las armaduras pasivas longitudinales que se consideran de forma discreta, está basado en un diagrama bilineal con rama de plastificación tanto en tracción como en compresión (Fig. 4.1).

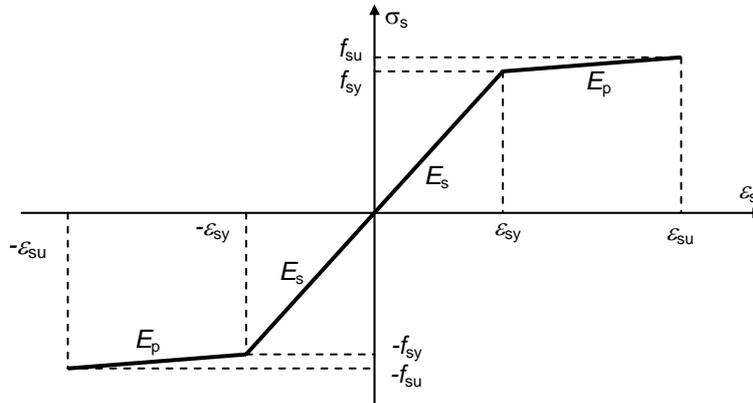


Fig. 4.1 Ecuación constitutiva acero 1D

siendo:

$\epsilon_s$  : deformación del acero

$\sigma_s$  : tensión del acero

$f_{sy}$  : límite elástico del acero

$f_{su}$  : tensión de rotura del acero

$E_s$  : módulo de elasticidad del acero

$\epsilon_{su}$  : deformación del acero en rotura

$E_p$  : módulo de deformación (en la rama de plastificación)

$\epsilon_{sy}$  : deformación del acero correspondiente al límite elástico

Estos dos últimos parámetros se obtienen en función del resto como sigue:

$$\epsilon_{sy} = \frac{f_{sy}}{E_s} \qquad E_p = \frac{f_{su} - f_{sy}}{\epsilon_{su} - \epsilon_{sy}} \qquad (4-1)$$

Las ecuaciones correspondientes a cada una de las ramas del diagrama son:

Rama elástica:  $|\epsilon_s| < \epsilon_{sy}$

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \qquad \frac{\partial \sigma_s}{\partial \epsilon_s} = E_s \qquad (4-2)$$

*Rama de plastificación:*  $\varepsilon_{sy} \leq |\varepsilon_s| < \varepsilon_{su}$

$$\sigma_s = \text{sgn}(\varepsilon_s) \cdot [f_{sy} + E_p \cdot (|\varepsilon_s| - \varepsilon_{sy})] \quad \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_s} = E_p \quad (4-3)$$

Esta ecuación constitutiva se emplea para el acero de las armaduras longitudinales que se consideren de forma discreta. Ahora bien, con el fin de captar el efecto de *tension-stiffening* por estar el acero embebido en el hormigón se lleva a cabo una reducción de la tensión del acero en la ecuación constitutiva propuesta. Esta reducción de tensiones se realiza igual que para el acero del hormigón armado 2D según se presenta más adelante en el apartado 4.2.2.

## 4.2 COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN ARMADO (2D)

La ecuación constitutiva adoptada para representar el comportamiento bidimensional del hormigón armado está basada en la propuesta llevada a cabo por Stevens et al. (1991) [77], aunque se han introducido algunas modificaciones basadas en los estudios de Bentz (2000) [8]. Se ha elegido este modelo por tratarse de una ecuación constitutiva que se fundamenta en el modelo del *MCFT* (1986) [83], el cual ha proporcionado resultados muy aceptables en su aplicación al comportamiento de elementos de hormigón armado sometidos a cortante. Además, se escoge la formulación de Stevens et al. (1991) [77], debido a que presenta ciertas ventajas desde el punto de vista de implementación numérica en términos de robustez y consistencia. No obstante, la formulación del modelo teórico propuesto es independiente del tipo de ecuación constitutiva utilizada, por lo que resultaría factible emplear otro tipo de modelo constitutivo con el fin de describir el comportamiento bidimensional del hormigón armado.

La ecuación constitutiva que se describe incluye en su formulación aspectos tales como:

- Rigidez a tracción del hormigón entre fisuras (*tension-stiffening*)
- Debilitamiento de la resistencia del hormigón en compresión debido a la presencia de deformaciones de tracción ortogonales a ella (*concrete softening*)

El comportamiento bidimensional del hormigón fisurado viene indicado en la Fig. 4.2, donde se muestra un elemento 2D de hormigón armado 2D fisurado. Sobre el mismo, actúan unas tensiones normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , así como una tensión tangencial  $\tau_{xy}$  (Fig. 4.2).

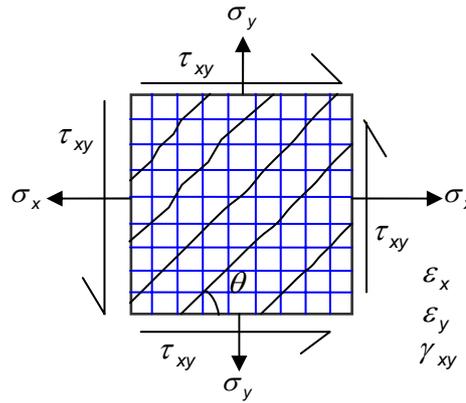


Fig. 4.2 Elemento 2D de hormigón armado fisurado

A su vez, este estado genera en el panel un estado de deformaciones regido por las deformaciones  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  (Fig. 4.2)

La respuesta del hormigón fisurado se obtiene como la “unión” del comportamiento del hormigón y del acero. El acero se considera que está embebido en el hormigón y que tiene una adherencia perfecta con el hormigón. En este modelo constitutivo se va a adoptar también la hipótesis de coaxialidad: el ángulo  $\theta$  (Fig. 4.2) que fija la posición de las direcciones principales va a ser el mismo tanto en tensiones como en deformaciones.

El hormigón se analiza sumando separadamente el comportamiento unidireccional en cada una de las dos direcciones principales. El comportamiento del hormigón en cada dirección tiene en cuenta no sólo la deformación en la dirección longitudinal  $\epsilon_L$  considerada sino también la deformación en la dirección transversal  $\epsilon_T$ . De este modo, se trata de captar el efecto del debilitamiento del hormigón a compresión.

El acero se analiza como la suma de comportamiento en las diferentes direcciones de armado que presente. En general, se consideran dos familias de armado, una en dirección x y otra en dirección y (Fig. 4.2)

#### 4.2.1 ECUACIÓN CONSTITUTIVA HORMIGÓN 1D

##### 4.2.1.1 Comportamiento en compresión

Aunque se sigue básicamente la ecuación constitutiva según Stevens et al. (1991) [77], se opta por sustituir el comportamiento del hormigón en compresión por la propuesta de Popovics (1973) [52] (Fig. 4.3).

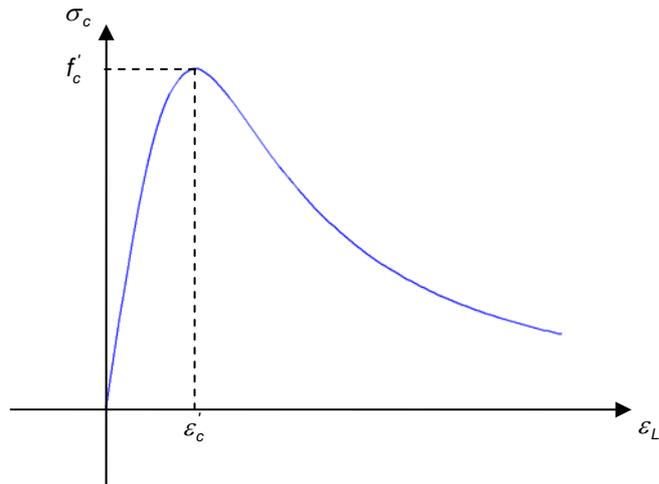


Fig. 4.3 Ecuación constitutiva del hormigón en compresión, Popovics (1973) [52]

A continuación se presenta esta ecuación constitutiva que fue utilizada con éxito en el modelo de cálculo seccional de Bentz (2000) [8].

$$\sigma_c(\varepsilon_L) = \frac{n \cdot (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)}{n - 1 + (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)^{n \cdot k}} \cdot f'_c \quad (4-4)$$

$$n = 0.8 + f'_c / 17 \quad k = 1 \text{ si } \varepsilon_L / \varepsilon'_c \leq 1 \quad k = 0.67 + f'_c / 62 \text{ si } \varepsilon_L / \varepsilon'_c > 1$$

$f'_c$ : tensión máxima a compresión del hormigón en probeta cilíndrica

$\varepsilon'_c$ : deformación correspondiente a la tensión  $f'_c$

$n$ : parámetro de ajuste de la curva

$k$ : factor que controla la pérdida de tensión post-rotura para hormigones de alta resistencia

Con el fin de tener en cuenta el efecto del debilitamiento de la tensión de compresión del hormigón debido a la presencia de deformaciones en dirección transversal, se afecta a la expresión anterior de un coeficiente multiplicador de debilitamiento que vamos a llamar de ahora en adelante  $SF$  (*Softening Factor*). De este modo, se expresa la tensión del hormigón como:

$$\sigma_c(\varepsilon_L, \varepsilon_T) = SF(\varepsilon_T) \cdot \frac{n \cdot (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)}{n - 1 + (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)^{n \cdot k}} \cdot f'_c \quad (4-5a)$$

La formulación utilizada para representar este coeficiente se toma del modelo de Stevens et al. (1991) [77]. Este coeficiente depende sólo de la deformación transversal y adopta la siguiente formulación (Fig. 4.4):

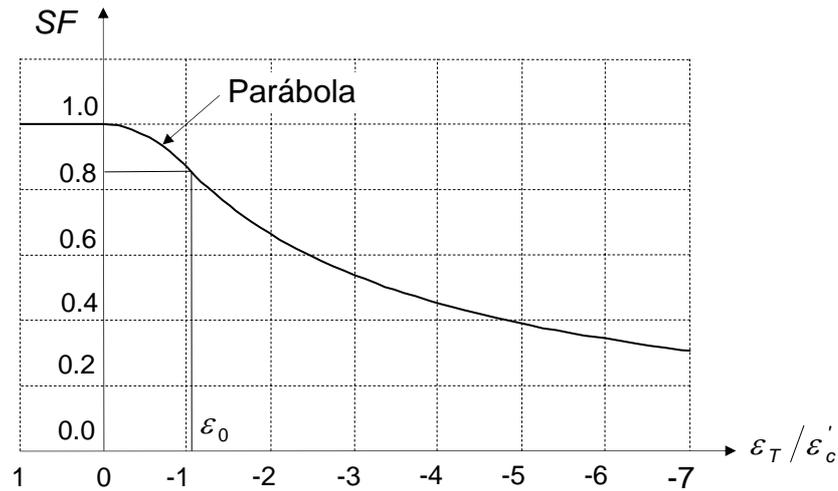


Fig. 4.4 Coeficiente de debilitamiento de la tensión de compresión del hormigón (SF)

Si  $\varepsilon_T < 0$  no hay efecto de debilitamiento y  $SF(\varepsilon_T) = 1$  (4-5b)

Si  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_T$   $SF(\varepsilon_T) = \frac{1}{0.8 - 0.34 \cdot \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon'_c}}$  siendo  $\varepsilon_0 = -1.03857 \varepsilon'_c$  (4-5c)

Entre las dos curvas anteriores se adopta un ajuste parabólico con el fin de evitar problemas numéricos.

Si  $0 \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_T$   $SF(\varepsilon_T) = 1 + \frac{0.34}{2 \cdot \varepsilon'_c \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(0.8 - 0.34 \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'_c}\right)^2} \cdot \varepsilon_T^2$  (4-5d)

Para facilitar la implementación en una formulación en rigidez tangente se van a derivar las expresiones de la tensión de compresión del hormigón y del coeficiente de debilitamiento.

Las derivadas correspondientes a la tensión del hormigón  $\sigma_c$  son:

$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_L} = SF(\varepsilon_T) \cdot \frac{n \cdot f'_c}{\varepsilon'_c} \frac{n-1 + (1-n \cdot k) \cdot (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)^{n \cdot k}}{\left(n-1 + (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)^{n \cdot k}\right)^2}$  (4-6a)

$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_T} = \frac{\partial SF}{\partial \varepsilon_T} \cdot \frac{n \cdot (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)}{n-1 + (\varepsilon_L / \varepsilon'_c)^{n \cdot k}} \cdot f'_c$  (4-6b)

siendo las derivadas correspondientes al coeficiente de debilitamiento SF:

Si  $\varepsilon_T < 0$   $\frac{\partial SF}{\partial \varepsilon_T} = 0$  (4-7a)

$$\text{Si } \varepsilon_0 \leq \varepsilon_T \quad \frac{\partial SF}{\partial \varepsilon_T} = \frac{0.34}{\varepsilon_c' \cdot \left(0.8 - 0.34 \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_c}\right)^2} \quad (4-7b)$$

$$\text{Si } 0 \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_T \quad \frac{\partial SF}{\partial \varepsilon_T} = \frac{0.34 \cdot \varepsilon_T}{\varepsilon_c' \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(0.8 - 0.34 \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c}\right)^2} \quad (4-7c)$$

#### 4.2.1.2 Comportamiento en tracción

Siguiendo la formulación presentada por Stevens et al. (1991) [77], se considera la siguiente relación constitutiva para el hormigón en tracción representada en la Fig. 4.5.

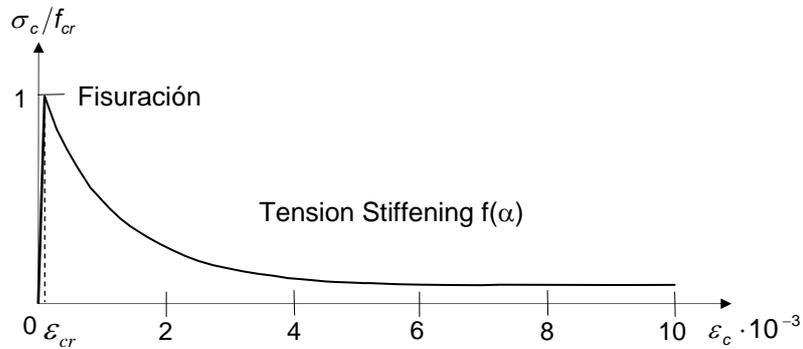


Fig. 4.5 Ecuación constitutiva hormigón 1D en tracción

El hormigón se considera con comportamiento lineal y no fisurado en tracción si su deformación es menor que la deformación de fisuración  $\varepsilon_{cr}$ . A esta deformación le corresponde una tensión del hormigón igual a su resistencia a tracción  $f_{cr}$ . Por lo tanto:

$$\text{Si } 0 < \varepsilon_L \leq \varepsilon_{cr} \quad \begin{aligned} \sigma_c(\varepsilon_L) &= \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_{cr}} \cdot f_{cr} \\ \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_L} &= \frac{f_{cr}}{\varepsilon_{cr}} \end{aligned} \quad (4-8)$$

Tras la fisuración  $\varepsilon_{cr} < \varepsilon_L$ , se adopta la siguiente rama de tracción (Fig. 4.5):

$$\sigma_c(\varepsilon_L) = f_{cr} \cdot \left( (1-\alpha) \cdot e^{-\lambda_t(\varepsilon_L - \varepsilon_{cr})} + \alpha \right) \quad (4-9a)$$

siendo:

$\alpha$  el parámetro para tener en cuenta el comportamiento adherente entre el acero y el hormigón suponiendo adherencia perfecta. Se calcula como sigue:

$$\alpha = C_t \cdot \frac{\rho_s}{d_b} \quad (4-9b)$$

$C_t = 50$  mm, según los datos obtenidos experimentalmente

$\rho_s$  es la cuantía de armadura

$d_b$  es el diámetro de las armaduras en mm

$\lambda_t$  es el parámetro que controla la disminución de la tensión de tracción del hormigón

$$\lambda_t = \frac{270}{\sqrt{\alpha}} \leq 1000 \quad (4-9c)$$

El parámetro  $\alpha$  se ha obtenido suponiendo que existe exclusivamente una familia de armaduras y con una orientación coincidente con la dirección de la deformación longitudinal  $\varepsilon_L$ . Por lo general, podrán existir varias familias de armaduras y con direcciones prefijadas e independientes de las direcciones principales de deformaciones. Por lo tanto, se redefine de forma general el parámetro  $\alpha$  como sigue:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \left[ \cos^2 \Delta\theta_i + \sin^2 \left( \frac{4 \cdot \Delta\theta_i^2}{\pi} \right) \right] \cdot \alpha_i \quad (4-9d)$$

donde:

$n$ : número de grupos de armaduras (por lo general, serán 1 ó 2 siguiendo las direcciones  $x$  e  $y$ )

$\Delta\theta_i$ : ángulo entre la dirección del grupo  $i$  de armaduras y la dirección principal en la que se evalúa la tensión en el hormigón.

En este caso, se realizan derivadas respecto de las dos deformaciones principales y también respecto de la deformación transversal expresada en direcciones principales  $\gamma_{LT}$ :

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_L} = -f_{cr} \cdot \lambda_t \cdot (1 - \alpha) \cdot e^{-\lambda_t \cdot (\varepsilon_L - \varepsilon_{cr})} \quad (4-10)$$

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_T} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \gamma_{LT}} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_{LT}}$$

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \alpha} = f_{cr} \cdot \left[ -e^{-\lambda_t \cdot (\varepsilon_L - \varepsilon_{cr})} - (1 - \alpha) \cdot e^{-\lambda_t \cdot (\varepsilon_L - \varepsilon_{cr})} \cdot (\varepsilon_L - \varepsilon_{cr}) \cdot \frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha} + 1 \right]$$

Si  $\lambda_t \leq 1000$        $\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha} = \frac{-135}{\sqrt{\alpha^3}}$       y       $\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha} = 0$  para el resto de casos.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left[ -\sin(2 \cdot \Delta\theta_i) + \frac{8 \cdot \Delta\theta_i^2}{\pi} \sin\left(\frac{8 \cdot \Delta\theta_i^2}{\pi}\right) \right] \cdot \alpha_i$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \gamma_{LT}} = \frac{1}{2 \cdot (\varepsilon_L - \varepsilon_T)}$$

#### 4.2.2 ECUACIÓN CONSTITUTIVA DEL ACERO EMBEBIDO EN EL HORMIGÓN

Stevens et al. (1991) [77] elimina de formulación original del MCFT el denominado chequeo de la fisura (*crack check*). En su defecto, trabaja con tensiones medias en las armaduras y desprecia las variaciones de tensiones que se producen por el hecho de estar en una fisura o entre fisuras.

La ecuación constitutiva de este acero se basa en un comportamiento bilineal afectado por una reducción de las tensiones con el fin de tener en cuenta la presencia del acero embebido en el hormigón (Fig. 4.6)

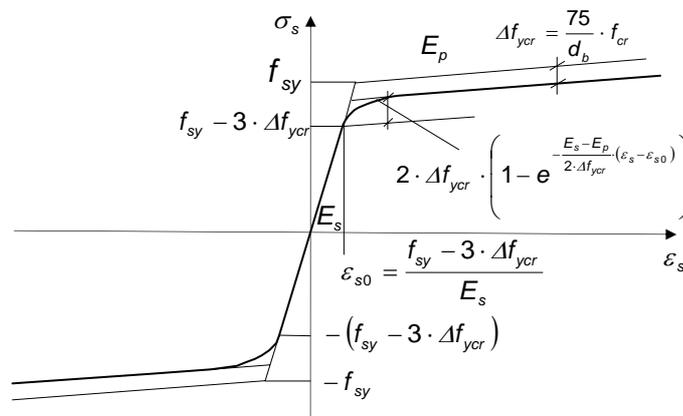


Fig. 4.6 Ecuación constitutiva del acero embebido en el hormigón

Las ecuaciones de cada una de las dos ramas del diagrama son:

*Rama elástica:*  $|\varepsilon_s| < \varepsilon_{s0}$

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \quad (4-11a)$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_s} = E_s \quad (4-11b)$$

*Rama de plastificación:*  $\varepsilon_{s0} \leq |\varepsilon_s|$

$$\sigma_s = \text{sgn}(\varepsilon_s) \cdot \left[ E_s \cdot \varepsilon_{s0} + 2 \cdot \Delta f_{ycr} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{E_s - E_p \cdot (|\varepsilon_s| - \varepsilon_{s0})}{2 \cdot \Delta f_{ycr}}} \right) + E_p \cdot (|\varepsilon_s| - \varepsilon_{s0}) \right] \quad (4-12a)$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_s} = E_p + (E_s - E_p) \cdot e^{-\frac{E_s - E_p \cdot (|\varepsilon_s| - \varepsilon_{s0})}{2 \cdot \Delta f_{ycr}}} \quad (4-12b)$$

#### 4.2.3 COMPORTAMIENTO BIDIMENSIONAL DEL HORMIGÓN ARMADO

El comportamiento bidimensional del hormigón armado en tensión plana viene regido por los siguientes vectores de tensiones y deformaciones:

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

Tal y como se adelantó en la introducción del apartado 4.2, el comportamiento del hormigón se obtiene como la suma de la respuesta del hormigón en sus dos direcciones principales. El comportamiento de los aceros se considera en cada una de las direcciones de armado presentes. En la presentación de esta formulación se consideran únicamente dos familias de armadura según las direcciones cartesianas  $x$  e  $y$ , resultando:

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma}_{cp} + \boldsymbol{\sigma}_{sp} \quad (4-14)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{cx} \\ \sigma_{cy} \\ \tau_{cxy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{sx} \cdot \sigma_{sx} \\ \rho_{sy} \cdot \sigma_{sy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde:

$\rho_{sx}$ ,  $\rho_{sy}$  son las cuantías de armado en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente

A su vez, si se deriva el vector de tensiones del panel con respecto al vector de deformaciones del panel se obtiene la matriz de rigidez tangente del material:

$$d\boldsymbol{\sigma}_p = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{D}_p \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (4-15a)$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial (\boldsymbol{\sigma}_{cp} + \boldsymbol{\sigma}_{sp})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{cp}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{sp}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \right) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_p = (\mathbf{D}_{cp} + \mathbf{D}_{sp}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{D}_{cp} + \mathbf{D}_{sp} \quad (4-15b)$$

O en forma desarrollada queda como:

$$\mathbf{D}_{cp} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{cx}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \sigma_{cx}}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \sigma_{cx}}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \sigma_{cy}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \sigma_{cy}}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \sigma_{cy}}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \tau_{cxy}}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial \tau_{cxy}}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial \tau_{cxy}}{\partial \gamma_{xy}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{sp} = \begin{bmatrix} \rho_{sx} \cdot \frac{\partial \sigma_{sx}}{\partial \varepsilon_x} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{sy} \cdot \frac{\partial \sigma_{sy}}{\partial \varepsilon_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-15c)$$

Se puede observar, para el vector de tensiones de las armaduras y su correspondiente matriz de rigidez, que sólo se necesita conocer el valor de las cuantías de cada familia de armaduras así como el comportamiento unidimensional del acero de cada una de ellas. Dado que la ecuación constitutiva del acero ya se conoce y que las cuantías son un dato de partida, la evaluación de la respuesta bidimensional del acero es directa.

En cuanto al hormigón, resulta más conveniente cambiar el sistema de coordenadas. Se va a pasar del sistema cartesiano  $xy$  a un sistema de coordenadas que sigue las direcciones principales que se van a llamar 1 y 2.

Los nuevos vectores de tensiones en el hormigón y de deformación en direcciones principales son:

$$\boldsymbol{\sigma}_{c,prin} = \begin{bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{prin} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} = 0 \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

Se considera siempre que  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ .

Del mismo modo, la matriz de rigidez del hormigón se puede también expresar en direcciones principales como sigue:

$$\mathbf{D}_{c,prin} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \gamma_{12}} \\ \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \gamma_{12}} \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{c2}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

La respuesta del hormigón en las dos direcciones principales sigue un comportamiento unidimensional y se puede emplear la formulación para el hormigón 1D descrita en el apartado 4.2.1. Es importante destacar que la respuesta de cada uno de los hormigones depende, por una parte, de la deformación en la dirección principal considerada y, por otra, de la deformación transversal. Cabe recordar que la deformación transversal hay que tenerla en cuenta con el fin de captar el efecto del debilitamiento en el hormigón a través del coeficiente SF. En resumen, se aplica la ecuación constitutiva 1D del hormigón en las dos direcciones principales según se indica la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Deformaciones consideradas para cada hormigón 1D

Hormigón	Def. Longitudinal: $\varepsilon_L$	Def. Transversal: $\varepsilon_T$
Dirección 1: $\sigma_{c1}, \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{prin}}$	$\varepsilon_L = \varepsilon_1$	$\varepsilon_T = \varepsilon_2$
Dirección 2: $\sigma_{c2}, \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{prin}}$	$\varepsilon_L = \varepsilon_2$	$\varepsilon_T = \varepsilon_1$

Por lo general, en las filas 2 y 3 de la matriz de rigidez los términos son no nulos dada la naturaleza de las derivadas de la tensión del hormigón obtenidas.

Por último, hay que indicar que la única componente en la fila 3 de la matriz de rigidez del hormigón es la correspondiente a la columna 3, por haber impuesto la condición de coaxialidad al asumir el mismo ángulo para las direcciones principales en deformaciones y en tensiones.

Con el fin de completar de una forma consistente la formulación faltan por establecer las relaciones entre las tensiones y las matrices de rigidez que permitan pasar del sistema de coordenadas en direcciones principales 12 al sistema cartesiano en direcciones xy.

La relación entre las deformaciones se puede calcular de manera directa utilizando el círculo de Mohr (Fig. 4.7)

$$\varepsilon_1 = C + R \quad \varepsilon_2 = C - R \quad (4-18)$$

siendo:

$$C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

El ángulo  $\theta_1$  entre la dirección principal mayor  $\varepsilon_1$  y el eje x es:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right)$$

y el ángulo  $\theta_2$  entre la dirección principal mayor  $\varepsilon_1$  y el eje y es:

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$$

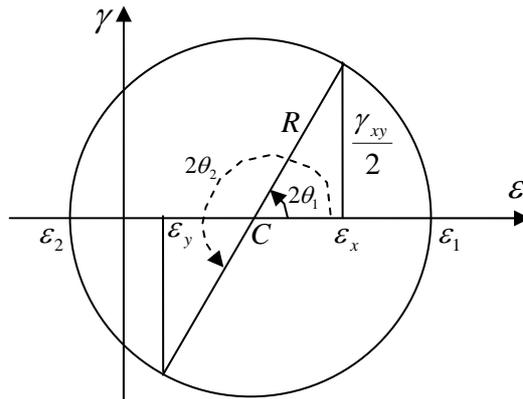


Fig. 4.7 Círculo de Mohr para la obtención de las direcciones principales

Los vectores de tensiones y las matrices de rigidez en coordenadas cartesianas se relacionan con las obtenidas en direcciones principales a partir de la correspondiente matriz de cambio de coordenadas  $\mathbf{T}$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_{cp} = \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{c,prin} \quad (4-19)$$

$$\mathbf{D}_{cp} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{D}_{c,prin} \cdot \mathbf{T} \quad (4-20)$$

siendo:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \sin^2 \theta_1 & \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1 \\ \sin^2 \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & -\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1 \\ -2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1 & 2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1 & \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1 \end{bmatrix}$$

### 4.3 VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

La ecuación constitutiva de Stevens et al. (1991) [77] se validó mediante una serie de ensayos experimentales de paneles de hormigón armado. Se obtuvieron unos resultados suficientemente satisfactorios que han permitido utilizar esta ecuación constitutiva en los modelos teóricos. El modelo constitutivo propuesto difiere del original en cuanto a la rama de compresión del hormigón, ya que se ha tomado para esta rama la propuesta por Popovis (1973) [52] al igual que Bentz (2000) [8]. Por ello, se repite la validación numérica de la ecuación constitutiva utilizando la misma serie de ensayos de paneles de hormigón armado.

La verificación experimental está compuesta por dos series (PV y PB) de paneles de hormigón armado ensayados bajo diferentes combinaciones de acciones en su propio plano. Se verifican un total de diecisiete probetas de la serie PV y otras veinte de la serie PB. La serie PV se debe a Vecchio y Collins (1982) [82] y la serie PB a Bhide y Collins (1987) [9].

Para poder caracterizar cada uno de las probetas se tienen que fijar los siguientes parámetros:

- Para el hormigón:  $f'_c$ ,  $\varepsilon'_c$ ,  $f_{cr}$  y  $\varepsilon_{cr}$
- Para cada uno de los aceros:  $\rho_s$ ,  $d_b$ ,  $f_{sy}$ ,  $E_s$  y  $E_p$

Siguiendo las recomendaciones de Stevens et al. (1991) [77], se considera en toda la verificación experimental una resistencia a tracción del hormigón diferente a la real. Se toma el siguiente valor, que representa un valor límite inferior para esta resistencia:

$$f_{cr} = 0.33 \cdot \sqrt{f'_c} \quad (4-21)$$

Además, se calcula la deformación  $\varepsilon_{cr}$  en función de la resistencia a tracción anterior y un valor del módulo de deformación tangente del hormigón en origen igual a:

$$E_0 = \left( \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_L} \right)_{\varepsilon_L=0} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{f'_c}{\varepsilon'_c} \quad (4-22)$$

Además de los datos anteriores, se debe indicar cómo se realiza el ensayo. Para ello, se fija la relación existente entre cada una de las componentes de las tensiones exteriores aplicadas en el plano del panel  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ .

Los datos correspondientes a las probetas de la serie PV aparecen en la Tabla 4.2, mientras que los correspondientes a la serie PB se encuentran en la Tabla 4.4.

Análogamente, los resultados de las probetas de la serie PV se indican en la Tabla 4.3, mientras que los correspondientes a la serie PB aparecen en la Tabla 4.5.

Se sigue la siguiente notación para las tensiones tangenciales en las tablas:

$V_{cr}$  : tensión que produce la fisuración del panel de hormigón armado (MPa)

$V_{u,exp}$  : tensión de rotura del panel obtenido experimentalmente (MPa)

$V_{u,Stev}$  : tensión de rotura del panel según Stevens et al. (1991) [77] (MPa)

$V_{u,calc}$  : tensión de rotura del panel según el modelo propuesto (MPa)

Se considera para los aceros de las dos direcciones de armaduras:

$E_s=200000$  MPa y  $E_p=2000$  MPa.

Las unidades para el resto de datos que aparecen en las tablas son:

$f'_c$ ,  $f_{syx}$ ,  $f_{syy}$ ,  $v_{cr}$  y  $v_u$  en MPa

$d_{bx}$ ,  $d_{by}$  en mm

$\rho_{sx}$ ,  $\rho_{sy}$  en %

En el caso de la serie PV (Tabla 4.3) la relación entre los resultados del modelo Stevens et al. (1991) [77] y el propuesto es igual a 0.99, mientras que para el caso de la serie PB (Tabla 4.5) el valor que se obtiene es igual a 0.999. En ambos casos el coeficiente de variación es muy bajo. Las comparaciones realizadas para las series indican que la ecuación constitutiva propuesta proporciona unos resultados prácticamente iguales a los del modelo constitutivo original.

Por lo tanto, queda validada la ecuación constitutiva con las modificaciones propuestas.

Tabla 4.2 Datos paneles serie PV

Panel	$\sigma_x : \sigma_y : \tau_{xy}$	$f'_c$	$\epsilon'_c$	$\rho_{sx}$	$d_{bx}$	$f_{syx}$	$\rho_{sy}$	$d_{by}$	$f_{syy}$
PV3	0:0:1	26.6	.0023	0.483	3.30	662	0.483	3.30	662
PV4	0:0:1	26.6	.0025	1.056	3.45	242	1.056	3.45	242
PV6	0:0:1	29.8	.0025	1.785	6.35	266	1.785	6.35	266
PV9	0:0:1	11.6	.0028	1.785	6.35	455	1.785	6.35	455
PV10	0:0:1	14.5	.0027	1.785	6.35	276	0.999	4.35	276
PV11	0:0:1	15.6	.0026	1.785	6.35	235	1.306	5.44	235
PV12	0:0:1	16.0	.0025	1.785	6.35	469	0.446	3.18	269
PV16	0:0:1	21.7	.0020	0.740	4.09	255	0.740	4.09	255
PV18	0:0:1	19.5	.0022	1.785	6.35	431	0.315	2.67	412
PV19	0:0:1	19.0	.0022	1.785	6.35	458	0.713	4.01	299
PV20	0:0:1	19.6	.0018	1.785	6.35	460	0.885	4.47	297
PV21	0:0:1	19.5	.0018	1.785	6.35	458	1.296	5.41	302
PV22	0:0:1	19.6	.0020	1.785	6.35	458	1.524	5.87	420
PV23	-0.39:-0.39:1	20.5	.0020	1.785	6.35	518	1.785	6.35	518
PV25	-0.69:-0.69:1	19.3	.0018	1.785	6.35	466	1.785	6.35	466
PV27	0:0:1	20.5	.0019	1.785	6.35	442	1.785	6.35	442
PV28	0.32:0.32:1	19.0	.0019	1.785	6.35	483	1.785	6.35	483

Tabla 4.3 Resultados paneles serie PV

Panel	$V_{cr}$	$V_{u,exp}$	$V_{u,Stev}$	$\frac{V_{u,exp}}{V_{u,Stev}}$	$V_{u,calc}$	$\frac{V_{u,exp}}{V_{u,Stev}}$	$\frac{V_{u,Stev}}{V_{u,calc}}$
PV3	1.66	3.07	3.38	0.908	3.455	0.889	0.98
PV4	1.79	2.89	3.12	0.926	3.206	0.901	0.97
PV6	2.00	4.55	5.30	0.858	5.340	0.852	0.99
PV9	1.38	3.74	4.47	0.837	4.586	0.816	0.97
PV10	1.86	3.97	3.97	1.000	4.033	0.984	0.98
PV11	1.66	3.56	3.96	0.899	3.997	0.891	0.99
PV12	1.73	3.13	2.79	1.122	2.901	1.079	0.96
PV16	2.07	2.14	2.27	0.943	2.284	0.937	0.99
PV18	2.00	3.04	3.07	0.990	3.145	0.967	0.98
PV19	2.07	3.95	3.87	1.021	3.959	0.998	0.98
PV20	2.21	4.26	4.25	1.002	4.333	0.983	0.98
PV21	2.35	5.03	5.16	0.975	5.215	0.965	0.99
PV22	2.42	6.07	6.16	0.985	6.194	0.980	0.99
PV23	3.73	8.87	7.37	1.204	7.428	1.194	0.99
PV25	4.14	9.12	7.98	1.143	8.077	1.129	0.99
PV27	2.04	6.35	6.43	0.988	6.464	0.982	0.99
PV28	1.66	5.80	5.59	1.038	5.621	1.032	0.99
<b>MEDIA</b>				<b>0.990</b>		<b>0.975</b>	<b>0.99</b>
<b>C. V. (%)</b>				<b>9.84</b>		<b>9.89</b>	<b>0.99</b>

Tabla 4.4 Datos paneles serie PB

Panel	$\sigma_x:\sigma_y:\tau_{xy}$	$f'_c$	$\epsilon'_c$	$\rho_{sx}$	$d_{bx}$	$f_{syx}$	$\rho_{sy}$
PB4	0.96:0:1	16.40	0.001875	1.085	6.55	423	0
PB5	0.97:-1.03:1	23.50	0.001780	1.085	6.55	415	0
PB6	1:0:1	17.63	0.001860	1.085	6.55	425	0
PB7	1.89:0:1	20.24	0.002150	1.085	6.55	425	0
PB8	2.98:0:1	20.36	0.001950	1.085	6.55	425	0
PB10	5.94:0:1	24.02	0.001875	1.085	6.55	433	0
PB12	0:0:1	23.05	0.001538	1.085	6.55	433	0
PB14	3.01:0:1	41.10	0.002813	2.023	6.32	489	0
PB15	0:0:1	38.40	0.003163	2.023	6.32	485	0
PB16	1.96:0:1	41.70	0.003225	2.023	6.32	502	0
PB17	5.93:0:1	41.60	0.003075	2.023	6.32	502	0
PB18	0:0:1	25.30	0.002230	2.195	6.59	402	0
PB19	1.01:0:1	20.00	0.001913	2.195	6.59	402	0
PB20	2.04:0:1	21.70	0.001888	2.195	6.59	424	0
PB21	3.08:0:1	21.80	0.001800	2.195	6.59	402	0
PB22	6.09:0:1	17.60	0.002025	2.195	6.59	433	0
PB28	1.98:0:1	22.70	0.002013	2.195	6.59	426	0
PB29	2.02:0:1	41.60	0.002600	2.023	6.32	496	0
PB30	2.96:0:1	40.40	0.002600	2.023	6.32	496	0
PB31	5.78:0:1	43.40	0.003000	2.023	6.32	496	0

Tabla 4.5 Resultados paneles serie PB

Panel	$V_{cr}$	$V_{u,exp}$	$V_{u,Stev}$	$\frac{V_{u,exp}}{V_{u,Stev}}$	$V_{u,calc}$	$\frac{V_{u,exp}}{V_{u,Stev}}$	$\frac{V_{u,Stev}}{V_{u,calc}}$
PB4	0.81	1.16	0.88	1.318	0.884	1.312	1.00
PB5	0.78	2.64	2.43	1.086	2.503	1.055	0.97
PB6	0.85	1.15	0.9	1.278	0.898	1.281	1.00
PB7	0.74	0.86	0.72	1.194	0.725	1.187	0.99
PB8	0.52	0.79	0.59	1.339	0.587	1.347	1.01
PB10	0.31	0.56	0.55	1.018	0.555	1.010	0.99
PB12	1.33	1.53	1.59	0.962	1.577	0.970	1.01
PB14	0.78	1.54	1.43	1.077	1.429	1.077	1.00
PB15	1.8	1.96	2.05	0.956	2.022	0.969	1.01
PB16	0.98	1.42	1.44	0.986	1.440	0.986	1.00
PB17	0.54	1.22	1.21	1.008	1.288	0.947	0.94
PB18	1.62	1.72	1.72	1.000	1.713	1.004	1.00
PB19	1.23	1.28	1.27	1.008	1.274	1.005	1.00
PB20	0.94	1.42	1.14	1.246	1.141	1.245	1.00
PB21	0.73	1.42	1.08	1.315	1.084	1.310	1.00
PB22	0.44	1.03	0.98	1.051	0.969	1.063	1.01
PB28	0.84	1.53	1.17	1.308	1.165	1.313	1.00
PB29	0.75	1.49	1.44	1.035	1.438	1.036	1.00
PB30	0.74	1.48	1.42	1.042	1.417	1.044	1.00
PB31	0.44	1.15	1.36	0.846	1.343	0.856	1.01
<b>MEDIA</b>				<b>1.104</b>		<b>1.092</b>	<b>0.999</b>
<b>C. V. (%)</b>				<b>13.70</b>		<b>13.83</b>	<b>1.65</b>

#### 4.4 ADAPTACIÓN AL MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE

En el capítulo tres se presentó el modelo teórico de corrección de cortante y se observó que se necesita disponer de un modelo constitutivo bidimensional para el hormigón armado. No obstante, de las tres componentes de tensiones y deformaciones que posee la ecuación constitutiva 2D, sólo hay que utilizar dos de sus componentes (Fig. 4.8).

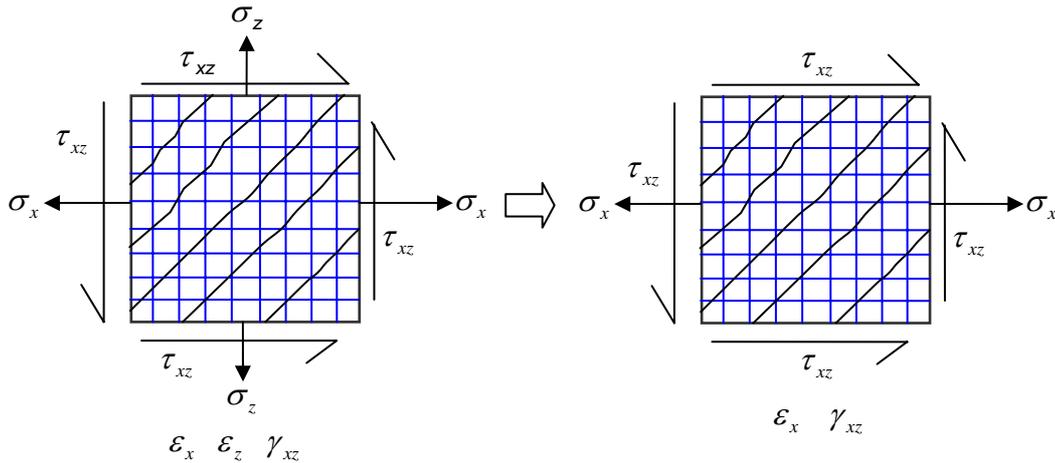


Fig. 4.8 Adaptación de la ecuación constitutiva 2D al cálculo seccional

En primer lugar, se agrupan las tensiones y deformaciones en dos componentes. En una componente se tienen en cuenta las tensiones y deformaciones que aparecen en la formulación de la sección y, en la otra componente, el resto de tensiones y deformaciones que se necesitan para evaluar el comportamiento constitutivo en tensión plana según indica la Fig. 4.8. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{bmatrix} \text{ siendo } \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{\sigma}_2 = \sigma_z \quad (4-23)$$

Análogamente:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} \text{ siendo } \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \varepsilon_z \quad (4-24)$$

Dado que el modelo es aplicable a regiones de continuidad o regiones B, se impone que la tensión normal vertical  $\sigma_z = 0$ , o bien,  $\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{0}$ , y como consecuencia

de esta nueva condición se puede obtener el valor de la deformación  $\epsilon_z$  que anula esta tensión.

Se lleva a cabo un proceso de condensación con la finalidad de que la ecuación constitutiva 2D se pueda utilizar en el modelo seccional. Así:

$$d\sigma_p = \frac{\partial \sigma_p}{\partial \epsilon_p} \cdot d\epsilon_p \quad (4-25)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \epsilon_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \epsilon_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \end{bmatrix}$$

Dado que se impone la condición  $\sigma_2 = 0$ , la variación de esta tensión también debe ser nula durante el proceso numérico de cálculo de la componente  $\epsilon_2$ , es decir,  $d\sigma_2 = 0$ .

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

$$D_{21} \cdot d\epsilon_1 + D_{22} \cdot d\epsilon_2 = 0$$

$$d\epsilon_2 = -D_{22}^{-1} \cdot D_{21} \cdot d\epsilon_1$$

$$d\sigma_1 = D_{11} \cdot d\epsilon_1 + D_{12} \cdot (-D_{22}^{-1} \cdot D_{21} \cdot d\epsilon_1) = (D_{11} - D_{12} \cdot D_{22}^{-1} \cdot D_{21}) \cdot d\epsilon_1 = D_1 \cdot d\epsilon_1$$

Cada vez que se quiera evaluar el comportamiento constitutivo de una capa de la sección se sigue un algoritmo de condensación en el que se impone un valor constante de la deformación  $\epsilon_1$ . En este proceso, la única incógnita que se tiene en cuenta es  $\epsilon_2$ , y hay que encontrar su valor para que  $\sigma_2 = 0$ . Por lo tanto, en el proceso de búsqueda de la solución se debe cumplir que:

$$d\sigma_2 = D_{22} \cdot d\epsilon_2 \quad (4-27)$$

$$d\epsilon_2 = D_{22}^{-1} \cdot d\sigma_2$$

Este proceso numérico se lleva a cabo empleando el método de Newton-Raphson según se expone en la Fig. 4.9 y su correspondiente diagrama de flujo

explicativo. Ahora bien, se producen situaciones en las que este método no converge. En estos casos, se recurre a métodos de resolución numérica más robustos de aseguramiento de la convergencia.

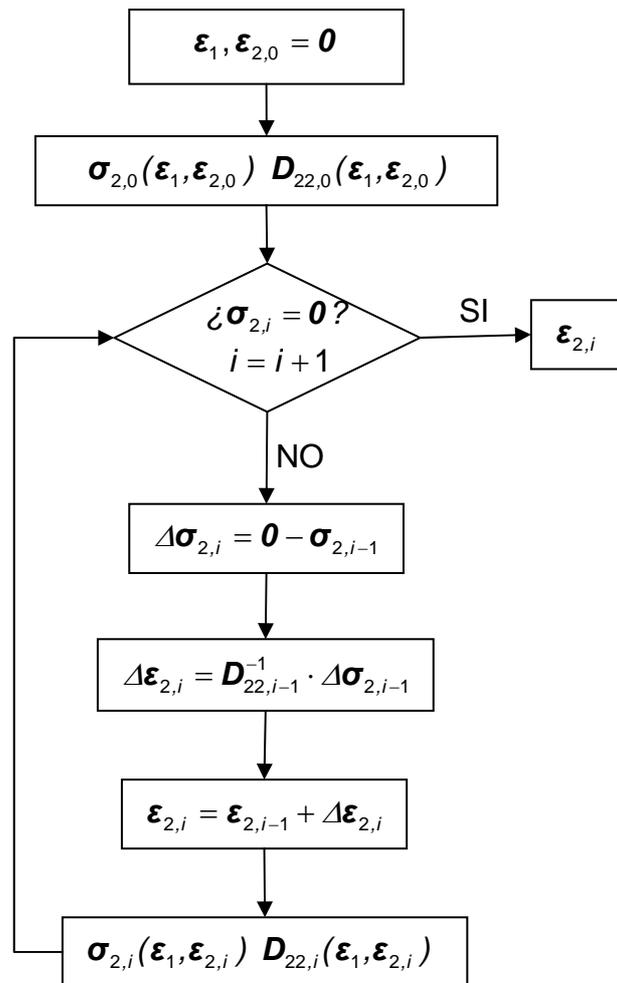
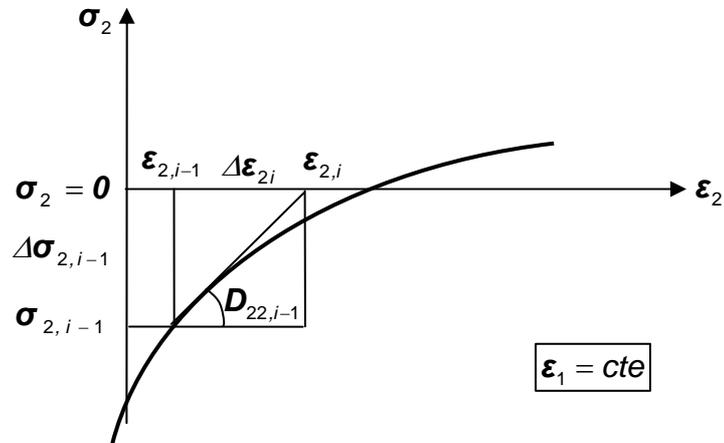


Fig. 4.9 Algoritmo de resolución según el método de Newton-Raphson

## 4.5 FENÓMENO DE TENSION-STIFFENING

Se introduce el fenómeno de *tension-stiffening* según la propuesta de Stevens et al. (1991) [77]. A continuación, se indica la forma de incorporarlo cuando se consideran armaduras distribuidas y discretas. En este modelo, el caso de armaduras discretas contempla la posibilidad de incluir armaduras pasivas longitudinales de forma concentrada y con comportamiento 1D.

### 4.5.1 ARMADURAS DISTRIBUIDAS

En el apartado 4.2.1.2, se incluye la influencia de la armadura distribuida en el comportamiento por tracción del hormigón. El equilibrio de fuerzas entre la fuerza total transmitida a tracción al hormigón y la fuerza total resistida por las armaduras por adherencia se puede expresar como:

$$\alpha \cdot f_{cr} \cdot A_c = n \cdot \pi \cdot d_b \cdot C \cdot f_{cr} \quad (4-28)$$

$\alpha \cdot f_{cr} \cdot A_c$  es la fuerza total transmitida al hormigón

$n \cdot \pi \cdot d_b$  es el área de contacto entre acero y hormigón

$C \cdot f_{cr}$  es el parámetro de adherencia entre acero y hormigón

Despejando de la anterior ecuación, el factor  $\alpha$  resulta ser igual a:

$$\alpha = \frac{C \cdot n \cdot \pi \cdot d_b}{A_c} = \frac{4 \cdot C}{d_b} \cdot \frac{n \cdot \pi \cdot d_b^2}{4 \cdot A_c} = \frac{4 \cdot C}{d_b} \cdot \frac{A_s}{A_c} = C_t \cdot \frac{\rho_s}{d_b} \quad (4-29)$$

$C_t = 4 \cdot C$  es, a su vez, un parámetro de adherencia con unidades de longitud. Según Stevens et al. (1991) [77], se recomienda tomar

$C_t = 75$  mm.

### 4.5.2 ARMADURAS DISCRETAS

Para el caso de armaduras discretas se plantea nuevamente el equilibrio entre la fuerza total transmitida por adherencia al hormigón y la fuerza total resistida por las armaduras por adherencia (Fig. 4.10).

La fuerza total transmitida al hormigón es igual a:  $\frac{\alpha_{max} \cdot f_{cr}}{2} \cdot 15 \cdot d_b \cdot B$

El área de adherencia entre las armaduras y el hormigón es:  $n \cdot \pi \cdot d_b$

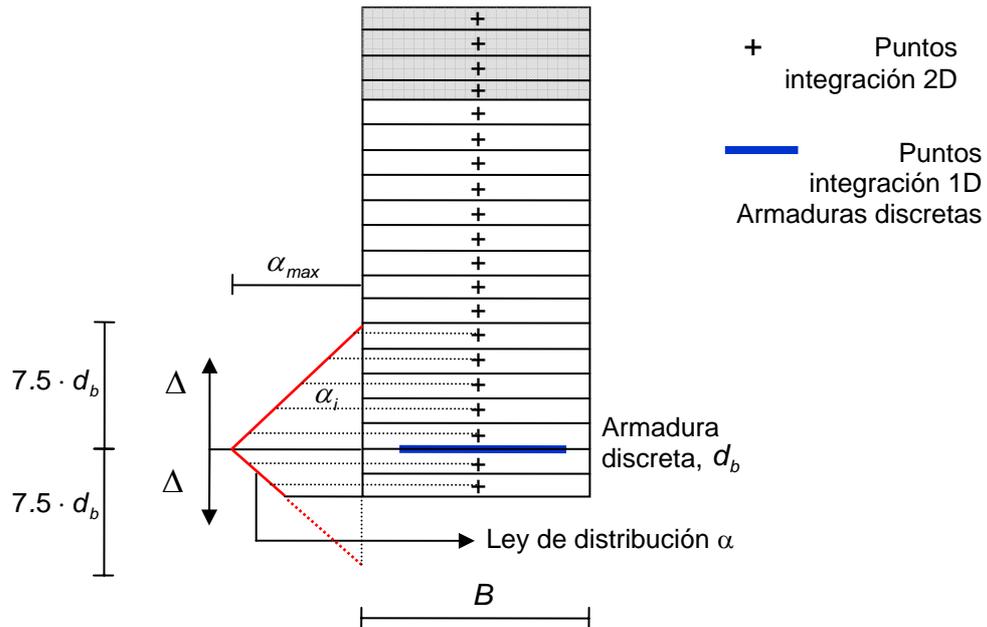


Fig. 4.10 Tension-stiffening con presencia de armaduras discretas

El parámetro de adherencia se evalúa como:  $C \cdot C_b \cdot f_{cr}$

donde:

$C_t = 4 \cdot C$  es el mismo parámetro de adherencia empleado para las armaduras distribuidas.

$C_b$  es un factor que tiene en cuenta la efectividad de la transmisión de la adherencia. Para el caso de adherencia perfecta se toma  $C_b = 1$ . En este trabajo se considera en todo momento adherencia perfecta entre las armaduras y el hormigón.

Por lo tanto, el equilibrio se puede expresar como sigue:

$$\frac{\alpha_{max} \cdot f_{cr}}{2} \cdot 15 \cdot d_b \cdot B = n \cdot \pi \cdot d_b \cdot C \cdot f_{cr} \quad (4-30)$$

y despejando  $\alpha_{max}$  de la ecuación anterior:

$$\alpha_{max} = \frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot C}{15 \cdot B} = \frac{C_t \cdot n \cdot \pi}{30 \cdot B} \quad (4-31)$$

El factor  $\alpha$  se calcula para todos los puntos de integración situados a una distancia menor que  $7.5 \cdot d_b$  de la posición de las armaduras discretas. A partir del valor máximo que se acaba de calcular, se obtiene el resto de valores suponiendo que se produce una variación lineal (Ley de distribución  $\alpha$ ) desde el valor máximo,

en la posición de la armadura discreta, hasta un valor igual a 0, a una distancia de  $7.5 \cdot d_b$  de esta última (Fig. 4.10).

Por lo tanto, suponiendo que el punto de integración se encuentra situado a una distancia  $\Delta \leq 7.5 \cdot d_b$  de la posición de la armadura discreta, el factor  $\alpha$  adoptará el siguiente valor:

$$\alpha = \left(1 - \frac{\Delta}{7.5 \cdot d_b}\right) \cdot \frac{C_t \cdot n \cdot \pi}{30 \cdot B} \quad (4-32)$$

La expresión anterior se puede reordenar de la siguiente manera:

$$\alpha = \left(1 - \frac{\Delta}{7.5 \cdot d_b}\right) \cdot \frac{C_t \cdot n \cdot \pi}{30 \cdot B} \cdot \frac{d_b^2 \cdot 4}{d_b^2 \cdot 4} = \left(1 - \frac{\Delta}{7.5 \cdot d_b}\right) \cdot \frac{C_t}{d_b} \cdot \frac{A_s}{7.5 \cdot B \cdot d_b}$$

$$\alpha = \frac{C_t}{d_b} \cdot \rho_{s,dis} \quad (4-33)$$

siendo:

$$\rho_{s,dis} = \left(1 - \frac{\Delta}{7.5 \cdot d_b}\right) \cdot \frac{A_s}{7.5 \cdot B \cdot d_b} \quad \text{la cuantía de armadura longitudinal}$$

equivalente que afecta a la rama de *tension-stiffening* debida a la presencia de las armaduras colocadas de forma discreta.

La anterior expresión del fenómeno de *tension-stiffening* facilita el proceso de implementación numérica, puesto que este coeficiente depende exclusivamente de la configuración del armado dispuesto. Por consiguiente, es suficiente con evaluar sólo una vez, al principio del proceso numérico, las cuantías equivalentes para cada paquete de armaduras discretas y sumar este efecto al producido por cada uno de los paquetes de armadura distribuidas.

En la ecuación (4-9d) se lleva a cabo un sumatorio extensible a todas las familias de armaduras distribuidas. Para el caso de armaduras discretas, se debe extender esta suma a todos y cada uno de los paquetes de armaduras discretas consideradas.

En el caso de las armaduras discretas no se ha tenido en cuenta el mecanismo resistente producido por el efecto pasador de las armaduras.

# CAPÍTULO 5

## IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE

## **CAPÍTULO 5. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE**

En este capítulo se describe la implementación numérica del modelo teórico de corrección de cortante desarrollado en este trabajo de investigación. Este modelo teórico de corrección de cortante ha sido implementado tomando como soporte la aplicación FEDEASLab (2001) [23] (2004) [24]. La *toolbox* de Matlab© (2004) [38] FEDEASLab es una herramienta para el análisis no lineal de estructuras bajo solicitaciones estáticas y dinámicas. Es una herramienta que permite desarrollar e implementar con facilidad nuevos elementos, secciones y ecuaciones constitutivas. Sirve además para simular el comportamiento de pequeñas estructuras en el ámbito de la investigación y la docencia. Esta herramienta fue creada en el año 1998 por el Prof. Filip C. Filippou, Universidad de California, Berkeley, como ayuda para la docencia de los cursos de análisis estructural. En la actualidad, FEDEASLab es una robusta herramienta dentro del ámbito de investigación del análisis no lineal de estructuras.

En primer lugar se establece la estructuración del programa, distinguiendo los diferentes niveles de análisis que se han tenido en cuenta: estructura, elemento, sección y ecuación constitutiva.

En segundo lugar se explica el denominado bucle de corrección de cortante y se describen brevemente los diferentes métodos numéricos de resolución utilizados para llevar a cabo con éxito la implementación numérica del modelo.

### **5.1 ESTRUCTURACIÓN DEL PROGRAMA**

El modelo propuesto se ha implementado tanto a nivel estructura como a nivel sección. Siguiendo la estructuración del programa FEDEASLab anteriormente citado se han programado una serie de funciones que se han incluido en los siguientes niveles de análisis: elemento, sección y ecuaciones constitutivas. En el análisis a nivel estructura, se ha empleado el potencial de la aplicación FEDEASLab, ya que se han podido utilizar las funciones a nivel estructura de la misma. En este sentido, se han aprovechado los algoritmos de resolución numérica presentes en esta aplicación. Sin embargo, en el análisis a nivel sección se han tenido que incluir nuevas funciones de resolución numérica.

En la Fig. 5.1 se muestra el diagrama de flujo que se sigue para la determinación del estado de un elemento.

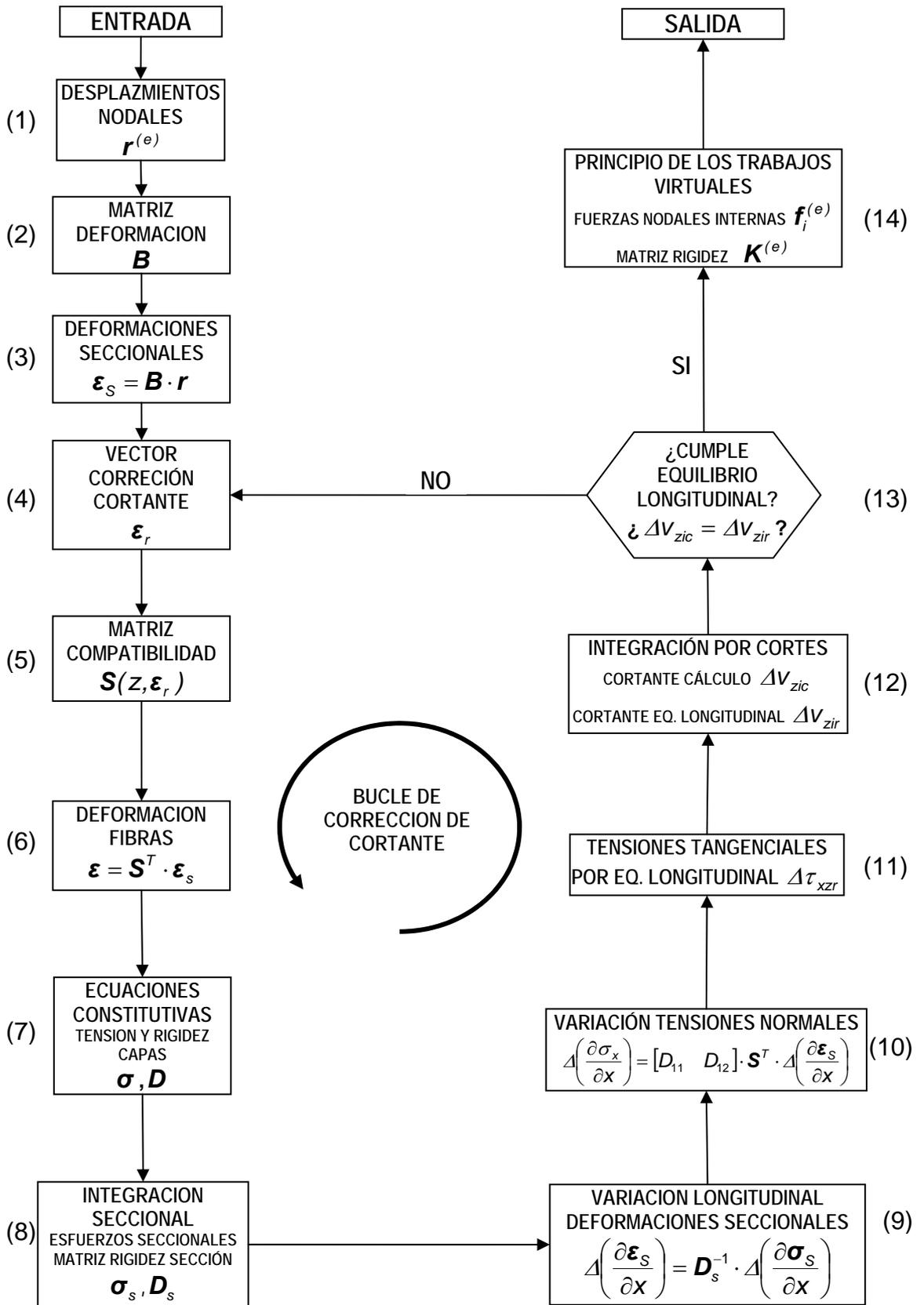


Fig. 5.1. Determinación del estado de un elemento

Se parte de una estructura equilibrada a un determinado nivel de carga. Con el fin de conseguir el equilibrio en el siguiente escalón de carga, se requiere evaluar de forma iterativa el estado de la estructura para unos determinados desplazamientos nodales. Para cada iteración se obtienen las correspondientes fuerzas nodales internas y la matriz de rigidez de cada elemento. En cada iteración se siguen los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Obtención de los desplazamientos nodales para cada elemento:  $\mathbf{r}^{(e)}$
- **Paso 2:** Se evalúa para cada uno de los puntos de integración  $\xi$  (secciones del elemento) la correspondiente matriz de deformación:  $\mathbf{B}(\xi)$
- **Paso 3:** Se calculan las deformaciones seccionales para cada punto de integración:  $\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}^{(e)}$
- **Paso 4:** Se fija un valor para el vector de corrección de cortante:  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$

Este vector adopta los valores correspondientes a la función de corrección de cortante en los cortes aplicados en la sección. En el caso de secciones rectangulares se puede tomar como valor inicial para este vector el correspondiente a una parábola que se anula en los bordes superior e inferior de la sección y con coeficiente 5/4, como si se tratase de un material elástico y lineal. Para el resto de casos, se puede considerar el vector de corrección de cortante obtenido de la última determinación del estado del elemento.

- **Paso 5:** Se calcula la matriz de compatibilidad  $\mathbf{S}$  para cada una de las capas que componen la sección. Se necesita calcular el factor de corrección  $\alpha$  de cada capa, que depende de la posición  $z$  de la misma y del vector de corrección de cortante  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ .

**Paso 6:** Se calculan las deformaciones de cada una de las fibras de la sección:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s$$

- **Paso 7:** Conocida la deformación para cada una de las capas, se aplican las ecuaciones constitutivas. Se obtiene el vector de tensiones y la matriz de rigidez de cada capa:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

La aplicación de las ecuaciones constitutivas se realiza de modo distinto según se trate de una armadura pasiva discreta o de una capa de hormigón. Para el caso del acero discreto se anulan las siguientes componentes:  $\tau_{xz}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$  y  $D_{22}$ .

- **Paso 8:** Se procede a integrar las tensiones y la rigidez en toda la sección con el fin de obtener los esfuerzos seccionales  $\sigma_s$  y la matriz de rigidez de la sección  $D_s$ .
- **Paso 9:** Se calcula la variación de las deformaciones seccionales en función de la rigidez seccional y de los esfuerzos seccionales obtenidos en el paso 8.

$$\Delta \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}{\partial x} \right) = \mathbf{D}_s^{-1} \cdot \Delta \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_s}{\partial x} \right) \approx \mathbf{D}_s^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \hat{V}_z \end{bmatrix}$$

- **Paso 10:** Se obtiene el incremento de las variaciones de las tensiones normales con respecto a la dirección longitudinal de la pieza:

$$\Delta \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) = [D_{11} \quad D_{12}] \cdot \mathbf{S}^T \cdot \Delta \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}{\partial x} \right)$$

- **Paso 11:** Se calcula el incremento de tensiones tangenciales deducidas por equilibrio longitudinal ( $\Delta \tau_{xzt}$ )

$$\Delta \tau_{xzt}(z) = \frac{\iint_{A(z)} \Delta \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) \cdot dA}{B(z)}$$

- **Paso 12:** Se integra nuevamente sobre la sección pero en porciones delimitadas por los diferentes cortes practicados. Se integran, por una parte, el incremento de las tensiones tangenciales  $\Delta \tau_{xz}$  obtenidas por cálculo y, por otra parte, el incremento de las tensiones tangenciales  $\Delta \tau_{xzt}$  obtenidas por equilibrio longitudinal.

$$\Delta V_{zic} = \iint_{A(z_i)} \Delta \tau_{xz} \cdot dA$$

$$\Delta V_{zir} = \iint_{A(z_i)} \Delta \tau_{xzt} \cdot dA$$

- **Paso 13:** Se comprueba si se cumple el equilibrio longitudinal para cada uno de los cortes practicados. Se cumple el equilibrio para cada corte si la diferencia

entre el incremento de cortante transmitido por cálculo y el transmitido por equilibrio longitudinal es menor que una tolerancia establecida.

Si la verificación es correcta se sigue al paso 14. En caso contrario, se fija un nuevo valor para el vector de corrección de cortante  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  y se vuelve al paso 5. Esto genera el denominado bucle de corrección de cortante tal y como se indica en la Fig. 5.1. Este bucle se caracteriza por buscar el vector  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  óptimo que permite el equilibrio longitudinal para cada corte practicado. Es importante indicar que en todo el bucle se mantiene constante el vector de deformaciones seccionales  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ .

- **Paso 14:** Una vez convergido el bucle de corrección de cortante, se aplican las ecuaciones de equilibrio a nivel elemento a través del principio de los trabajos virtuales. Esto permite obtener el vector de fuerzas nodales internas  $\mathbf{f}_i^{(e)}$  y la matriz de rigidez del elemento  $\mathbf{K}^{(e)}$

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl \qquad \mathbf{K}^{(e)} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{B} \cdot dl$$

## 5.2 BUCLE DE CORRECCIÓN DE CORTANTE

En este apartado se expone la estrategia que se sigue para proponer el vector de corrección de cortante  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  que permite verificar el equilibrio longitudinal por cortes.

En realidad, se trata de resolver el sistema 2, tal y como queda indicado en el apartado 3.1.3.2 del capítulo 3. En este bucle se mantiene constante en todo momento el vector de deformaciones seccionales  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ , mientras que el vector de corrección  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  es la incógnita del sistema.

El método de resolución numérica de este sistema de ecuaciones no lineal se lleva a cabo por el método de Newton-Raphson. Sin embargo, la resolución mediante este método conlleva dificultades al ser aplicado a elementos de hormigón armado. Se producen situaciones en las que no se llega a la resolución del sistema con la convergencia establecida.

Por este motivo, se recurre en aquellos casos en los que no se obtiene solución por el método de Newton-Raphson al uso de otro método de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Concretamente se emplea un método que no

requiere de la evaluación de la matriz jacobiana. La rapidez de los métodos que no se basan en la matriz jacobiana hace más lento la solución numérica. Sin embargo, se da preferencia al hecho de llegar a una solución correcta. Como método de resolución se utiliza el “*trust-region dogleg method*”, que es una variante del “*Powell dogleg method*” según aparece en la referencia Powell (1970) [53].

Finalmente, en la Fig. 5.2 se esquematiza el caso correspondiente a una sección con comportamiento no lineal. Sobre la misma se aplica un nivel de esfuerzos exteriores constante. Se observa que para cada una de las iteraciones se recurre al bucle de corrección de cortante que modifica la hipótesis cinemática para permitir que se cumpla el equilibrio longitudinal entre capas. Tal y como se muestra en la Fig. 5.2, es esperable que la variación de esfuerzos que se produce en cada iteración disminuya. Se debe llegar, en el límite, a un estado de convergencia en el que se cumpla el equilibrio seccional para el nuevo escalón de carga y el equilibrio en la dirección longitudinal.

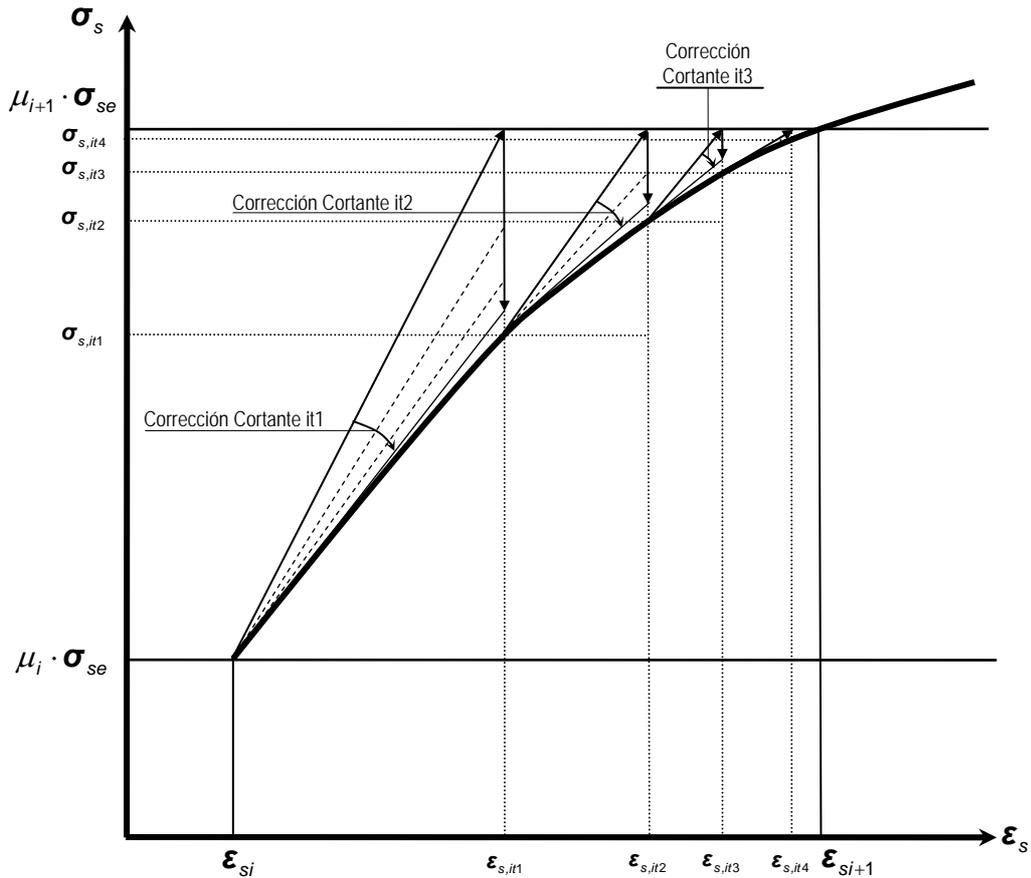


Fig. 5.2 Procedimiento de corrección de cortante para un escalón de carga



# CAPÍTULO 6

## VALIDACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE

## **CAPÍTULO 6. VALIDACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO TEÓRICO DE CORRECCIÓN DE CORTANTE**

En este capítulo se procede a la validación numérica del modelo teórico de corrección de cortante. En primer lugar, se analiza la respuesta del modelo utilizando elementos lineales con material con comportamiento elástico y lineal. Se estudia la posible aparición del efecto de bloqueo del cortante y las formas de poder evitarlo. A continuación, se valida numéricamente el modelo considerando ecuaciones constitutivas no lineales mediante la utilización de un material con comportamiento elastoplástico. Se compara, para el caso de un conector de cortante metálico, la respuesta del modelo propuesto con los resultados obtenidos de teorías tradicionales de vigas. En algunas de las validaciones realizadas se compara con los resultados de elementos lineales con comportamiento Euler-Bernouilli (EBT). La formulación del elemento finito formulado según la hipótesis cinemática EBT se puede consultar en el anejo 2.

### **6.1 COMPORTAMIENTO CON MATERIAL ELÁSTICO Y LINEAL**

Este apartado persigue una doble finalidad. Por una parte, se quiere asegurar que el modelo propuesto tiene controlado el fenómeno de bloqueo de cortante. Este problema es común en elementos finitos en los que se tiene en cuenta la deformación por cortante y que están formulados en rigidez, tal y como es el caso. Por otra parte, la utilización de este modelo con elementos de hormigón armado pasa por demostrar la idoneidad de la respuesta del modelo con materiales simples como el material elástico y lineal. Para este material se conocen las soluciones teóricas exactas para ciertos casos.

El efecto de bloqueo de cortante se origina debido a la existencia de un grado de interpolación del campo de desplazamientos no coherente. Esto provoca que la energía de deformación por cortante esté sobrevalorada incluso en elementos de mucha esbeltez donde, por lógica, la energía por flexión debiera ser la más dominante. Las principales soluciones que habitualmente se plantean para abordar este problema pasan por llevar a cabo un proceso de integración reducida y/o utilizar funciones de interpolación para los desplazamientos transversales de orden superior al de los giros.

Se comparan los resultados obtenidos con el modelo propuesto con la solución teórica exacta e incluso con otras teorías de vigas. Se lleva a cabo este estudio de validación numérica para el caso de una viga ménsula rectangular con

carga puntual en su extremo, una viga biapoyada rectangular con carga puntual centrada y una viga biapoyada doble T con carga puntual centrada.

### 6.1.1 VIGA MÉNSULA RECTANGULAR CON CARGA PUNTUAL EN EXTREMO

Se estudia el comportamiento de una viga en ménsula de longitud  $L$  con una carga puntual  $P$  en su extremo (Fig. 6.1). Se considera que la sección transversal es rectangular de dimensiones  $B \times H$  y que el material es elástico y lineal con módulo de elasticidad longitudinal  $E$  y transversal  $G$ . La flecha teórica máxima según la teoría de vigas de Euler-Bernoulli (EBT) y la teoría de Timoshenko es igual a:

$$w_{max,EBT} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \text{ y } w_{max,TBT} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{P \cdot L}{G \cdot A \cdot k_s} \quad (6-1)$$

donde  $k_s$  es el factor de corrección de cortante cuyo valor es igual a 5/6 para el caso de secciones rectangulares de material elástico y lineal, según Cowper (1966) [19].

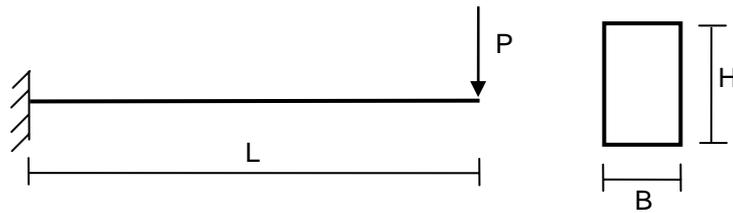


Fig. 6.1 Viga ménsula rectangular con carga puntual en extremo

Se hace un estudio considerando un solo elemento finito. Se considera una sección cuadrada y se toman los siguientes valores:

$$B = 1 \text{ m}$$

$$H = 1 \text{ m}$$

$$E = 100000 \text{ MPa}$$

$$L = 5 \text{ m}$$

$$\nu = 0.3 \text{ y } G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 38462 \text{ MPa}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

La sección se divide en 200 capas y se toman dos puntos de integración en el elemento.

El análisis se realiza para el caso de viga con comportamiento según EBT, según TBT (sin considerar ningún coeficiente corrector de cortante), con perfil parabólico con coeficiente 5/4 (PAR) y según el modelo general de corrección de cortante (GEN) presentado en el apartado 3.2. Además, se repite el análisis para los distintos casos con el elemento finito de Timoshenko con función de interpolación parabólica y con función de interpolación cúbica.

Para el caso planteado, los valores de las flechas teóricas exactas en el extremo del voladizo según EBT y TBT son:

$$w_{\max,EBT} = 0.00500000 \text{ m}$$

$$w_{\max,TBT} = 0.00515600 \text{ m}$$

En la Tabla 6.1 aparece indicada la flecha obtenida numéricamente en el extremo del voladizo para todos los casos contemplados, así como el error cometido con respecto a la solución teórica exacta.

Tabla 6.1 Flecha máxima y % error en extremo de voladizo

	$w_{\max}$ (m)	% Error / $w_{\max,TBT}$
EBT	0.00500013	3.02318
TBT Cuadrático	0.00513013	0.50184
PAR Cuadrático	0.00515613	0.00242
GEN Cuadrático	0.00515612	0.00239
TBT Cúbico	0.00513013	0.50184
PAR Cúbico	0.00515613	0.00261
GEN Cúbico	0.00515612	0.00239

El hecho de llevar a cabo una integración reducida con sólo dos puntos de integración por elemento permite tener una aproximación muy buena. Además, coinciden con mucha precisión los resultados correspondientes a los comportamientos PAR y GEN. La solución obtenida con el modelo general para las deformaciones transversales es exactamente igual que el parabólico, lo cual es lógico ya que se trata de un elemento viga con sección transversal rectangular y compuesta por material elástico y lineal. Además, los resultados que se obtienen con el elemento cuadrático y cúbico son iguales.

### 6.1.2 VIGA BIAPOYADA RECTANGULAR CON CARGA PUNTUAL CENTRADA

En este ejemplo se estudia el comportamiento de una viga biapoyada de longitud  $L$  con carga puntual centrada  $P$  (Fig. 6.2). Al igual que en el caso anterior, se considera una sección transversal rectangular de dimensiones  $B \times H$  con material elástico y lineal. Las expresiones correspondientes a la flecha teórica máxima según las teorías EBT y TBT son las siguientes:

$$W_{\max,EBT} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} \text{ y } W_{\max,TBT} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{P \cdot L}{4 \cdot G \cdot A \cdot k_s} \quad (6-2)$$

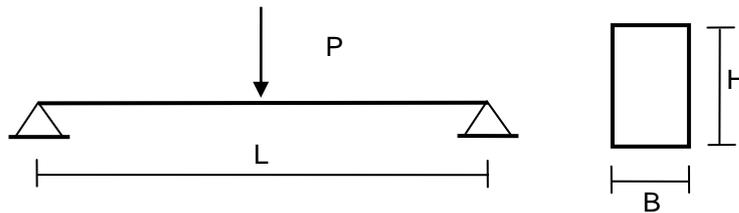


Fig. 6.2. Viga biapoyada rectangular con carga puntual centrada

Se hace un estudio comparando la flecha teórica máxima en centro-luz con la flecha obtenida numéricamente. Se toman los siguientes valores fijos en todos los cálculos realizados:

$$B = 1 \text{ m}$$

$$H = 1 \text{ m}$$

$$E = 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.25 \text{ y } G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$P = 1 \text{ N}$$

Se analiza la viga según un comportamiento TBT, con perfil parabólico con coeficiente  $5/4$  (PAR) y según el modelo general de corrección de cortante (modelo general, GEN).

Con la finalidad de observar el grado de precisión alcanzable, se consideran tres luces  $L$  distintas: 5, 10 y 100 m. La viga se discretiza en 1, 2, 4, 5 y 10 elementos finitos de la misma longitud. Se hacen análisis para los casos de 2 y 3 puntos de integración por elemento ( $nIP$ ). Finalmente, cada sección transversal se divide en 20, 100 y 200 capas de idéntica área. Se utiliza el elemento finito de Timoshenko con interpolación parabólica.

Las flechas teóricas máximas, según EBT y TBT, para las tres longitudes consideradas aparecen en la Tabla 6.2. Se considera un coeficiente corrector de cortante  $k_s$  igual a 5/6.

Tabla 6.2 Flecha máxima teórica viga biapoyada rectangular con carga puntual centrada

L (m)	$W_{max,EBT}$ (m)	$W_{max,TBT}$ (m)
5	0.000031250	0.000035000
10	0.000250000	0.000257500
100	0.250000000	0.250075000

En la Tabla 6.3 se muestra el error cometido, en cada uno de los análisis realizados, con respecto a la solución exacta según la teoría de Timoshenko. Se ha calculado el error cometido mediante la siguiente expresión:

$$\%Error = \frac{W_{max,calc} - W_{max,TBT}}{W_{max,TBT}} \cdot 100 \quad (6-3)$$

Se repiten los mismos cálculos para el caso del elemento finito de Timoshenko con interpolación cúbica. Se toman 3 y 4 puntos de integración por elemento respectivamente. Los resultados obtenidos se recogen en la Tabla 6.4.

Tras analizar los resultados de los errores obtenidos para el caso de elemento parabólico se extraen las siguientes conclusiones:

- Sólo el caso de integración con  $nIP = 2$  arroja resultados satisfactorios.
- Cuando la carga puntual actúa en el nodo central de un elemento finito, como ocurre en los casos con 1 y con 5 elementos, los errores son mayores que en el resto de casos con cargas aplicadas en los nodos extremos de los elementos.
- Al aumentar el número de capas en las secciones la aproximación mejora.
- Los resultados obtenidos mediante el modelo con perfil parabólico 5/4 y con el modelo general arrojan resultados idénticos y más precisos que con el modelo TBT, exceptuando el caso de la viga más esbelta. Esto resulta lógico ya que se está analizando una sección rectangular compuesta por material elástico y lineal.

Se extraen las mismas conclusiones para el caso cúbico con la siguiente matización: tanto el caso de integración con  $nIP = 3$  como  $nIP=4$  arrojan resultados satisfactorios e idénticos.

Tabla 6.3 % error en estimación de flecha máxima. Elemento cuadrático TBT

NUM ELEM	TIPO	nIP	2			3		
		ncapas	20	50	100	20	50	100
1	TIM	L/h = 5	-26.171	-26.312	-26.333	-26.171	-26.312	-26.333
		L/h = 10	-25.182	-25.335	-25.357	-25.182	-25.335	-25.357
		L/h =100	-24.816	-24.974	-24.996	-24.816	-24.974	-24.996
	PAR	L/h = 5	-24.832	-24.973	-24.993	-24.832	-24.973	-24.993
		L/h = 10	-24.818	-24.971	-24.993	-24.818	-24.971	-24.993
		L/h=100	-24.812	-24.970	-24.993	-24.812	-24.970	-24.993
	GEN	L/h = 5	-24.832	-24.973	-24.993	-24.832	-24.973	-24.993
		L/h = 10	-24.818	-24.971	-24.993	-24.818	-24.971	-24.993
		L/h=100	-24.812	-24.970	-24.993	-24.812	-24.970	-24.993
2	TIM	L/h = 5	-1.562	-1.750	-1.777	-9.034	-9.195	-9.219
		L/h = 10	-0.242	-0.447	-0.476	-16.477	-16.636	-16.659
		L/h =100	0.246	0.035	0.005	-24.685	-24.843	-24.866
	PAR	L/h = 5	0.224	0.036	0.009	-6.370	-6.534	-6.557
		L/h = 10	0.243	0.039	0.010	-14.979	-15.139	-15.162
		L/h=100	0.251	0.040	0.010	-24.656	-24.813	-24.836
	GEN	L/h = 5	0.224	0.036	0.009	-6.370	-6.534	-6.557
		L/h = 10	0.243	0.039	0.010	-14.979	-15.139	-15.162
		L/h=100	0.251	0.040	0.010	-24.656	-24.813	-24.836
4	TIM	L/h = 5	-1.562	-1.750	-1.777	-2.185	-2.370	-2.397
		L/h = 10	-0.242	-0.447	-0.476	-2.273	-2.471	-2.499
		L/h =100	0.246	0.035	0.005	-5.896	-6.093	-6.121
	PAR	L/h = 5	0.224	0.036	0.009	-0.305	-0.491	-0.518
		L/h = 10	0.243	0.039	0.010	-1.549	-1.747	-1.775
		L/h=100	0.251	0.040	0.010	-5.867	-6.064	-6.092
	GEN	L/h = 5	0.224	0.036	0.009	-0.305	-0.491	-0.518
		L/h = 10	0.243	0.039	0.010	-1.549	-1.747	-1.775
		L/h=100	0.251	0.040	0.010	-5.867	-6.064	-6.092
5	TIM	L/h = 5	-2.187	-2.375	-2.402	-2.400	-2.587	-2.613
		L/h = 10	-0.558	-0.762	-0.791	-1.315	-1.516	-1.545
		L/h=100	0.044	-0.166	-0.196	-3.066	-3.270	-3.299
	PAR	L/h = 5	-0.491	-0.679	-0.705	-0.671	-0.857	-0.884
		L/h = 10	-0.097	-0.301	-0.330	-0.754	-0.956	-0.984
		L/h =100	0.049	-0.162	-0.191	-3.043	-3.246	-3.275
	GEN	L/h = 5	-0.491	-0.679	-0.705	-0.671	-0.857	-0.884
		L/h = 5	-1.500	-2.113	-2.273	-1.697	-2.319	-2.481
		L/h = 10	-0.371	-0.691	-0.756	-1.084	-1.427	-1.501
10	TIM	L/h = 5	-1.562	-1.750	-1.777	-1.580	-1.768	-1.794
		L/h = 10	-0.242	-0.447	-0.476	-0.314	-0.519	-0.548
		L/h=100	0.246	0.035	0.005	-0.646	-0.854	-0.884
	PAR	L/h = 5	0.224	0.036	0.009	0.209	0.021	-0.006
		L/h = 10	0.243	0.039	0.010	0.182	-0.022	-0.051
		L/h =100	0.251	0.040	0.010	-0.621	-0.830	-0.859
	GEN	L/h = 5	0.224	0.036	0.009	0.209	0.021	-0.006
		L/h = 10	0.243	0.039	0.010	0.182	-0.022	-0.051
		L/h=100	0.251	0.040	0.010	-0.621	-0.830	-0.859

Tabla 6.4 % error en estimación de flecha máxima. Elemento cúbico TBT

NUM ELEM	TIPO	nIP	3			4		
		ncapas	20	50	100	20	50	100
1	TIM	L/h = 5	-28.113	-28.251	-28.271	-33.016	-33.138	-33.156
		L/h = 10	-26.946	-27.096	-27.117	-35.882	-36.009	-36.027
		L/h = 100	-26.515	-26.669	-26.691	-38.358	-38.488	-38.506
	PAR	L/h = 5	-26.812	-26.990	-27.015	-31.223	-31.399	-31.424
		L/h = 10	-26.592	-26.753	-26.776	-35.129	-35.279	-35.300
		L/h = 100	-26.511	-26.666	-26.688	-38.348	-38.477	-38.496
	GEN	L/h = 5	-26.812	-26.990	-27.015	-31.223	-31.399	-31.424
		L/h = 10	-26.592	-26.753	-26.776	-35.129	-35.279	-35.300
		L/h = 100	-26.511	-26.666	-26.688	-38.348	-38.477	-38.496
2	TIM	L/h = 5	-1.562	-1.750	-1.777	-1.562	-1.750	-1.777
		L/h = 10	-0.242	-0.447	-0.476	-0.242	-0.447	-0.476
		L/h = 100	0.246	0.035	0.005	0.246	0.035	0.005
	PAR	L/h = 5	0.291	0.046	0.012	0.291	0.046	0.012
		L/h = 10	0.262	0.042	0.010	0.262	0.042	0.010
		L/h = 100	0.251	0.040	0.010	0.251	0.040	0.010
	GEN	L/h = 5	0.291	0.046	0.012	0.291	0.046	0.012
		L/h = 10	0.262	0.042	0.010	0.262	0.042	0.010
		L/h = 100	0.251	0.040	0.010	0.251	0.040	0.010
4	TIM	L/h = 5	-1.562	-1.750	-1.777	-1.562	-1.750	-1.777
		L/h = 10	-0.242	-0.447	-0.476	-0.242	-0.447	-0.476
		L/h = 100	0.246	0.035	0.005	0.246	0.035	0.005
	PAR	L/h = 5	0.291	0.046	0.012	0.291	0.046	0.012
		L/h = 10	0.262	0.042	0.010	0.262	0.042	0.010
		L/h = 100	0.251	0.040	0.010	0.251	0.040	0.010
	GEN	L/h = 5	0.291	0.046	0.012	0.291	0.046	0.012
		L/h = 10	0.262	0.042	0.010	0.262	0.042	0.010
		L/h = 100	0.251	0.040	0.010	0.251	0.040	0.010
5	TIM	L/h = 5	-2.769	-2.956	-2.982	-2.772	-2.959	-2.985
		L/h = 10	-1.251	-1.454	-1.483	-1.262	-1.465	-1.494
		L/h = 100	-0.690	-0.899	-0.928	-0.779	-0.987	-1.017
	PAR	L/h = 5	-0.994	-1.234	-1.269	-0.996	-1.237	-1.271
		L/h = 10	-0.768	-0.986	-1.017	-0.778	-0.995	-1.026
		L/h = 100	-0.685	-0.894	-0.924	-0.772	-0.981	-1.011
	GEN	L/h = 5	-0.994	-1.234	-1.269	-0.996	-1.237	-1.271
		L/h = 10	-0.768	-0.986	-1.017	-0.778	-0.995	-1.026
		L/h = 100	-0.685	-0.894	-0.924	-0.772	-0.981	-1.011
10	TIM	L/h = 5	-1.562	-1.750	-1.777	-1.562	-1.750	-1.777
		L/h = 10	-0.242	-0.447	-0.476	-0.242	-0.447	-0.476
		L/h = 100	0.246	0.035	0.005	0.246	0.035	0.005
	PAR	L/h = 5	0.291	0.046	0.012	0.291	0.046	0.012
		L/h = 10	0.262	0.042	0.010	0.262	0.042	0.010
		L/h = 100	0.251	0.040	0.010	0.251	0.040	0.010
	GEN	L/h = 5	0.291	0.046	0.012	0.291	0.046	0.012
		L/h = 10	0.262	0.042	0.010	0.262	0.042	0.010
		L/h = 100	0.251	0.040	0.010	0.251	0.040	0.010

### 6.1.3 VIGA BIAPOYADA DOBLE T CON CARGA PUNTUAL CENTRADA

En este ejemplo se analiza el comportamiento de una viga biapoyada con sección transversal doble T sometida a una carga puntual en su centro. La flecha máxima teórica responde a la expresión (6-2) teniendo en cuenta que se debe estimar el coeficiente de corrección de cortante  $k_s$  de la nueva sección transversal.

Según Cowper (1966) [19] se puede estimar el coeficiente corrector de cortante en una viga doble T de pared delgada (Fig. 6.3) a partir de la siguiente expresión deducida de la teoría tridimensional de la elasticidad:

$$k_s = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3)+\nu(11+66m+135m^2+90m^3)+30n^2(m+m^2)+5\nu n^2(8m+9m^2)} \quad (6-4)$$

siendo:  $m = \frac{2 \cdot B \cdot t_f}{H \cdot t_w}$  y  $n = \frac{B}{H}$

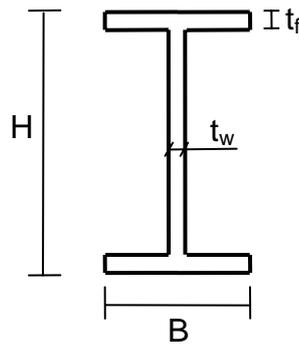


Fig. 6.3 Sección transversal de pared delgada doble T

Se consideran los siguientes parámetros en el análisis:

$$B = 0.15 \text{ m}$$

$$H = 0.30 \text{ m}$$

$$t_f = 0.0107 \text{ m}$$

$$t_w = 0.0071 \text{ m}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.2 \text{ y } G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = 83333.33 \text{ MPa}$$

$$P = 10 \text{ kN}$$

Con lo que se obtiene un factor de corrección de cortante  $k_{s,Cowper} = 0.38475601$

Se analiza la viga según un comportamiento TBT, con perfil parabólico 5/4 (PAR) y según el modelo general de corrección de cortante (GEN). La viga se discretiza en 4 elementos finitos de la misma longitud. Cada sección transversal se divide en 5 fibras en las alas y 90 fibras en el alma. Se realiza el análisis utilizando, por una parte, el elemento finito de Timoshenko con interpolación cuadrática, y por otra parte, el elemento de Timoshenko con interpolación cúbica. En el primer caso se toman dos puntos de integración por elemento, y en el segundo caso se consideran tres.

Los valores de las flechas teóricas según EBT y TBT en centro luz son:

$$w_{\max,EBT} = 0.00083344 \text{ m y } w_{\max,TBT} = 0.00089355 \text{ m}$$

Los valores obtenidos numéricamente se indican en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5 Flecha teórica máxima en viga biapoyada doble T con carga puntual centrada

TIPO	$W_{\max}$ (m)	%Error
EBT	0.0008334681	0.00350632
TBT Cuadrático	0.0008566081	-4.13593469
PAR Cuadrático	0.0008999520	0.71590118
GEN Cuadrático	0.0008907394	-0.31509361
TBT Cúbico	0.0008565981	-4.13540372
PAR Cúbico	0.0008999520	0.71646247
GEN Cúbico	0.0008907394	-0.31453807

La aproximación conseguida con los dos tipos de elementos es prácticamente idéntica. Además, la aproximación mediante el modelo general es la mejor de entre todas aunque es de menor precisión que las obtenidas en casos anteriores. Para aclarar con más exactitud de dónde procede este descenso en la precisión se lleva a cabo un análisis de la sección transversal frente a cortante únicamente y se deduce numéricamente cuál es el factor de corrección de cortante obtenido para cada uno de los tipos de análisis realizados. En cada análisis, se calcula cuál es el cortante a aplicar en la sección para provocar una deformación angular  $\gamma_{0xz} = 10^{-3}$ . En la Tabla 6.6 se muestran los resultados calculados, la estimación numérica del factor de corrección de cortante  $k_s$  y el porcentaje de error cometido en la estimación con respecto al valor teórico según Cowper (1966) [19].

Tabla 6.6 Estimación numérica del factor de corrección de cortante

TIPO	$V_z$ (kN)	$k_s$	$k_s/k_{s,Cowper}$
TBT	432.338333	1	2.60
PAR	150.412459	0.34790452	0.90
GEN	174.607377	0.40386744	1.05

En el caso PAR el error es de un 10% y en el caso TBT del 260%. Se puede observar que la mejor estimación corresponde al modelo general ya que hay un error en la estimación del coeficiente  $k_s$  de aproximadamente un 5%. Se interpreta que este error es el causante de la menor precisión obtenida en los análisis realizados a nivel estructura. Si se calcula la  $w_{\max, TBT}$  pero empleando el coeficiente  $k_s$  obtenido por el modelo general ( $k_s=0.40386744$ ) se obtiene una flecha igual a 0.00089071 m y un error relativo de tan sólo 0.003%. Por ello, la falta de precisión es achacable al error en la estimación del coeficiente  $k_s$ .

El motivo por el cual se produce este error estriba en las hipótesis consideradas por Cowper (1966) [19] y en el modelo general de corrección de cortante. Cowper considera que la sección es de pared delgada y tiene en cuenta, con las simplificaciones habituales de este tipo de secciones, la variación de tensiones tangenciales y el alabeo que se origina en las alas. El modelo general de corrección de cortante ignora este efecto de alabeo y considera que en el ala existe una distribución constante de tensiones tangenciales que sólo depende de la distancia en vertical de la capa al centro de referencia de esfuerzos de la sección. A pesar de todo, se obtiene una buena aproximación que resulta mejor que otras del estilo del perfil parabólico.

Finalmente, para cerrar este apartado se presenta en la Fig. 6.4 la distribución de tensiones tangenciales obtenidas en cada uno de los análisis realizados a nivel sección y su comparación con la distribución de tensiones tangenciales obtenida por equilibrio longitudinal. Se observa que sólo para el caso del modelo general la solución es exacta, ya que coinciden en cada una de las capas las tensiones tangenciales obtenidas por cálculo y por equilibrio longitudinal entre las capas. Se observa cómo se capta adecuadamente el salto de tensiones entre el ala y el alma. La solución TBT es la que peor aproximación tiene mientras que la parabólica aproxima algo mejor.

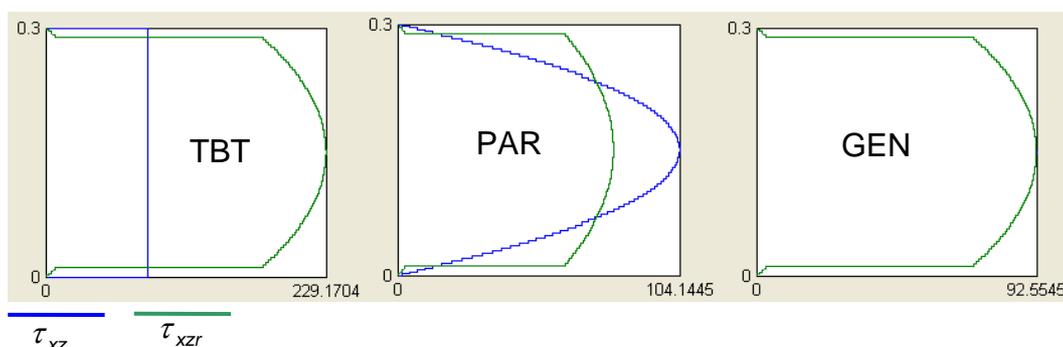


Fig. 6.4 Distribución de tensiones tangenciales en sección doble T (Ud. MPa)

## 6.2 COMPORTAMIENTO CON MATERIAL NO LINEAL

A continuación, se valida el modelo utilizando un material no lineal con comportamiento elastoplástico correspondiente al modelo de plasticidad  $J_2$ . Este modelo constitutivo es adecuado para simular el comportamiento de elementos estructurales de acero sometidos a cargas monótonas y crecientes e incluso para simular la respuesta cíclica del material mediante la introducción de un efecto de endurecimiento dinámico no lineal. Se emplea en esta validación numérica la versión generalizada del modelo de plasticidad  $J_2$  según Lubliner et al. (1993) [34]. La formulación referente a esta ecuación constitutiva puede ser consultada en la referencia anterior, o bien, en la tesis doctoral de Saritas (2006) [67]. Además, se utiliza la implementación numérica de esta ecuación constitutiva en FEDEASLab por cortesía de Filippou (UC Berkeley).

Los parámetros necesarios para determinar esta ecuación constitutiva son: (1) Módulo de Young ( $E$ ); (2) Límite elástico ( $\sigma_y$ ); (3) Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ); (4) Módulo de endurecimiento isotrópico ( $H_i$ ); (5) Módulo de endurecimiento dinámico ( $H_k$ ).

Se emplea un conector metálico de cortante formado por un perfil laminado con sección transversal en doble T del tipo W18×40 con las características geométricas que vienen definidas en la Fig. 6.5. Este elemento corresponde a la probeta 4 de los ensayos de Hjelmstad y Popov (1983) [27].

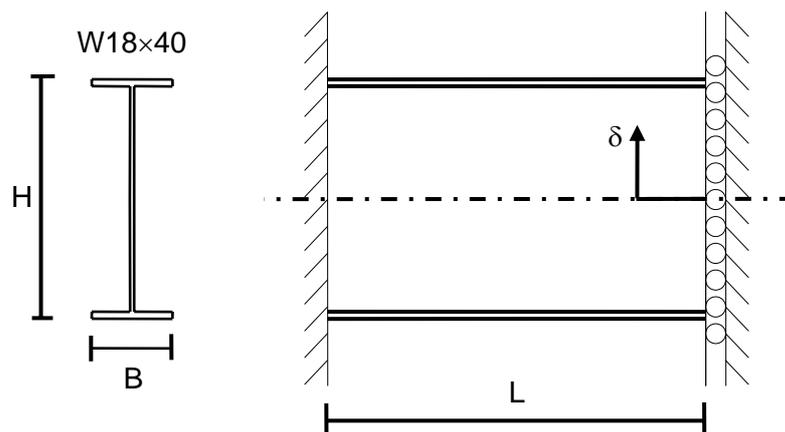


Fig. 6.5 Conector metálico de cortante, Hjelmstad y Popov (1983) [27]

$$H = 0.4542 \text{ m}$$

$$B = 0.1520 \text{ m}$$

$$t_f = 0.0132 \text{ m}$$

$$t_w = 0.008 \text{ m}$$

$$L = 0.7112 \text{ m}$$

y se asignan las siguientes características para el material:

$$E = 193053.28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 275.79 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$H_i = 758.42 \text{ MPa}$$

$$H_k = 0 \text{ MPa}$$

En primer lugar, se lleva a cabo un análisis sometiendo a la sección a un esfuerzo cortante puro. Se discretizan las alas en 5 capas y el alma en 90 capas. Se impone una deformación angular  $\gamma_{0xz}=0.01$  en un total de 100 pasos con la finalidad de estudiar adecuadamente el proceso de plastificación. Se realiza un análisis suponiendo un perfil constante para la deformaciones transversales (TBT), un perfil parabólico con coeficiente 5/4 (PAR) y el modelo teórico de corrección de cortante con función de corrección general (GEN). Se pretende observar cómo responde esta sección frente a las distintas hipótesis cinemáticas cuando el material deja de comportarse como elástico y lineal.

En la Fig. 6.6 se representa, para cada una de las hipótesis cinemáticas contempladas, el cortante resistido frente a la deformación transversal seccional impuesta. Se observa cómo la hipótesis de Timoshenko arroja resultados enormemente altos comparados con las otras dos curvas. Esto se debe a que no se utiliza ningún tipo de corrección de cortante en esta hipótesis. Se impone, por lo tanto, en cada una de las capas de la sección una deformación transversal igual a la deformación angular de la sección  $\gamma_{0xz}$ .

Las pendientes de las ramas elásticas de cada una de las tres curvas representan la rigidez elástica a cortante de la sección y se pueden calcular numéricamente a partir de la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta V_z}{\Delta \gamma_{0xz}} = G \cdot A \cdot k_s \tag{6-5}$$

A partir de la ecuación anterior, se puede estimar numéricamente el coeficiente de corrección de cortante  $k_s$  para cada hipótesis. En la Fig. 6.6, se muestran los valores numéricos obtenidos.

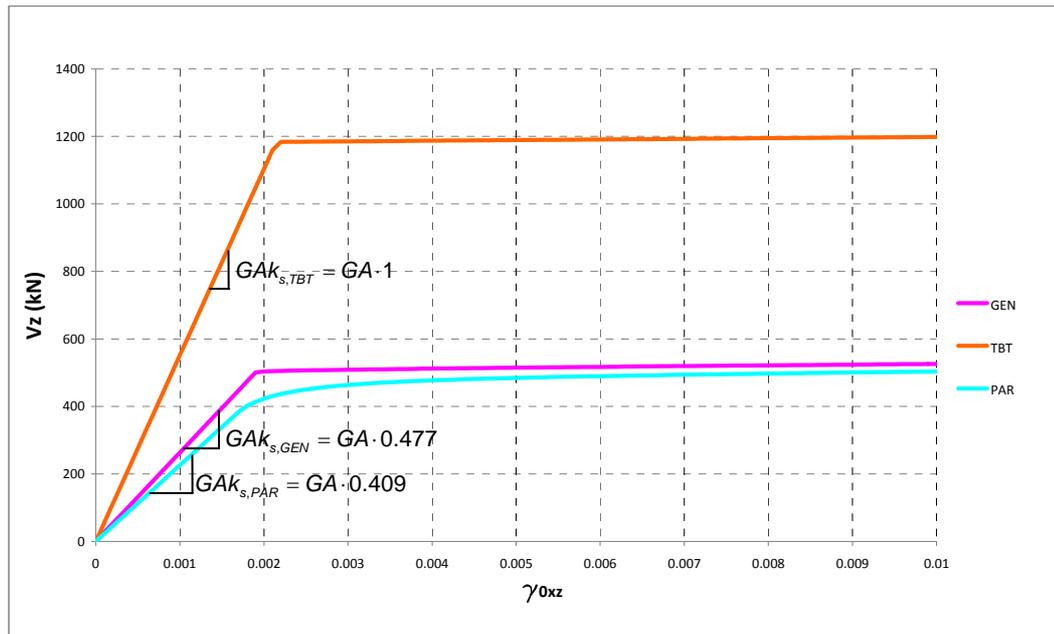


Fig. 6.6 Comparación curvas  $V_z-\gamma_{0xz}$  (Conector metálico de cortante)

La estimación de los coeficientes de corrección de cortante según los comportamientos TBT ( $k_{s,TBT}=1$ ), PAR ( $k_{s,PAR}=0.409$ ) y GEN ( $k_{s,GEN}=0.477$ ) se indican en la Fig. 6.6. Dentro del rango elástico el valor del coeficiente  $k_s$  se puede estimar también de forma teórica siguiendo la propuesta de Cowper (1966) [19] y se obtiene un valor igual a 0.466 que difiere en tan solo un 2.3% del valor obtenido por el modelo general que es la mejor aproximación proporciona.

En cuanto a la plastificación cabe destacar que en el caso parabólico la plastificación empieza en el centro de la sección y progresa hacia las capas más externas de forma paulatina. Este hecho se aprecia en una curva que va perdiendo de forma suave rigidez a cortante. Sin embargo, la solución del modelo general produce un cambio mucho más brusco entre la rama elástica y la de plastificación.

En este caso, la plastificación también empieza en el centro y evoluciona hacia las alas. Sin embargo, y como consecuencia de que la corrección de cortante es variable, se produce un incremento pronunciado de las deformaciones transversales de la zona plastificada frente a las deformaciones transversales de las capas que se encuentran a punto de plastificar (véase Fig. 6.7). Ambos efectos combinados producen un cambio brusco entre la rama elástica y la rama de plastificación. Con ello, la sección con el modelo general presenta una rigidez a cortante mayor en la rama elástica. La diferencia entre las curvas GEN y PAR decrece a medida que aumenta la deformación.

Con el fin de ilustrar mejor la evolución de la plastificación en las diferentes curvas se presentan los gráficos de distribuciones de tensiones tangenciales para los tres comportamientos (Fig. 6.7). También se incluyen las distribuciones de deformaciones transversales para cada una de las capas de la sección. Se muestra el estado correspondiente a un valor de deformación angular seccional  $\gamma_{0xz}$  igual a 0.003 correspondiente a una zona con comportamiento claramente plástico. Se trata de un gráfico tridimensional en el cual la sección transversal se encuentra abatida en el plano horizontal donde la parte derecha representa el borde superior de la sección. La magnitud se representa en dirección z para cada una de las capas.

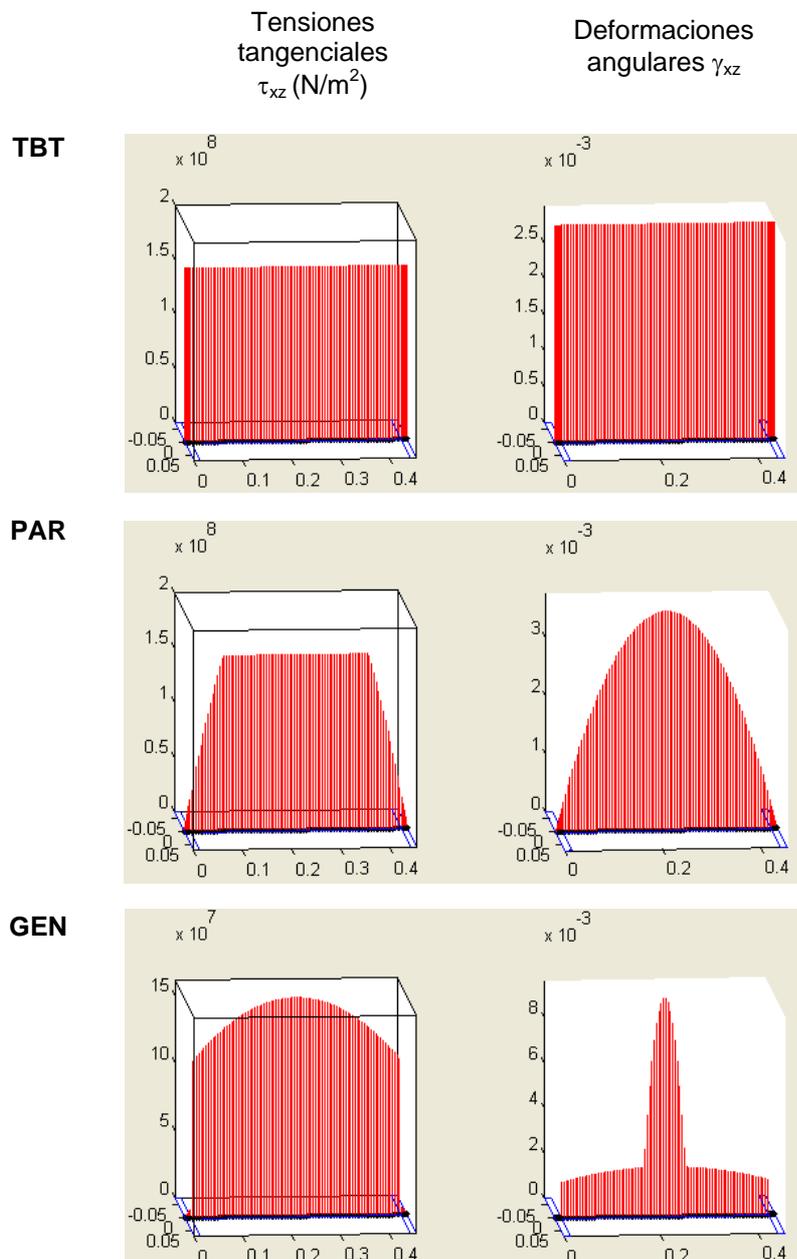


Fig. 6.7 Distribución de tensiones tangenciales y deformaciones angulares

Tras el estudio a nivel sección se realiza un análisis a nivel estructura utilizando exactamente el mismo tipo de sección transversal y con las mismas características. Se discretiza todo el conector en 2 elementos finitos de la misma longitud. Se repite el análisis para el caso del elemento de Timoshenko con funciones de interpolación cuadráticas y funciones de interpolación cúbicas. En el primer caso, se toman dos puntos de integración por elemento para controlar el efecto de bloqueo de cortante. En el segundo caso, se requieren tres puntos de integración. Para cada uno de los dos casos, se llevan a cabo un total de 4 análisis incluyendo las siguientes hipótesis cinemáticas: EBT, TBT, PAR y GEN. Se impone el desplazamiento vertical  $\delta$  de uno de los extremos del conector, tal y como aparece en la Fig. 6.5. El valor máximo del desplazamiento es igual a 0.125 m con un intervalo de paso de 0.01 m.

En la Fig. 6.8 se representa el cortante resistido frente al desplazamiento impuesto para todos los análisis realizados. Se puede observar un comportamiento similar al obtenido mediante los análisis a nivel sección, lo cual es lógico ya que se trata de un elemento que sufre fundamentalmente deformación por cortante.

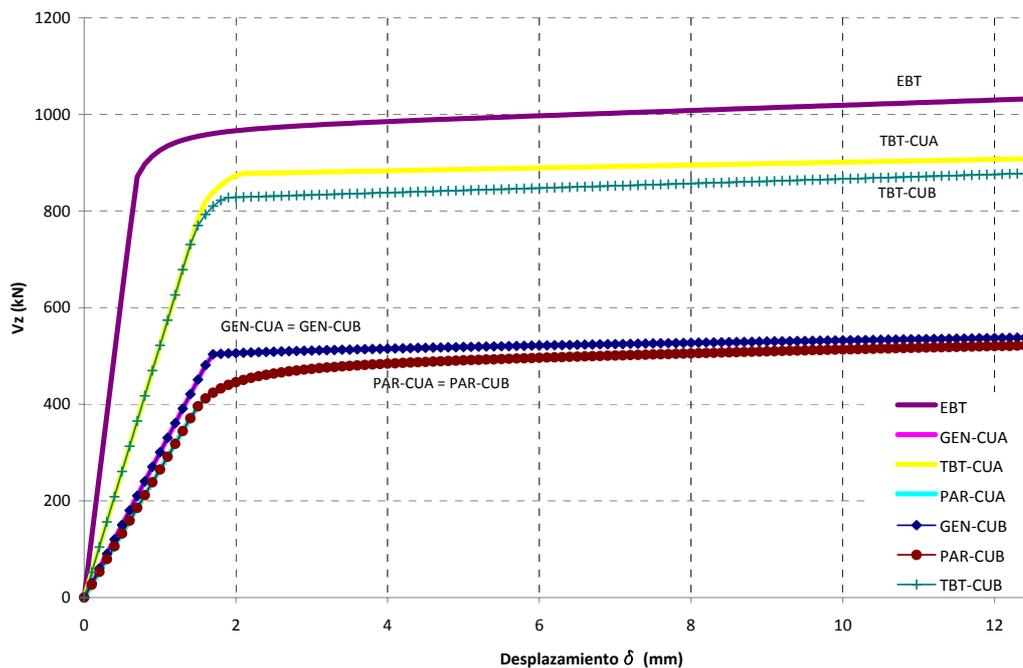


Fig. 6.8 Curvas  $V_z-\delta$  (Conector metálico de cortante)

Se observa una variación importante de la pendiente de la rama elástica según el tipo de hipótesis cinemática. Además, se mantienen de forma aproximada las mismas relaciones observadas y estudiadas a nivel sección. Destaca, a su vez, que la pendiente mayor corresponde al comportamiento de viga EBT.

Por otra parte, hay una gran diferencia en cuanto a la carga de plastificación. Mientras que para los casos GEN y PAR los resultados son similares, los resultados para los casos TBT y EBT son muy superiores. Para el caso TBT se justifica este resultado por el hecho de no haber incluido el coeficiente de corrección de cortante, que para esta sección adopta un valor igual a 0.466.

Para el caso de la viga EBT, el momento de plastificación alcanzado se asemeja mucho al momento último de plastificación que resulta considerando exclusivamente tensiones normales y cuyo valor para esta sección es:

$$M_p = \sigma_y \cdot W_G = 345.25 \text{ m kN}$$

y el correspondiente cortante de plastificación es igual a:

$$V_p = 2 \cdot \frac{M_p}{L} = 970.9 \text{ kN}$$

Por otra parte, la respuesta obtenida con el elemento de Timoshenko con interpolación cuadrática coincide con el de interpolación cúbica, tanto para el caso GEN como para el caso PAR. Sin embargo, cuando se emplea la hipótesis de Timoshenko se aprecia una variación significativa en la forma de plastificación.

Este fenómeno se debe a que las secciones que sirven como puntos de integración se encuentran en posiciones distintas en los dos tipos de análisis. Además, en ambos casos el esfuerzo cortante se mantiene constante pero hay una pequeña variación del esfuerzo flector aplicado sobre la sección.

Además, al existir interacción entre el esfuerzo flector y el esfuerzo cortante se origina una pequeña variación en el comportamiento. Es importante reseñar que la carga de rotura a nivel estructura ronda el valor de 900 kN, mientras que a nivel sección se llega a un cortante de agotamiento cercano a 1200 kN.

Para explicar el motivo de esta diferencia de cargas se repite el análisis con la hipótesis cinemática de Timoshenko para un caso hipotético de un conector de longitud prácticamente nula, en el cual el esfuerzo flector aplicado se anula. Concretamente se ha escogido una longitud cien veces menor que la longitud real del conector.

Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 6.9. Ahora se observa que los dos tipos de discretización arrojan resultados totalmente idénticos.

Además, el cortante de agotamiento coincide prácticamente con el cortante obtenido del análisis a nivel sección. Como consecuencia, queda explicada la discrepancia de resultados observada.

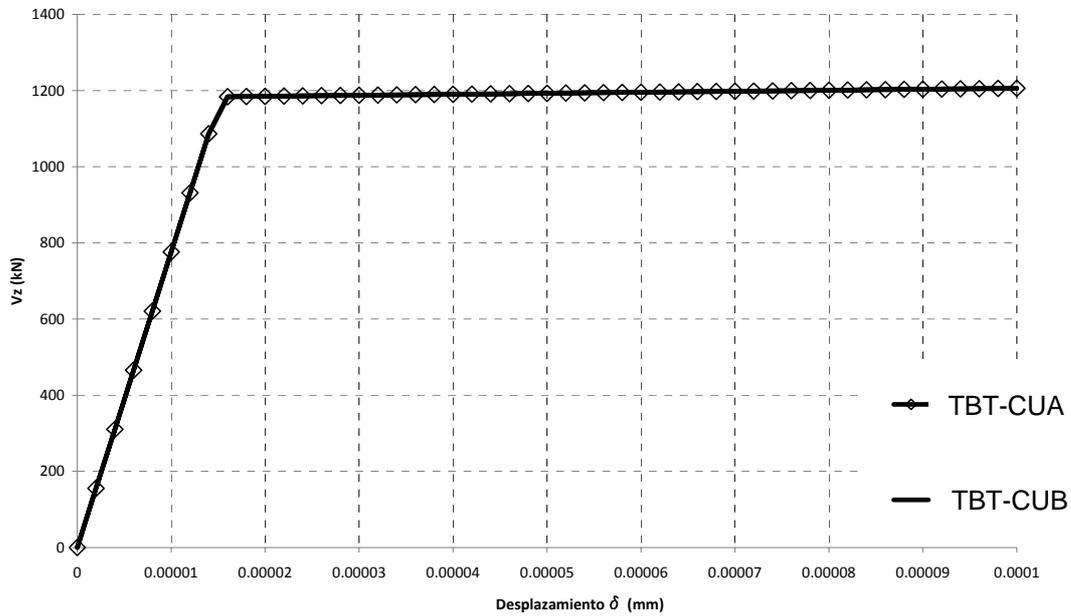


Fig. 6.9 Curvas  $V_z$ - $\delta$   $L=0$  (Conector metálico de cortante)

# CAPÍTULO 7

**VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DEL MODELO  
GENERAL DE CORRECCIÓN DE CORTANTE**

## **CAPÍTULO 7. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DEL MODELO GENERAL DE CORRECCIÓN DE CORTANTE**

### **7.1 INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se procede a verificar experimentalmente el modelo general de corrección de cortante. Se aplica este modelo y se contrastan los resultados obtenidos mediante ensayos experimentales en elementos viga de hormigón armado. Se ha recurrido a la bibliografía para obtener información de algunos ensayos de laboratorio frecuentemente empleados por distintos investigadores. . Concretamente se van a utilizar los ensayos realizados por Vecchio y Shim (2004) [90] y por Bresler y Scordelis 1963 [10].

El esquema que se sigue para todos los casos parte de la definición del dispositivo experimental y de todas las características geométricas de las probetas, así como de la caracterización de los materiales utilizados. Seguidamente, se indican todos los datos referentes al tipo de modelización utilizado. A continuación, se presentan los resultados numéricos y, finalmente, se comparan con los resultados experimentales

Se presentan resultados tanto a nivel sección como a nivel estructura. Además, se presentan resultados utilizando hipótesis cinemáticas tradicionales. Concretamente, se considera la viga de Euler-Bernouilli, la viga de Timoshenko y una hipótesis cinemática basada en un perfil parabólico fijo para la distribución de deformaciones angulares con coeficiente 5/4. El objetivo es estudiar cómo se ven modificados los resultados en función del tipo de teoría de vigas empleado. Se comparan la carga y el tipo de rotura, y se estudia cómo evoluciona el comportamiento en el proceso de ensayo.

### **7.2 ENSAYOS DE VECCHIO Y SHIM**

Vecchio y Shim (2004) [90] (Universidad de Toronto) publican un trabajo en el que se analiza el comportamiento de un conjunto de doce vigas de hormigón armado con roturas tanto por flexión como por cortante. Se trata de una réplica bastante fiel de la serie de vigas ensayada por Bresler y Scordelis 1963 [10]. El diseño de estas vigas es de gran interés dado que se desarrollan roturas por mecanismos de cortante y por flexión sin que exista entre ambos, en la mayoría de los casos, una distancia significativa en términos de nivel de carga. Por ello, el modelo que se valide con estos ensayos debe ser suficientemente preciso.

Todas las probetas tienen la misma sección transversal pero con diferentes configuraciones de armadura pasiva longitudinal y transversal. Se consideran sólo las nueve probetas que contienen armadura transversal.

### 7.2.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS VIGAS ANALIZADAS

Todas las vigas analizadas son de hormigón armado y con sección rectangular constante a lo largo de toda la viga. Las vigas están biapoyadas y han sido ensayadas desde el reposo hasta la rotura aplicando exclusivamente una carga puntual en su centro tal y como indica la Fig. 7.1.

Los detalles correspondientes a las secciones transversales aparecen en la Fig. 7.2. En la Tabla 7.1 se pueden consultar los detalles de todas las vigas y en la Tabla 7.2 se encuentran los datos correspondientes a los aceros empleados.

En cuanto a la resistencia a tracción del hormigón se emplea la resistencia deducida de la expresión  $f_{cr} = 0.33 \cdot \sqrt{f'_c}$ , en lugar de la resistencia a tracción obtenida en laboratorio. Esta expresión representa una cota inferior de la resistencia a tracción del hormigón. Tal y como se indicó en el capítulo 4, éste es un valor que se recomienda utilizar para la ecuación constitutiva del hormigón. A su vez, esta resistencia es la misma adoptada por Vecchio y Shim (2004) [90] en la modelización numérica de estas probetas.

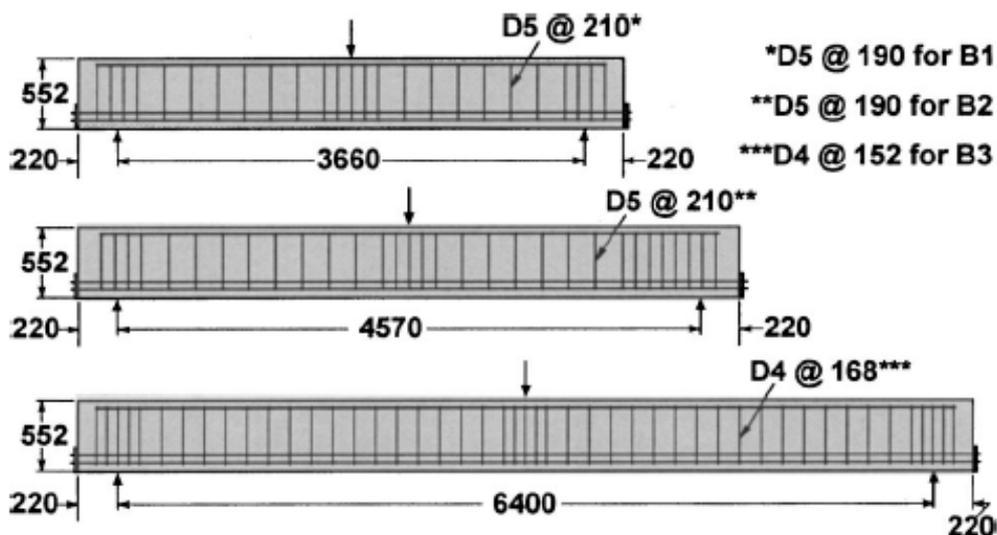


Fig. 7.1 Dispositivo experimental vigas Vecchio y Shim (2004) [90]

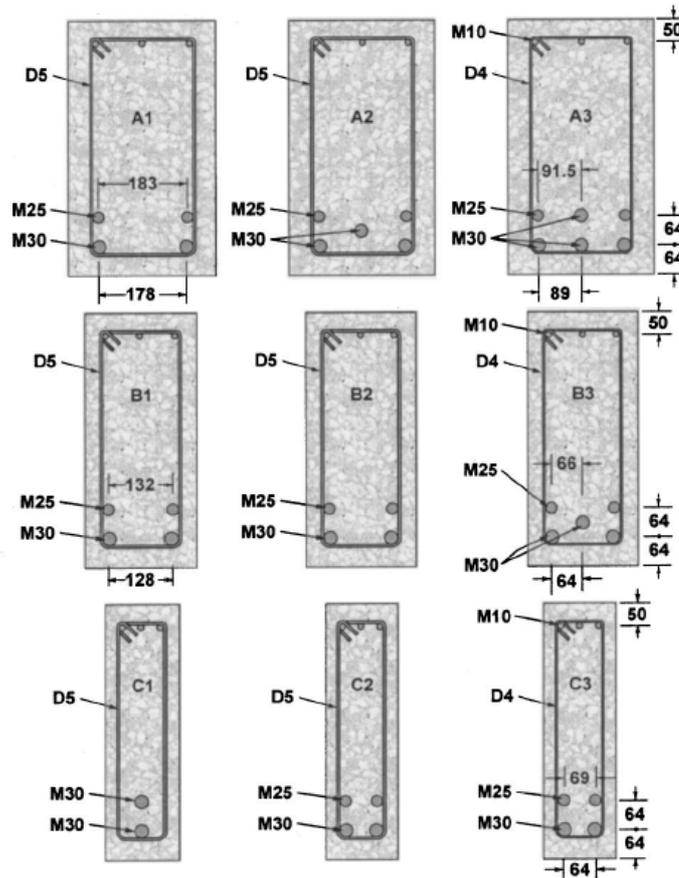


Fig. 7.2 Secciones transversales vigas Vecchio y Shim (2004) [90]

Tabla 7.1 Detalles vigas Vecchio y Shim (2004) [90]

Viga	B (m)	H (m)	L (m)	$f'_c$ (MPa)	$\varepsilon'_c$	$f_{cr}$ (MPa)
VS-A1	0.305	0.552	3.660	22.6	0.0016	2.37
VS-A2	0.305	0.552	4.570	25.9	0.0021	3.37
VS-A3	0.305	0.552	6.400	43.5	0.0019	3.13
VS-B1	0.229	0.552	3.660	22.6	0.0016	2.37
VS-B2	0.229	0.552	4.570	25.9	0.0021	3.37
VS-B3	0.229	0.552	6.400	43.5	0.0019	3.13
VS-C1	0.152	0.552	3.660	22.6	0.0016	2.37
VS-C2	0.152	0.552	4.570	25.9	0.0021	3.37
VS-C3	0.152	0.552	6.400	43.5	0.0019	3.13

Tabla 7.2 Aceros vigas Vecchio y Shim (2004) [90]

Armadura	$d_b$ (mm)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$f_{sy}$ (MPa)	$f_{su}$ (MPa)	$E_s$ (MPa)
M10	11.3	100	315	460	200000
M25 (Ser.2)	25.2	500	440	615	210000
M25 (Ser.1 y 3)	25.2	500	445	680	220000
M30	29.9	700	436	700	200000
D4	3.7	25.7	600	651	200000
D5	6.4	32.2	600	649	200000

Los datos presentados aquí han sido los estrictamente necesarios para realizar el análisis. Información más detallada puede consultarse en Vecchio y Shim (2004) [90].

### 7.2.2 MODELIZACIÓN VIGAS VECCHIO Y SHIM

Para cada probeta se realiza un análisis a nivel estructura. Se modeliza sólo media viga aprovechando su simetría.

Se subdivide cada una de las secciones transversales en tres regiones ( $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ ) con el objetivo de identificar la zona con presencia de armadura transversal (Fig. 7.3). Concretamente se considera que la influencia de esta armadura se extiende entre las posiciones que marcan el centro de gravedad de las ramas horizontales de los estribos (posiciones  $z_1$  y  $z_2$ ). En estas regiones se considera que la armadura transversal se encuentra uniformemente distribuida a lo largo de todo el ancho  $B$  de la sección transversal. En la región  $R_2$  se calcula la cuantía de armadura transversal en función del diámetro  $\phi_{st}$  y de la separación  $s_{st}$  de los estribos como:

$$\rho_v = \frac{\pi \cdot \phi_{st}^2}{2 \cdot s_{st} \cdot B} \quad (7-1)$$

Esta cuantía de armadura transversal se tiene en cuenta junto con las características del acero de armadura transversal y el tipo de hormigón. Todos estos datos son necesarios para caracterizar la ecuación constitutiva bidimensional del hormigón. El tratamiento de las armaduras longitudinales se realiza de forma discreta. Cada una de las armaduras sigue un comportamiento del acero unidimensional según lo indicado en el capítulo 4. El número de capas considerado es de veinte para la región  $R_2$  y de dos capas en las regiones  $R_1$  y  $R_3$ .

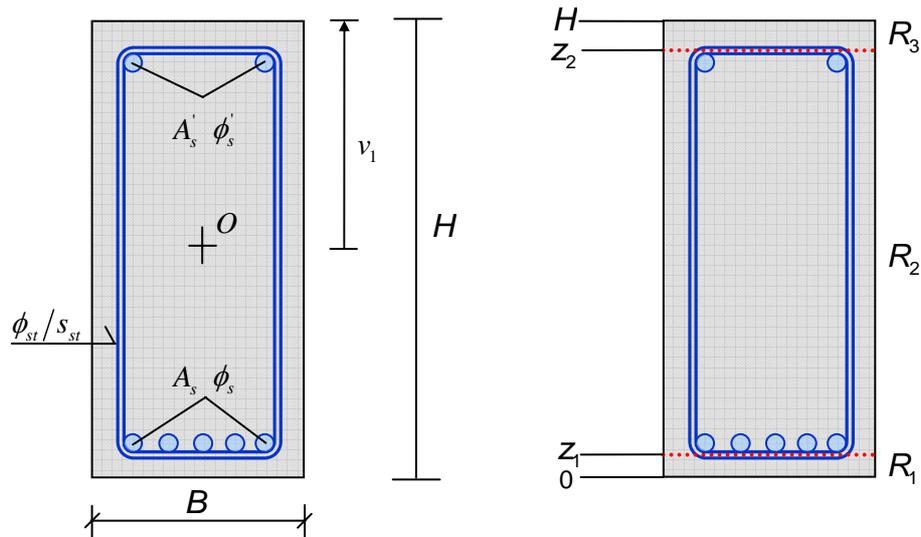


Fig. 7.3 Distribución en regiones vigas Vecchio y Shim

En la Tabla 7.3 figuran todos los datos que se emplean en la modelización de cada sección transversal.

Tabla 7.3 Modelización secciones transversales vigas Vecchio y Shim

VIGA	$z_1$ (mm)	$z_2$ (mm)	$\rho_v$	$f'_c$ (MPa)	$f_{cr}$ (MPa)	$n$	$E_0$ (MPa)	$\varepsilon_{cr}$
VS-A1	41.15	510.85	0.0010	22.6	1.57	2.129	26632	$5.89 \cdot 10^{-5}$
VS-A2	41.15	510.85	0.0010	25.9	1.68	2.324	21652	$7.76 \cdot 10^{-5}$
VS-A3	42.50	509.50	0.0010	43.5	2.18	3.359	32601	$6.68 \cdot 10^{-5}$
VS-B1	41.15	510.85	0.0015	22.6	1.57	2.129	26632	$5.89 \cdot 10^{-5}$
VS-B2	41.15	510.85	0.0015	25.9	1.68	2.324	21652	$7.76 \cdot 10^{-5}$
VS-B3	42.50	509.50	0.0015	43.5	2.18	3.359	32601	$6.68 \cdot 10^{-5}$
VS-C1	41.15	510.85	0.0020	22.6	1.57	2.129	26632	$5.89 \cdot 10^{-5}$
VS-C2	41.15	510.85	0.0020	25.9	1.68	2.324	21652	$7.76 \cdot 10^{-5}$
VS-C3	42.50	509.50	0.0020	43.5	2.18	3.359	32601	$6.68 \cdot 10^{-5}$

Para todos los aceros empleados se considera que la deformación última  $\varepsilon_{su}$  que se puede alcanzar es igual a 0.100. De este modo, se estima el módulo de endurecimiento tras la plastificación del acero según la siguiente expresión:

$$E_p = \frac{f_{su} - f_{sy}}{\varepsilon_{su} - f_{sy}/E_s} \quad (7-2)$$

siendo los módulos para cada uno de los aceros empleados los que se presentan en la Tabla 7.4.

Tabla 7.4 Módulos de endurecimiento aceros vigas Vecchio y Shim

Armadura	$E_p$ (MPa)
M10	1473
M25 (Ser.2)	1788
M25 (Ser.1 y 3)	2490
M30	2699
D4	526
D5	505

A continuación, se describe el tipo de modelización llevado a cabo para cada probeta. Se emplean tres modelos distintos en función de las tres luces que tienen las vigas. En la Fig. 7.4 aparece la modelización correspondiente al análisis que se realiza con el elemento finito de Timoshenko con funciones de interpolación parabólicas.

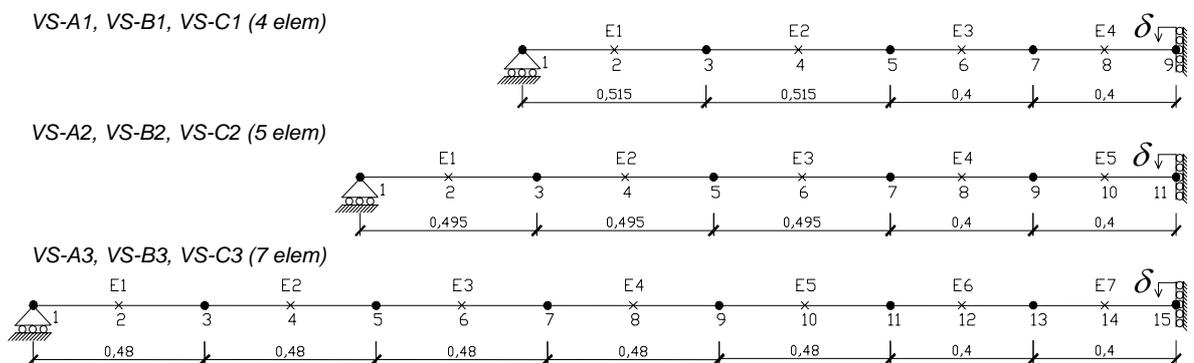


Fig. 7.4 Discretización en elementos finitos vigas Vecchio y Shim. Elemento TBT parabólico

Se subdivide cada viga en un conjunto de elementos lineales con longitudes que oscilan entre 0.4 y 0.515 m. En el nodo 1, correspondiente al apoyo, sólo se encuentra impedido el desplazamiento vertical, mientras que en el nodo del apoyo derecho, correspondiente a centro-luz, se restringen los movimientos de todos los grados de libertad a excepción del desplazamiento vertical ( $\delta$ ). De esta forma, queda asegurado que sólo se van a tener esfuerzos flectores y cortantes en toda la viga.

Se ha simulado la actuación de la carga en el centro de la viga como un desplazamiento impuesto  $\delta$  en dirección vertical y sentido hacia abajo tal y como

aparece en la Fig. 7.4. De esta forma, se simula de una manera más realista el ensayo de laboratorio, ya que el gato hidráulico transmite la carga a la viga tras imponer el desplazamiento vertical en el centro de la misma.

Con la finalidad de evitar problemas de bloqueo de cortante se toman dos puntos de integración en cada elemento finito. Además, se ha evitado colocar condiciones de contorno en los nodos centrales de los elementos.

Es un hecho perfectamente constatado, Schlaich (1987) [70], que aquellas partes de los elementos de hormigón armado que se encuentran en las zonas cercanas a los apoyos o en los puntos de aplicación de cargas se comportan como regiones D. En estas zonas, es de vital importancia considerar el comportamiento bidimensional del hormigón con tal de definir los campos de tensiones. Evidentemente, este tratamiento difiere radicalmente del que se hace en regiones B. En estas últimas, se consideran las tensiones normales que aparecen según la directriz de la pieza y se desprecian las tensiones normales en la dirección vertical.

El modelo propuesto en esta investigación es un modelo aplicable a regiones B. Se fundamenta en una hipótesis cinemática en la que se consideran tensiones normales en dirección  $x$  y tensiones tangenciales en dirección  $xz$ . No obstante, se considera que las tensiones normales en la dirección  $z$  son despreciables con respecto a las normales. Esta hipótesis se incumple claramente en las regiones D. Además, por tratarse de un modelo que incluye el efecto del cortante, el incumplimiento de esta hipótesis puede desvirtuar enormemente los resultados que se pudieran predecir. De hecho, una rama importante del campo de investigación del cortante en elementos de hormigón trata del comportamiento de regiones D (ACI-ASCE Committee 445 1998 [4]).

Para poder abordar este problema, se analiza primero la tipología de las roturas producidas en laboratorio para todas las probetas y se puede observar que todas ellas se producen por mecanismos de rotura por cortante y flexión típicos de regiones B. Por ello, a falta de formular un modelo híbrido que permita tratar regiones B y D simultáneamente, se tratan de forma diferencial aquellos elementos que se sitúan dentro de regiones D con respecto a los que lo hacen en regiones B.

Se actúa evitando una rotura prematura por cortante en cualquier punto de integración situado dentro de la zona de discontinuidad. Por ello, se opta por aumentar la cuantía de armadura transversal en todas las secciones transversales de los elementos que quedan dentro de las regiones D. El hecho de aumentar la cuantía de armadura de armadura transversal también se justifica a la vista del

dispositivo experimental que aparece en la Fig. 7.1. Se ve que en las zonas de apoyo y de aplicación de la carga se ha dispuesto una mayor cuantía de armadura transversal.

En la Fig. 7.5 se muestran las partes de la viga que se encuentran dentro de las regiones B y D. Sobre esta figura, se ha superpuesto la modelización por elementos finitos realizada y la posición de los puntos de integración (secciones).

Se puede observar cómo la parte de región D con respecto a la luz total de la viga es notable, sobre todo en las probetas de menor luz. Se coloca el doble de cuantía de armadura transversal en el primer y en el último elemento finito de cada modelo, quedando ambos elementos en el interior de la región D.

También se puede observar cómo el segundo punto de integración del penúltimo elemento se encuentra aproximadamente en la frontera con la región D. Esta sección se encuentra situada aproximadamente a una distancia de un canto útil ( $d$ ) del punto de aplicación de la carga. En estas vigas esta distancia  $d$  adopta un valor de 0.457 m.

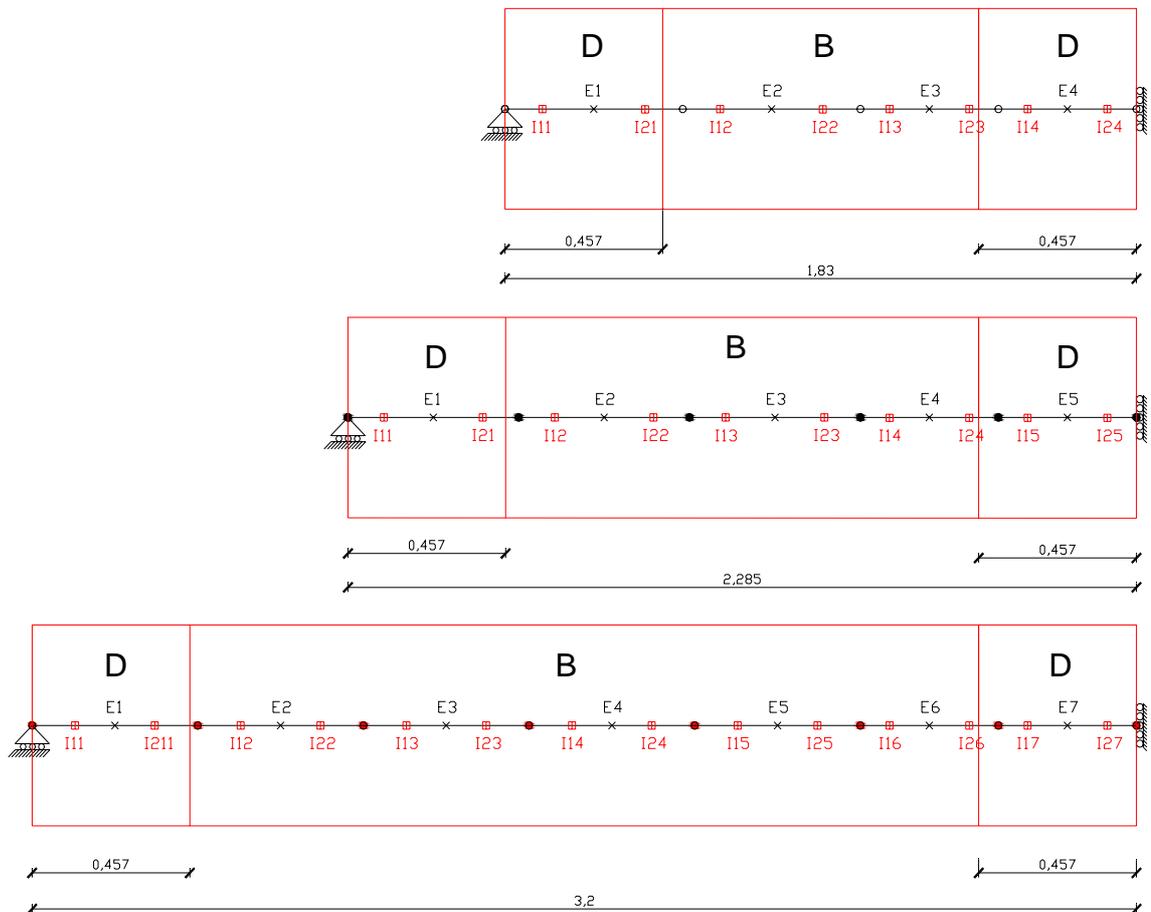


Fig. 7.5 Regiones B y D vigas Vecchio y Shim

Queda en el aire un aspecto particular de este ensayo consistente en la forma de aplicación de la carga. Ésta se aplica mediante una placa de carga que zuncha lateralmente al hormigón y que lo confina. Este efecto de confinamiento provoca un aumento en la capacidad resistente del hormigón.

En la publicación consultada no se da un valor concreto de cuál sería la mejora en la resistencia del hormigón ni tampoco la longitud donde este efecto es importante. Para simular el efecto del confinamiento, se aumenta en un 20% la resistencia a compresión simple del hormigón correspondiente al elemento finito situado más a la derecha. Como consecuencia, se deben tratar con cierta cautela y crítica los resultados referentes a la carga última de rotura.

### 7.2.3 RESULTADOS VIGAS VECCHIO Y SHIM

En este apartado se presentan para cada probeta los siguientes resultados obtenidos tras el proceso de análisis numérico.

En primer lugar, se incluye un gráfico (Fig. 7.6 a Fig. 7.14) en el que se compara la carga aplicada en el ensayo ( $P$ ) frente al desplazamiento que sufre la viga en centro-luz ( $\delta$ ). En aras a poder realizar comparaciones entre diferentes hipótesis cinemáticas y resultados experimentales, se representan las siguientes curvas de comportamiento:

- Curva experimental de laboratorio (EXP)
- Ley modelo general de corrección cortante (GEN)
- Ley Euler-Bernouilli (EBT)
- Ley Timoshenko (TBT)
- Ley perfil parabólico con coeficiente 1.25 (PAR)

En segundo lugar, se incluyen dos gráficos a nivel sección (Fig. 7.6 a Fig. 7.14). En el primero, se compara el momento flector  $M_y$  frente a la curvatura de flexión  $c_y$ . En el segundo, se representa el cortante  $V_z$  frente a la deformación de cortante seccional  $\gamma_{0xz}$ . De entre todas las secciones de la viga se representa para cada probeta la situada a un canto útil del punto de aplicación de la carga. Esta sección corresponde aproximadamente al segundo punto de integración del penúltimo elemento. En el caso del gráfico  $M_y$ - $c_y$ , se representan las curvas GEN, EBT, TBT y PAR. Para el caso del gráfico  $V_z$ - $\gamma_{0xz}$ , sólo es posible representar las curvas GEN, TBT y PAR.

En tercer lugar, se incluye un gráfico del estado de agotamiento de cada probeta (Fig. 7.15 a Fig. 7.23). Se representa el estado de carga que agota la viga según el modelo general de corrección de cortante. Se muestra la posición de todas las secciones del elemento y todas las capas de cada sección. Para cada una de ellas se indica mediante símbolos el estado del material: hormigón no fisurado (●), hormigón fisurado (◐), hormigón en rotura (◑), armadura transversal plastificada (◻) y armadura transversal en agotamiento (\*). De esta forma, se puede averiguar cómo agota cada una de las probetas.

Ya por último, en la Tabla 7.5 se comparan las cargas de rotura para cada modelización y el desplazamiento de centro-luz, correspondientes a la carga máxima, con los resultados experimentales de cada una de las vigas.

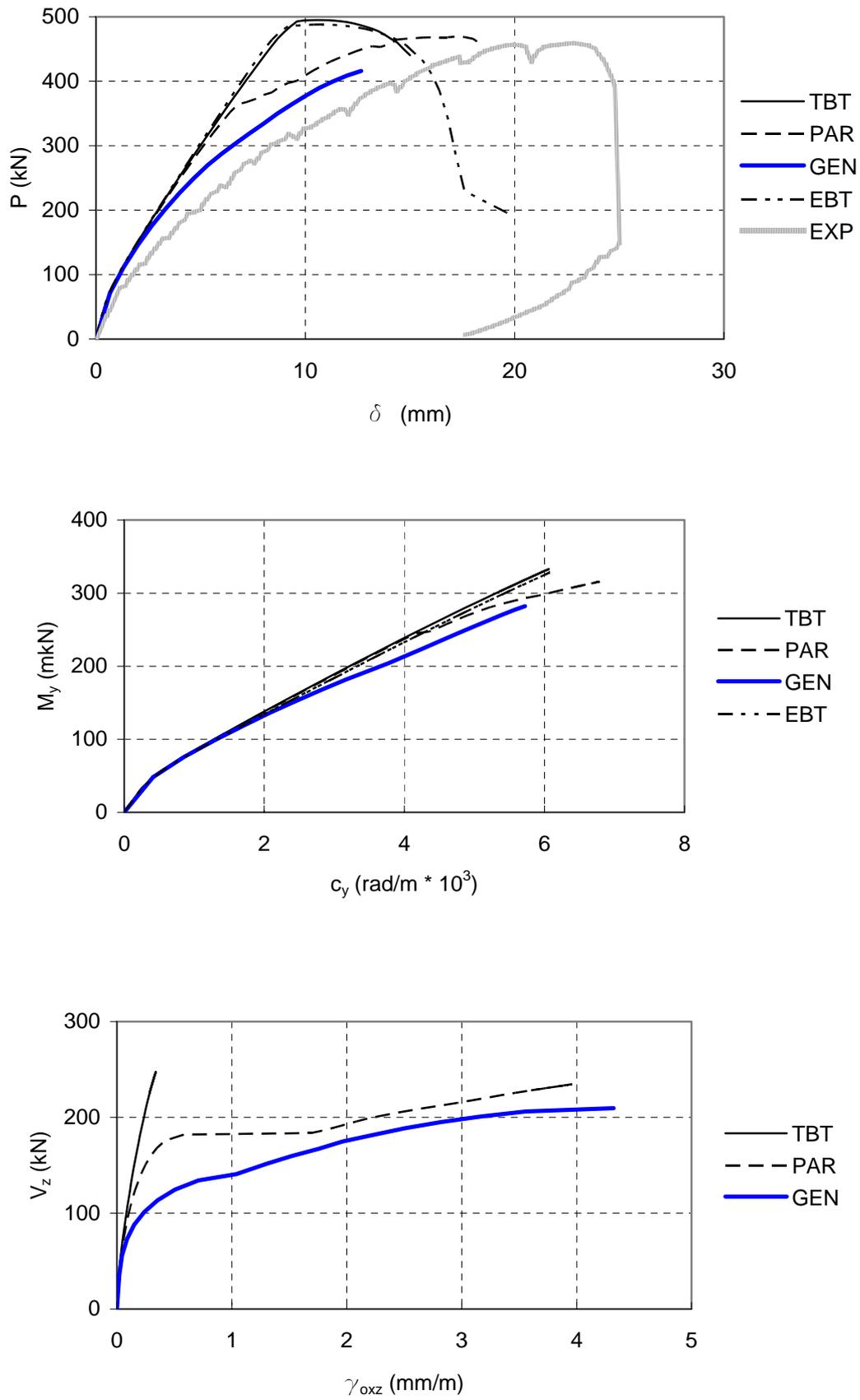


Fig. 7.6 Comparación resultados probeta VS-A1

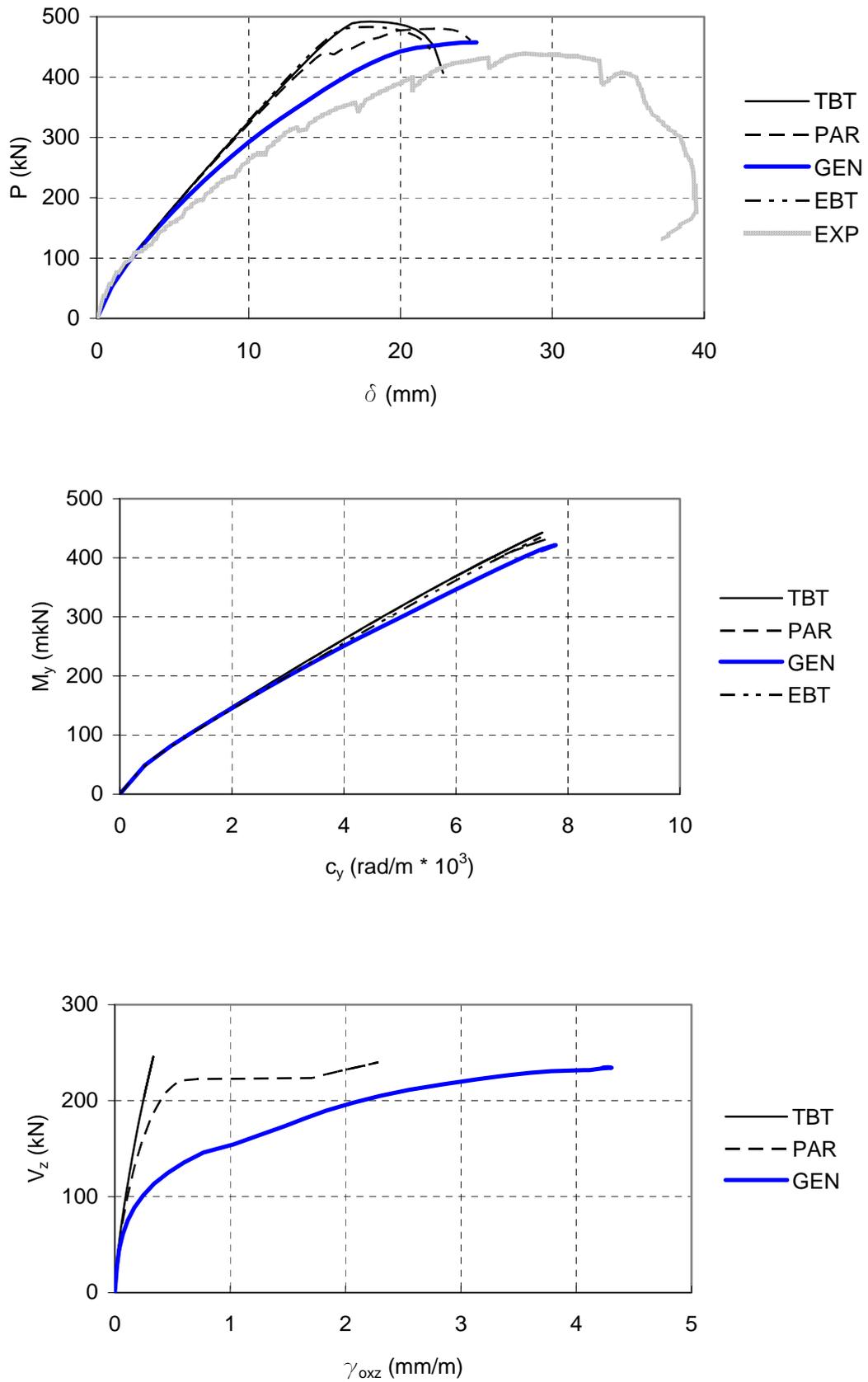


Fig. 7.7 Comparación resultados probeta VS-A2

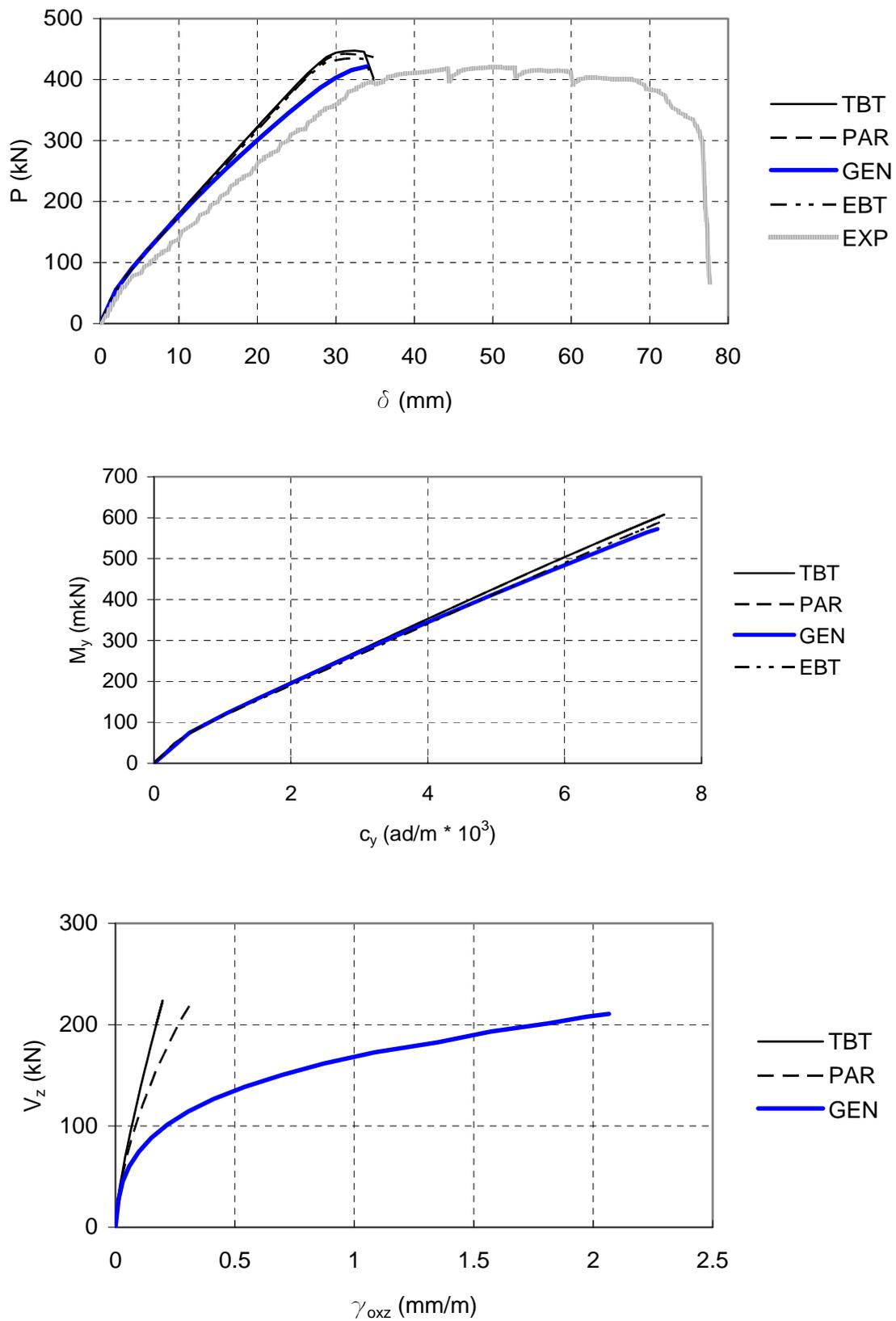


Fig. 7.8 Comparación resultados probeta VS-A3

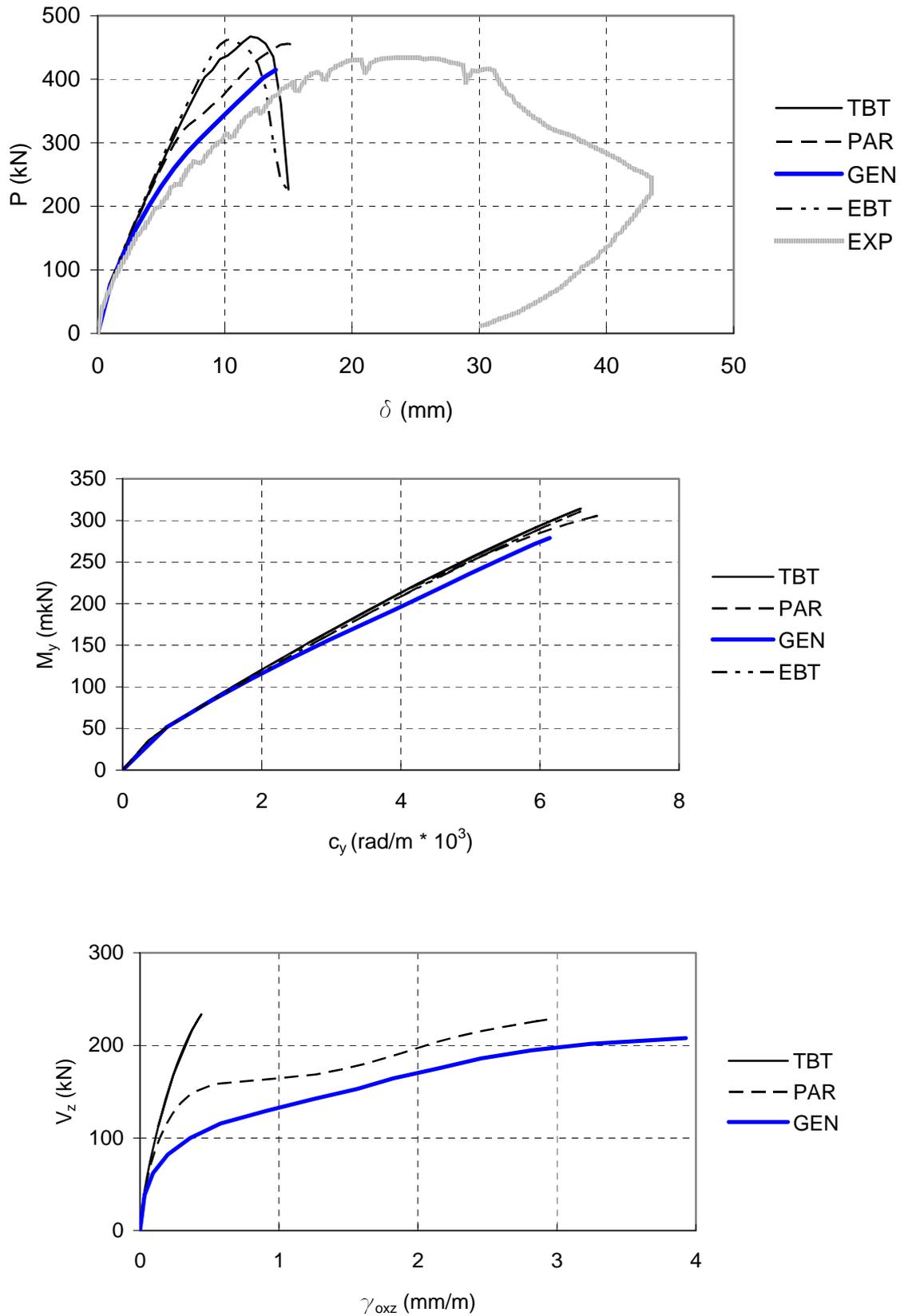


Fig. 7.9 Comparación resultados probeta VS-B1

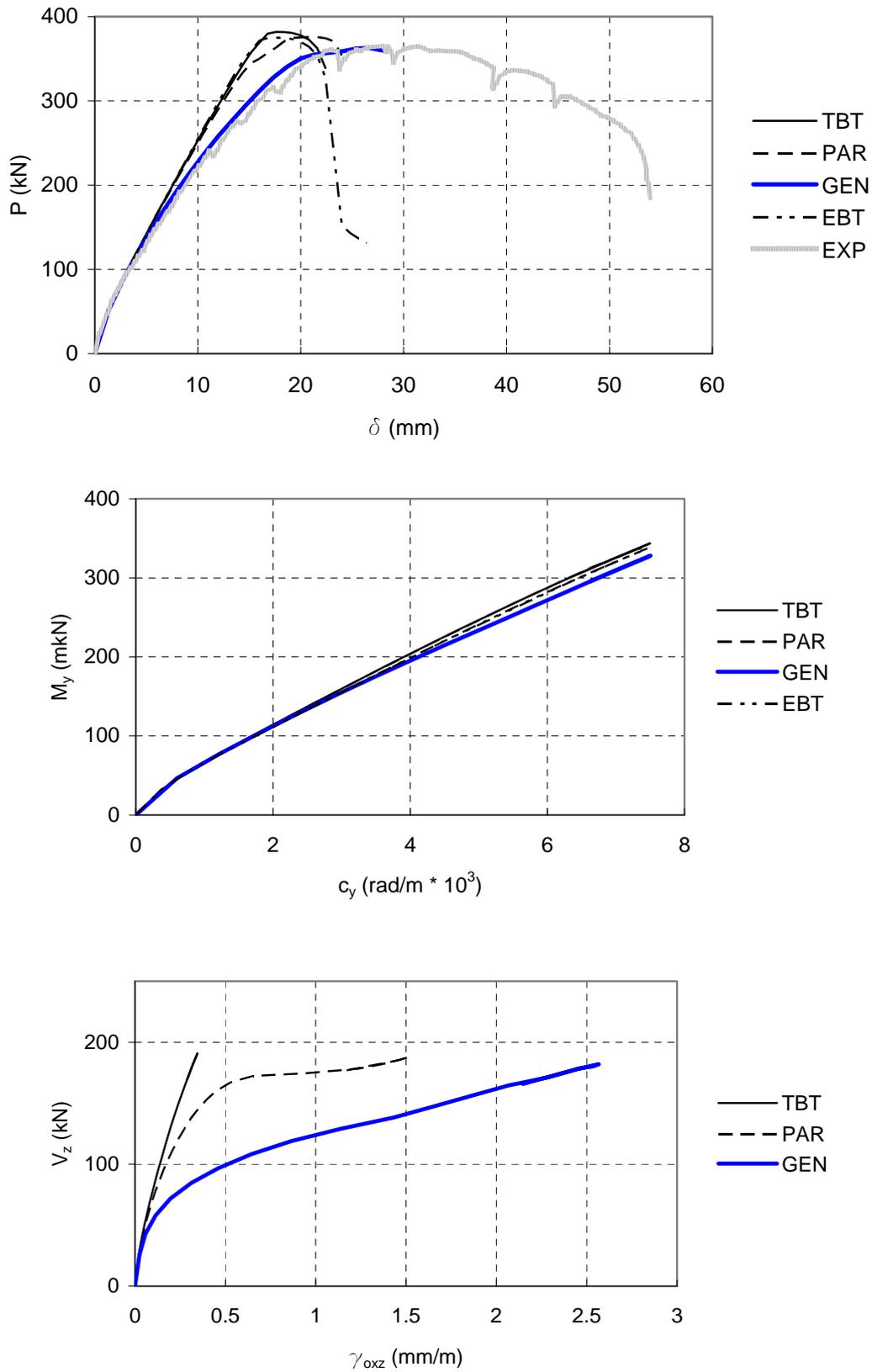


Fig. 7.10 Comparación resultados probeta VS-B2

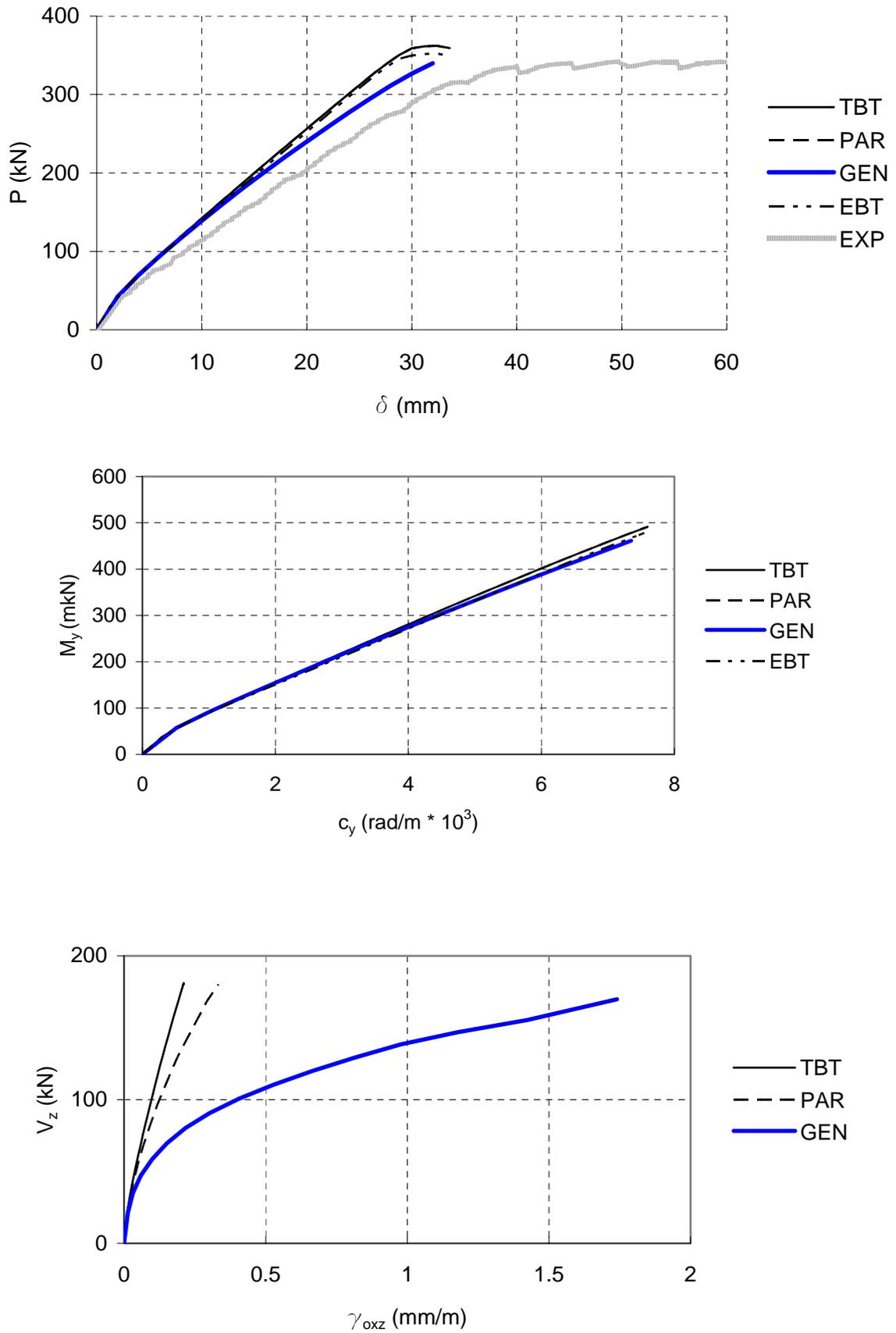


Fig. 7.11 Comparación resultados probeta VS-B3

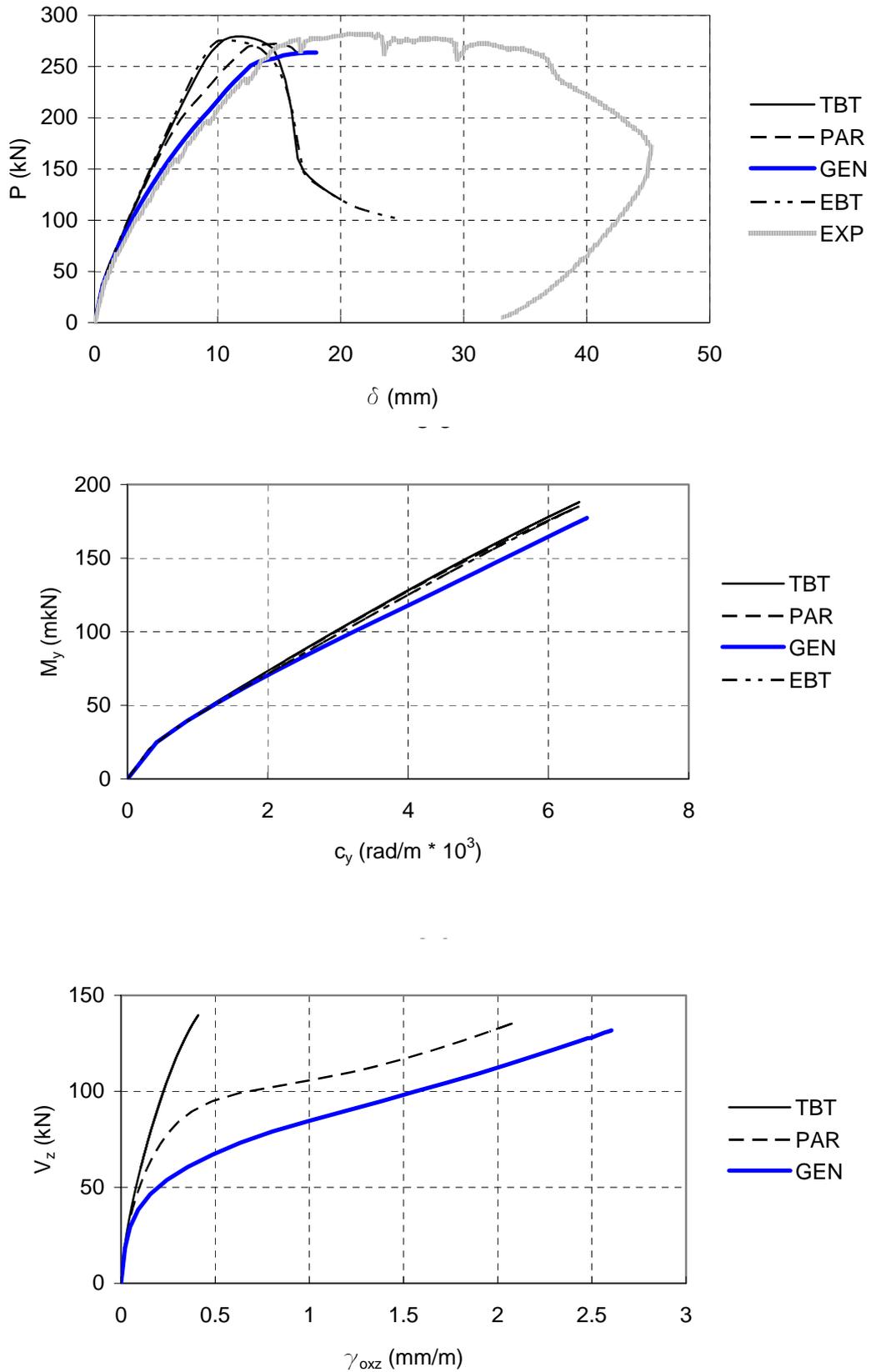


Fig. 7.12 Comparación resultados probeta VS-C1

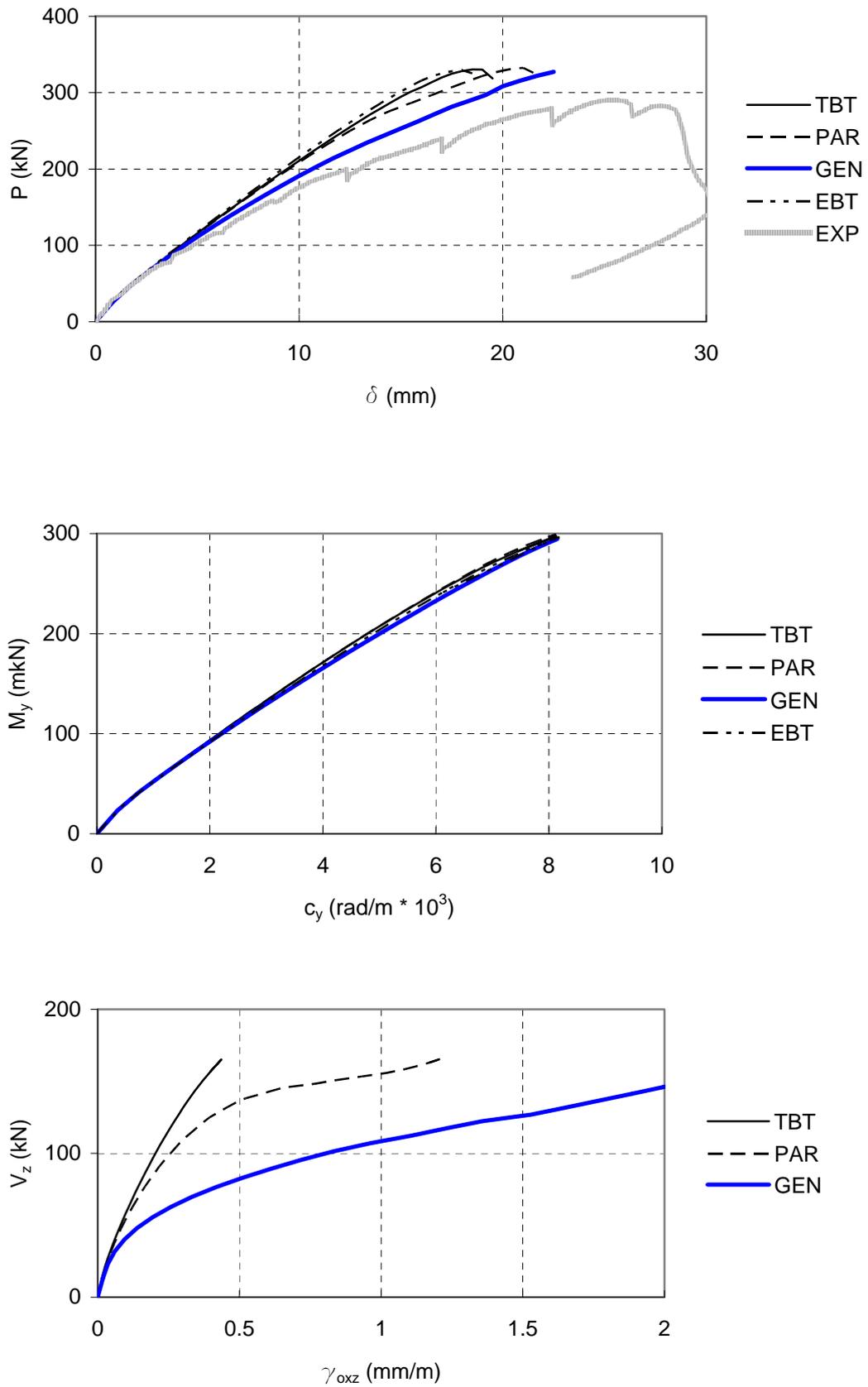


Fig. 7.13 Comparación resultados probeta VS-C2

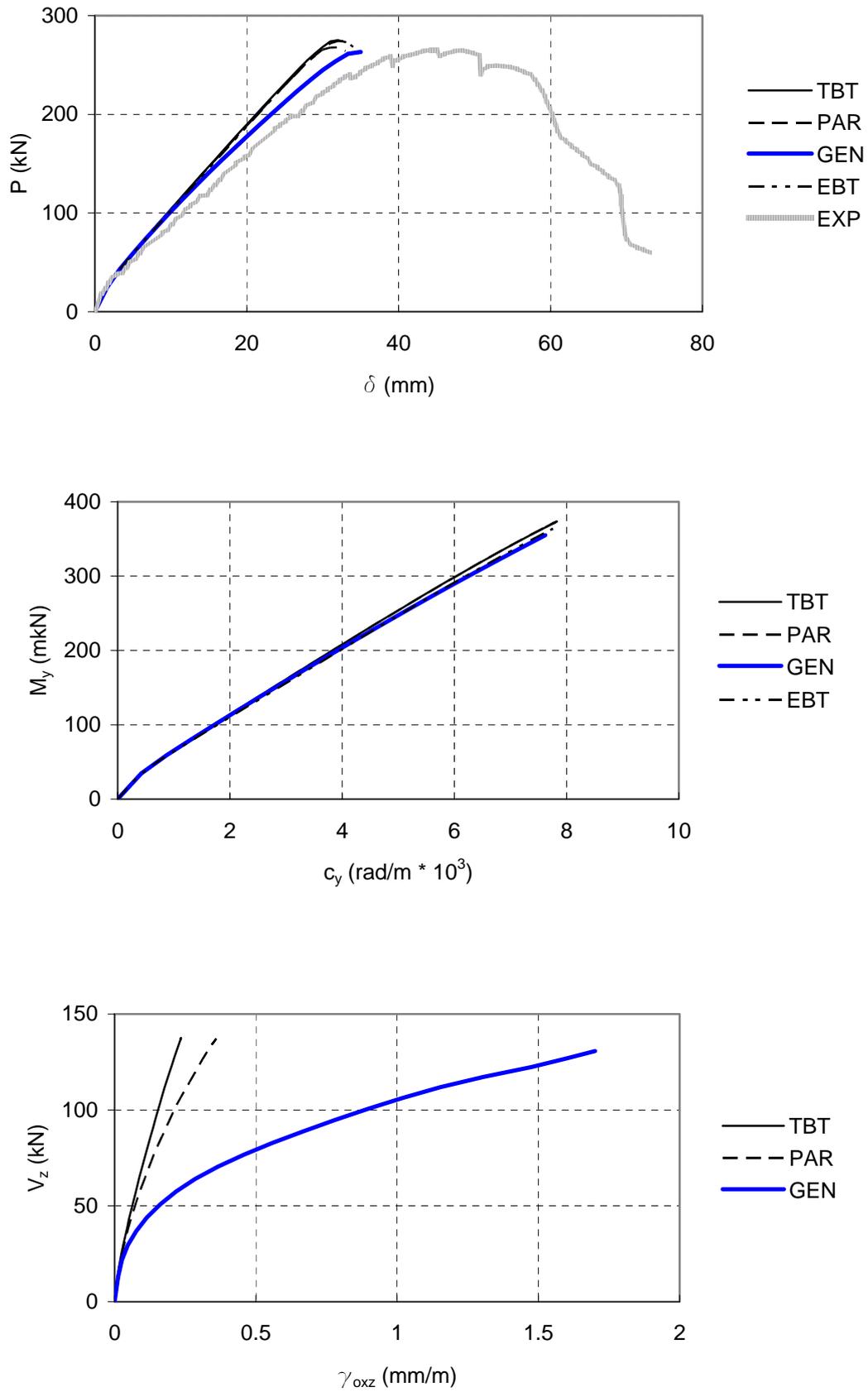


Fig. 7.14 Comparación resultados probeta VS-C3

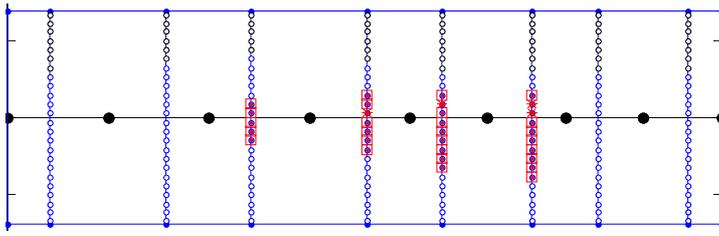


Fig. 7.15 Estado de agotamiento probeta VS-A1. Modelo general

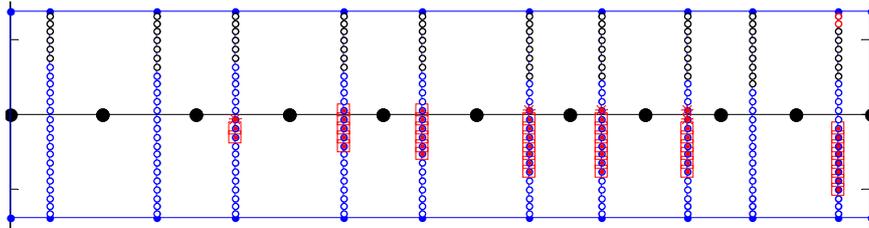


Fig. 7.16 Estado de agotamiento probeta VS-A2. Modelo general

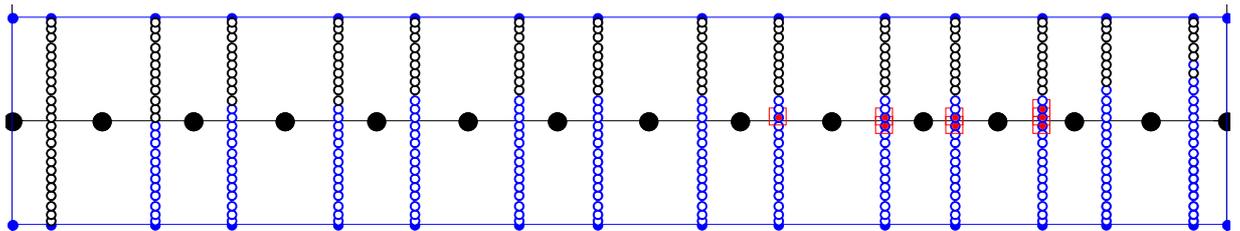


Fig. 7.17 Estado de agotamiento probeta VS-A3. Modelo general

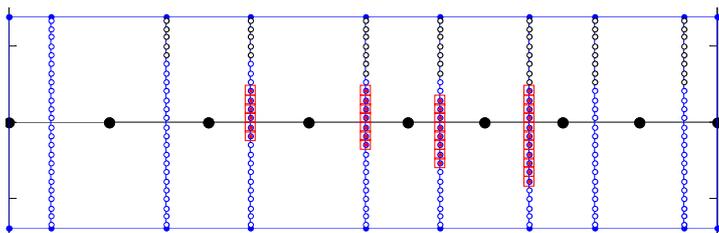


Fig. 7.18 Estado de agotamiento probeta VS-B1. Modelo general

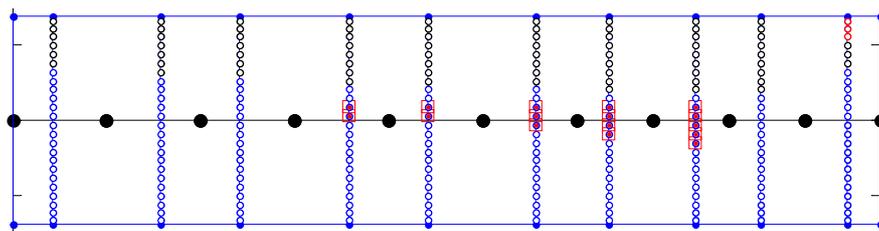


Fig. 7.19 Estado de agotamiento probeta VS-B2. Modelo general

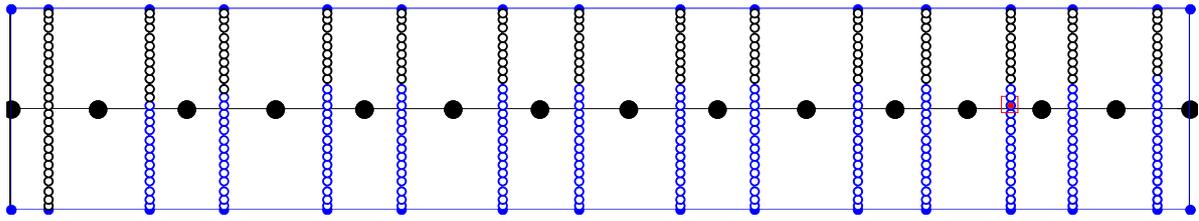


Fig. 7.20 Estado de agotamiento probeta VS-B3. Modelo general

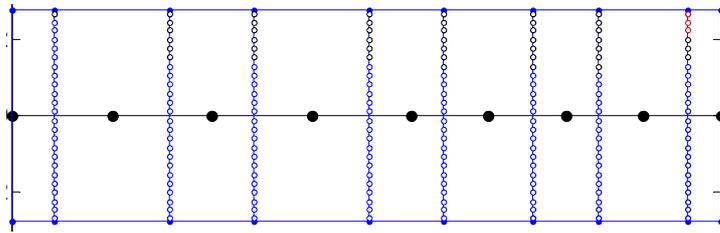


Fig. 7.21 Estado de agotamiento probeta VS-C1. Modelo general

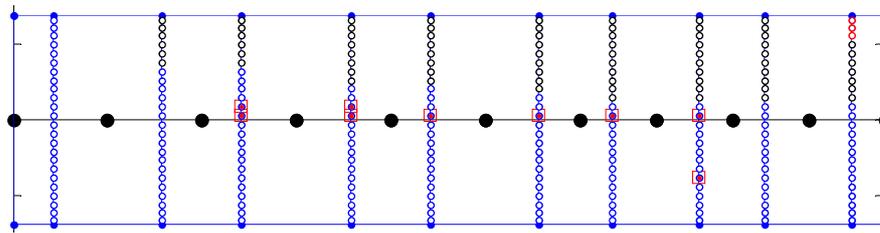


Fig. 7.22 Estado de agotamiento probeta VS-C2. Modelo general

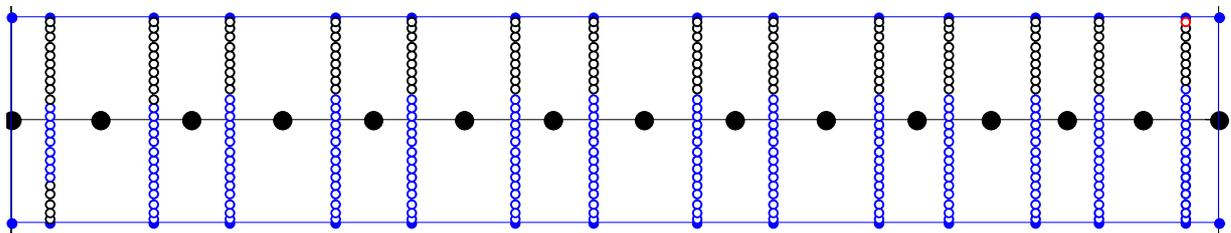


Fig. 7.23 Estado de agotamiento probeta VS-C3. Modelo general

Simbología empleada:

- |   |                                |   |   |
|---|--------------------------------|---|---|
| ○ | Hormigón sin fisurar           | □ | Plastificación de la armadura transversal |
| ○ | Hormigón fisurado              | * | Armadura transversal en agotamiento       |
| ○ | Hormigón agotado en compresión |   |   |

Tabla 7.5 Resumen de resultados vigas Vecchio y Shim

Probeta	$P_{EXP}$ (kN)	$P_{EBT}$ (kN)	$\frac{P_{EXP}}{P_{EBT}}$	$P_{TBT}$ (kN)	$\frac{P_{EXP}}{P_{TBT}}$	$P_{PAR}$ (kN)	$\frac{P_{EXP}}{P_{PAR}}$	$P_{GEN}$ (kN)	$\frac{P_{EXP}}{P_{GEN}}$
VS-A1	459	488.0	0.94	494.9	0.93	469.3	0.98	415.9	1.10
VS-A2	439	483.1	0.91	492.0	0.89	480.0	0.91	457.5	0.96
VS-A3	420	435.1	0.97	447.5	0.94	442.4	0.95	421.7	1.00
VS-B1	434	462.5	0.94	467.3	0.93	455.8	0.95	414.8	1.05
VS-B2	365	374.9	0.97	381.7	0.96	375.7	0.97	362.8	1.01
VS-B3	342	352.2	0.97	362.1	0.94	362.1	0.94	339.7	1.01
VS-C1	282	275.5	1.02	279.4	1.01	272.1	1.04	263.7	1.07
VS-C2	290	329.3	0.88	330.3	0.88	332.4	0.87	327.2	0.89
VS-C3	265	267.9	0.99	275.1	0.96	274.4	0.97	263.3	1.01
<b>MEDIA</b>			<b>0.95</b>		<b>0.94</b>		<b>0.95</b>		<b>1.01</b>
<b>COV %</b>			<b>4.29</b>		<b>3.87</b>		<b>4.49</b>		<b>6.29</b>

Probeta	$\delta_{EXP}$ (mm)	$\delta_{EBT}$ (mm)	$\frac{\delta_{EXP}}{\delta_{EBT}}$	$\delta_{TBT}$ (mm)	$\frac{\delta_{EXP}}{\delta_{TBT}}$	$\delta_{PAR}$ (mm)	$\frac{\delta_{EXP}}{\delta_{PAR}}$	$\delta_{GEN}$ (mm)	$\frac{\delta_{EXP}}{\delta_{GEN}}$
VS-A1	18.8	10.8	1.74	10.5	1.79	17.2	1.09	12.7	1.48
VS-A2	29.1	18.0	1.62	18.0	1.62	22.2	1.31	25.0	1.16
VS-A3	51.0	32.4	1.57	32.4	1.57	31.2	1.63	34.0	1.50
VS-B1	22.0	10.2	2.16	12.0	1.83	15.0	1.47	14.0	1.57
VS-B2	31.6	17.6	1.80	17.6	1.80	20.8	1.52	26.7	1.18
VS-B3	59.6	32.4	1.84	32.4	1.84	32.4	1.84	32.0	1.86
VS-C1	21.0	11.0	1.91	11.5	1.83	14.5	1.45	18.0	1.17
VS-C2	25.7	18.0	1.43	18.5	1.39	21.0	1.22	22.5	1.14
VS-C3	44.3	32.0	1.38	32.0	1.38	33.0	1.34	35.0	1.27
<b>MEDIA</b>			<b>1.72</b>		<b>1.67</b>		<b>1.43</b>		<b>1.37</b>
<b>COV %</b>			<b>24.42</b>		<b>18.79</b>		<b>22.28</b>		<b>24.85</b>

#### 7.2.4 INTERPRETACION DE RESULTADOS VIGAS VECCHIO Y SHIM

A continuación, se lleva a cabo la interpretación de los resultados obtenidos en el apartado anterior. En primer lugar, se analiza cada probeta por separado y luego se realiza un análisis global de toda la serie.

- *Probeta VS-A1 (Fig. 7.6 y Fig. 7.15)*

En cuanto al gráfico carga-flecha (Fig. 7.6) se puede observar que la curva correspondiente al comportamiento general (GEN) es la que menor rigidez presenta de todas las analizadas. Además, es la ley que más se ajusta a la curva experimental. Sólo las curvas PAR y GEN desarrollan fisuración diagonal. Esto se aprecia por la pérdida de rigidez que presentan las curvas PAR y GEN con respecto a las leyes EBT y TBT.

En referencia al diagrama momento-curvatura, todas las curvas tienen una rigidez a flexión similar, aunque la curva GEN es la que muestra algo menos de rigidez.

Con respecto al diagrama  $V_z - \gamma_{0,xz}$  (Fig. 7.15) se pueden observar resultados muy dispares. En este diagrama se aprecia claramente el proceso de fisuración diagonal por cortante en las curvas PAR y GEN. Estas leyes desarrollan deformaciones importantes. Ahora bien, entre ambas existe bastante diferencia de respuesta. Cabe destacar que pese a la diferencia de comportamiento, ambas curvas tienden a juntarse conforme se aproximan a la carga de rotura.

En cuanto a la carga de rotura, las curvas TBT y EBT superan ligeramente la carga de rotura experimental (véase la Tabla 7.5). La curva PAR ajusta con exactitud esta carga mientras que en el caso GEN se obtiene una carga de rotura un 10% inferior al valor experimental. En cuanto al tipo de agotamiento correspondiente al caso GEN, se puede observar en la Fig. 7.15 que la armadura transversal llega a la plastificación en buena parte de la viga y que incluso en la segunda sección del elemento 3 hay capas en las que los estribos alcanzan su deformación máxima. En la sección más cercana a centro-luz no se detecta agotamiento por compresión en el hormigón. Tampoco se llega a la plastificación de las armaduras pasivas longitudinales en cara traccionada. Este tipo de rotura coincide con la detectada experimentalmente por Vecchio y Shim (2004) [90], es decir, una rotura por cortante-flexión.

▪ *Probeta VS-A2 (Fig. 7.7 y Fig. 7.16)*

Al igual que en la probeta VS-A1, la curva carga-flecha (Fig. 7.7) que menor rigidez presenta y más se asemeja a la ley experimental es la curva GEN. La fisuración diagonal, que se produce en el ensayo de laboratorio, sólo se desarrolla en las curvas GEN y PAR. Sin embargo, en el caso parabólico esta fisuración se produce a una carga cercana a la rotura. Hasta este punto, la rigidez de la viga para los casos EBT, TBT y PAR es prácticamente idéntica y mayor que en el caso GEN. Además, al tratarse de una viga más esbelta que la VS-A1, todo el conjunto de curvas se encuentra más próximo que en la probeta VS-A1.

El diagrama momento-curvatura es prácticamente idéntico para todas las curvas, con la particularidad de que la ley GEN es ligeramente más flexible. En cuanto al gráfico  $V_z - \gamma_{0,xz}$  se aprecia nuevamente una variación muy importante de rigidez a cortante derivada del tipo de hipótesis cinemática empleado. Esta ley es

muy sensible al hecho de que se produzca fisuración por cortante y al nivel de carga al que tiene lugar. En este caso, las curvas PAR y GEN presentan variaciones de rigidez a cortante importantes entre sí.

En referencia a las cargas de rotura, todas las curvas alcanzan valores superiores al registrado experimentalmente (véase Tabla 7.5). En cuanto al tipo de rotura producido para la curva GEN, se llega a agotar el hormigón por compresión en la sección de centro-luz tras la plastificación de los estribos en varias secciones de la probeta. Además, se llega a plastificar la capa de armaduras longitudinales situada más cerca del borde inferior. Esto denota que para esta viga la distancia existente en cuanto a carga de rotura por cortante y flexión es bastante pequeña. El tipo de rotura en el laboratorio, según Vecchio y Shim (2004) [90], es una rotura por cortante-compresión similar al tipo de rotura registrado numéricamente para el caso GEN.

- *Probeta VS-A3 (Fig. 7.8 y Fig. 7.17)*

En el gráfico carga-flecha (Fig. 7.8) no se pueden observar diferencias significativas entre los distintos tipos de comportamiento. Esto se explica por estar ante una probeta con una esbeltez mayor que las probetas VS-A1 y VS-A2. En el caso GEN se aprecia una ligera pérdida de rigidez conforme se llega a la carga de rotura. En este caso, sólo desarrolla fisuración por cortante la curva con comportamiento GEN. En laboratorio se pueden observar algunas fisuras diagonales aunque el agotamiento final de la pieza se produce por flexión.

Todas las curvas representadas en el diagrama momento-curvatura (Fig. 7.8), son casi idénticas. En referencia al diagrama  $V_z - \gamma_{0xz}$  (Fig. 7.8), se puede apreciar que las curvas TBT y PAR no desarrollan fisuración por cortante, a diferencia de la curva GEN que presenta una importante deformación a cortante.

En cuanto a la carga de rotura, todas las vigas alcanzan valores de agotamiento similares (véase Tabla 7.5). El tipo de rotura, en el caso GEN, se produce en centro-luz por plastificación de las armaduras longitudinales sin llegar a agotar el hormigón. Se puede observar que la armadura transversal de algunas capas de las secciones más cercanas al punto de aplicación de la carga plastifica. Sin embargo, y a la vista de los resultados de las probetas anteriores, se deduce que la capacidad a cortante no se alcanza. Por lo tanto, se concluye que la viga agota por flexión tal y como se registra en el laboratorio.

- *Probeta VS-B1 (Fig. 7.9 y Fig. 7.18)*

Los resultados del análisis de esta probeta se encuentran en la línea de los obtenidos para el caso VS-A1. Con referencia a las curvas carga-flecha (Fig. 7.9), la fisuración por cortante se produce para los casos GEN, PAR y TBT. Además, por este mismo orden de aparición. En el caso de comportamiento TBT esta fisuración diagonal se presenta a niveles muy altos de carga y prácticamente no se desarrolla. En el gráfico  $V_z - \gamma_{0xz}$  (Fig. 7.9) se puede observar que sólo las leyes PAR y GEN desarrollan una deformación por cortante significativa.

Con respecto a las cargas de rotura (véase Tabla 7.5), el comportamiento GEN es el que mejor se ajusta al resultado experimental. El resto de curvas predicen cargas superiores a la experimental. El tipo de rotura se produce tras un grado importante de plastificación de la armadura de cortante. No agota el hormigón a compresión en centro-luz. Cerca de la carga última y tras un acusado proceso de plastificación de la armadura transversal, se inicia en centro-luz la plastificación de la capa inferior de armadura longitudinal.

- *Probeta VS-B2 (Fig. 7.10 y Fig. 7.19)*

Se produce un evidente efecto de fisuración por cortante para el caso GEN, mientras que para el caso PAR se produce para un nivel de carga próximo a la rotura. La curva carga-flecha correspondiente al caso GEN (Fig. 7.10) presenta una gran exactitud con respecto a la curva experimental.

Todos los valores obtenidos para la carga de rotura son algo mayores que el valor experimental, a excepción del caso GEN, que aproxima con gran exactitud la carga máxima (véase Tabla 7.5). En cuanto al tipo de rotura en el caso GEN, la armadura de cortante desarrolla plastificación, según indica la Fig. 7.19, pero finalmente el agotamiento se produce por flexión. Se agota el hormigón a compresión en la zona de centro-luz y plastifican todas las armaduras longitudinales en cara de tracción. Vecchio (2004) [90] indica que el fallo es por cortante-flexión. Sin embargo, la curva experimental parece indicar que existe cierto grado de ductilidad a flexión.

- *Probeta VS-B3 (Fig. 7.11 y Fig. 7.20)*

Esta viga tiene un comportamiento muy similar a la probeta VS-A3. Existen pequeñas diferencias en el gráfico carga-flecha (Fig. 7.11) para todos los tipos de comportamiento. Sólo desarrolla fisuración por cortante la curva GEN.

Experimentalmente se pueden observar fisuras diagonales aunque la rotura de la viga es por flexión.

Todas las curvas representadas en el diagrama momento-curvatura (Fig. 7.11) se superponen. En el gráfico  $V_z - \gamma_{0xz}$  (Fig. 7.11), se puede observar que la fisuración por cortante, detectada en el laboratorio, sólo es captada por la ley GEN.

Todos los comportamientos analizados alcanzan valores de agotamiento similares (véase Tabla 7.5). En el caso GEN, la rotura se produce por plastificación de las armaduras longitudinales sin llegar a agotar el hormigón. Sólo la armadura de cortante de alguna capa de las secciones más cercanas al punto de aplicación de la carga llega a plastificar. Por lo tanto, la capacidad a cortante no se alcanza totalmente. Se concluye que el tipo de rotura, observado en laboratorio y el obtenido con el modelo general de corrección de cortante, es de agotamiento por flexión.

- *Probeta VS-C1 (Fig. 7.12 y Fig. 7.21)*

El comportamiento de esta probeta guarda ciertas similitudes con respecto a las probetas VS-A1 y VS-B1. Si se analizan las curvas carga-flecha y el diagrama  $V_z - \gamma_{0xz}$  (Fig. 7.12) se puede observar que los únicos casos que desarrollan fisuración por cortante son PAR y GEN. Ahora bien, a diferencia de las probetas VS-A1 y VS-B1 no se llega a agotar la capacidad a cortante de la viga.

La carga de rotura que predice el modelo para todos los comportamientos estudiados es muy similar y se ajusta con exactitud con la obtenida experimentalmente (véase Tabla 7.5). En la Fig. 7.21 se puede apreciar que en el caso GEN los estribos no plastifican en ninguna capa de ninguna sección. La rotura se produce por flexión tras el agotamiento por compresión del hormigón en centro-luz y la plastificación de las dos armaduras longitudinales traccionadas. Vecchio y Shim (2004) [90] indican que el tipo de rotura de esta viga es de cortante-flexión. Sin embargo, el modelo GEN indica que la rotura que se alcanza es por flexión. Además, es extraño que la curva carga-flecha presente una ductilidad tan prolongada, más propia de una rotura por flexión de tipo dúctil.

- *Probeta VS-C2 (Fig. 7.13 y Fig. 7.22)*

En esta probeta se puede observar un ajuste más pobre en cuanto a las curvas del diagrama carga-flecha (Fig. 7.13). Sin embargo, de nuevo el caso correspondiente al comportamiento GEN presenta una rigidez de la viga menor y

más ajustada a la curva experimental. La fisuración diagonal se produce para las curvas GEN y PAR. Sin embargo, la rigidez a cortante en ambos casos es diferente.

Las cargas de rotura son en todos los casos algo mayores que la carga última obtenida en laboratorio. El tipo de rotura observado según el comportamiento tipo GEN indica que la armadura de cortante no llega a plastificar completamente, aunque algunas capas sí que lo consiguen. En la zona de centro-luz se produce el agotamiento del hormigón en la cabeza de compresión sin llegar a plastificar las armaduras longitudinales. Esto explicaría, en cierto modo, que la curva experimental no presenta una rama de ductilidad acusada. Sin embargo, y Shim (2004) [90] indica que el tipo de rotura producida en esta viga es del tipo cortante-flexión. Según el modelo GEN la rotura por cortante se desarrolla parcialmente.

- *Probeta VS-C3 (Fig. 7.14 y Fig. 7.23)*

Los resultados obtenidos para la probeta VS-C3 son similares a los de las probetas VS-A3 y VS-B3. Las curvas carga-flecha son muy parecidas para todos los comportamientos estudiados. Sólo se desarrolla fisuración diagonal con el modelo general. En la red de fisuración de la probeta ensayada en laboratorio aparecen fisuras por cortante.

Las cargas de agotamiento son muy similares entre sí y con el resultado experimental (véase Tabla 7.5). En cuanto al tipo de rotura, para el caso GEN no se llega a plastificar en ninguna cada de ninguna sección la armadura transversal. Se desarrolla rotura por flexión producida por agotamiento del hormigón a compresión en la zona de centro-luz y plastificación de la armadura longitudinal traccionada. Por lo tanto, coincide el tipo de rotura que predice el modelo general con el que se produce en el laboratorio.

- *Análisis global de la serie de Vecchio y Shim*

En cuanto a las cargas de rotura, el caso que mejor aproxima es el modelo general. Para todo el resto de casos (EBT, TBT y PAR) se obtienen resultados globales algo mayores que los experimentales.

Con respecto a las flechas, la ductilidad que desarrollan las vigas en laboratorio es mucho más alta que la que predice el modelo para todos los comportamientos. Este hecho ya fue constatado por Vecchio y Shim (2004) [90] al comparar los resultados con el programa VecTor2.

La hipótesis cinemática empleada es muy sensible al proceso de fisuración diagonal. Se puede observar que la fisuración diagonal se desarrolla siempre con el modelo general. En ciertas vigas que claramente agotan por cortante también se produce fisuración diagonal para el caso PAR y muy raramente para el caso TBT. En la serie de probetas ensayadas no se ha observado el desarrollo de fisuración diagonal para el caso EBT.

A título de ejemplo, para la probeta VS-B2 se muestra un gráfico (Fig. 7.24) con las direcciones principales de compresiones, que indican aproximadamente la orientación de la red de fisuración. Se analizan los siguientes comportamientos: TBT, PAR y GEN y se representa el estado correspondiente a la situación de agotamiento.

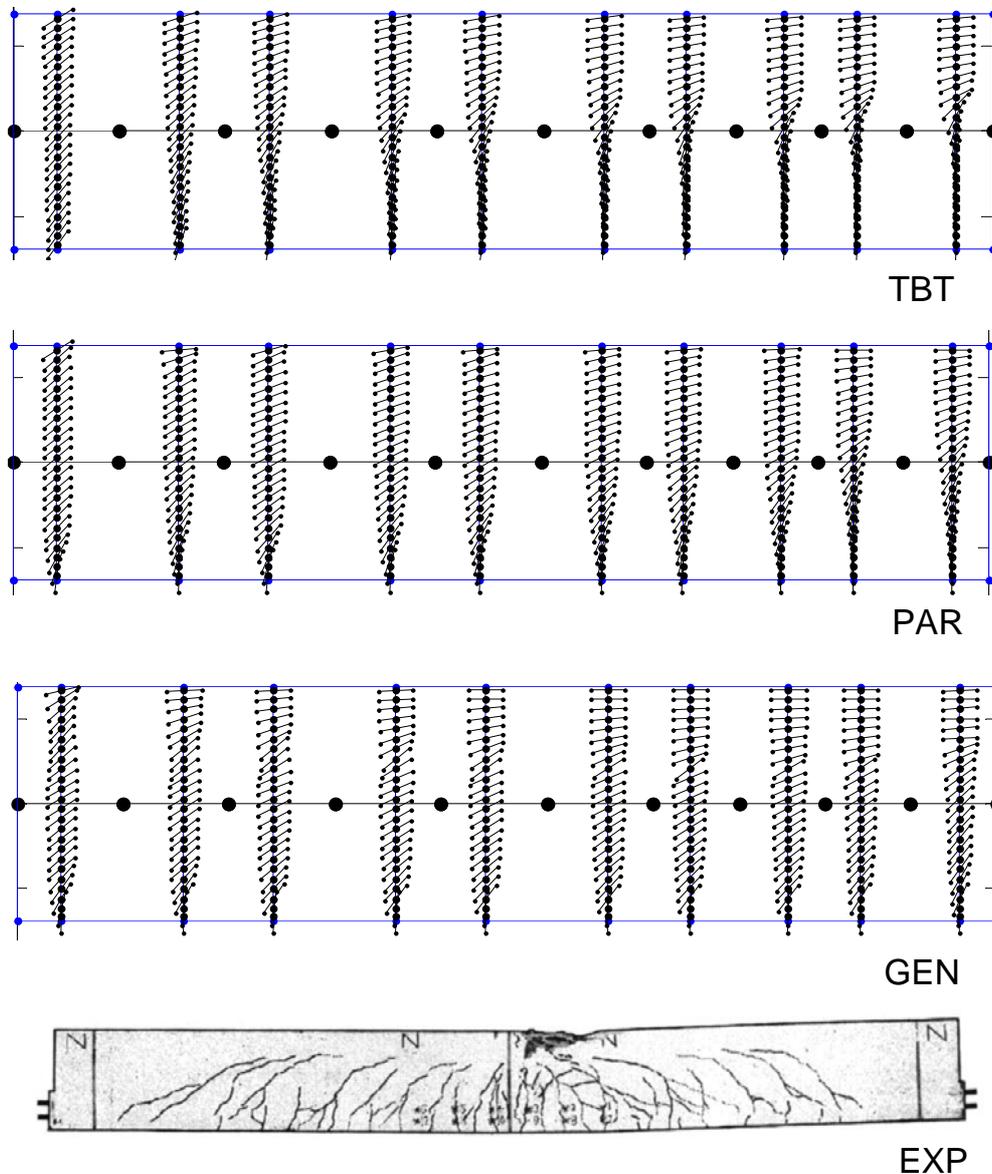


Fig. 7.24 Direcciones principales viga VS-B2

Se puede observar cómo la viga con comportamiento TBT no desarrolla fisuración diagonal. En el caso PAR la inclinación de las direcciones principales en el alma progresa más hacia la cara inferior de la viga. Este efecto es mucho más evidente en el caso GEN donde se aprecia claramente el efecto de la fisuración por cortante en la viga.

Además, se incluye la red de fisuración real obtenida en el laboratorio y presentada por Vecchio y Shim (2004) [90]. De los tres comportamientos analizados el caso general es el que presenta unas direcciones principales que se asemejan mejor al comportamiento observado experimentalmente.

Por lo tanto, el nuevo modelo general de corrección de cortante detecta de manera más realista la red de fisuración. Además, permite que la armadura transversal cumpla su función de elemento de transmisión del cortante en la viga.

Un modelo que incluya el efecto del esfuerzo cortante debe permitir que los mecanismos de cortante desempeñen su función. En el caso de que no se produzca la fisuración diagonal, los estribos no entran prácticamente en carga. Por ello, la armadura transversal en comportamientos como EBT, TBT y en ocasiones PAR no transmite cortante. En estos casos, no se desarrollan fisuras diagonales y el esfuerzo cortante es resistido prácticamente en su totalidad en la cabeza de compresión de la viga. Por lo tanto, se está incluyendo erróneamente el efecto del esfuerzo cortante.

Finalmente, se incluyen para los tres comportamientos estudiados las leyes de distribución de tensiones de la armadura transversal para cada una de las capas según puede observarse en las Figs. 7.25, 7.26 y 7.27. Para cada uno de estos gráficos se representa en el plano  $xy$  la posición abatida de la viga. La coordenada  $x=0$  marca el punto correspondiente al apoyo y la máxima coordenada  $x$  indica la posición de centro-luz. En dirección  $y$ , el borde que queda con coordenada positiva corresponde al borde superior de la viga. En dirección  $z$ , se representa la tensión en MPa mediante una superficie de interpolación 3D.

Se pueden observar resultados muy diferentes. Según el comportamiento general buena parte de los estribos llegan a plastificar. Con el modelo parabólico las tensiones son inferiores al caso general y no se alcanza la plastificación en ninguna de las fibras. Sin embargo, la forma de la distribución de tensiones se asemeja al modelo general debido a que en ambos casos se capta la fisuración diagonal por cortante. Finalmente, para el caso TBT la armadura transversal prácticamente no tiene tensión ya que no se produce fisuración por cortante.

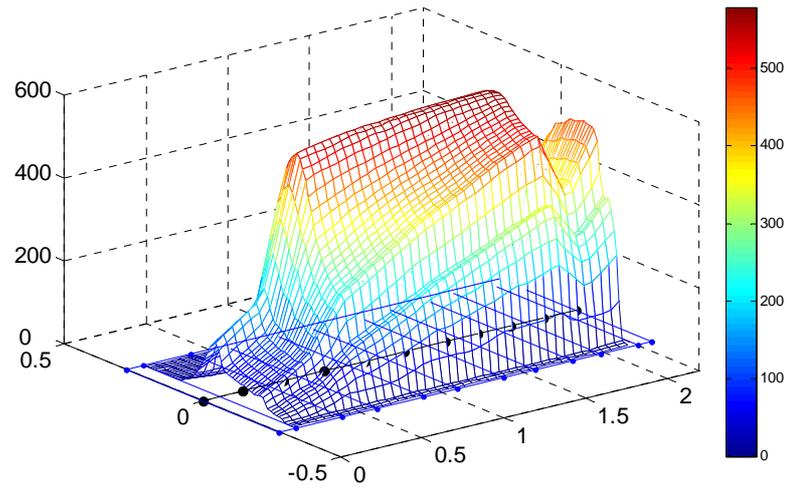


Fig. 7.25 Tensiones armadura transversal probeta VS-B2 (MPa). Modelo general

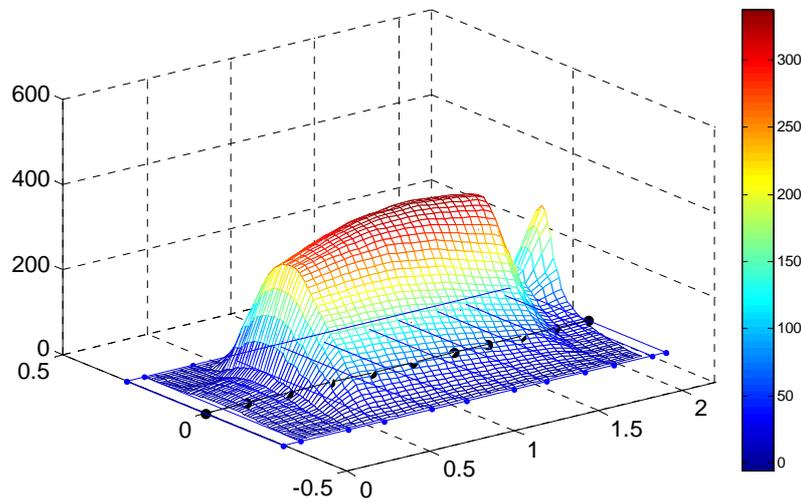


Fig. 7.26 Tensiones armadura transversal probeta VS-B2 (MPa). Modelo parabólico

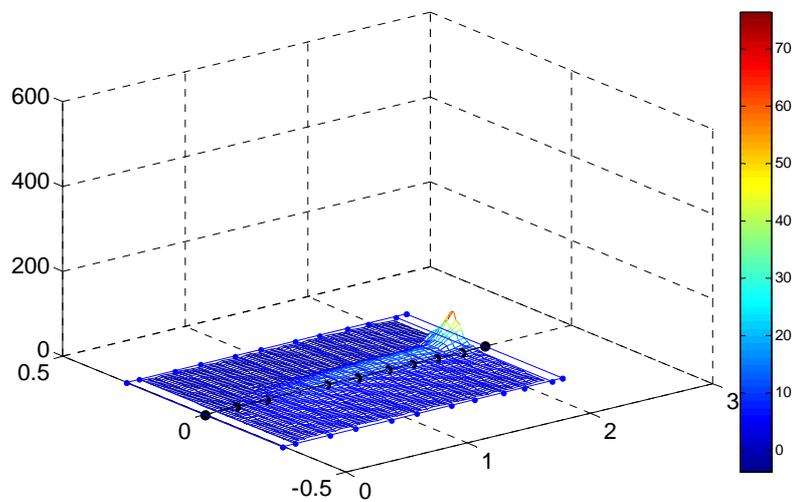


Fig. 7.27 Tensiones armadura transversal probeta VS-B2 (MPa). Viga Timoshenko

### 7.3 ENSAYOS DE BRESLER Y SCORDELIS

De forma análoga a como se ha llevado a cabo para las vigas de Vecchio y Shim se procede ahora para la serie de vigas ensayadas por Bresler y Scordelis (1963) [10] (Universidad de California – Berkeley).

#### 7.3.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS VIGAS ANALIZADAS

Los detalles correspondientes al dispositivo experimental aparecen en la Fig. 7.28 y los correspondientes a la sección transversal de cada una de las vigas ensayadas en la Fig. 7.29. La caracterización del hormigón y la geometría de las secciones transversales se pueden encontrar en la Tabla 7.6 y el tipo de aceros empleados aparece en la Tabla 7.7.

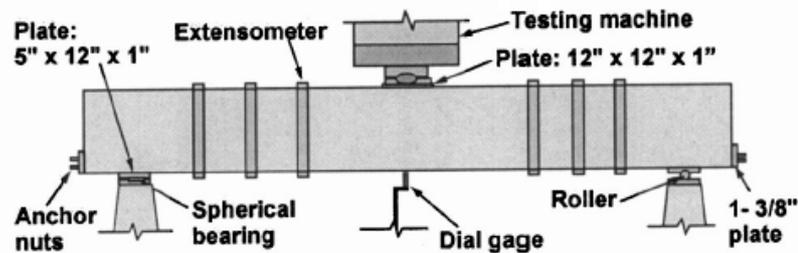


Fig. 7.28 . Dispositivo experimental vigas Bresler y Scordelis (1963) [10]

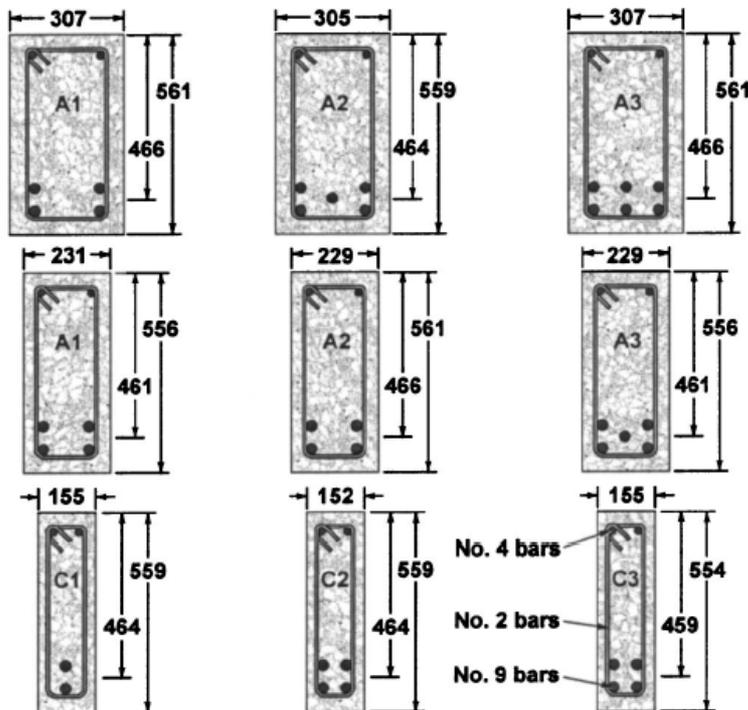


Fig. 7.29 Secciones transversales vigas Bresler y Scordelis (1963) [10]

Tabla 7.6 Detalles vigas Bresler y Scordelis (1963) [10]

Probeta	B (m)	H (m)	L (m)	$f'_c$ (MPa)	$\varepsilon'_c$	$f_{cr}$ (MPa)
BS-A1	0.307	0.561	3.658	24.06	$\approx 0.002$	1.62
BS-A2	0.305	0.559	4.572	24.27	$\approx 0.002$	1.63
BS-A3	0.307	0.561	6.400	35.03	$\approx 0.002$	1.95
BS-B1	0.231	0.556	3.658	24.75	$\approx 0.002$	1.64
BS-B2	0.229	0.561	4.572	23.17	$\approx 0.002$	1.59
BS-B3	0.229	0.556	6.400	38.75	$\approx 0.002$	2.05
BS-C1	0.155	0.559	3.658	29.58	$\approx 0.002$	1.78
BS-C2	0.152	0.559	4.572	23.79	$\approx 0.002$	1.61
BS-C3	0.155	0.554	6.400	35.03	$\approx 0.002$	1.95

Tabla 7.7 Aceros vigas Bresler y Scordelis (1963) [10]

Armadura	$d_b$ (mm)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$f_{sy}$ (MPa)	$f_{su}$ (MPa)	$E_s$ (MPa)
# 2	6.4	32.2	325	430	189607
# 4	12.7	127	345	542	201330
# 9 (Ser 1 y 2)	28.7	645	555	958	217880
# 9 (Ser 3)	28.7	645	552	933	205470

Los datos presentados aquí son los estrictamente necesarios para poder realizar el análisis.

### 7.3.2 MODELIZACIÓN VIGAS BRESLER Y SCORDELIS

La modelización de las vigas de Bresler y Scordelis se realiza de forma totalmente análoga a las vigas de Vecchio y Shim.

A continuación, se presenta la Tabla 7.8 con los datos empleados en la modelización de las secciones transversales y la Tabla 7.9 con la estimación de los módulos de endurecimiento de los aceros empleados.

Tabla 7.8 Modelización secciones transversales vigas Bresler y Scordelis

VIGA	$z_1$ (mm)	$z_2$ (mm)	$\rho_v$	$f'_c$ (MPa)	$f_{cr}$ (MPa)	$n$	$E_0$ (MPa)	$\varepsilon_{cr}$
BS-A1	45.95	520.09	0.0010	24.06	1.62	2.216	21930	$7.38 \cdot 10^{-5}$
BS-A2	45.95	517.55	0.0010	24.27	1.63	2.228	22020	$7.38 \cdot 10^{-5}$
BS-A3	45.95	520.09	0.0010	32.03	1.95	2.860	26927	$7.25 \cdot 10^{-5}$
BS-B1	45.95	515.05	0.0015	24.75	1.64	2.256	22230	$7.39 \cdot 10^{-5}$
BS-B2	45.95	520.05	0.0015	23.17	1.59	2.163	20806	$7.63 \cdot 10^{-5}$
BS-B3	45.95	515.01	0.0015	38.75	2.05	3.079	28691	$7.16 \cdot 10^{-5}$
BS-C1	45.95	517.55	0.0020	29.58	1.80	2.540	24393	$7.36 \cdot 10^{-5}$
BS-C2	45.95	517.55	0.0020	23.79	1.61	2.199	21811	$7.38 \cdot 10^{-5}$
BS-C3	45.95	512.47	0.0020	35.03	1.95	2.860	26926	$7.25 \cdot 10^{-5}$

Tabla 7.9 Módulos de endurecimiento aceros vigas Bresler y Scordelis

Armadura	$\varepsilon_{su}$	$E_p$ (MPa)
# 2	0.017	7066
# 4	0.017	13733
# 9 (Ser 1 y 2)	0.009	62404
# 9 (Ser 3)	0.009	60295

### 7.3.3 RESULTADOS VIGAS BRESLER Y SCORDELIS

Al igual que para el caso de las vigas de Vecchio y Shim se presentan para cada probeta los siguientes resultados obtenidos tras el proceso de análisis numérico.

En primer lugar se incluye un gráfico (Fig. 7.30 a Fig. 7.38) en el que se compara la carga aplicada en el ensayo ( $P$ ) frente al desplazamiento que tiene la viga en centro-luz ( $\delta$ ). Con el fin de poder realizar comparaciones entre diferentes hipótesis cinemáticas y resultados experimentales se representan las siguientes curvas de comportamiento:

- Curva experimental de laboratorio (EXP)
- Ley modelo general de corrección cortante (GEN)
- Ley Euler-Bernouilli (EBT)
- Ley Timoshenko (TBT)
- Ley perfil parabólico con coeficiente 1.25 (PAR)

En segundo lugar se incluyen dos gráficos a nivel sección (Fig. 7.30 a Fig. 7.38). En el primero se compara el momento flector  $M_y$  frente a la curvatura de flexión  $c_y$ . En el segundo se representa el cortante  $V_z$  frente a la deformación de cortante seccional  $\gamma_{0xz}$ . De entre todas las secciones de la viga se representa para cada probeta la situada a un canto útil del punto de aplicación de la carga. Esta sección corresponde aproximadamente al segundo punto de integración del penúltimo elemento. En el caso del gráfico  $M_y$ - $c_y$ , se representan las curvas GEN, EBT, TBT y PAR. Para el caso del gráfico  $V_z$ - $\gamma_{0xz}$ , sólo es posible representar las curvas GEN, TBT y PAR.

En tercer lugar se incluye un gráfico del estado de agotamiento de cada probeta (Fig. 7.39 a Fig. 7.47). Se representa el estado de carga que agota la viga según el modelo general de corrección de cortante. Se muestra la posición de todas las secciones del elemento y todas las capas de cada sección. Para cada una de ellas se indica mediante símbolos el estado del material: hormigón no fisurado (●), hormigón fisurado (◐), hormigón en rotura (◑), armadura transversal plastificada (◻) y armadura transversal en agotamiento (\*). De esta forma, se puede averiguar cómo agota cada una de las probetas.

Ya por último, en la Tabla 7.10 se comparan las cargas de rotura para cada modelización y el desplazamiento de centro-luz, correspondientes a la carga máxima, con los resultados experimentales de cada una de las probetas.

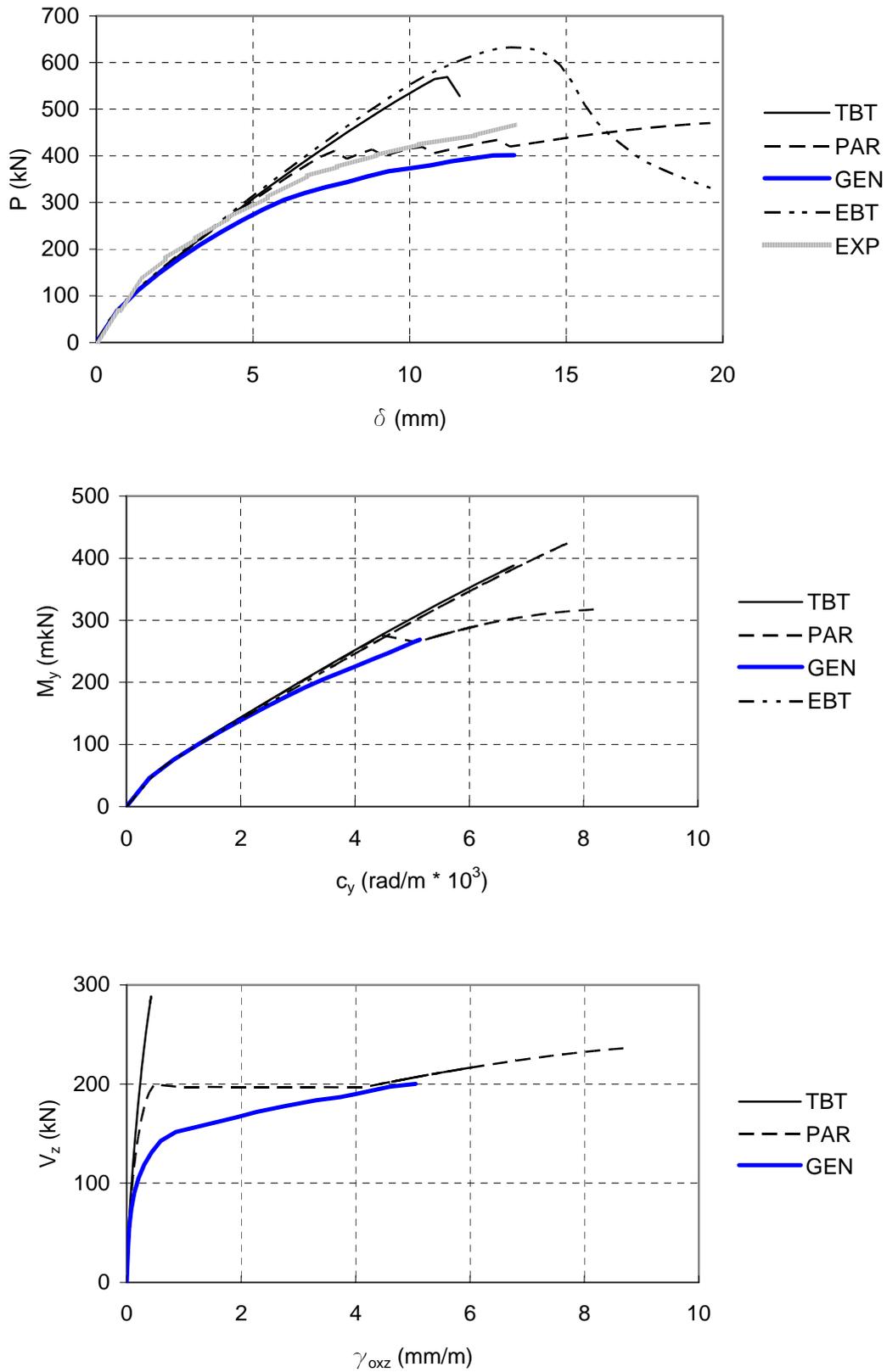


Fig. 7.30 Comparación resultados probeta BS-A1

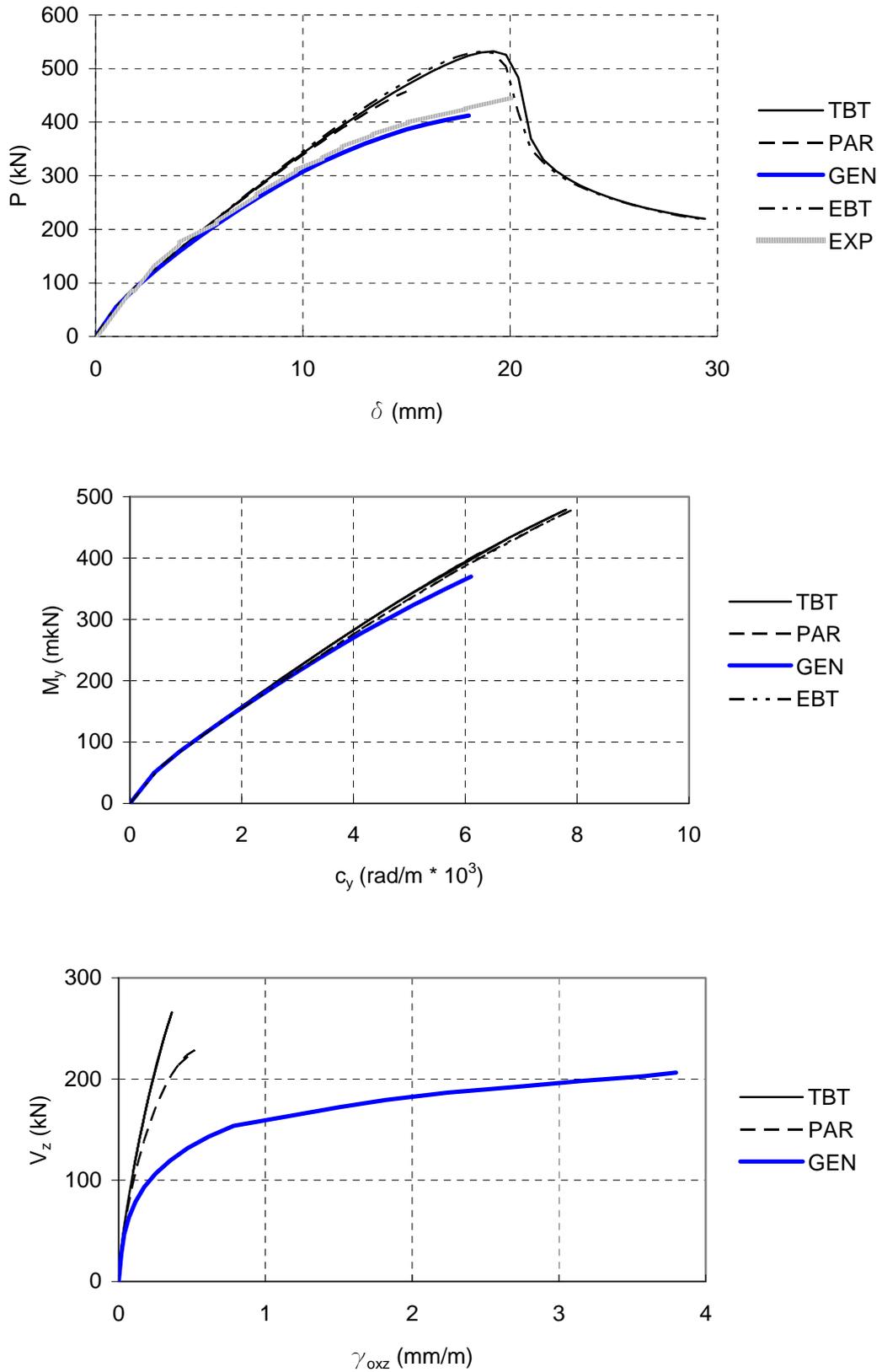


Fig. 7.31 Comparación resultados probeta BS-A2

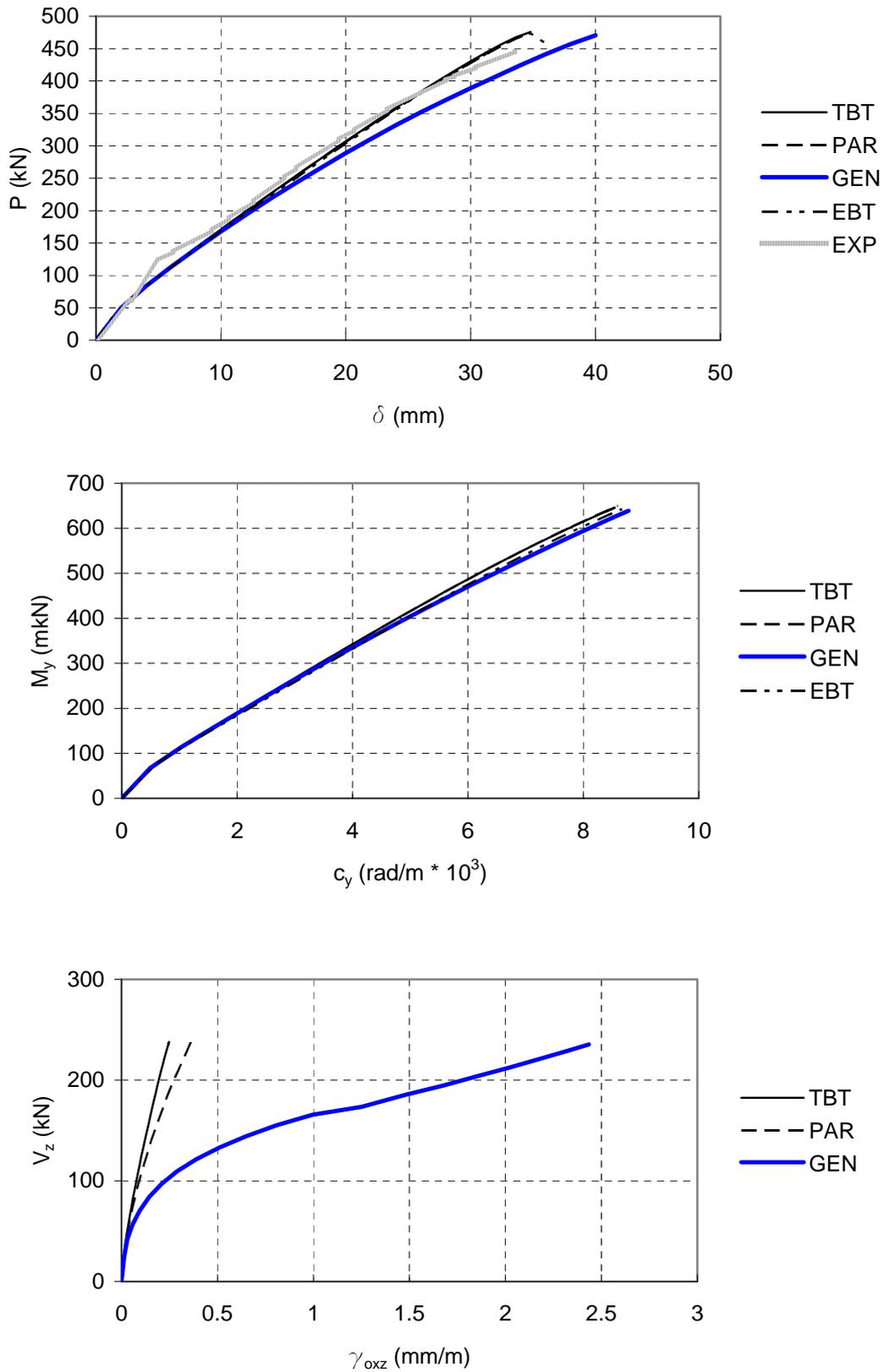


Fig. 7.32 Comparación resultados probeta BS-A3

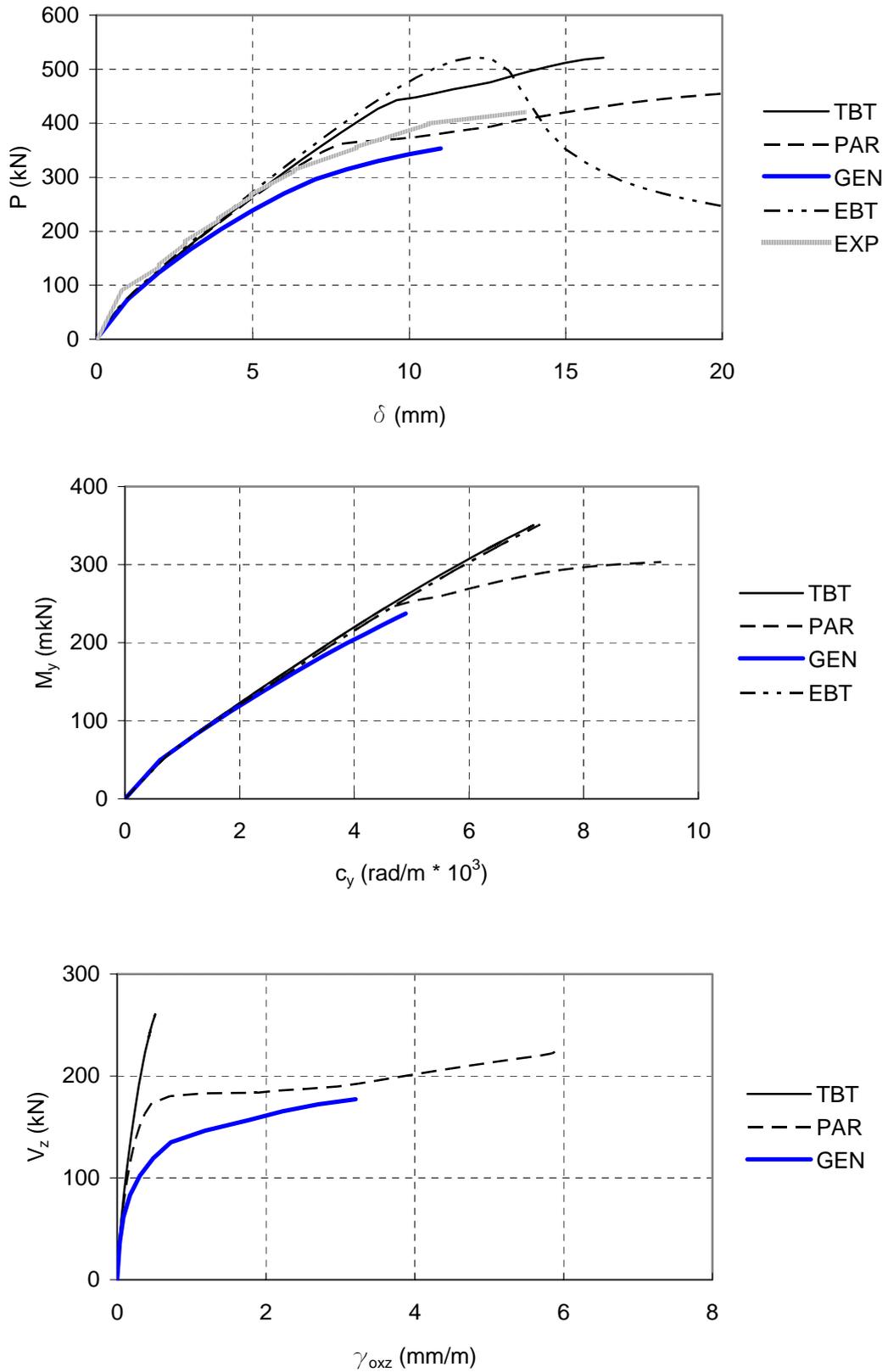


Fig. 7.33 Comparación resultados probeta BS-B1

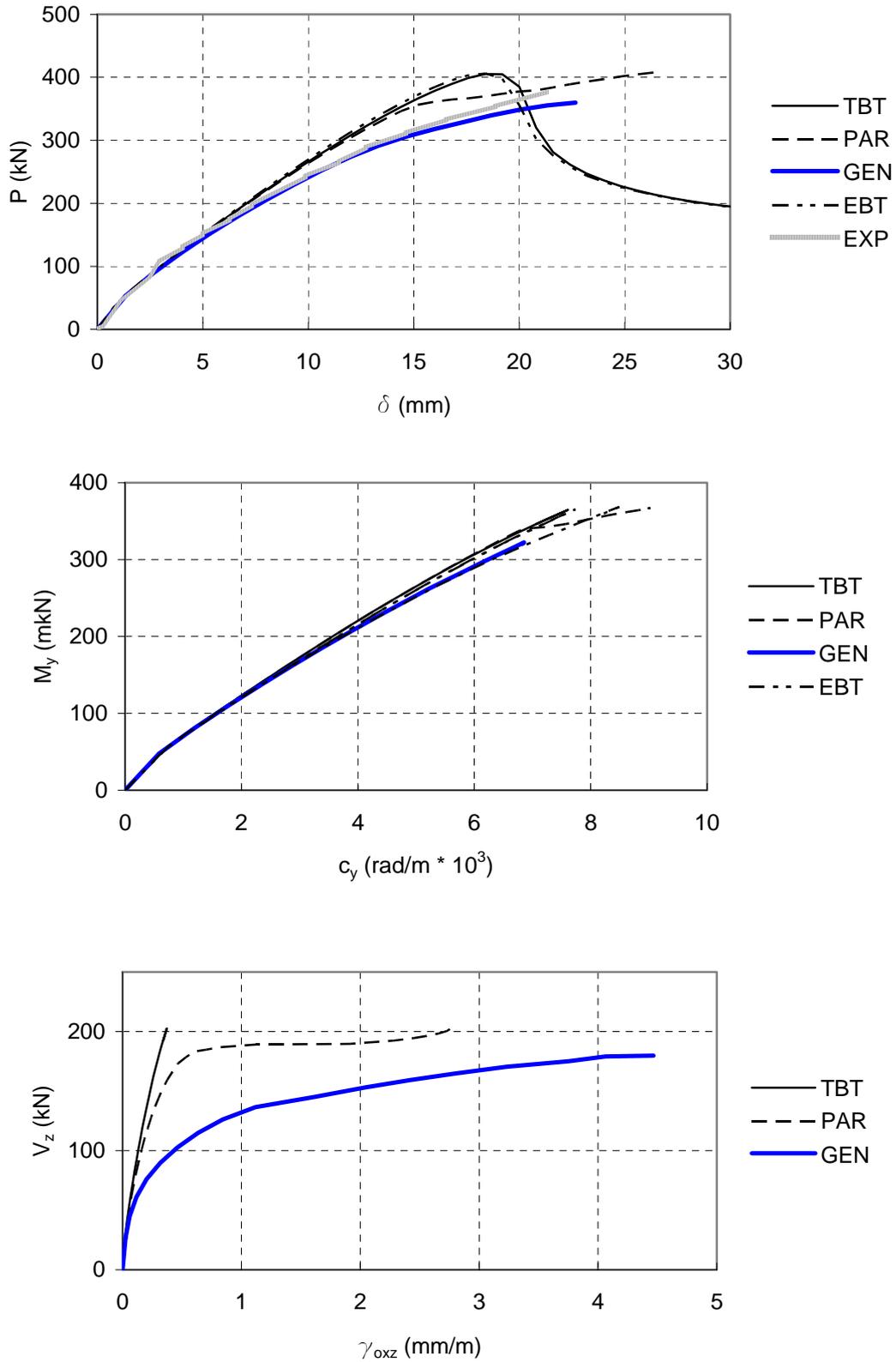


Fig. 7.34 Comparación resultados probeta BS-B2

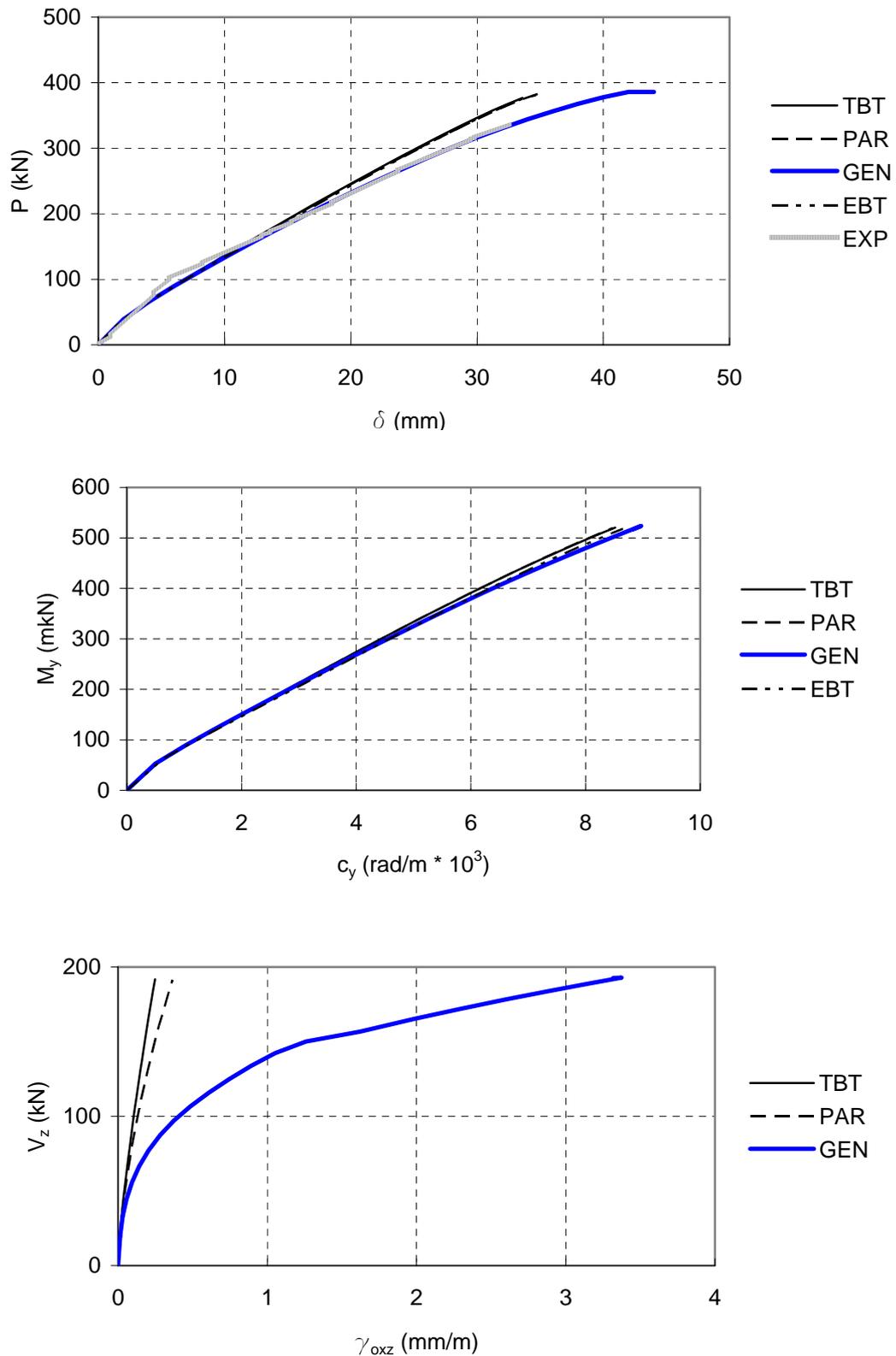


Fig. 7.35 Comparación resultados probeta BS-B3

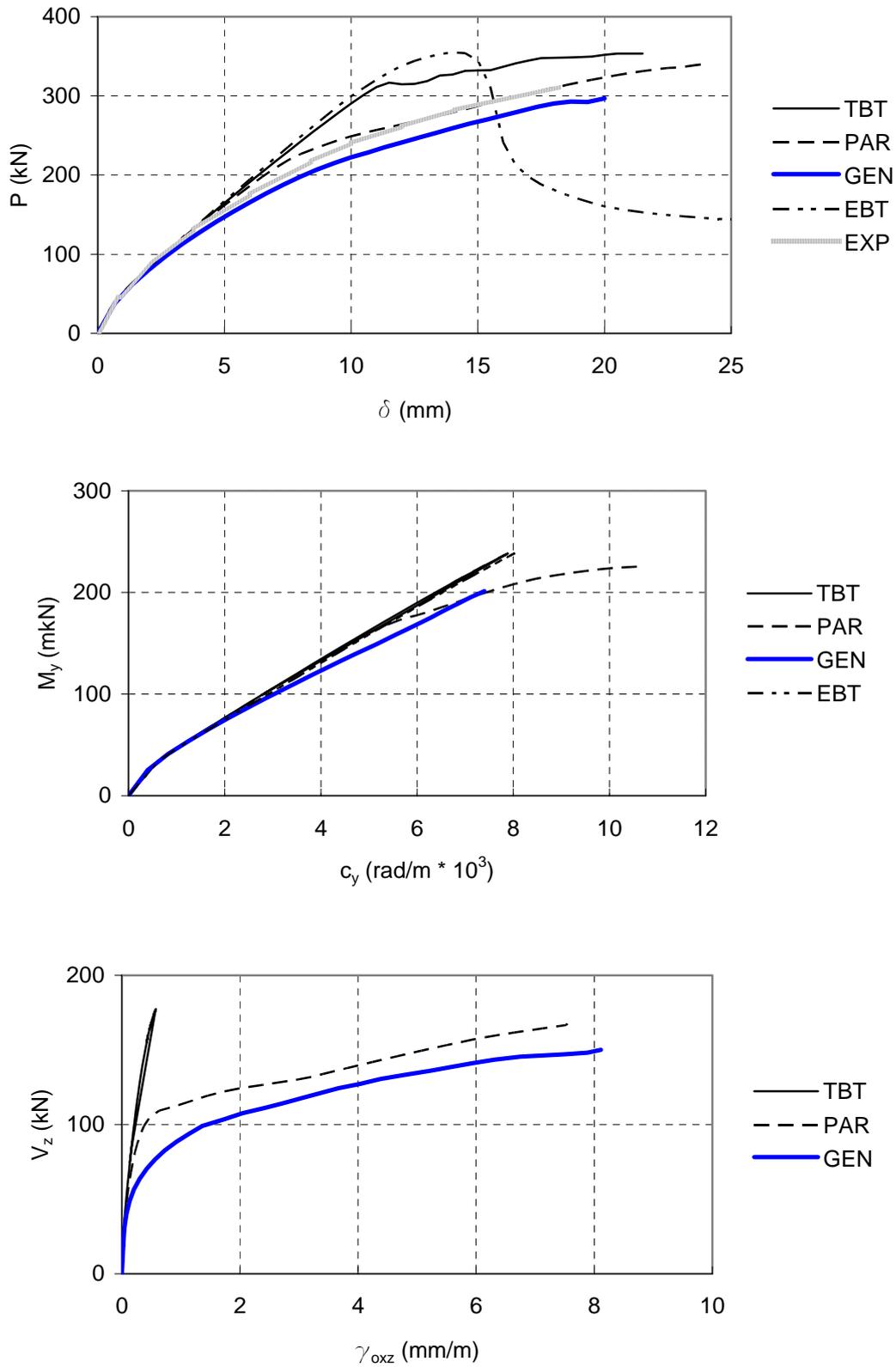


Fig. 7.36 Comparación resultados probeta BS-C1

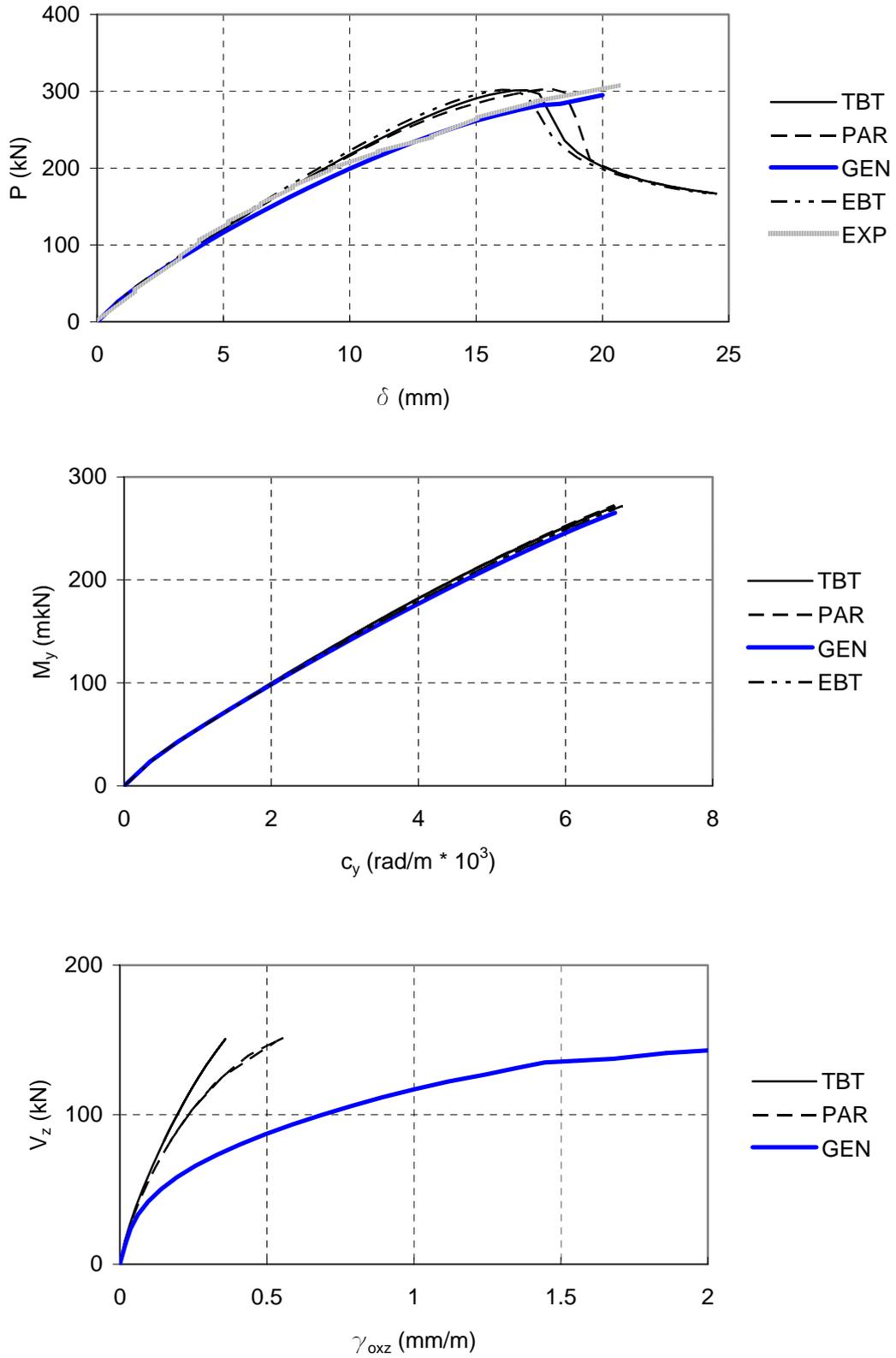


Fig. 7.37 Comparación resultados probeta BS-C2

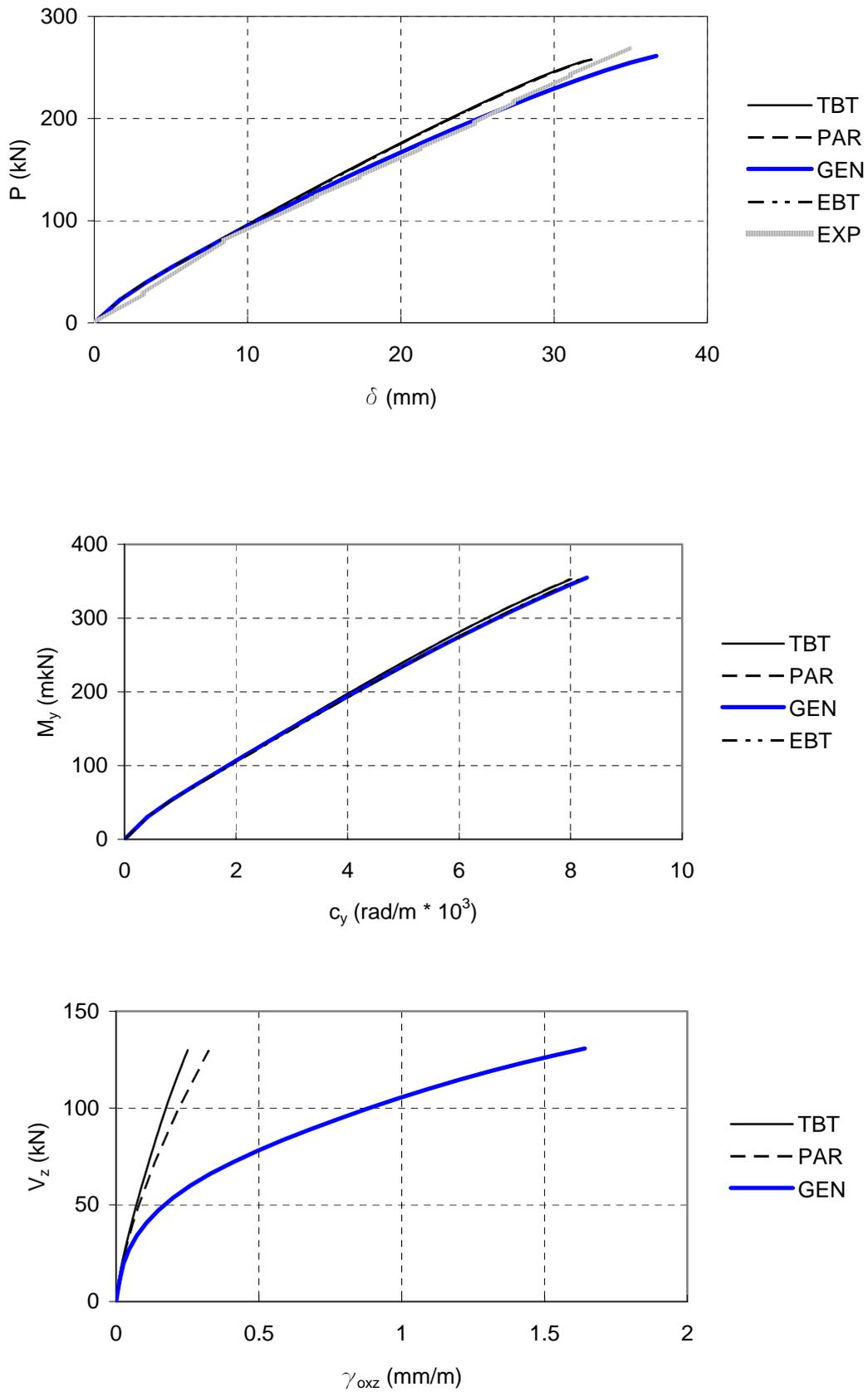


Fig. 7.38 Comparación resultados probeta BS-C3

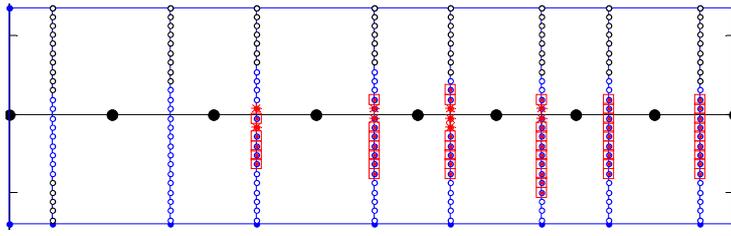


Fig. 7.39 Estado de agotamiento probeta BS-A1. Modelo general

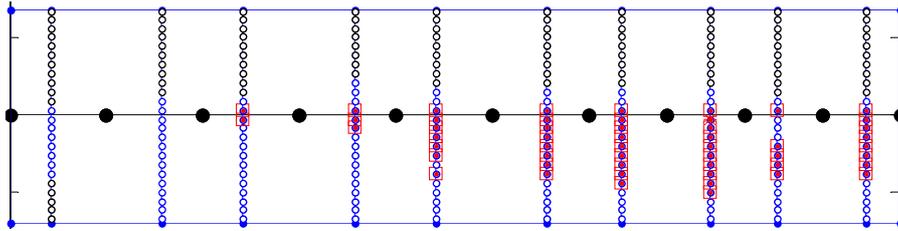


Fig. 7.40 Estado de agotamiento probeta BS-A2. Modelo general

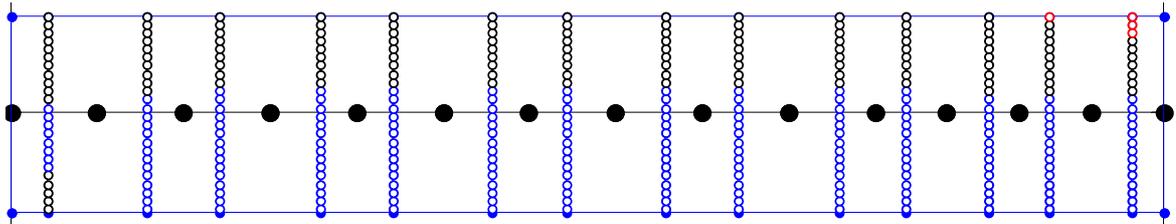


Fig. 7.41 Estado de agotamiento probeta BS-A3. Modelo general

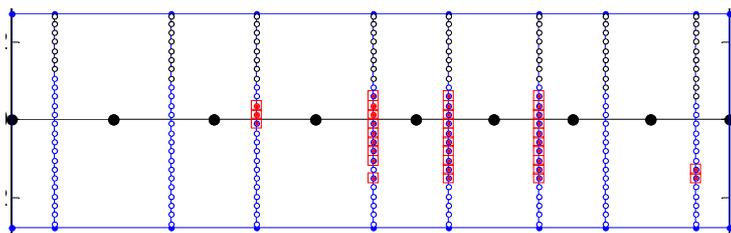


Fig. 7.42 Estado de agotamiento probeta BS-B1. Modelo general

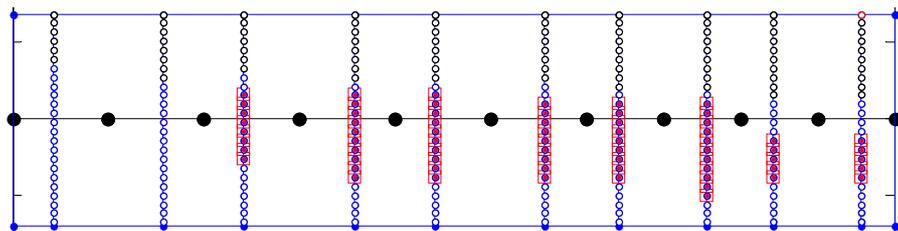


Fig. 7.43 Estado de agotamiento probeta BS-B2. Modelo general

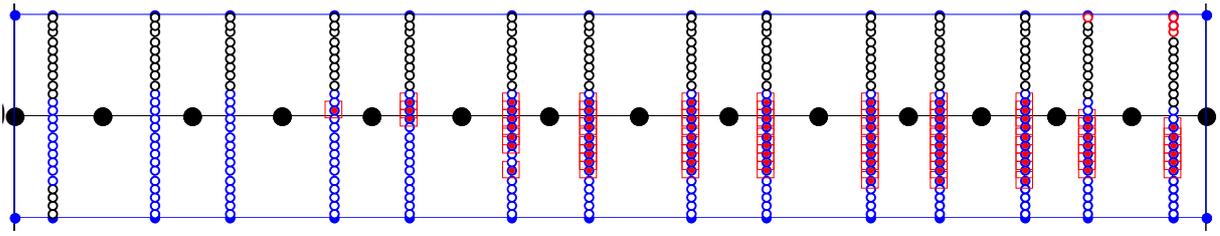


Fig. 7.44 Estado de agotamiento probeta BS-B3. Modelo general

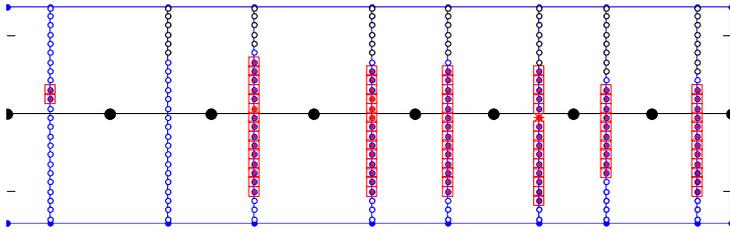


Fig. 7.45 Estado de agotamiento probeta BS-C1. Modelo general

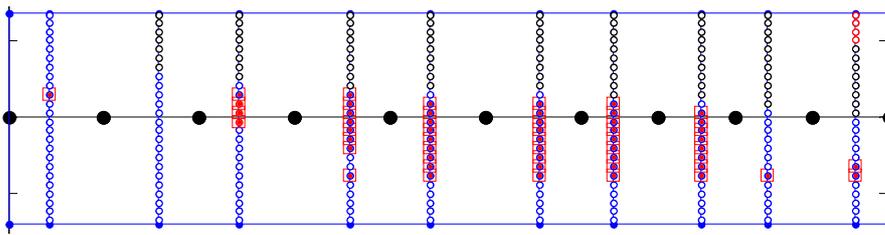


Fig. 7.46 Estado de agotamiento probeta BS-C2. Modelo general

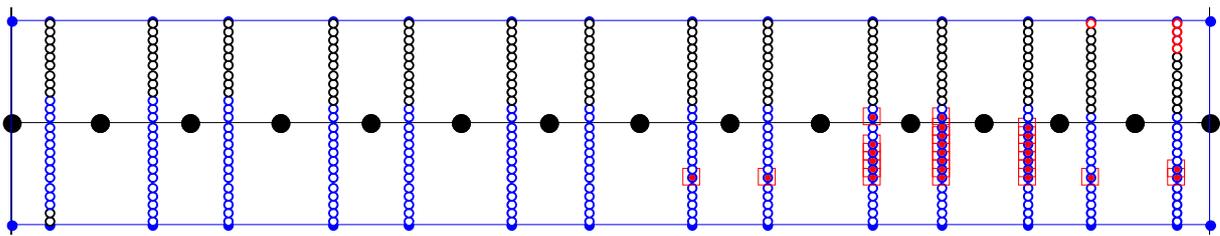


Fig. 7.47 Estado de agotamiento probeta BS-C3. Modelo general

Simbología:

- Hormigón sin fisurar
- Hormigón fisurado
- Hormigón agotado en compresión
- Plastificación de la armadura transversal
- \* Armadura transversal en agotamiento

Tabla 7.10 Resumen de resultados vigas Bresler y Scordelis

Probeta	$P_{EXP}$ (kN)	$P_{EBT}$ (kN)	$\frac{P_{EXP}}{P_{EBT}}$	$P_{TBT}$ (kN)	$\frac{P_{EXP}}{P_{TBT}}$	$P_{PAR}$ (kN)	$\frac{P_{EXP}}{P_{PAR}}$	$P_{GEN}$ (kN)	$\frac{P_{EXP}}{P_{GEN}}$
BS-A1	467.1	632.7	0.74	568.8	0.82	470.5	0.99	401.3	1.16
BS-A2	489.3	531.8	0.92	532.2	0.92	457.2	1.07	412.3	1.19
BS-A3	468.4	473.4	0.99	475.7	0.98	474.5	0.99	470.5	1.00
BS-B1	442.6	522.1	0.85	521.3	0.85	456.4	0.97	353.3	1.25
BS-B2	400.3	405.9	0.99	405.2	0.99	407.7	0.98	359.6	1.11
BS-B3	353.6	381.6	0.93	376.6	0.94	382.6	0.92	385.9	0.92
BS-C1	311.4	354.9	0.88	353.4	0.88	340.4	0.91	296.7	1.05
BS-C2	324.7	301.9	1.08	301.4	1.08	302.8	1.07	295.0	1.10
BS-C3	269.1	259.5	1.04	256.4	1.05	259.8	1.04	261.3	1.03
<b>MEDIA</b>			<b>0.93</b>		<b>0.95</b>		<b>0.99</b>		<b>1.09</b>
<b>COV %</b>			<b>10.35</b>		<b>8.74</b>		<b>5.66</b>		<b>10.38</b>

Probeta	$\delta_{EXP}$ (mm)	$\delta_{EBT}$ (mm)	$\frac{\delta_{EXP}}{\delta_{EBT}}$	$\delta_{TBT}$ (mm)	$\frac{\delta_{EXP}}{\delta_{TBT}}$	$\delta_{PAR}$ (mm)	$\frac{\delta_{EXP}}{\delta_{PAR}}$	$\delta_{GEN}$ (mm)	$\frac{\delta_{EXP}}{\delta_{GEN}}$
BS-A1	13.4	13.2	1.01	11.2	1.19	19.6	0.68	13.3	1.00
BS-A2	20.0	18.6	1.08	19.2	1.04	29.4	0.68	18.0	1.11
BS-A3	33.6	34.8	0.96	34.8	0.96	34.8	0.96	40.0	0.84
BS-B1	13.7	12.0	1.14	16.2	0.84	20.4	0.67	11.0	1.24
BS-B2	21.3	18.4	1.16	18.4	1.16	26.4	0.81	22.7	0.94
BS-B3	32.6	34.8	0.94	33.6	0.97	34.8	0.94	42.0	0.78
BS-C1	18.2	14.0	1.30	21.0	0.87	24.0	0.76	20.0	0.91
BS-C2	20.6	16.0	1.29	17.0	1.21	18.0	1.15	20.0	1.03
BS-C3	34.9	33.0	1.06	32.0	1.09	33.0	1.06	36.7	0.95
<b>MEDIA</b>			<b>1.10</b>		<b>1.04</b>		<b>0.86</b>		<b>0.98</b>
<b>COV %</b>			<b>13.05</b>		<b>13.66</b>		<b>17.71</b>		<b>14.11</b>

### 7.3.4 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS VIGAS BRESLER Y SCORDELIS

Al igual que en la serie de vigas de Vecchio y Shim, se estudian primero los resultados de cada probeta y, a continuación, se hace un análisis global de toda la serie.

- *Probeta BS-A1 (Fig. 7.30 y Fig. 7.39)*

En el gráfico carga-flecha (Fig. 7.30) se puede observar que las curvas que mejor aproximación proporcionan son la GEN y PAR. Entre estas dos últimas y las curvas TBT y EBT existe una variación muy significativa de rigidez. Sólo las curvas GEN y PAR desarrollan fisuración por cortante.

En cuanto al diagrama momento-curvatura (Fig. 7.30), todas las curvas tienen en los primeros escalones de carga un comportamiento prácticamente idéntico. Sin embargo, para los casos GEN y PAR se produce una pérdida significativa de rigidez

a flexión tras la fisuración por cortante. Este efecto es todavía más acusado en el gráfico  $V_z - \gamma_{0xz}$  (Fig. 7.30). Se producen deformaciones por cortante muy elevadas tanto para el caso GEN como para el caso PAR.

En cuanto a las cargas de rotura (véase Fig. 7.30 y Tabla 7.10) las curvas TBT y EBT alcanzan valores muy superiores al experimental, mientras que las curvas PAR y GEN aproximan mejor. Ahora bien, en el caso GEN la carga de rotura alcanzada es menor que la obtenida en el ensayo. La rigidez global del comportamiento GEN es menor que el resultado experimental. Esto puede indicar que la estimación de la resistencia a tracción empleada para el hormigón en esta modelización sea algo menor que la resistencia real del ensayo. El tipo de rotura para el caso GEN (Fig. 7.39) es por fallo de cortante. En muchas de las secciones del elemento se alcanza un alto grado de plastificación de la armadura transversal. En algunas fibras se llega incluso a la deformación de rotura. Por lo tanto, el tipo de agotamiento obtenido coincide con el observado en laboratorio.

- *Probeta BS-A2 (Fig. 7.31 y Fig. 7.40)*

En cuanto al diagrama de carga-flecha (Fig. 7.31) las leyes TBT, PAR y EBT tienen un comportamiento más rígido que la ley experimental. Por el contrario, la curva GEN sigue de forma ajustada la ley experimental. Tras analizar los gráficos carga flecha y  $V_z - \gamma_{0xz}$  (Fig. 7.31) se puede observar que sólo la curva GEN puede representar el fenómeno de fisuración diagonal por cortante. Con respecto al diagrama momento-curvatura (Fig. 7.31), todas las leyes muestran resultados similares, si bien el caso GEN presenta una ligera pérdida de rigidez a flexión.

El valor de carga de rotura que predice el modelo general es algo inferior al observado experimentalmente (véase Tabla 7.10). El tipo de rotura es claramente por cortante. Los estribos sufren un acusado proceso de plastificación y llegan a deformaciones de rotura en algunas fibras. En la zona de centro-luz no se produce agotamiento por flexión. El hormigón resiste a compresión y la armadura longitudinal permanece en régimen elástico. Por lo tanto, el comportamiento GEN define una típica rotura por cortante tal y como se produce en el laboratorio.

▪ *Probeta BS-A3 (Fig. 7.32 y Fig. 7.41)*

Los resultados obtenidos para esta probeta son similares a los obtenidos para la probeta VS-A3. Las curvas prácticamente coinciden tanto en el gráfico carga-flecha como en el diagrama momento-curvatura (Fig. 7.32). Ahora bien, sólo la curva GEN permite que los estribos entren en carga gracias a que se desarrolla fisuración diagonal por cortante. Esta viga, según Bresler y Scordelis (1963) [10], desarrolla fisuras diagonales previas a una rotura por flexión.

Las cargas de rotura para todas las curvas son similares ya que el agotamiento se produce por flexión (véase Tabla 7.10). En cuanto al tipo de rotura, se puede observar que para el caso GEN (Fig. 7.41) no se produce la plastificación de la armadura transversal. Por otra parte, en la zona de centro-luz se registra agotamiento por compresión del hormigón y plastificación de la capa más inferior de la armadura longitudinal.

▪ *Probeta BS-B1 (Fig. 7.33 y Fig. 7.42 )*

En el diagrama carga-flecha (Fig. 7.33) se puede observar que las curvas GEN, PAR y TBT sufren una pérdida de rigidez apreciable como consecuencia de la fisuración por cortante. Ahora bien, la aparición de esta se produce primero para el caso GEN, luego para el caso PAR y finalmente para el caso TBT. En este último para un valor de carga cercano al máximo. Sólo el caso EBT no desarrolla fisuración por cortante. De entre todas las curvas la que mejor ajuste produce es la de tipo PAR. Todo parece indicar que la resistencia a tracción considerada es menor que la real. En todo momento la curva GEN queda por debajo de la curva EXP.

El gráfico momento-curvatura (Fig. 7.33) presenta resultados dispares. Mientras que las curvas EBT, TBT y GEN presentan una rigidez a flexión similar, la curva PAR sufre una disminución brusca de la rigidez a flexión. Con respecto al diagrama  $V_z - \gamma_{0,xz}$  (Fig. 7.33), se puede observar fisuración por cortante para las curvas PAR y GEN acompañada de una acusada deformación a cortante.

Las cargas de rotura son muy dispares según aparece en la Tabla 7.10. Las curvas EBT y TBT aproximan por exceso la carga de rotura. La curva PAR se ajusta de manera razonable a esta carga. Finalmente, la curva GEN proporciona resultados inferiores a los experimentales. Esta probeta registró en laboratorio una rotura por cortante-flexión tal y como se obtiene numéricamente según el modelo general.

▪ *Probeta BS-B2 (Fig. 7.34 y Fig. 7.43)*

El gráfico carga-flecha (Fig. 7.34) indica que existe una pérdida de rigidez significativa en las curvas GEN y PAR. Además, con respecto a la probeta anterior BS-A1, las curvas están más juntas. Esto se debe a que la probeta BS-A2 tiene una esbeltez mayor que la BS-A1. Hay que destacar que la curva experimental y la curva GEN son prácticamente coincidentes a cualquier nivel de carga. Esto denota que la rigidez global del elemento se controla adecuadamente.

Todo el haz de curvas que forman el diagrama momento-curvatura (Fig. 7.34) se reduce prácticamente a una única posición. Se producen diferencias notables en el diagrama  $V_z - \gamma_{0,xz}$  (Fig. 7.34), siendo el caso GEN el que mayor deformación a cortante presenta.

La Tabla 7.10 indica que las cargas máximas de todas las curvas son algo superiores a la registrada experimentalmente, sin excepción. Con el modelo general se alcanza en rotura un alto nivel de plastificación de los estribos (véase Fig. 7.41). Por otra parte, en centro-luz el hormigón agota por compresión y sólo las armaduras situadas en la capa más inferior plastifican. Por lo tanto, se trata de un agotamiento por flexión pero precedido de un significativo proceso de plastificación de la armadura transversal. En el laboratorio se produce una rotura por cortante-flexión, en cierto modo, similar a la obtenida numéricamente.

▪ *Probeta BS-B3 (Fig. 7.35 y Fig. 7.44)*

Los resultados de esta probeta son similares a las de su homóloga VS-B3 y a la probeta BS-A3. Todas las curvas representadas en el diagrama carga-flecha (Fig. 7.35) son prácticamente coincidentes con el valor obtenido experimentalmente. Esta igualdad en las curvas se traslada, a su vez, al gráfico momento-curvatura (Fig. 7.35). Sin embargo, a la vista del diagrama  $V_z - \gamma_{0,xz}$  (Fig. 7.35) se puede observar nuevamente que la curva GEN es la única que presenta una deformación significativa a cortante.

En cuanto a las cargas de rotura (véase Tabla 7.10), los resultados obtenidos son ciertamente similares. En la Fig. 7.42 se puede observar que la armadura transversal plastifica en buena parte de la viga. Sin embargo, cuando se alcanza la máxima carga de rotura, se produce un evidente agotamiento de la cabeza de compresión. Además, se inicia la plastificación de las dos armaduras más cercanas al borde inferior. Según Bresler y Scordelis (1963) [10], el tipo de rotura de esta viga

es por flexión aunque a partir del 50% de carga de rotura se originan fisuras por cortante crecientes pero que en ningún momento derivan hacia un fallo por cortante.

▪ *Probeta BS-C1 (Fig. 7.36 y Fig. 7.45)*

Los resultados obtenidos del análisis para la probeta BS-C1 son similares a los previamente obtenidos para las probetas BS-A1 y BS-B1. Al tratarse de una viga correspondiente a la luz menor ensayada se producen variaciones muy significativas en las diferentes curvas de comportamiento. En el diagrama carga-flecha (Fig. 7.36) se puede observar una importante pérdida de rigidez por fisuración diagonal en las curvas PAR y GEN. Además, ambas curvas tienen un desarrollo similar aunque la correspondiente al caso GEN presenta menos rigidez que la curva experimental. En el caso TBT la fisuración diagonal se produce para niveles de carga próximos a la rotura. La curva EBT no presenta fisuración por cortante.

Con respecto al gráfico momento-curvatura (Fig. 7.36), todas las leyes se comportan de forma prácticamente idéntica a excepción de la curva PAR. Esta curva sufre una pérdida de rigidez a flexión para cargas cercanas a la rotura. En cuanto al diagrama  $V_z - \gamma_{0,xz}$  (Fig. 7.36), se puede observar una pérdida significativa de rigidez a cortante para las curvas PAR y GEN. Además, ambas curvas permanecen próximas entre sí, aunque la curva GEN presenta una pérdida de rigidez a cortante más progresiva.

Las cargas de rotura (véase Tabla 7.10) arrojan resultados ligeramente superiores a los registrados experimentalmente, a excepción del modelo general. El estado de agotamiento correspondiente al caso GEN (Fig. 7.45) indica que se llega a la rotura de la armadura transversal. El agotamiento tiene lugar prácticamente a la par en los dos puntos de integración correspondientes a los dos elementos finitos centrales del modelo. En el laboratorio se observó una rotura por cortante tal y como predice el modelo general.

▪ *Probeta BS-C2 (Fig. 7.37 y Fig. 7.46)*

En cuanto al gráfico carga-flecha (Fig. 7.37), la rigidez es similar para todas las curvas planteadas. Sin embargo, la curva GEN presenta un poco más de flexibilidad. Además, la exactitud que se consigue es muy buena. Las curvas GEN y experimental coinciden para cualquier nivel de carga.

En el gráfico momento-curvatura (Fig. 7.37) todas las curvas son casi idénticas. En cuanto al gráfico  $V_z - \gamma_{0xz}$  (Fig. 7.37), el comportamiento de las curvas TBT y PAR es similar y de poca deformación a cortante. Esto denota que no se registra fisuración diagonal. Sin embargo, la curva GEN presenta una mayor deformación. Se puede observar una pérdida gradual de rigidez a cortante y plastificación en la armadura transversal.

Con respecto a la carga de rotura, todas las curvas se sitúan por debajo del valor obtenido experimentalmente en porcentajes que oscilan entre el 7 y el 10%, según indica la Tabla 7.10. En cuanto al estado de agotamiento correspondiente al modelo general se puede observar un grado importante de plastificación en las secciones de los dos elementos centrales. Además, se produce el agotamiento del hormigón en la cara comprimida de la zona de centro-luz. Ahora bien, las armaduras longitudinales de tracción en esta zona no experimentan plastificación. Por lo tanto, se podría hablar de una rotura que se origina por degradación a cortante seguida de un agotamiento de la cabeza comprimida. Como consecuencia, el tipo de rotura que predice el modelo coincide sensiblemente con el observado en el laboratorio.

- *Probeta BS-C3 (Fig. 7.38 y Fig. 7.47)*

Los resultados obtenidos son análogos a las probetas BS-A3 y BS-B3. Las curvas carga-flecha representadas en la Fig. 7.38 coinciden prácticamente con la curva experimental. En el gráfico momento-curvatura (Fig. 7.38) se puede observar para todas las curvas la misma rigidez a flexión para cualquier nivel de carga. Tan solo el gráfico  $V_z - \gamma_{0xz}$  (Fig. 7.38) arroja resultados diferentes. Solo la curva GEN presenta una deformación a cortante significativa. Este último comportamiento es el que más fielmente representa el obtenido en el laboratorio, ya que se capta la fisuración por cortante.

La comparación entre las cargas de rotura obtenidas para cada caso y la carga última de la probeta ensayada muestra, para todos los casos, valores inferiores a los experimentales entre el 3 y el 5%. El tipo de rotura que predice el modelo general indica que se produce fisuración diagonal y posterior plastificación de los estribos sin llegar al agotamiento por cortante de la pieza. La zona crítica se sitúa en centro-luz, donde se puede observar agotamiento del hormigón a compresión sin llegar a la plastificación de la armadura longitudinal. Este tipo de rotura coincide con el descrito tras el ensayo.

▪ *Análisis global de la serie de Bresler y Scordelis*

Las cargas de rotura producen resultados globalmente dispares en función del tipo de comportamiento analizado. En el caso EBT y TBT se obtienen valores superiores a los experimentales. El análisis con perfil parabólico arroja resultados muy exactos y con un reducido coeficiente de variación. Sin embargo, los resultados con el modelo general de corrección de cortante se sitúan del orden de un 10% por debajo de los resultados experimentales. Existen diferencias con respecto a la serie de Vecchio-Shim donde se obtuvieron resultados más cercanos a los experimentales. Sobre todo las probetas de la serie 1 (BS-A1, BS-B1 y BS-C1), que agotan claramente por cortante, muestran resultados más anómalos. Esta variación podría explicarse por alguno de los siguientes motivos relacionados con la caracterización de los materiales: una estimación excesivamente baja para la resistencia a tracción del hormigón, o una incorrecta estimación de la rama de plastificación del acero de las armaduras transversales.

Con respecto a las flechas, la ductilidad que desarrollan las vigas de Bresler-Scordelis se ajusta bastante bien en el caso del modelo general. Ahora bien, se está comparando el valor máximo de desplazamiento registrado y no coincide en algunas probetas con la carga máxima alcanzada. Por lo tanto, los desplazamientos últimos reales deben ser algo mayores que los registrados experimentalmente y recogidos en la Tabla 7.10.

Además, el ajuste de las curvas obtenidas por el modelo general se aproxima mucho a los valores experimentales, a pesar de que se produzca en ocasiones un agotamiento prematuro de las probetas.

Tal y como se constató en el análisis de las vigas de Vecchio y Shim, la sensibilidad al tipo de hipótesis cinemática utilizada con respecto a la fisuración diagonal por cortante es alta. En esta serie de probetas, se puede observar que la fisuración diagonal se desarrolla siempre con el modelo GEN. Con el modelo PAR se produce fisuración diagonal en algunos casos correspondientes a probetas de luces cortas. En raras ocasiones se produce este fenómeno para el comportamiento como viga de Timoshenko y, en ningún caso, para el caso EBT.

En general, se puede concluir que el modelo general de corrección de cortante permite que se generen los mecanismos fundamentales de transmisión de cortante. Gracias al desarrollo de la fisuración por cortante los estribos entran significativamente en carga. Son un elemento resistente más con capacidad de transmitir esfuerzos. El proceso de plastificación de los estribos es progresivo

conforme aumenta el nivel de carga. Este proceso de plastificación se desarrolla en distintas secciones de la viga. Cuando la viga ya se encuentra con un alto grado de plastificación de la armadura de cortante, suele producirse el agotamiento por flexión en la sección de centro-luz. Los dos tipos de rotura pueden producirse prácticamente a la vez. La frontera entre lo que se puede denominar una rotura por cortante o por flexión puede no quedar establecida con nitidez. Por lo general, las probetas de la serie 1 desarrollan roturas por cortante estando la carga de rotura por flexión suficientemente alejada. En la serie 3 se produce el resultado opuesto ya que se llega a la rotura por flexión antes que a un claro desarrollo de la plastificación de la armadura transversal. Finalmente, en la serie 2 se representan probetas que agotan por cortante pero con cargas de agotamiento cercanas a las cargas por flexión. Para esta última serie, el modelo general de corrección de cortante permite captar los dos mecanismos de rotura conjuntamente. Por lo tanto, este modelo representa adecuadamente el comportamiento resistente de elementos lineales que presentan fisuración diagonal por cortante.

# CAPÍTULO 8

## MODELO PARÁBOLA-RECTA

## CAPÍTULO 8. MODELO PARÁBOLA-RECTA

### 8.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado a la aplicación del modelo teórico de corrección de cortante empleando la función de corrección parábola-recta descrita en el apartado 3.3.

El modelo parábola-recta permite definir una función de corrección de cortante con tan solo tres parámetros. Se pretende constatar si esta función de corrección de cortante tan simple es capaz de reproducir el comportamiento de vigas que sufren roturas por cortante y/o desarrollo de fisuras diagonales. El bucle de corrección de cortante con el modelo parábola-recta es mucho menos exigente en términos de capacidad computacional ya que precisa de la resolución de un sistema de tan solo tres ecuaciones y tres incógnitas en el bucle de cortante visto en el apartado 5.2. Por ello, el modelo parábola-recta puede tener ciertas ventajas con respecto al modelo general siempre que sea capaz de captar de manera adecuada la rigidez real de los elementos ensayados así como su carga de rotura.

En primer lugar se aplica el modelo parábola-recta a la serie de vigas de Vecchio y Shim siguiendo el mismo tipo de modelización empleado en el capítulo 7. Se comparan los resultados obtenidos con los valores experimentales y con el modelo general. Se presentan comparativas de curvas carga-flecha y comparativas a nivel sección (Fig. 8.2 a Fig. 8.10), tomando como sección de control la situada aproximadamente a un canto útil del punto de aplicación de la carga. A nivel sección se muestran los diagramas  $M_y - c_y$  y  $V_z - \gamma_{0xz}$ . A continuación, se muestra el estado de la viga en situación de agotamiento según el modelo parábola-recta (Fig. 8.11 a Fig. 8.19) con la finalidad de compararlo con la forma de rotura obtenida en laboratorio y con el tipo de agotamiento según el modelo general. Además, se presenta una tabla de comparación de cargas de rotura y deformaciones máximas alcanzadas en centro-luz (Tabla 8.1).

En segundo lugar se aplica el modelo parábola-recta a la serie de vigas de Bresler y Scordelis y se presentan los resultados obtenidos siguiendo la misma secuencia que en la serie de Vecchio y Shim (Fig. 8.20 a Fig. 8.37).

En tercer lugar se lleva a cabo una discusión de los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores incidiendo en las similitudes y diferencias entre el modelo parábola-recta y el modelo general.

En cuarto lugar se estudia la influencia de la resistencia a tracción del hormigón en el comportamiento de las vigas. Este parámetro parece tener una importancia muy significativa en el comportamiento a cualquier nivel de carga incluso en rotura, sobre todo cuando la rotura viene dominada por el cortante. Se lleva a cabo este estudio con el modelo parábola-recta por ser un modelo mucho más eficiente y menos costoso en cuanto a tiempos de cálculo. Se analizan los resultados que proporciona la serie de Bresler y Scordelis (Fig. 8.40 a Fig. 8.48).

En quinto y último lugar se lleva a cabo una validación de los resultados obtenidos con el modelo parábola-recta en el caso de que se emplee el elemento finito de Timoshenko con funciones de interpolación cúbicas. Además, se repite el análisis y se discretiza la sección en un número diferente de capas con el fin de observar si se producen diferencias significativas (Fig. 8.49).

## 8.2 MODELIZACIÓN VIGAS VECCHIO Y SHIM SEGÚN EL MODELO PARÁBOLA-RECTA

Se realiza un estudio totalmente análogo al llevado a cabo para el modelo general de corrección de cortante. Es importante indicar que toda la serie de probetas que se van a analizar presentan dos capas de armaduras en la cara de tracción. La formulación que aparece en 3.3 referente al modelo parábola-recta parte del supuesto de que existe tan solo una capa de armaduras.

Para modelizar estas vigas se considera que la parte recta de la función de corrección de cortante alcanza la armadura longitudinal inferior. Además, como generalmente esta armadura se encuentra dentro del espesor de una capa, se opta por alargar la recta hasta la posición  $z_1$ . Esta posición corresponde al centro de gravedad de la rama inferior de la armadura transversal que delimita las regiones  $R_1$  y  $R_2$  (Fig. 8.1).

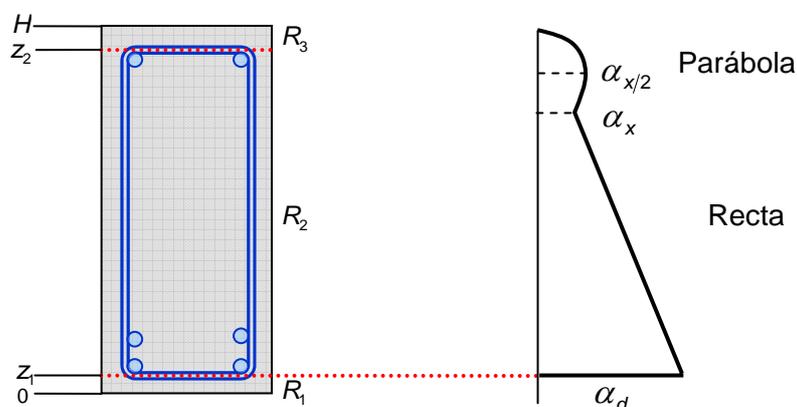


Fig. 8.1 Aplicación del modelo parábola-recta vigas Vecchio y Shim

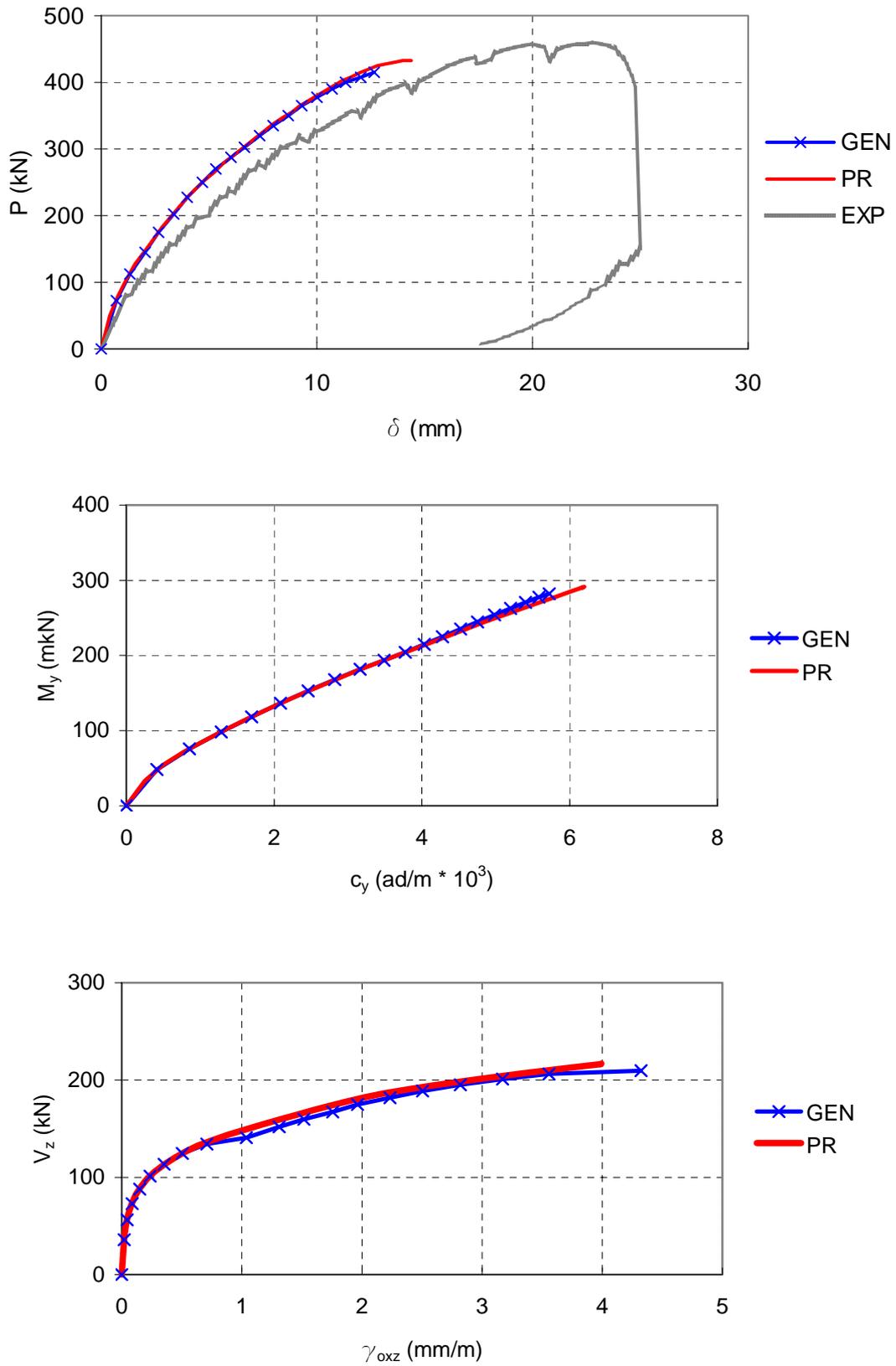


Fig. 8.2 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-A1

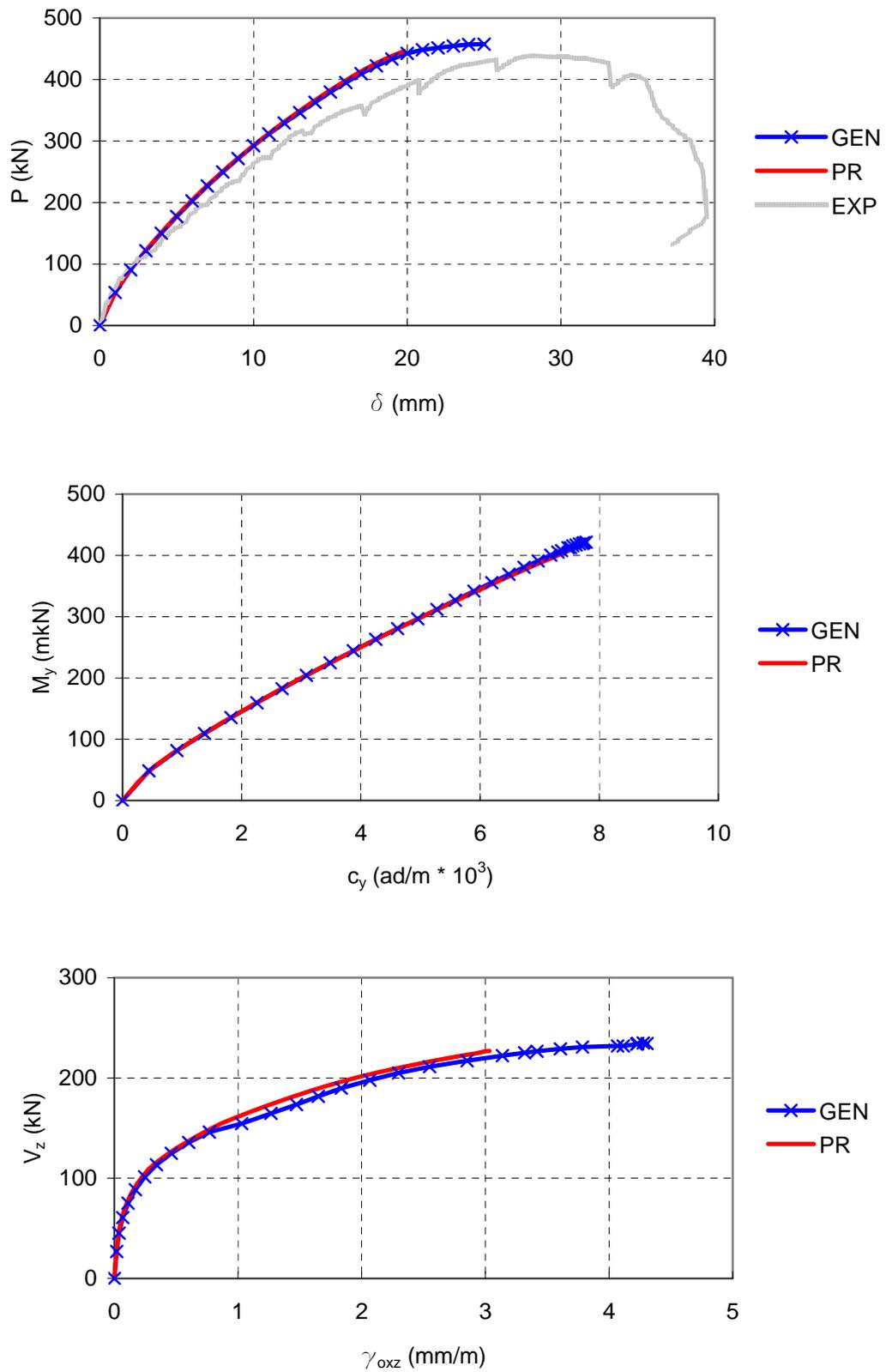


Fig. 8.3 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-A2

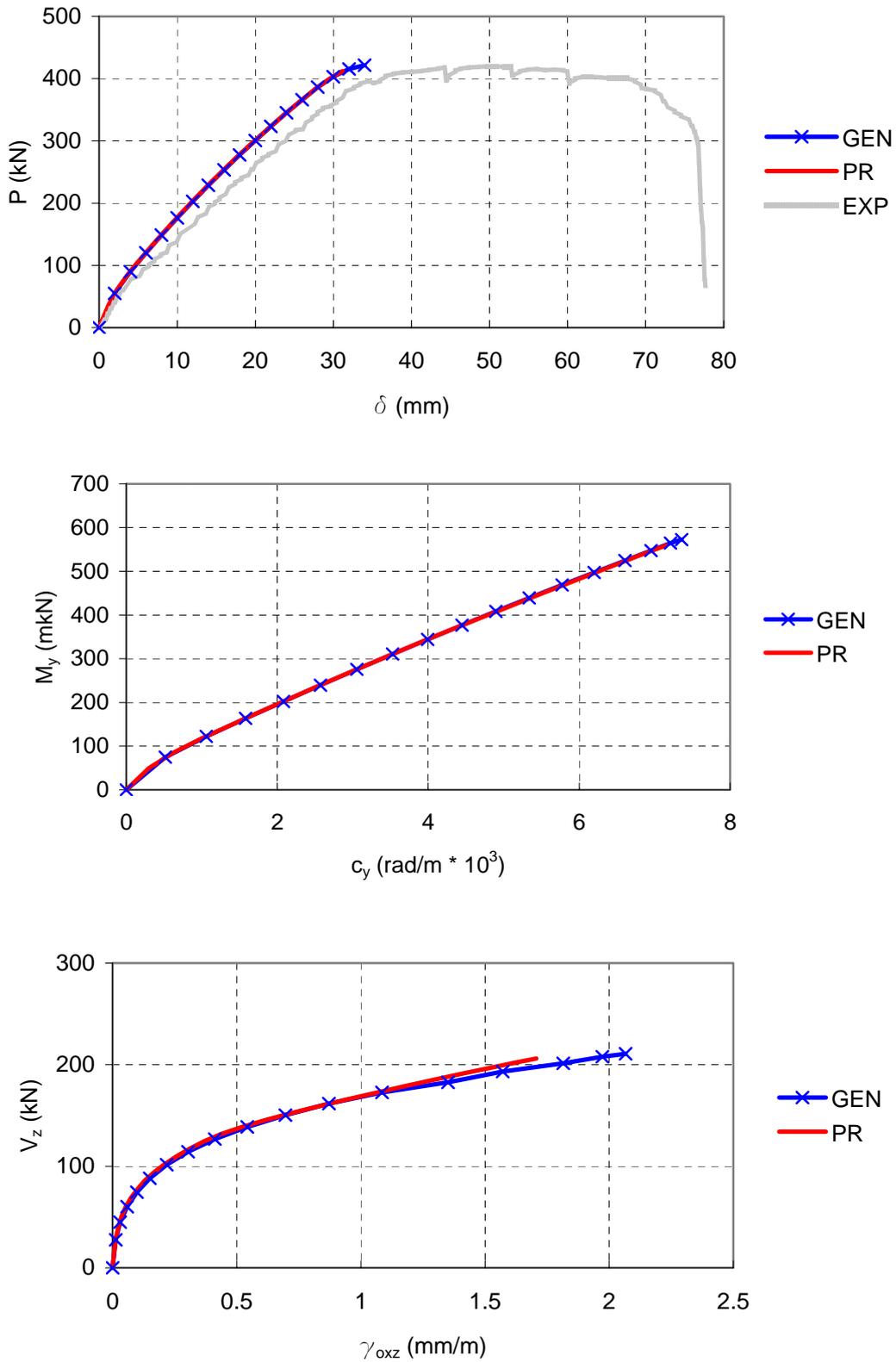


Fig. 8.4 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-A3

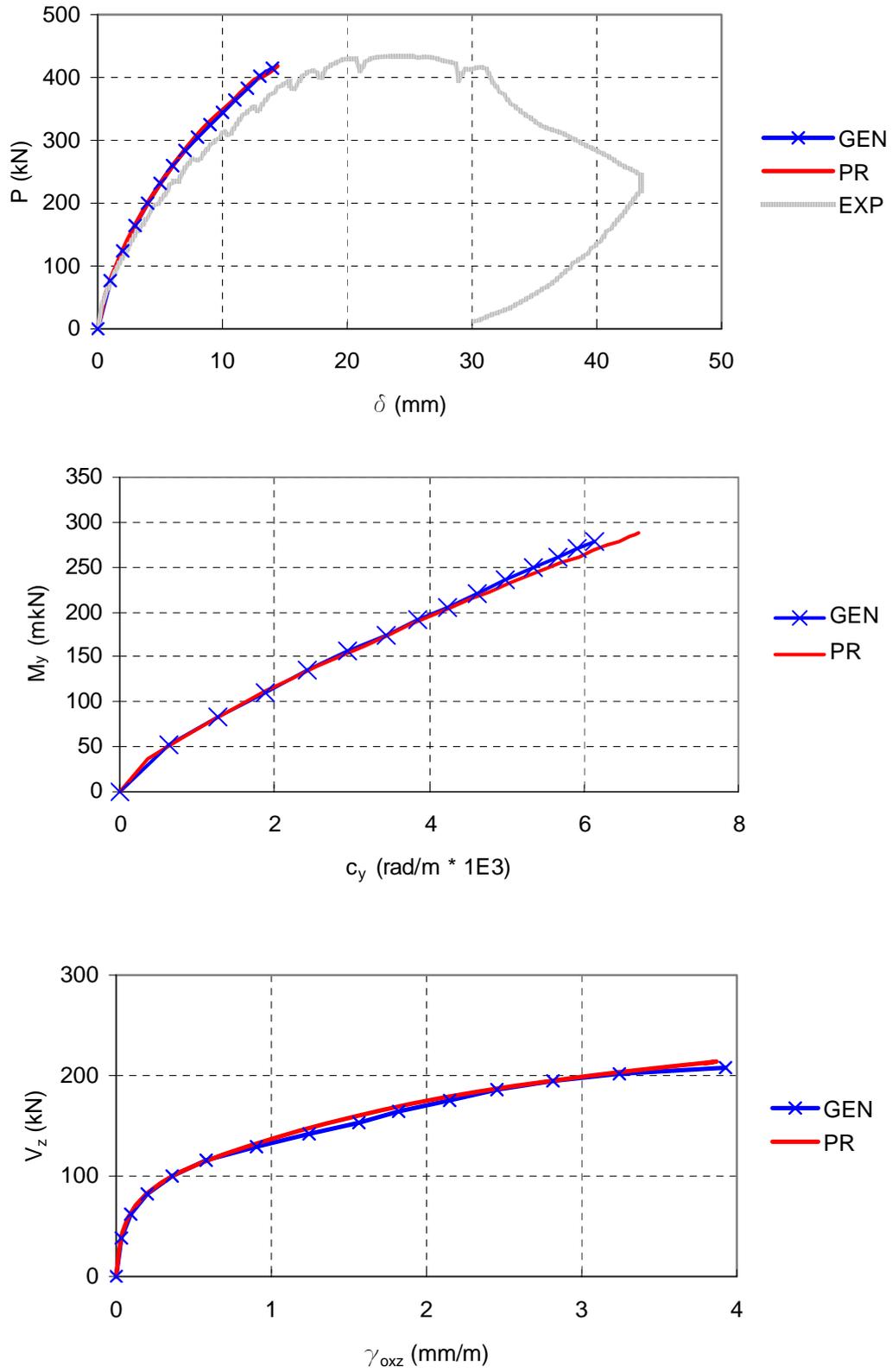


Fig. 8.5 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-B1

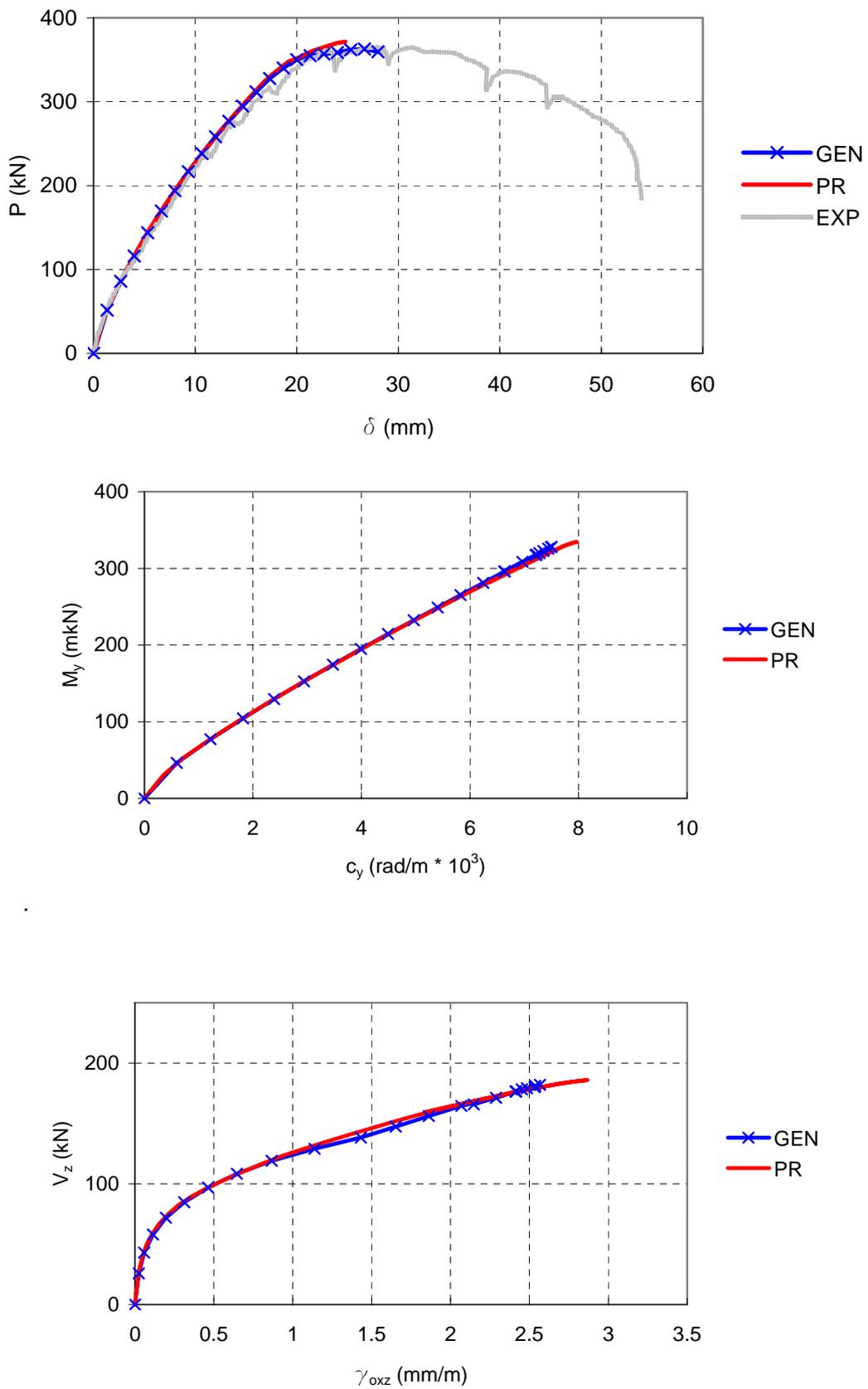


Fig. 8.6 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-B2

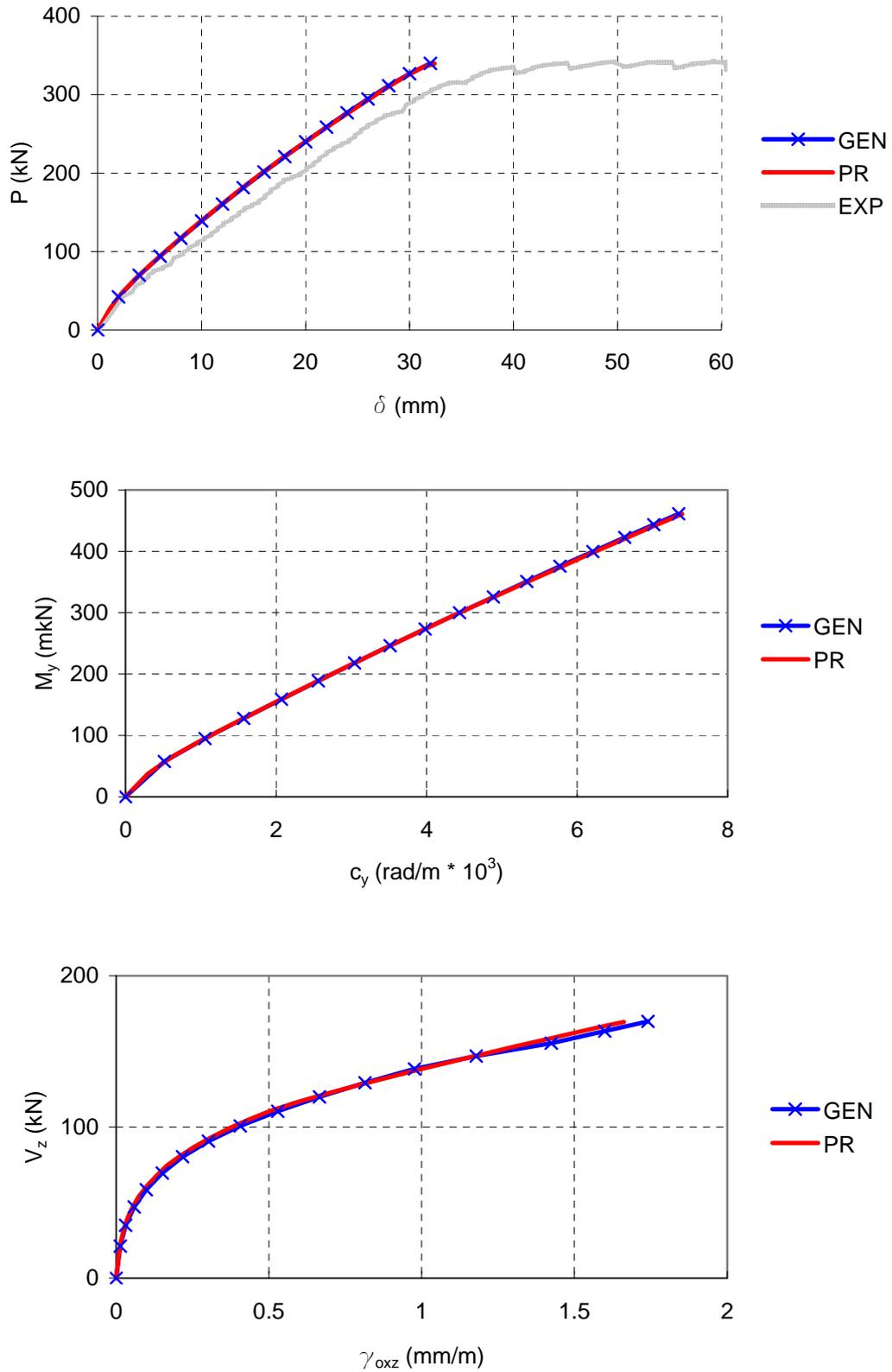


Fig. 8.7 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-B3

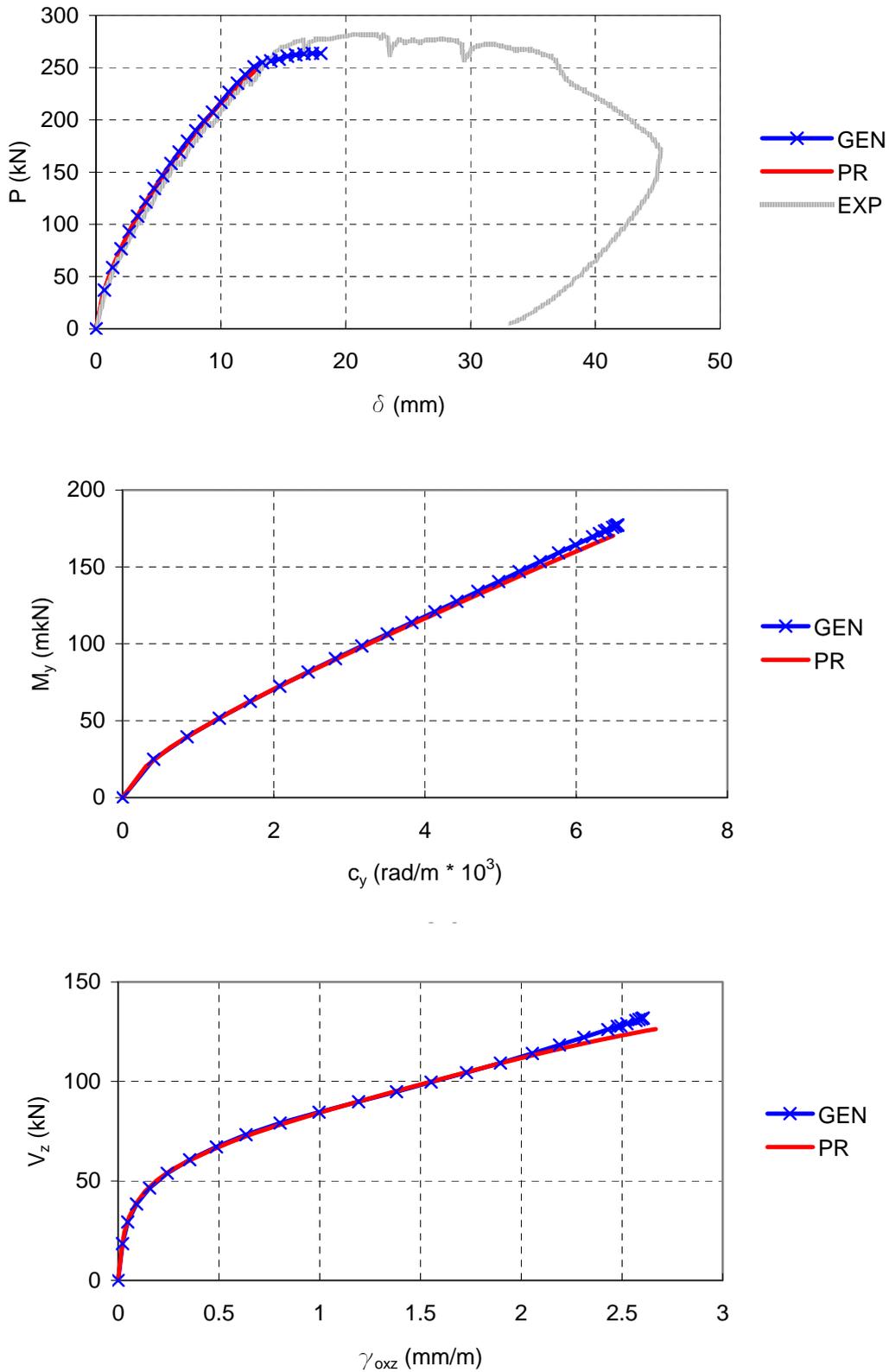


Fig. 8.8 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-C1

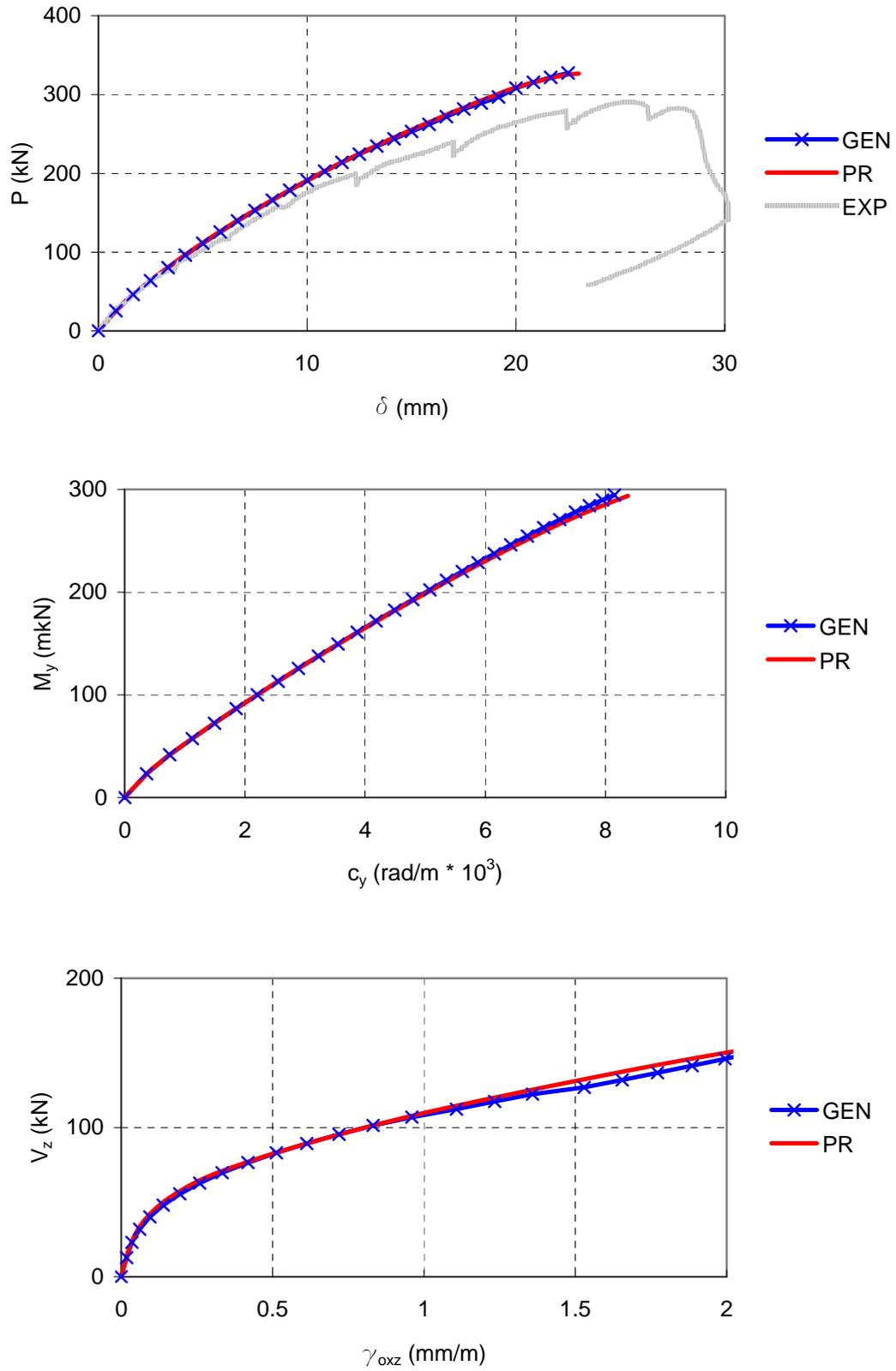


Fig. 8.9 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-C2

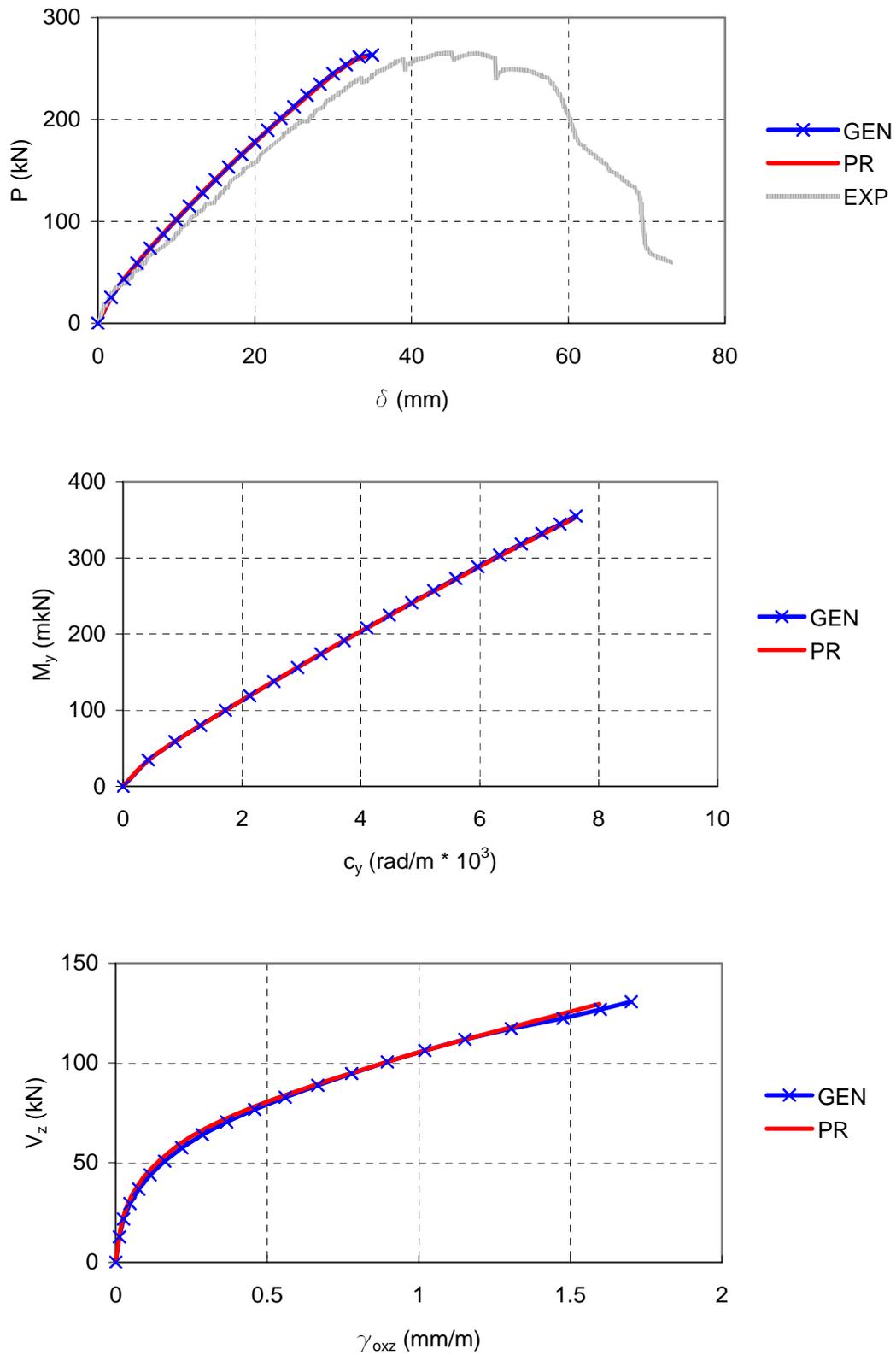


Fig. 8.10 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta VS-C3

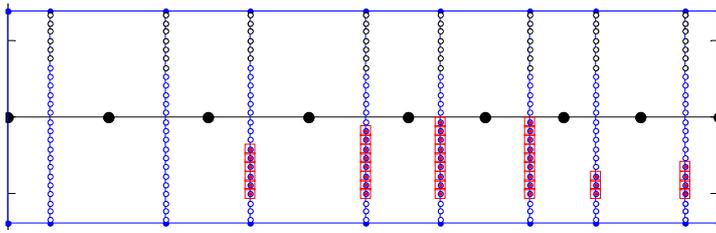


Fig. 8.11 Estado de agotamiento probeta VS-A1. Modelo parábola-recta

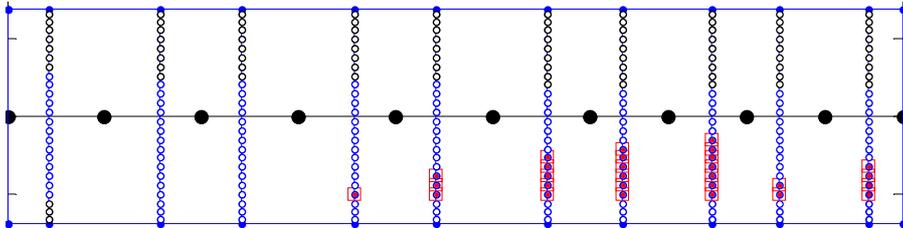


Fig. 8.12 Estado de agotamiento probeta VS-A2. Modelo parábola-recta

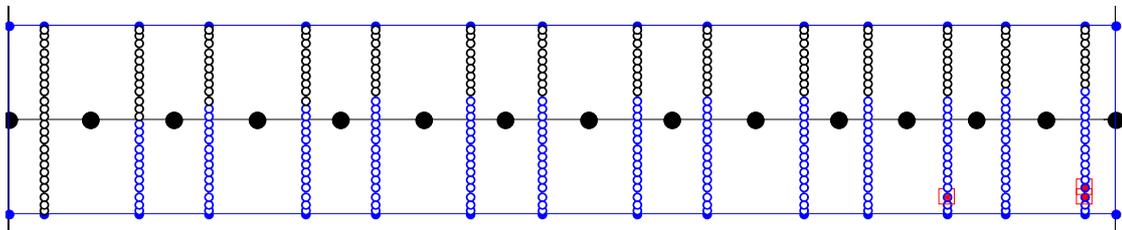


Fig. 8.13 Estado de agotamiento probeta VS-A3. Modelo parábola-recta

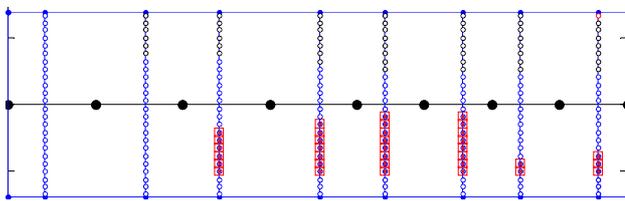


Fig. 8.14 Estado de agotamiento probeta VS-B1. Modelo parábola-recta

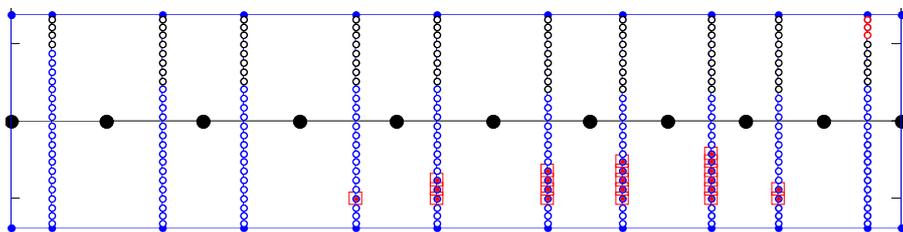


Fig. 8.15 Estado de agotamiento probeta VS-B2. Modelo parábola-recta

Simbología:

- |   |                                |   |   |
|---|--------------------------------|---|---|
| ○ | Hormigón sin fisurar           | □ | Plastificación de la armadura transversal |
| ○ | Hormigón fisurado              | * | Armadura transversal en agotamiento       |
| ○ | Hormigón agotado en compresión |   |   |

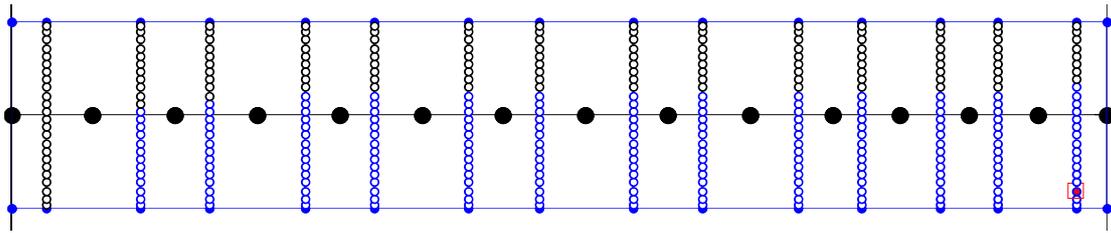


Fig. 8.16 Estado de agotamiento probeta VS-B3. Modelo parábola-recta

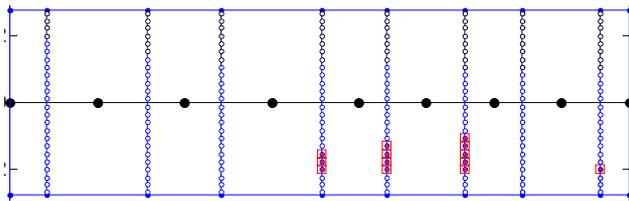


Fig. 8.17 Estado de agotamiento probeta VS-C1. Modelo parábola-recta

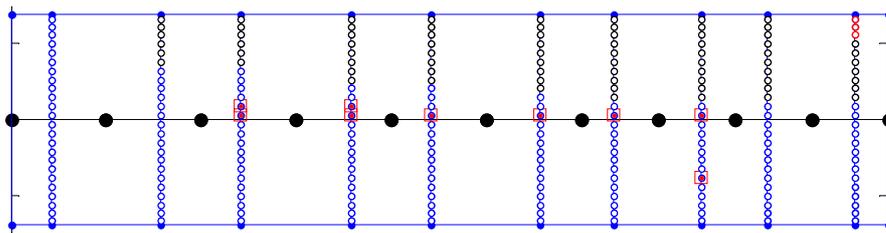


Fig. 8.18 Estado de agotamiento probeta VS-C2. Modelo parábola-recta

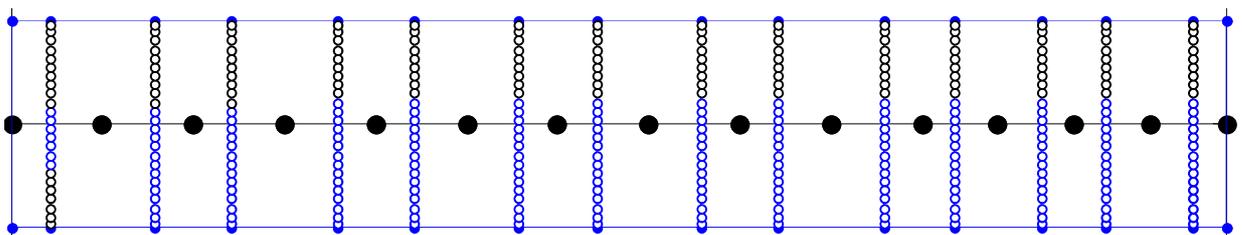


Fig. 8.19 Estado de agotamiento probeta VS-C3. Modelo parábola-recta

Simbología:

- Hormigón sin fisurar
- Hormigón fisurado
- Hormigón agotado en compresión
- Plastificación de la armadura transversal
- \* Armadura transversal en agotamiento

Tabla 8.1 Resumen de resultados vigas Vecchio y Shim. Modelo parábola-recta.

VIGA	$P_{EXP}$ (kN)	$P_{PR}$ (kN)	$\frac{P_{EXP}}{P_{PAR}}$	$\delta_{EXP}$ (mm)	$\delta_{PR}$ (mm)	$\frac{\delta_{EXP}}{\delta_{PAR}}$
VS-A1	459	432.8	1.06	13.4	14.4	1.31
VS-A2	439	446.2	0.98	20.0	19.8	1.47
VS-A3	420	412.2	1.02	33.6	31.2	1.63
VS-B1	434	418.3	1.04	13.7	14.4	1.53
VS-B2	365	371.5	0.98	21.3	24.8	1.27
VS-B3	342	339.5	1.01	32.6	32.4	1.84
VS-C1	282	252.4	1.12	18.2	13.5	1.56
VS-C2	290	326.5	0.89	20.6	23.0	1.12
VS-C3	265	261.1	1.01	34.9	34.0	1.30
<b>MEDIA</b>			<b>1.01</b>			<b>1.45</b>
<b>COV %</b>			<b>6.24</b>			<b>22.00</b>

### 8.3 MODELIZACIÓN VIGAS BRESLER Y SCORDELIS SEGÚN EL MODELO PARÁBOLA-RECTA

Se repite el mismo tipo de estudio que el realizado para las vigas de Vecchio y Shim. De nuevo, se considera que la recta de la función de corrección de cortante alcanza la armadura longitudinal inferior y su posición final corresponde al centro de gravedad de la rama inferior de la armadura transversal según se indica en la Fig. 8.1.

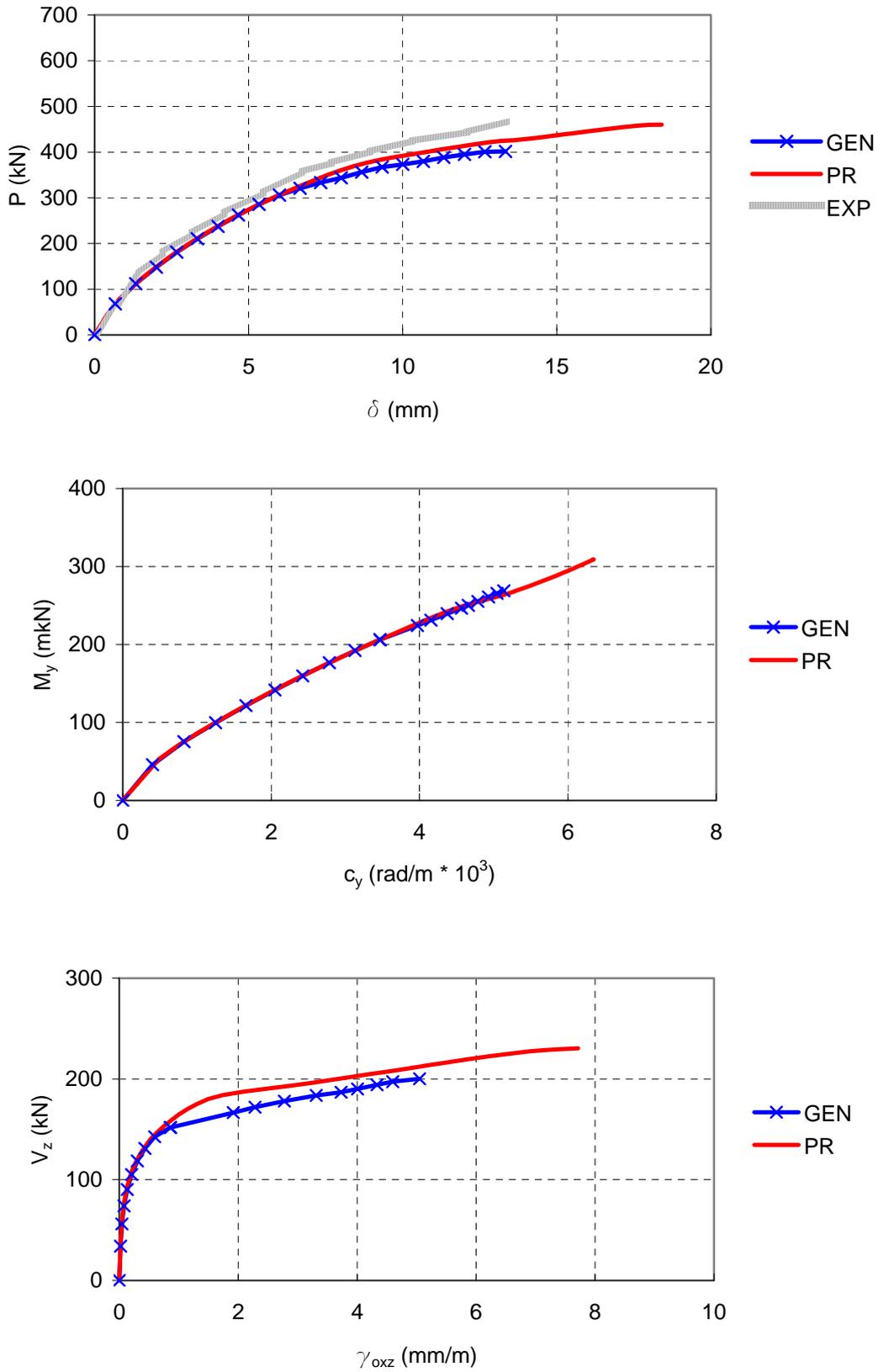


Fig. 8.20 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-A1

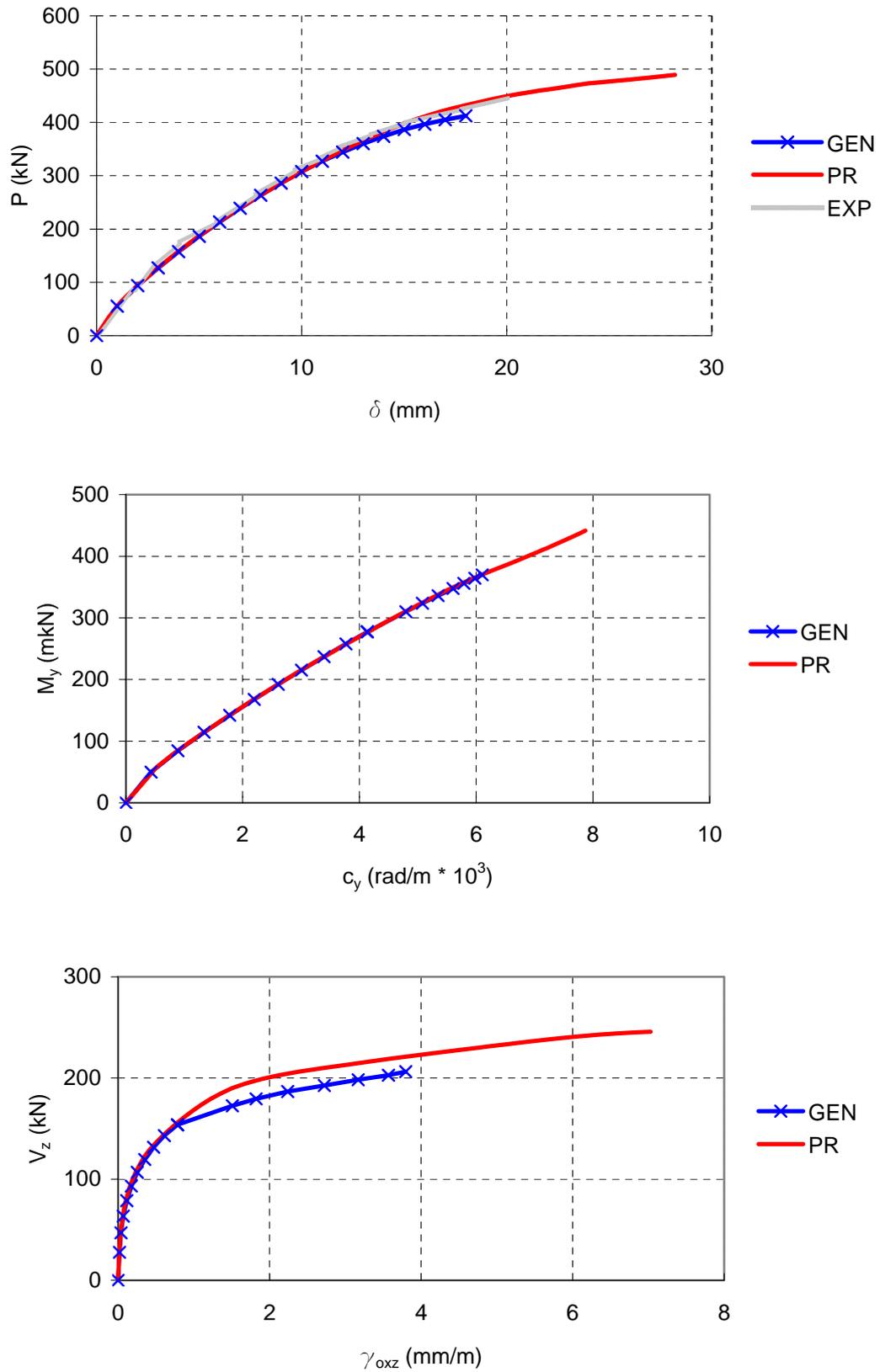


Fig. 8.21 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-A2

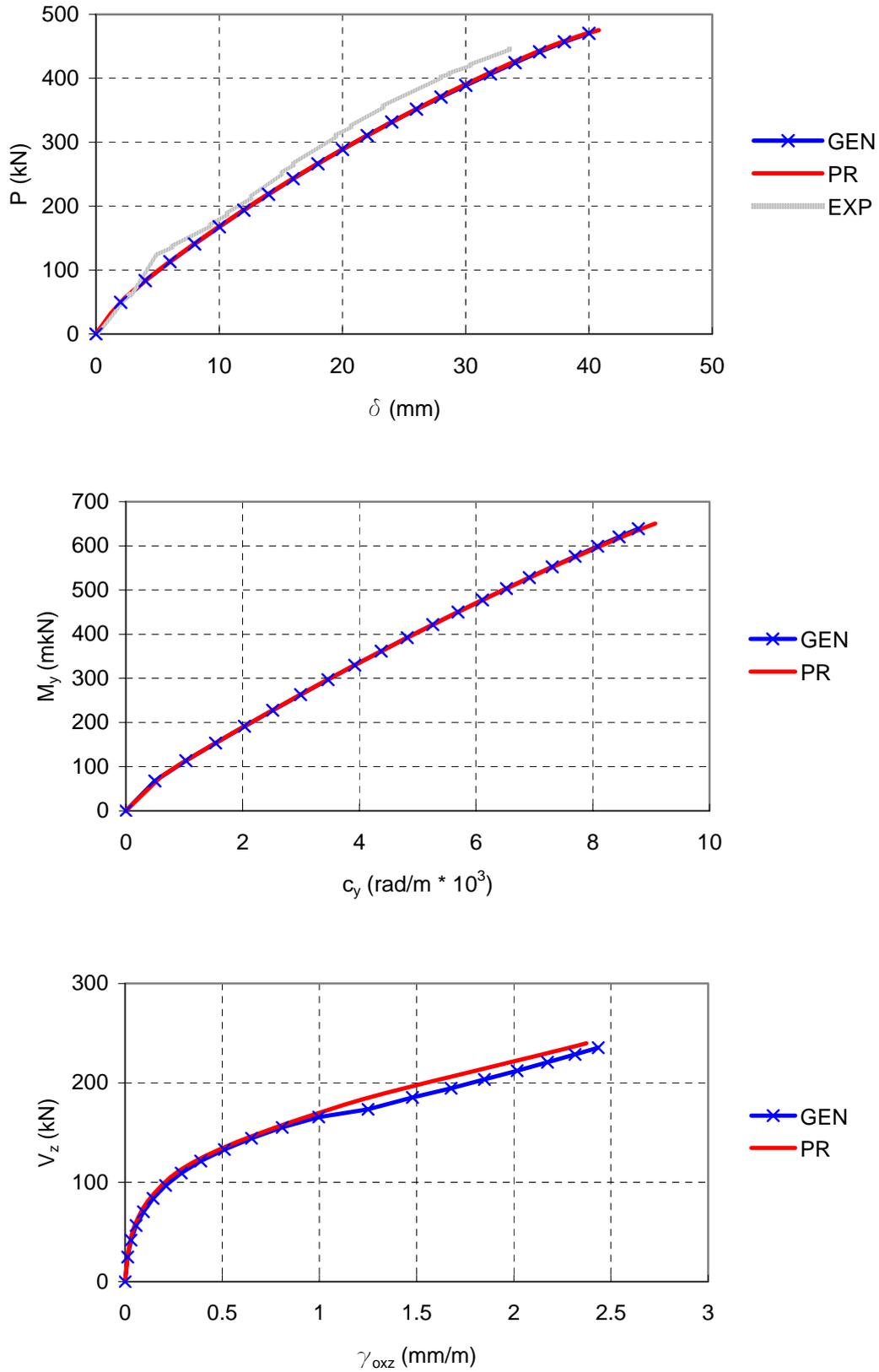


Fig. 8.22 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-A3

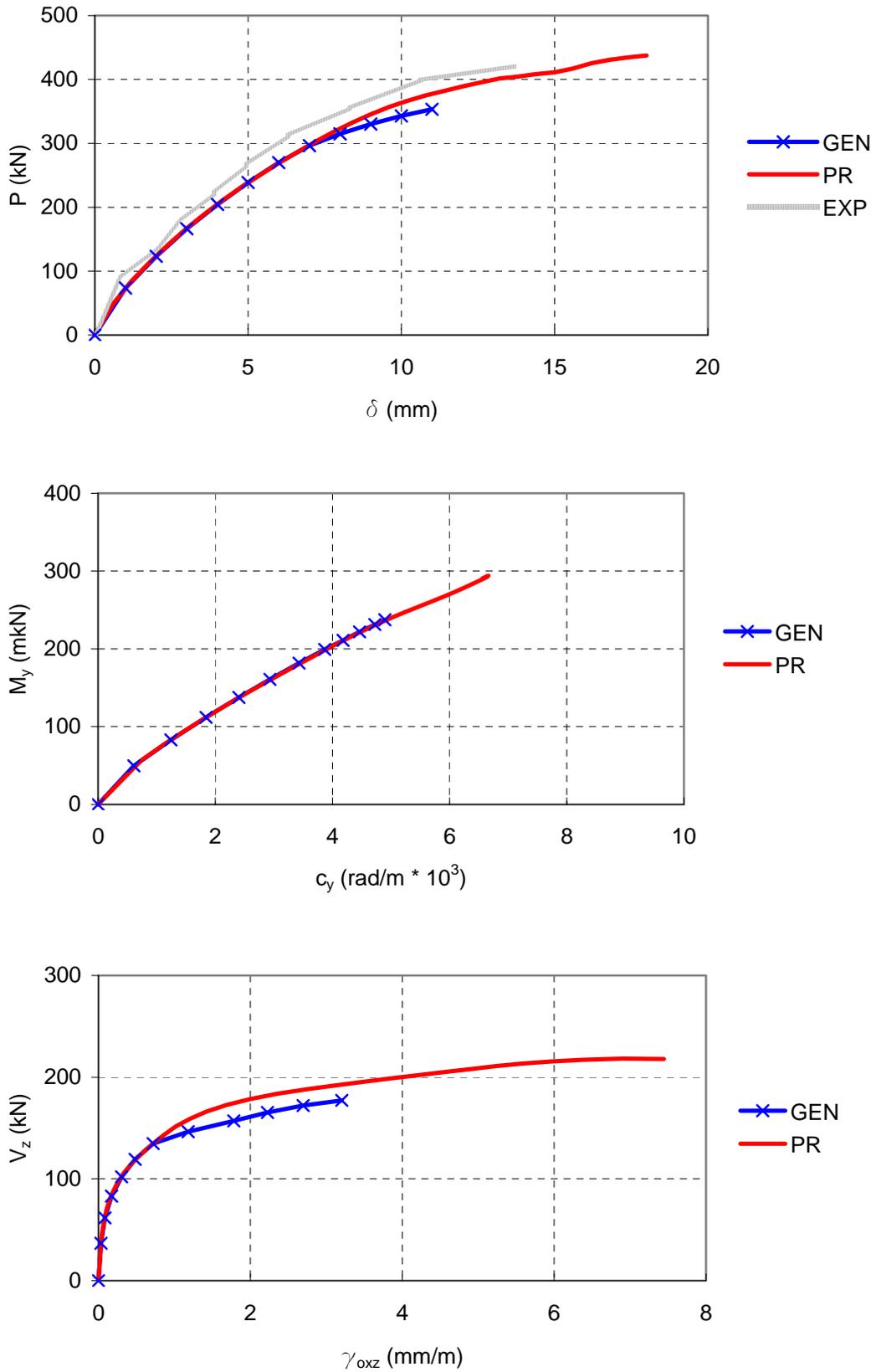


Fig. 8.23 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-B1

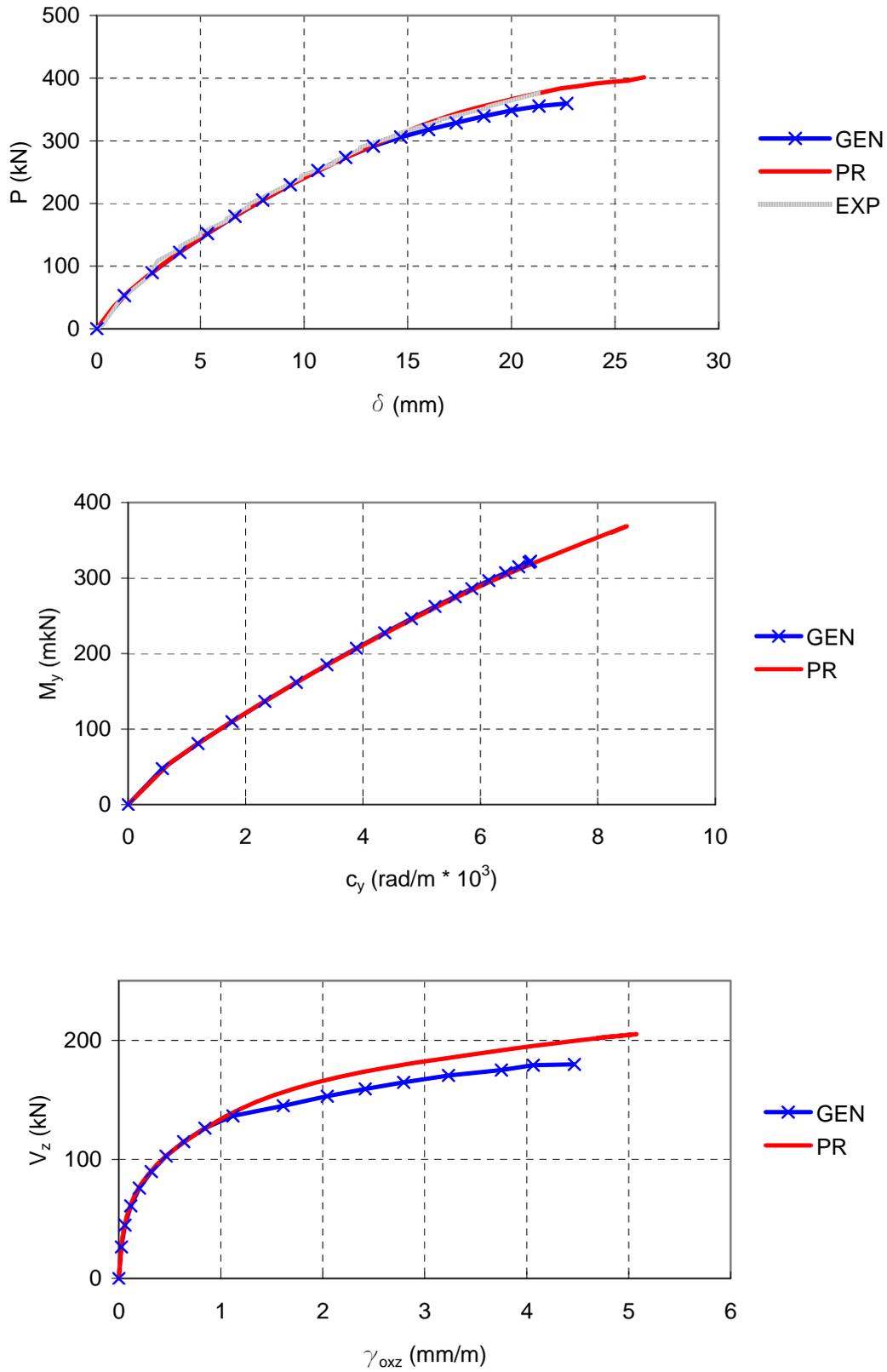


Fig. 8.24 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-B2

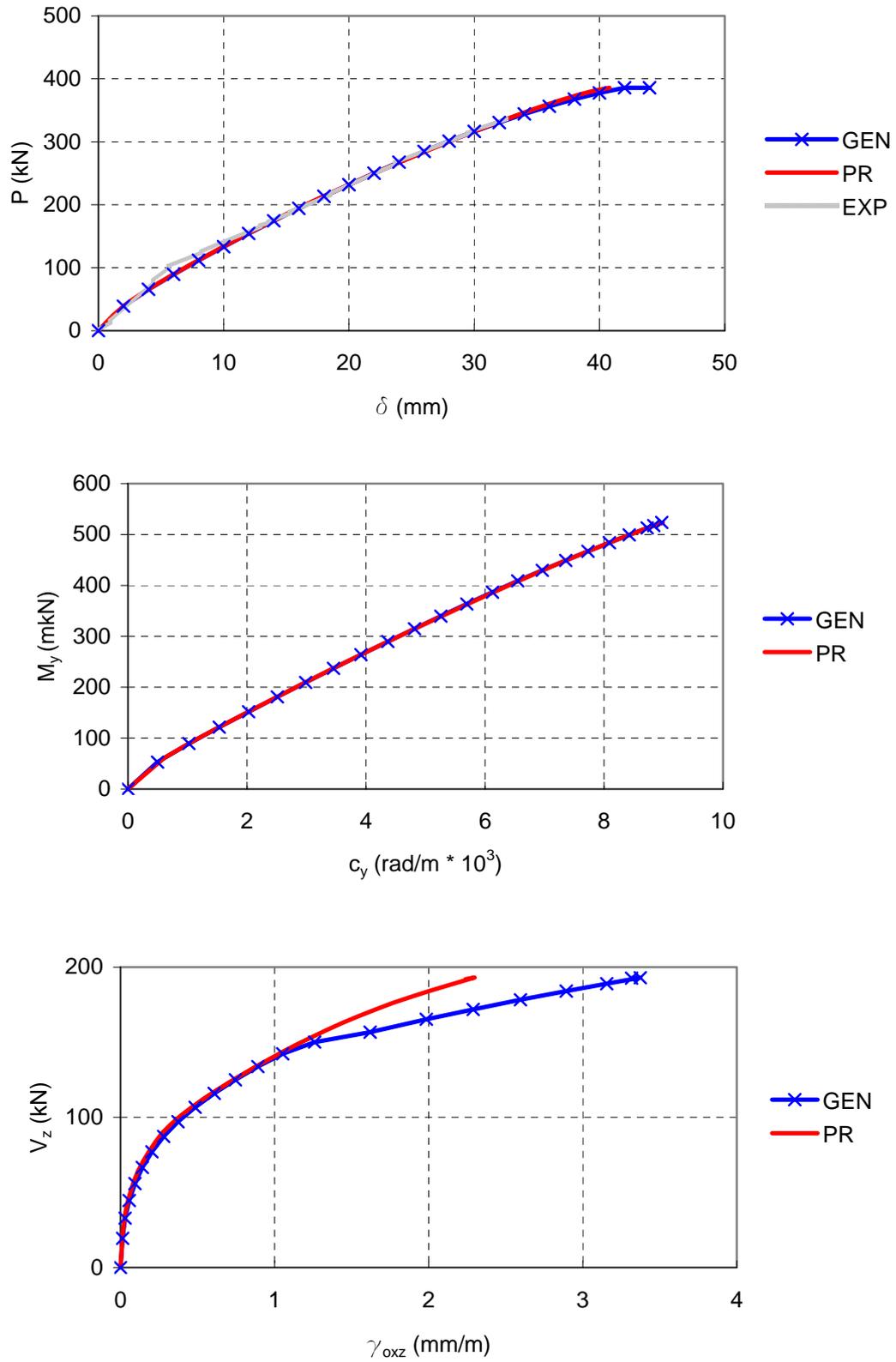


Fig. 8.25 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-B3

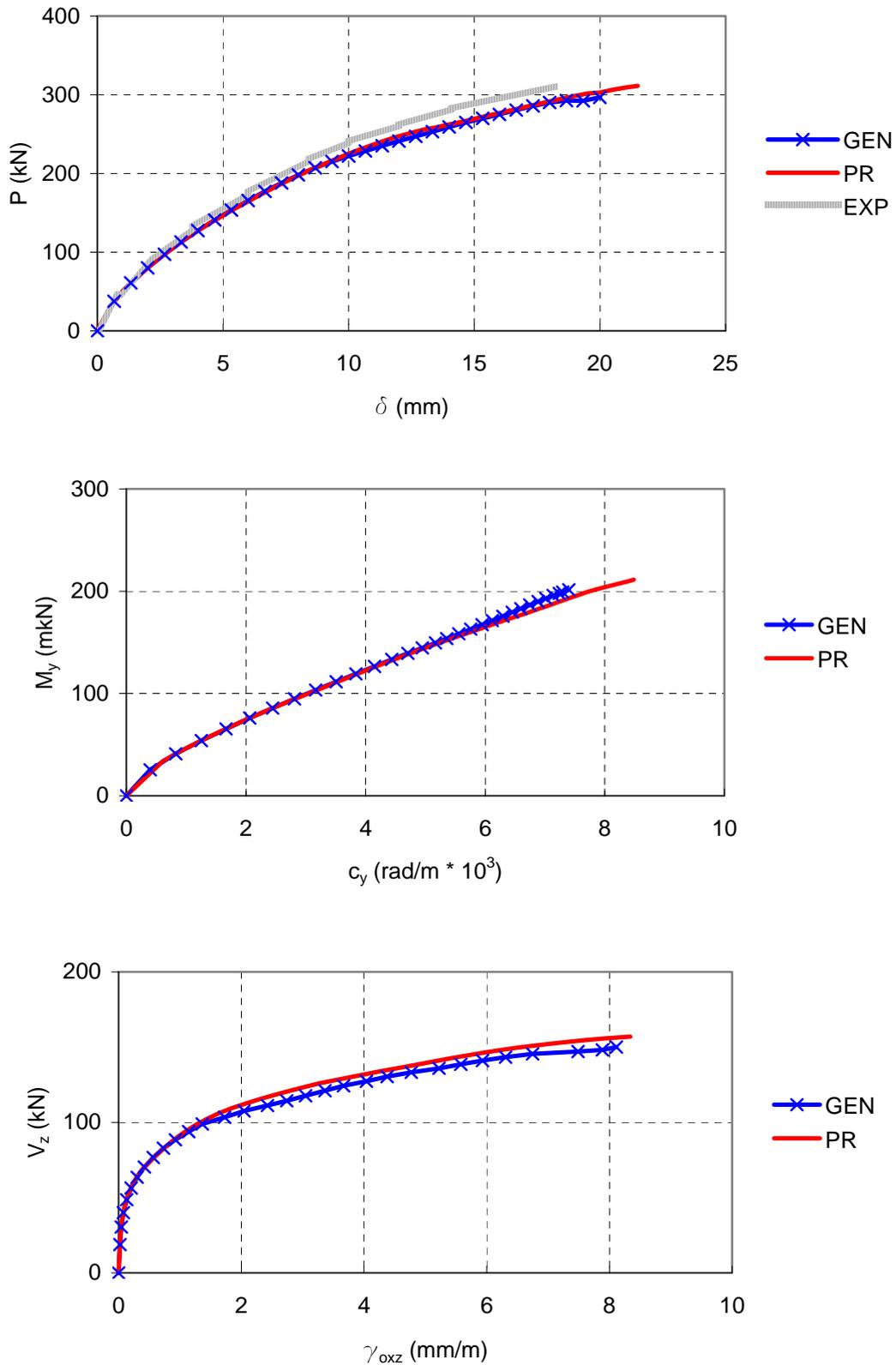


Fig. 8.26 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-C1

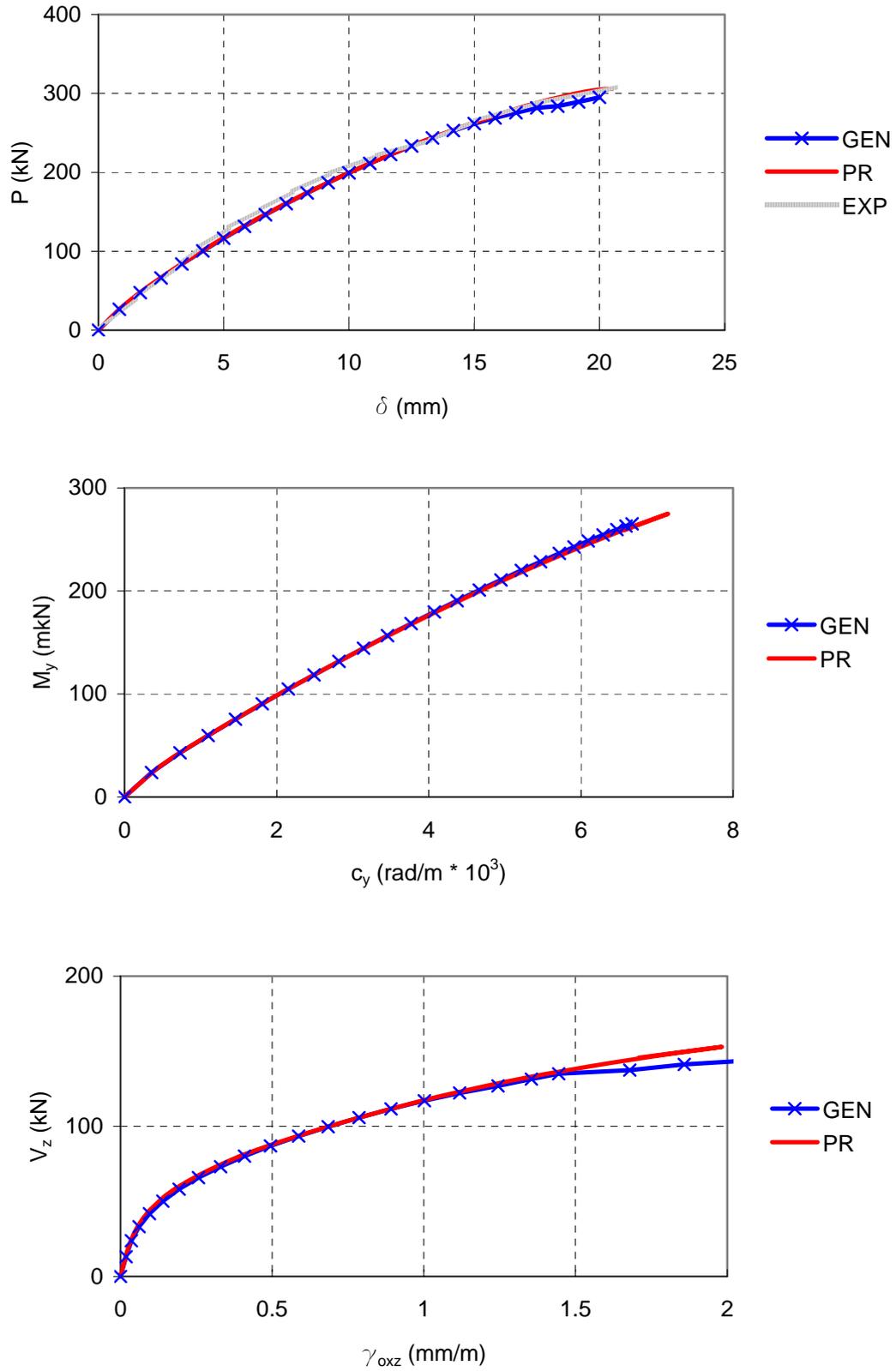


Fig. 8.27 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-C2

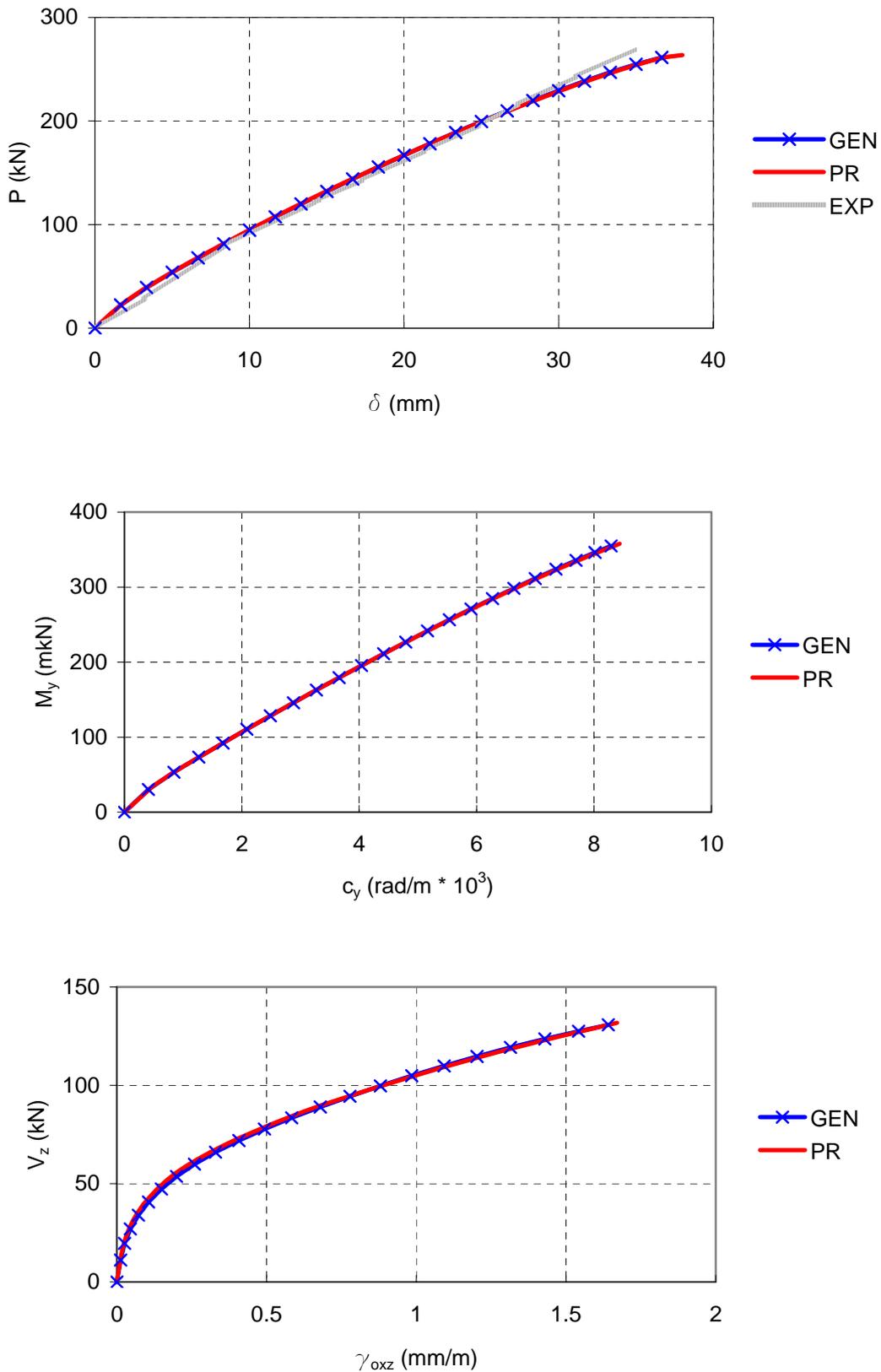


Fig. 8.28 Comparación modelos general y parábola-recta. Probeta BS-C3

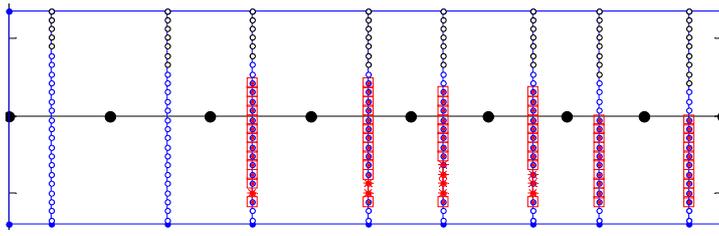


Fig. 8.29 Estado de agotamiento probeta BS-A1. Modelo parábola-recta

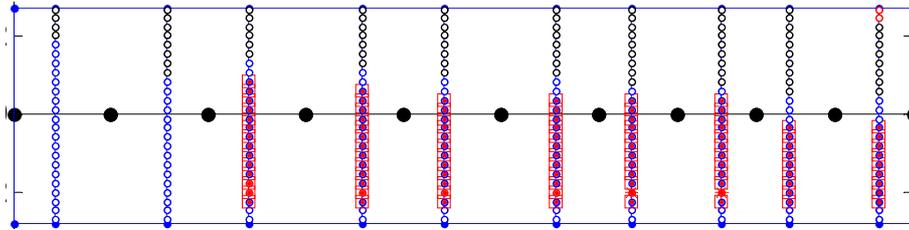


Fig. 8.30 Estado de agotamiento probeta BS-A2. Modelo parábola-recta

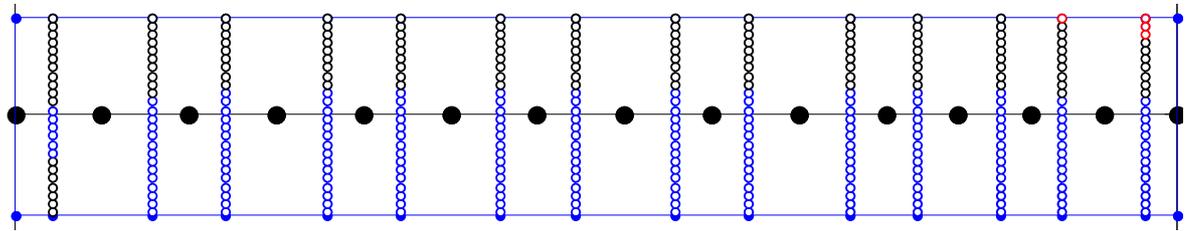


Fig. 8.31 Estado de agotamiento probeta BS-A3. Modelo parábola-recta

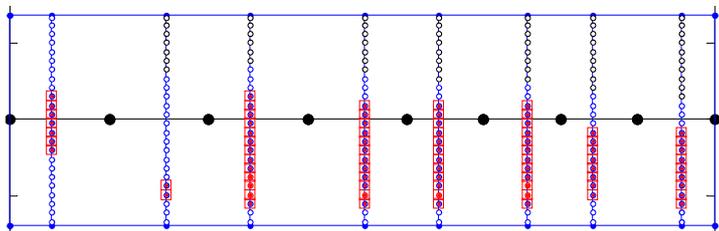


Fig. 8.32 Estado de agotamiento probeta BS-B1. Modelo parábola-recta

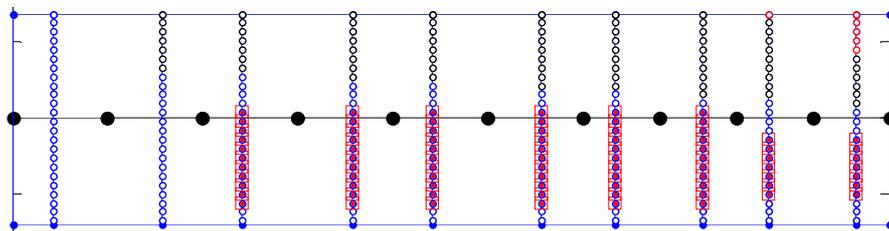


Fig. 8.33 Estado de agotamiento probeta BS-B2. Modelo parábola-recta

Simbología:

- Hormigón sin fisurar
- Hormigón fisurado
- Hormigón agotado en compresión
- Plastificación de la armadura transversal
- \*
 Armadura transversal en agotamiento

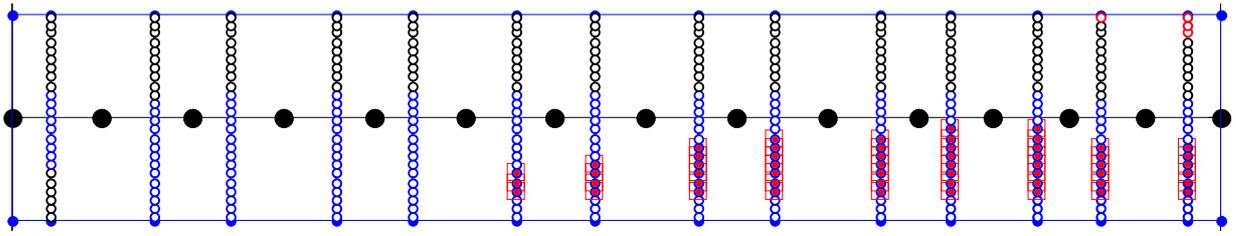


Fig. 8.34 Estado de agotamiento probeta BS-B3. Modelo parábola-recta

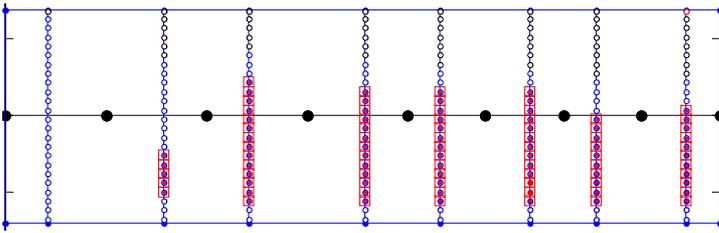


Fig. 8.35 Estado de agotamiento probeta BS-C1. Modelo parábola-recta

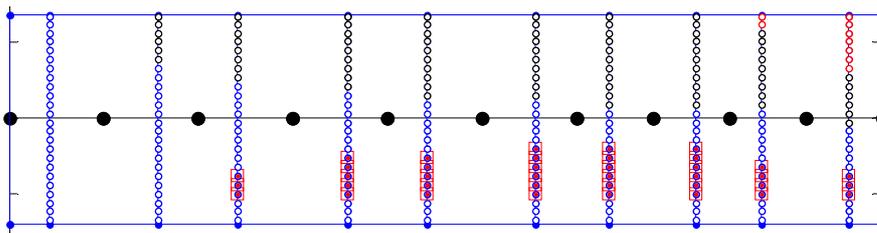


Fig. 8.36 Estado de agotamiento probeta BS-C2. Modelo parábola-recta

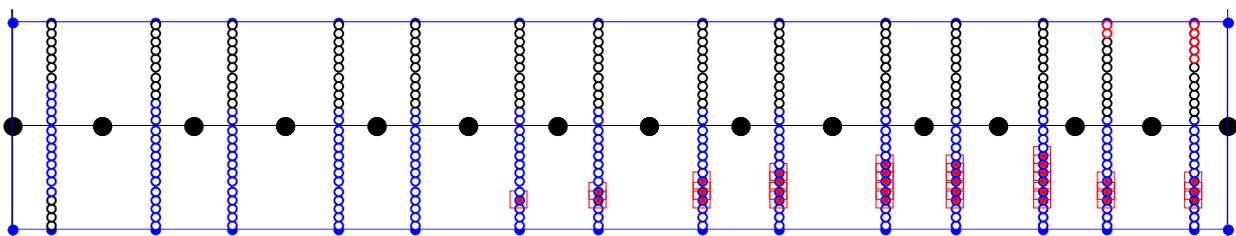


Fig. 8.37 Estado de agotamiento probeta BS-C3. Modelo parábola-recta

Simbología:

- |   |                                |   |   |
|---|--------------------------------|---|---|
| ○ | Hormigón sin fisurar           | □ | Plastificación de la armadura transversal |
| ○ | Hormigón fisurado              | * | Armadura transversal en agotamiento       |
| ○ | Hormigón agotado en compresión |   |   |

Tabla 8.2 Resumen de resultados vigas Bresler y Scordelis. Modelo parábola-recta

VIGA	$P_{EXP}$ (kN)	$P_{PR}$ (kN)	$\frac{P_{EXP}}{P_{PAR}}$	$\delta_{EXP}$ (mm)	$\delta_{PR}$ (mm)	$\frac{\delta_{EXP}}{\delta_{PAR}}$
BS-A1	467.1	460.1	1.02	13.4	18.4	0.73
BS-A2	489.3	488.9	1.00	20.0	28.2	0.71
BS-A3	468.4	475.3	0.99	33.6	40.8	0.82
BS-B1	442.6	437.4	1.01	13.7	18.0	0.76
BS-B2	400.3	401.6	1.00	21.3	26.4	0.81
BS-B3	353.6	385.8	0.92	32.6	40.8	0.80
BS-C1	311.4	311.3	1.00	18.2	21.5	0.85
BS-C2	324.7	306.1	1.06	20.6	20.5	1.01
BS-C3	269.1	263.7	1.02	34.9	38.0	0.92
<b>MEDIA</b>			<b>1.00</b>			<b>0.82</b>
<b>COV %</b>			<b>3.82</b>			<b>9.39</b>

#### 8.4 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS MODELO PARÁBOLA-RECTA

Los resultados que se han obtenido tras la aplicación del modelo parábola-recta son, por lo general, muy similares a los del modelo general.

La rigidez desarrollada en ambos modelos es prácticamente idéntica para el caso de las vigas Vecchio-Shim. Para la serie de Bresler y Scordelis se aprecian pequeñas diferencias en la curva  $V_z-\gamma_{0xz}$ . Estas ligeras diferencias no se traducen a nivel estructura en variaciones significativas de la curva carga-flecha.

Las principales diferencias que existen entre el modelo general y el modelo parábola-recta son las dos siguientes:

- El proceso de plastificación de la armadura transversal es algo diferente. En el caso parábola-recta la plastificación de los estribos se desarrolla desde posiciones más bajas y cercanas a la posición de la armadura longitudinal traccionada más inferior. En el caso general, esta plastificación se desarrolla por la parte superior de las armaduras longitudinales.
- Las cargas de rotura que se alcanzan con el modelo parábola-recta son mayores globalmente a las cargas de rotura según el modelo general. En las vigas de Vecchio-Shim se obtiene una relación de 1.01 entre el valor experimental y el calculado y un coeficiente de variación de 6.24%. Para el caso de las vigas de Bresler y Scordelis se alcanza un valor medio de 1.00 y el coeficiente de variación es de tan solo un 3.82%.

A título de ejemplo, se presentan para la probeta VS-B2 (Fig. 8.38) las direcciones principales correspondientes a la situación de agotamiento. Además, se incluye un gráfico (Fig. 8.39) donde se muestra la distribución de tensiones en la armadura transversal.

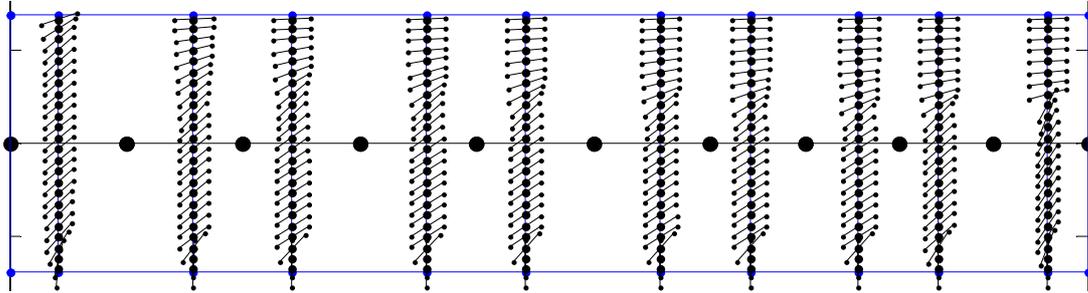


Fig. 8.38 Direcciones principales probeta VS-B2. Modelo parábola-recta

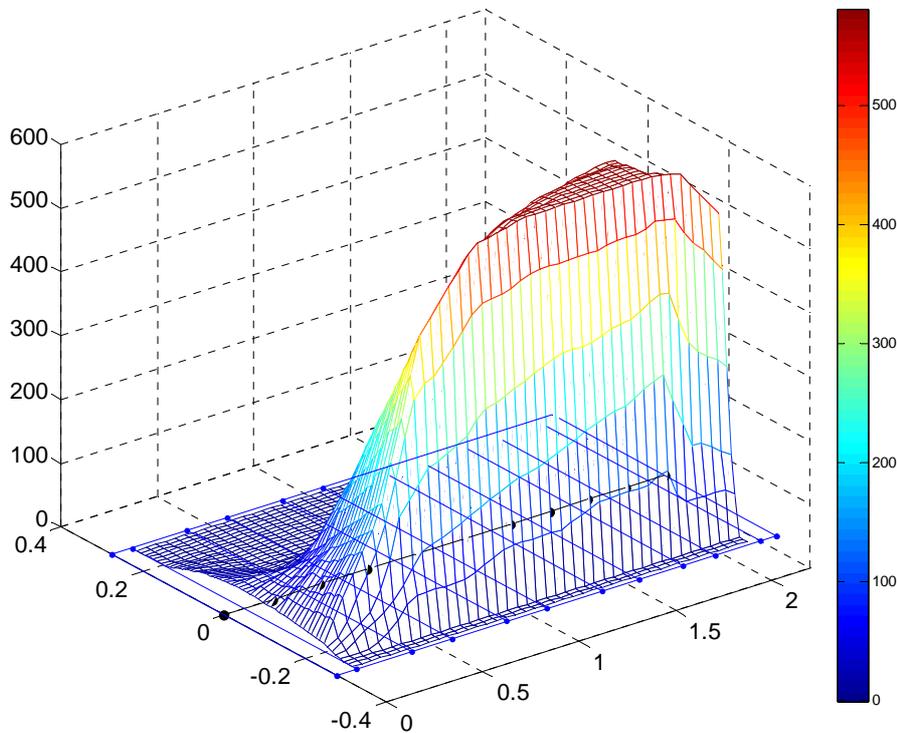


Fig. 8.39 Tensiones armadura transversal probeta VS-B2 (MPa). Modelo parábola-recta

Si se comparan las direcciones principales que aparecen en la Fig. 8.38 con las obtenidas con el modelo general (Fig. 7.24), se puede observar que son bastante similares. La principal diferencia se produce en la zona inferior donde se encuentra la armadura longitudinal. En esta zona las direcciones principales son más inclinadas en el modelo parábola-recta.

Al comparar la distribución de tensiones que aparece en la Fig. 8.39 con la obtenida en capítulo 7 con el modelo general (Fig. 7.25) se observan diferencias en la parte inferior de la viga. En el caso parábola-recta las tensiones en los estribos son mayores que en el caso general.

Los resultados con el modelo parábola-recta son muy exactos e incluso mejoran en el caso de la serie de Bresler y Scordelis los resultados del modelo general. Fundamentalmente, esto se debe a que los estribos en el modelo parábola-recta son capaces de desarrollar toda su capacidad de plastificación a lo largo de una mayor distancia, ya que el origen de la plastificación se sitúa en posiciones más bajas.

Es posible que el modelo general infravalore la contribución a cortante de la parte del estribo comprendido entre las posiciones de las armaduras longitudinales pasivas. Este efecto es más relevante en las vigas que agotan claramente por cortante, como lo son todas las correspondientes a la serie 1 (probetas VS-A1, VS-B1, VS-C1, BS-A1, BS-B1 y BS-C1). No obstante, este efecto se puede ver enmascarado, a su vez, por la elección de un valor realista de la resistencia a tracción del hormigón. En las vigas que agotan por cortante el valor adoptado para la resistencia a tracción del hormigón puede tener una influencia muy significativa en los resultados obtenidos. En el siguiente apartado se estudia la influencia que puede tener esta resistencia tomando como referencia la serie de Bresler y Scordelis.

El modelo parábola-recta permite captar de manera precisa el efecto del esfuerzo cortante. Se alcanza con precisión la carga de rotura y el tipo de rotura coincide con el observado en laboratorio. La fisuración diagonal es perfectamente captada y la armadura transversal realiza su papel de mecanismo básico de resistencia a cortante. Además, la elección de la función parábola-recta permite captar la importante variación de rigidez a cortante entre la zona fisurada y no fisurada de la sección. Se puede decir que la forma lineal del perfil en la zona fisurada es suficiente aproximación para que no se desvirtúen los resultados.

Por otra parte, el modelo parábola-recta permite disminuir de forma importante los tiempos de cálculo. El bucle de corrección de cortante tiene que calcular con tan solo tres parámetros. Se disminuye significativamente el tiempo dedicado a la resolución numérica del sistema de ecuaciones que requiere el bucle de corrección de cortante.

## 8.5 INFLUENCIA DE LA RESISTENCIA A TRACCIÓN DEL HORMIGÓN

La utilización de modelos constitutivos como la adaptación del MCFT empleado en esta investigación requiere de una precisa elección de los parámetros que rigen ese comportamiento constitutivo. La resistencia a tracción del hormigón es uno de los parámetros que más influyen en el comportamiento de elementos que fallan por cortante. En numerosas ocasiones se ha constatado este hecho, como por ejemplo en Vecchio y Shim (2004) [90]. Por lo general, se propone trabajar con valores de resistencia a la tracción menores que la resistencia a tracción real.

Un valor que se toma habitualmente (Stevens et al. (1991) [78], Vecchio y Shim (2004) [90] entre otros) para la resistencia a la tracción del hormigón es el propuesto por Bresler y Scordelis:

$$f_{cr} = 0.33 \cdot \sqrt{f_c}$$

El valor anterior proporciona un límite inferior para la resistencia a tracción que realmente puede desarrollar el hormigón. La resistencia a tracción que se obtiene mediante un ensayo de tracción directa o indirecta es mucho mayor y alcanza valores de resistencia del orden del doble del valor anterior.

Se analiza la serie de Bresler y Scordelis mediante el modelo parábola-recta modificando exclusivamente el valor de la resistencia a tracción del hormigón con el fin de estudiar el grado de sensibilidad con respecto al comportamiento global de la viga. Se consideran para cada una de las nueve probetas las siguiente tres resistencias a tracción:

$$f_{cr,inf} = 0.33 \cdot \sqrt{f_c}$$

$$f_{cr,sup} = f_{cr} \text{ (Obtenido a partir del ensayo de tracción directa o indirecta)}$$

$$f_{cr,med} = \frac{f_{cr,inf} + f_{cr,sup}}{2}$$

A continuación, se presentan los diagramas carga-flecha obtenidos para cada uno de los tres valores de resistencia a tracción considerados (Fig. 8.40 a Fig. 8.48). Se incluye también la curva experimental para que se observe el ajuste con las tres curvas representadas. Es importante señalar que en todos estos análisis sólo se ha modificado la resistencia a tracción y se han mantenido constantes todos y cada uno del resto de parámetros.

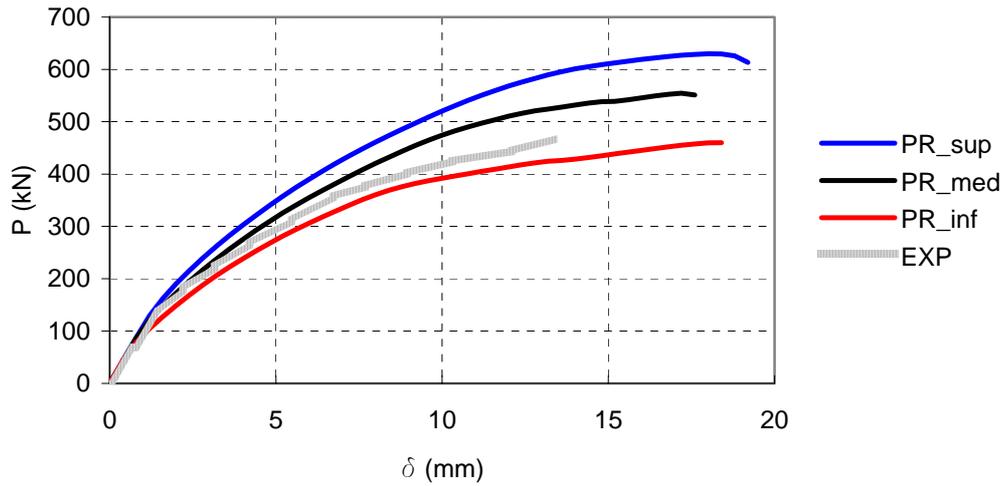


Fig. 8.40 Sensibilidad  $f_{cr}$  probeta BS-A1. Modelo parábola-recta

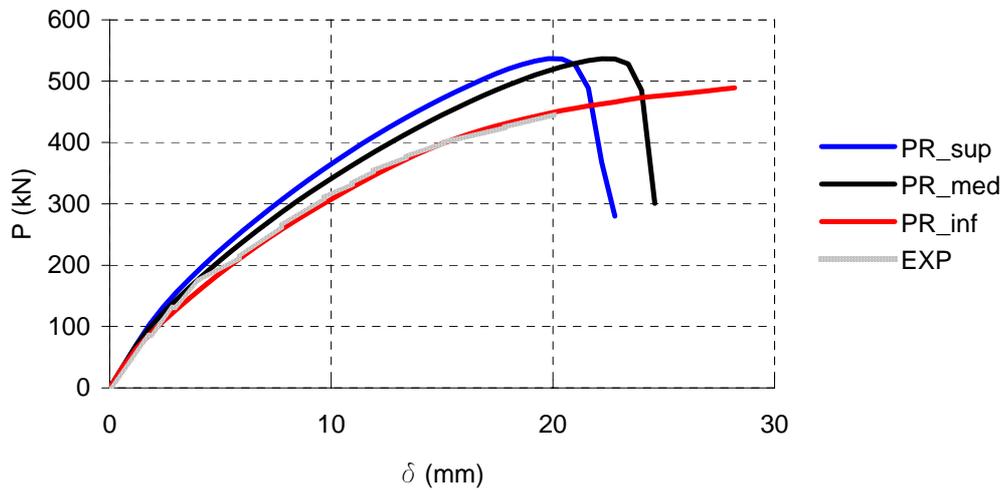


Fig. 8.41 Sensibilidad  $f_{cr}$  probeta BS-A2. Modelo parábola-recta

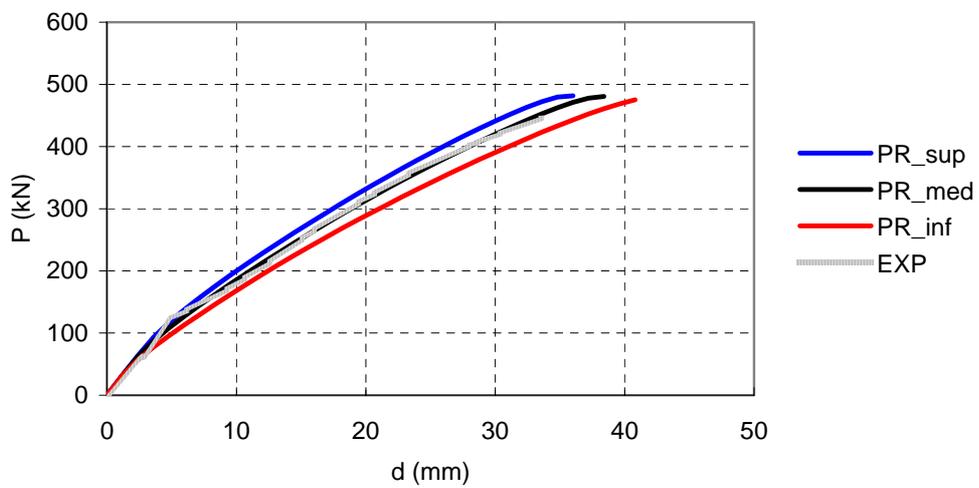


Fig. 8.42 Sensibilidad  $f_{cr}$  probeta BS-A3. Modelo parábola-recta

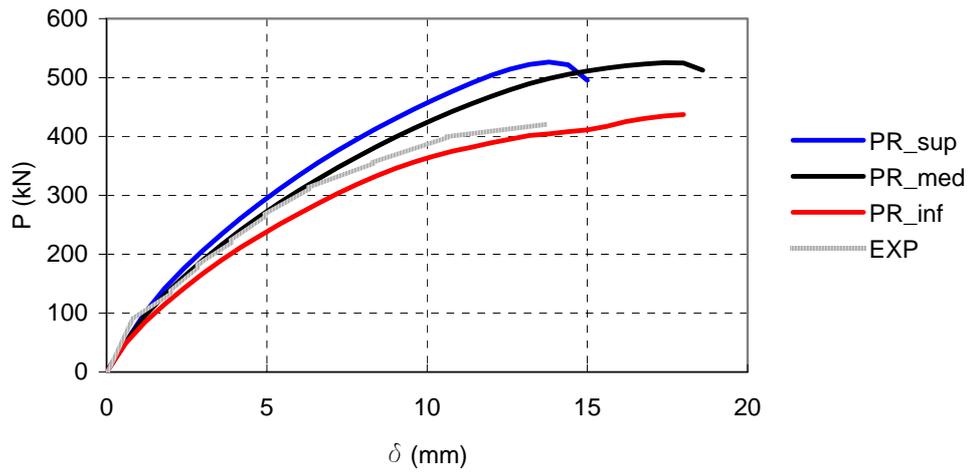


Fig. 8.43 Sensibilidad  $f_{cr}$  probeta BS-B1. Modelo parábola-recta

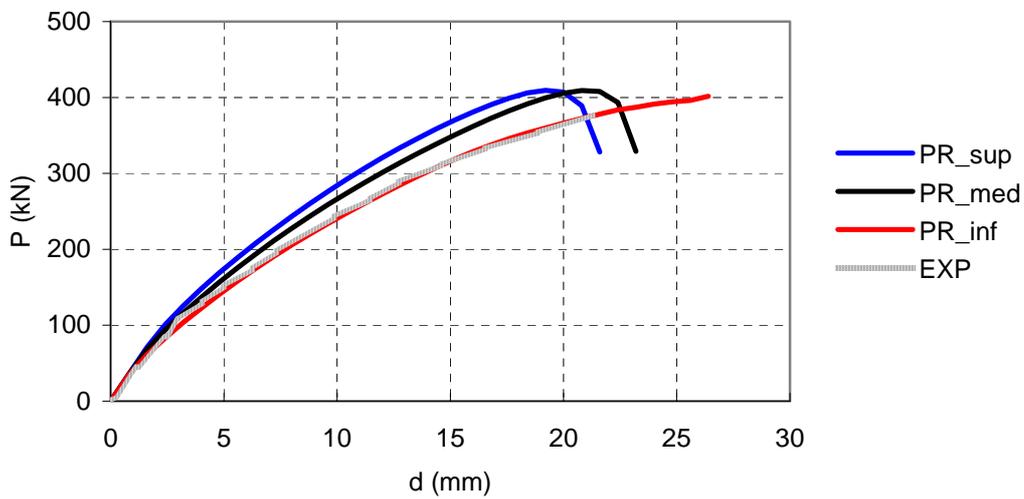


Fig. 8.44 Sensibilidad  $f_{cr}$  probeta BS-B2. Modelo parábola-recta

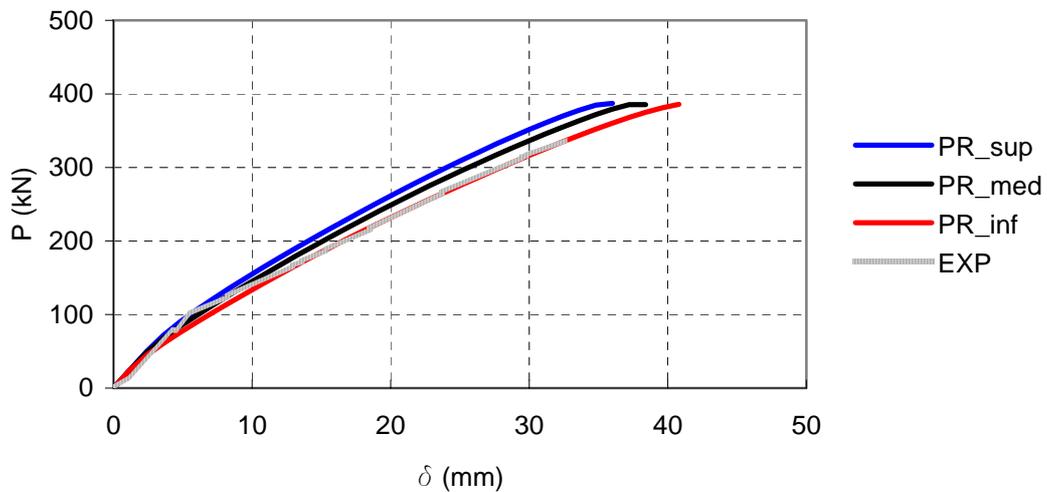


Fig. 8.45 Sensibilidad  $f_{cr}$  probeta BS-B3. Modelo parábola-recta

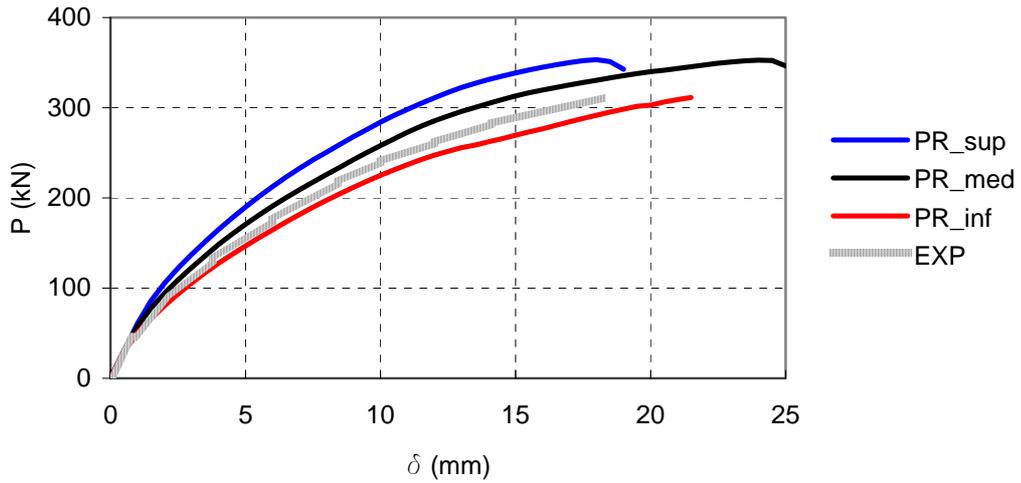


Fig. 8.46 Sensibilidad  $f_{cr}$  probeta BS-C1. Modelo parábola-recta

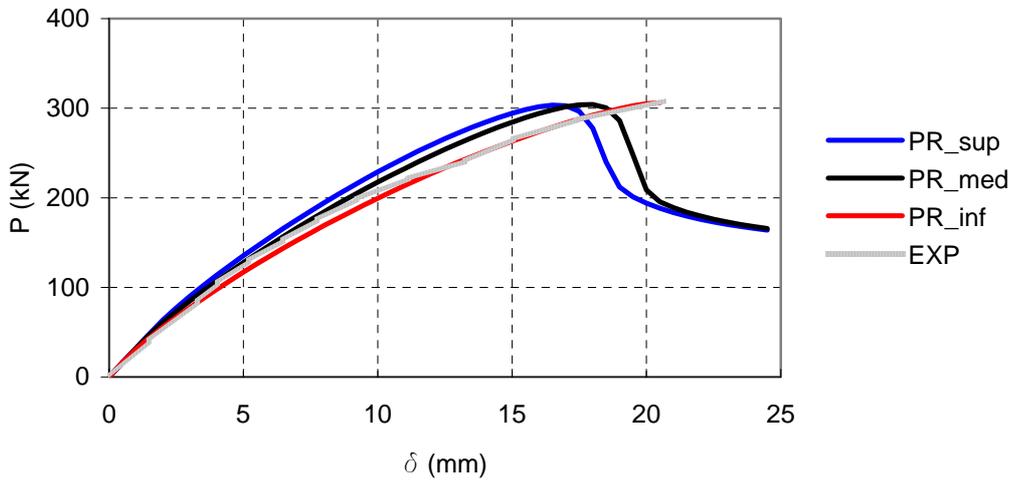


Fig. 8.47 Sensibilidad  $f_{cr}$  probeta BS-C2. Modelo parábola-recta

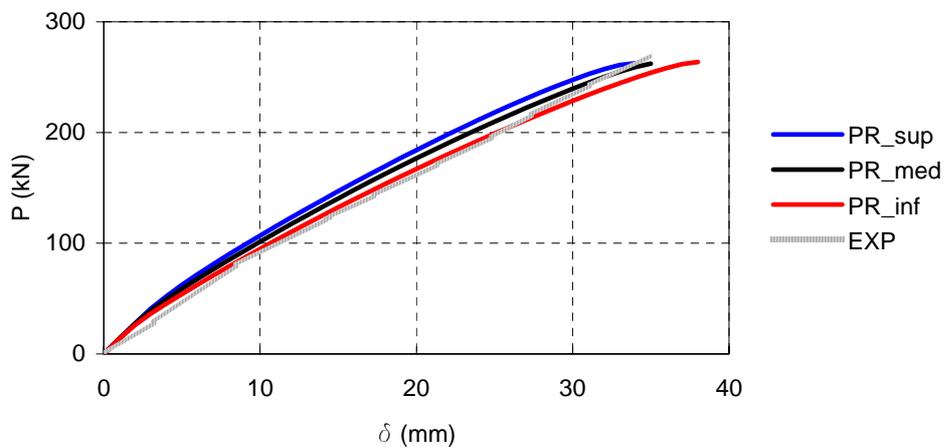


Fig. 8.48 Sensibilidad  $f_{cr}$  probeta BS-C3. Modelo parábola-recta

A la vista de los resultados de las nueve probetas se observa que la sensibilidad en el comportamiento es muy importante al variar la resistencia a tracción del hormigón.

La sensibilidad es altísima en la serie 1 (probetas BS-A1, BS-B1 y BS-C1), importante en la serie 2 (probetas BS-A2, BS-B2 y BS-C2) y menor en la serie 3 (BS-A3, BS-B3 y BS-C3). Esta tendencia es lógica ya que la resistencia a tracción afecta al esfuerzo cortante. Este efecto es más importante en las series 1 y 2.

Además, se observa para la serie de Bresler y Scordelis que la curva correspondiente a la resistencia a tracción más baja se ajusta, por lo general, mejor a la curva experimental. Por lo tanto, se puede deducir que el valor habitualmente empleado parece ser una muy buena elección para realizar un análisis realista. Parece ser que para las tres probetas de la serie 1, BS-A1, BS-B1 y BS-C1 la curva experimental se sitúa ligeramente por encima de la curva de resistencia a tracción inferior. Esto hace pensar que para la serie 1 la resistencia a tracción realmente desarrollada por el hormigón pueda ser algo mayor que el valor inferior. Esto podría explicar, en cierto modo, los valores tan bajos obtenidos para estas probetas mediante el modelo general de corrección de cortante.

## 8.6 INFLUENCIA DEL TIPO DE ELEMENTO UTILIZADO

Con el fin de dar una mayor validez al modelo teórico de corrección de cortante, se hace un estudio para la probeta BS-C1 empleando el elemento finito de Timoshenko con funciones de interpolación cúbicas. Se pretende observar si su uso tiene influencia en el comportamiento de la estructura. Además, se repite de nuevo el análisis duplicando el número de capas de cada una de las secciones transversales. Concretamente se utilizan 48 capas en lugar de 24.

Los resultados se muestran en el diagrama carga-flecha que aparece en la Fig. 8.49. En esta figura se observa que los resultados son idénticos en los cuatro casos contemplados: (a) PR\_PAR: elemento parabólico 24 capas, (b) PR\_PAR\_doble: elemento parabólico 48 capas, (c) PR\_CUB: elemento cúbico 24 capas y (d) PR\_CUB\_doble: elemento cúbico 48 capas.

Por lo tanto, es viable emplear el elemento finito con funciones de interpolación parabólicas y no es necesario aumentar en exceso el número de fibras de la sección.

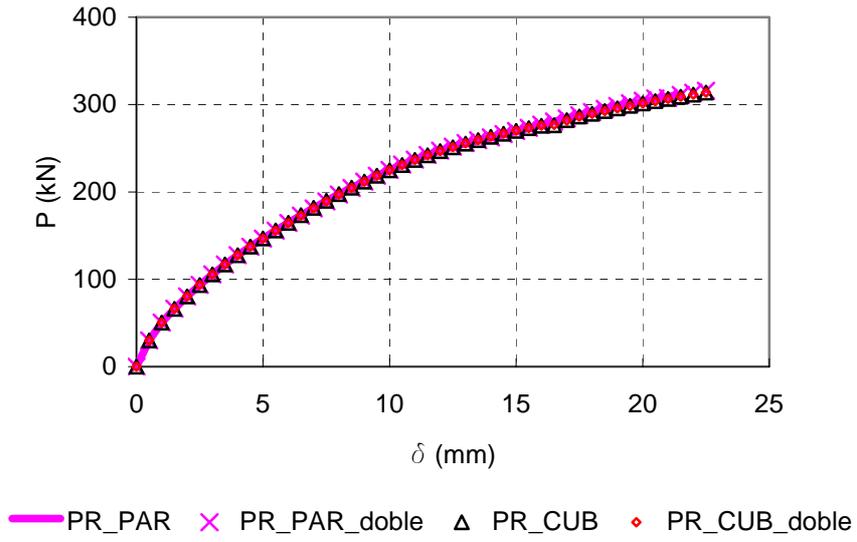


Fig. 8.49 Comparación elemento TBT parabólico y cúbico. Probeta BS-C1



# CAPÍTULO 9

## CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

## CAPÍTULO 9. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

### 9.1 RESUMEN

El objetivo planteado en esta investigación ha sido la modelización de elementos de hormigón armado incluyendo el efecto del esfuerzo cortante. Se ha desarrollado un modelo capaz de captar la interacción existente entre los esfuerzos de axil, flexión y cortante actuando de forma simultánea.

El modelo teórico de corrección de cortante se ha basado en la teoría de vigas de Timoshenko. Sobre esta hipótesis se ha aplicado una corrección de la componente de deformación del cortante con el objetivo de captar con más exactitud el comportamiento real de los materiales que componen la sección.

Se han propuesto dos funciones de corrección de cortante; una función de interpolación general que permite imponer la condición de equilibrio longitudinal capa a capa en la sección (modelo general); y una función de corrección parábola-recta gobernada por tan solo tres parámetros y que impone la condición de equilibrio longitudinal fijando tres puntos estratégicos de control en la sección (modelo parábola-recta).

Se ha implementado este nuevo comportamiento cinemático en un elemento finito 1D. La implementación se ha llevado a cabo siguiendo el método de rigidez y se han propuesto dos elementos finitos. El primer elemento está compuesto por tres nodos y tres grados de libertad por nodo y utiliza funciones de interpolación parabólicas. El segundo elemento está compuesto por cuatro nodos y tres grados de libertad por nodo, con funciones de interpolación cúbicas.

A su vez, se ha planteado una extrapolación de la hipótesis cinemática de corrección de cortante al caso tridimensional. Se ha desarrollado para el caso 3D un elemento finito lineal de tres nodos y seis grados de libertad por nodo. Se ha estudiado su comportamiento sin corrección de cortante y se ha visto que existen ciertas combinaciones de esfuerzos para las que se obtienen resultados satisfactorios.

El modelo teórico de corrección de cortante se ha aplicado en el caso de análisis de elementos de hormigón armado a partir de la utilización de una ecuación constitutiva basado en las hipótesis fundamentales del *Modified Compression Field Theory*, Vecchio y Collins (1986) [88]. Se ha seguido la propuesta de Stevens et al. (1991) [78], con pequeñas modificaciones en el comportamiento del hormigón a

compresión previa validación. Se ha adaptado el modelo constitutivo al modelo teórico de corrección de cortante introduciendo para ello una condición en el material consistente en imponer una tensión normal nula en la dirección vertical de la capa. Gracias a esta condición, se necesitan exclusivamente dos deformaciones para establecer el comportamiento del material que compone cada capa y con ello se adapta a la formulación del modelo teórico de corrección de cortante. A su vez, se ha introducido el efecto de *tension stiffening* y se ha propuesto una metodología para tener en cuenta este fenómeno cuando se deseen considerar las armaduras pasivas longitudinales de forma discreta.

Se ha implementado el modelo teórico de corrección de cortante en la *toolbox* de Matlab FEDEASLab desarrollada por Filip C. Filippou en la Universidad de California, Berkeley. Se han formulado e implementado las ecuaciones constitutivas, secciones y elementos finitos necesarios en esta aplicación. A nivel sección, se ha desarrollado un algoritmo de corrección de cortante que permite la búsqueda de una función de corrección de cortante que permite que se cumpla el equilibrio longitudinal entre capas.

El modelo teórico de corrección de cortante ha sido validado numéricamente empleando estructuras sencillas compuestas de material elástico y lineal, de las cuales se conocen las soluciones teóricas exactas. Además, se ha realizado un estudio del fenómeno de bloqueo de cortante ya que el elemento finito está formulado en rigidez. Ciertas reglas se han tenido en cuenta para evitar el efecto de sobre-rigidez que provoca el fenómeno del bloqueo de cortante. Se han validado diferentes tipos de secciones con el fin de estudiar si los coeficientes de corrección de cortante habituales coinciden con los obtenidos con el modelo propuesto. Además, se ha elevado el grado de dificultad empleando un material elastoplástico asimilable al acero. Se ha estudiado el comportamiento de una llave de cortante de acero con el modelo propuesto y se han comparado los resultados obtenidos con otras teorías de vigas clásicas.

Se ha validado experimentalmente el modelo teórico de corrección de cortante, en su versión de funciones de interpolación general, para el caso de vigas de hormigón armado. Se han llevado a cabo unas simulaciones para dos series de probetas habitualmente referenciadas en la bibliografía. Se han comparado los resultados experimentales con los obtenidos con el modelo general de corrección de cortante. Además, se han comparado los anteriores resultados con los obtenidos con teorías de vigas clásicas, como la de Euler-Bernouilli, la de Timoshenko, y otra basada en un perfil fijo parabólico que corrige la deformación de cortante seccional.

Se han analizado los resultados y se han obtenido las pertinentes conclusiones sobre la idoneidad y exactitud de las diferentes hipótesis cinemáticas.

A su vez, se ha validado el modelo teórico de corrección de cortante, en su versión parábola-recta. Se han comparado los resultados que arrojan los dos tipos de funciones de corrección de cortante, tanto a nivel estructura como a nivel sección. De este modo, se han estudiado las ventajas e inconvenientes de utilizar un tipo de función de corrección de cortante u otra. Finalmente, se ha estudiado el efecto que tiene la resistencia a tracción del hormigón en los resultados que predice el modelo de corrección de cortante.

## **9.2 CONCLUSIONES**

Se han extraído las siguientes conclusiones de este trabajo de investigación:

- Se ha propuesto un modelo teórico, denominado modelo general de corrección de cortante, capaz de analizar elementos lineales incluyendo el efecto del esfuerzo cortante y gracias a la utilización de una hipótesis cinemática de corrección de cortante.
  - Ésta hipótesis se basa en la corrección mediante una función general de interpolación de la componente correspondiente a la deformación transversal de la sección.
  - El modelo propuesto permite el equilibrio longitudinal entre todas las capas que componen la sección. Así, se permite evaluar con mayor exactitud las variaciones de rigidez que se producen en la sección. Como consecuencia, el comportamiento seccional se asemeja más a la realidad.
- Se ha formulado el modelo teórico a través de una función de corrección de cortante denominada parábola-recta (modelo parábola-recta) que establece el equilibrio longitudinal en tan sólo tres puntos estratégicos de la sección. El uso del modelo parábola-recta se destina a elementos lineales de hormigón armado.
- El modelo presentado en sus dos versiones, general y parábola-recta, está formulado a nivel seccional y es de implementación directa en elementos finitos 1D basados en la hipótesis de Timoshenko.
- La aplicación del modelo general de corrección de cortante a elementos simples de material elástico y lineal proporciona unos resultados que

coinciden con las soluciones exactas derivadas de la teoría de vigas. Además, las predicciones de los coeficientes de corrección de cortante son muy precisos de acuerdo con las hipótesis consideradas en el caso de secciones rectangulares y secciones doble T.

- La aplicación del modelo general de corrección de cortante propuesto proporciona resultados satisfactorios en los análisis de elementos lineales de hormigón armado con carga monótona creciente. Se ajusta con una precisión razonable la carga de rotura, el tipo de rotura, así como el comportamiento a cualquier nivel de carga. Los resultados son óptimos tanto en vigas que fallan por cortante como en vigas que fallan por flexión.
- La comparación del modelo general de corrección de cortante con otras teorías de vigas tradicionales arroja las siguientes conclusiones particulares:
  - El efecto de la fisuración diagonal en muy raras ocasiones es captada por las vigas con comportamiento Euler-Bernoulli y Timoshenko. Por lo tanto, el efecto de la armadura transversal en estas vigas es prácticamente despreciable.
  - En el caso del comportamiento con perfil parabólico se capta en ciertas ocasiones la fisuración diagonal y habitualmente a niveles de cargas superiores a los experimentales.
  - Los tres comportamientos cinemáticos anteriores siempre proporcionan curvas con una mayor rigidez que la obtenida experimentalmente. Esto denota que, o bien no se capta la fisuración diagonal y su correspondiente pérdida de rigidez, o bien se capta a niveles de carga excesivamente altos.
  - Las respuestas obtenidas con el modelo general de corrección de cortante son las que mejor se ajustan a los resultados de laboratorio.
  - En el caso de elementos lineales de hormigón armado que fallan por flexión, aunque el comportamiento interno de la sección es muy diferente entre el modelo general de corrección de cortante y el resto de teorías, los resultados son bastante similares en cuanto a carga y tipo de rotura e incluso en cuanto a la rigidez de la viga.
  - En el caso de elementos lineales de hormigón armado que fallan por cortante, las diferencias son más notables cuando mayor es la carga de rotura por flexión respecto a la carga de rotura por cortante.

- Las diferencias entre las teorías de vigas de Euler-Bernoulli, de Timoshenko y con perfil parabólico son poco significativas siempre y cuando no se produzca la fisuración diagonal por cortante.
- Los análisis con el modelo general de corrección de cortante incluyen claramente el efecto del cortante al captar el cambio brusco de rigidez que se produce entre la cabeza de compresión no fisurada y la parte fisurada. La armadura transversal y las bielas de hormigón generan una matriz de hormigón fisurado que resiste la carga aplicada. A diferencia de las teorías tradicionales, el papel que juega la armadura transversal es fundamental en el comportamiento a cortante.
- Los análisis con el modelo general de corrección de cortante y con el modelo parábola recta, son muy similares a nivel estructura. Prácticamente se obtienen los mismos resultados. Esto denota que el efecto del cambio brusco de rigidez entre la cabeza de compresión de hormigón no fisurado y la zona fisurada se capta correctamente con ambas aproximaciones.
- En términos de consumo computacional, el modelo parábola-recta es mucho más conveniente que el modelo general. En aquellos casos en los que se quiera analizar un comportamiento a cortante suficientemente preciso a nivel estructura bastará con optar por la función de interpolación parábola-recta.
- En elementos que agoten por flexión puede resultar bastante aproximado emplear un modelo con comportamiento Timoshenko o parabólico, que no requiere de la utilización de una función de corrección de cortante.
- La precisión observada en los resultados es muy dependiente de la resistencia a tracción considerada. Éste es un parámetro clave ya que la predicción de los resultados es muy sensible a este valor. Por lo tanto, esta resistencia debe ser elegida con sumo cuidado cada vez que se utilice el modelo de corrección de cortante.
- El modelo teórico de corrección de cortante propuesto, tanto en su versión general como parábola-recta, es una herramienta eficaz para la modelización de elementos lineales de hormigón armado que incluyen el efecto del esfuerzo cortante. Su ámbito de aplicación se sitúa un paso más allá de las teorías de vigas tradicionales sin complicar en exceso la hipótesis cinemática, sobre todo en el caso del modelo parábola-recta. De esta forma, se consiguen captar efectos difícilmente reproducibles con las clásicas

teorías de vigas, todo ello con un elemento 1D y sin perder de vista el comportamiento global del modelo a nivel estructura.

### 9.3 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

A la vista del presente trabajo de investigación se presentan las siguientes posibles futuras líneas de investigación:

- Implementar el modelo teórico de corrección de cortante con otro tipo de elementos barra que evite el bucle interno seccional de corrección de cortante. Se podrían plantear elementos formulados en flexibilidad. De este modo, se podría aumentar la eficiencia numérica del modelo y aumentar su aplicabilidad a estructuras con mayor número de elementos. Además, se eliminaría cualquier problema de bloqueo de cortante.
- Introducir en el comportamiento seccional el efecto del confinamiento del hormigón producido por la armadura transversal.
- A partir del modelo parábola-recta desarrollar formulaciones simplificadas que permitan el dimensionamiento directo de secciones de hormigón armado.
- El sismo puede producir fallos y colapsos por cortante. Se debería ampliar este modelo de corrección de cortante para el caso de acciones dinámicas inducidas por el sismo al igual que para el caso de cargas cíclicas.
- Formular un nuevo modelo de corrección de cortante para el caso 3D y estudiar diferentes tipos de funciones de corrección de cortante, tanto generales como otras simplificadas dependientes de pocos parámetros. Estas funciones deberían ser capaces de captar el efecto del esfuerzo cortante en las dos direcciones de la sección y la interacción con el resto de esfuerzos de axil, flexión biaxial y torsión.
- Ampliar la utilización del modelo teórico de corrección de cortante propuesto al caso de hormigón de alta resistencia, hormigón con fibras, hormigón autocompactable, etc.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ACI Committee 318 Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (2008) (ACI 318-08/318R-08), Farmington Hill (Michigan), American Concrete Institute, 465 pp.
- [2] ACI-ASCE Committee 426, (1973), "The Shear Strength of Reinforced Concrete Members", *Journal of the Structural Division*, V. 99, No. 6, pp. 1091–1187.
- [3] Armstrong, P.J., Frederick, C.O., (1966), "A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect", G.E.G.B. Report RD/B/N 731.
- [4] ASCE–ACI Committee 445 on Shear and Torsion, (1998), "Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete", *Journal of Structural Engineering*, V. 124, No. 12, pp. 1375-1416.
- [5] Bairan, J. M., (2005), "A Non-linear Coupled Model for the Analysis of Reinforced Concrete Sections under Bending, Shear, Torsion and Axial Forces", Tesis Doctoral, Departamento de Ingeniería de la Construcción, Universidad Politécnica de Cataluña, España, 229 pp.
- [6] Bairan, J. M., Mari, A., (2006), "Coupled Model for the Non-linear Analysis of Anisotropic Sections Subjected to General 3D loading. Part 1: Theoretical Formulation", *Computers and Structures*, V. 84, pp. 2254-2263.
- [7] Bairan, J. M., Mari, A., (2007), "Multiaxial-Coupled Analysis of RC Cross-sections Subjected to Combined Forces", *Engineering Structures*, V. 29, No. 8, pp. 1722-1738.
- [8] Bentz, E. C., (2000), "Section Analysis of Reinforced Concrete Members", Tesis Doctoral, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada, 183 pp.
- [9] Bhide S., Collins, M. P., (1987), "Analytical Modelling of Reinforced Concrete Subjected to Monotonic and Reversed Loadings", *Publication No. 87-02*, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada, 308 pp.

- [10] Bresler, B., Scordelis, A. C., (1963), "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams", *Journal of the American Concrete Institute*, V. 60, No. 1, pp. 51-72.
- [11] Canadian Standards Association (CSA), (2004), "Design of Concrete Structures CSA-A23.3-04", 258 pp.
- [12] Ceresa P., Petrini L., Pinho R., (2007), "Flexure-shear Fibre Beam-column Elements for Modelling Frame Structures under Seismic Loading – State of the Art", *Journal of Earthquake Engineering*, V. 11, No. 1, pp. 46-88.
- [13] Ceresa P., Petrini L., Pinho R., R. Sousa, (2009), "A Fibre Flexure-shear Model for Seismic Analysis of RC-framed Structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Special Issue "Nonlinear Modelling, Analysis and Simulation for Earthquake Engineering", V. 38, No. 5, pp. 537-586.
- [14] Cervenka, V., (1985), "Constitutive Model for Cracked Reinforced Concrete", *ACI Journal*, V. 82, No. 6, pp. 877-882.
- [15] Chan, E.C., (1982), "Nonlinear Geometric, Material and Time-dependent Analysis of Reinforced Concrete Shells with Edge Beams", Tesis Doctoral, University of California, Berkeley.
- [16] Código Modelo CEB-FIP 1990 para Hormigón Estructural, *Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*, Madrid, España, 1995, 575 pp.
- [17] Collins, M. P., (1978), "Towards a Rational Theory for RC Members in Shear", *Journal of the Structural Division*, V. 104, No. 4, pp. 649-666.
- [18] Collins, M. P., Vecchio, F. J., Selby, R. G., Gupta, P. R., (1997), "The Failure of an Offshore Platform", *Concrete International*, V. 19, No. 8, pp. 28-34.
- [19] Cowper, G. R., (1966), "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, V. 33, pp. 335-340.
- [20] EHE-08, (2008), "Instrucción de Hormigón Estructural", *Ministerio de Fomento Gobierno de España*, Madrid, 702 pp.
- [21] Elfgrén, L., (1972), "Reinforced Concrete Beams Loaded in Torsion, Bending and Shear", Publications 71:3, Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 249 pp.

- [22] EC2 EN-1992-1-1, (2004), "Design of Concrete Structures", European Committee for Standardization, Brussels, 225 pp.
- [23] Filippou, F. C., (2001), "A Matlab Toolbox for Linear and Nonlinear Structural Analysis", Report UCB/SEMM 2001/07, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 33 pp.
- [24] Filippou, F. C., Constantinides M., (2004), "FEDEASLab. Getting Started Guide and Simulations Examples", Technical Report NEESgrid-2004-22.
- [25] Guedes, J., Pegon, P., Pinto, A. V., (1994), "A Fibre Timoshenko Beam Element in CASTEM 2000", Special Publication Nr. I.94.31, Applied Mechanics Unit, Safety Technology Institute, Commission of the European Communities, Joint Research, Centre, Ispra Establishment, Italy.
- [26] Guedes, J., Pinto, A. V., (1997), "A Numerical Model for Shear Dominated Bridge Piers", Proceedings of the Second Italy-Japan Workshop on Seismic Design and Retrofit of Bridges, Rome, Italy.
- [27] Hjelmstad, K. D., Popov, E. P., (1983), "Cyclic Behavior and Design of Link Beams", *Journal of Structural Engineering*, V. 109, No. 10, pp. 2387-2403.
- [28] Hsu, T. T. C., (1996), "Toward a Unified Nomenclature for Reinforced-Concrete Theory", *Journal of Structural Engineering*, V. 122, No. 3, pp. 275-28.
- [29] Kotronis, P., (2000), "Cisaillement Dynamique de Murs en Béton Armé. Modèles Ssimplifies 2D et 3D", Tesis Doctoral, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [30] Kotronis, P., Mazars J., (2005), "Simplified Modelling Strategies to Simulate the Dynamic Behaviour of R/C walls", *Journal of Earthquake Engineering*, V. 9, No. 2, pp. 285-306.
- [31] La Borderie, C. L., (1991), "Phénomènes Unilatéraux dans un Matériau Endommageable: Modélisation et Application à l'Analyse des Structures en Béton", Tesis Doctoral, Universidad de Paris VI.
- [32] Lampert, P., (1971), "Torsion and Bending in Reinforced and Prestressed Concrete Members", ICE Proceedings, V. 4, No. 4, pp. 487-505.

- [33] Li, X., Liu, D., (1992), "An Interlaminar Shear Stress Continuity Theory for both Thin and Thick Composite Laminates", *Journal of Applied Mechanics*, V. 59, pp. 502–509.
- [34] Lubliner, J., Taylor, R. L., Auricchio, F., (1993), "A New Model of Generalized Plasticity and its Numerical Implementation", *International Journal of Solids and Structures*, V. 30, No. 22, pp. 3171-3184.
- [35] Mander, J. B., Priestley, M. J. N., Park, R., (1988), "Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete," *Journal of Structural Engineering*, V. 114, No. 8, pp. 1804-1826.
- [36] Marini, A., Spacone E., (2006), "Analysis of Reinforced Concrete Elements Including Shear Effects", *ACI Structural Journal*, V. 103, No. 5, pp. 645–655.
- [37] Martinelli, L., (1998), "Modellazione di Pile di Ponti in C. A. a Travata Soggetti ad Eccitazione Sismica", Tesis Doctoral, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano, Milano, Italy, (en italiano).
- [38] MATLAB (2004), Version 7.0., Natick, Massachusetts, The MathWorks Inc.
- [39] Mazars, J., Kotronis, P., Ragueneau, F., Casaux, G., (2005), "Using Multifiber Beams to Account for Shear and Torsion. Applications to Concrete Structural Elements", *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 195, No. 52, pp. 7264–7281.
- [40] Menegotto, M., Pinto, P. E., (1973), "Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames Including Changes in Geometry and Nonelastic Behaviour of Elements under Combined Normal Force and Bending", IABSE Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well-Defined Repeated Loads, Final Report, Lisbon, Portugal.
- [41] Monti, G., Nuti, C., (1992), "Nonlinear Cyclic Behaviour of Reinforcing Bars Including Buckling", *Journal of Structural Engineering*, V. 118, No. 12, pp. 3268–3284.
- [42] Mörsch, E., (1909), "Der Eisonbetonbau seine Anwendung und Theorie", 3<sup>rd</sup> Edition (English Translated by E. P. Goodrich, 1<sup>st</sup> Edition 1902), McGraw-Hill Book Company, New York, 368 pp.

- [43] Mörsch, E., (1922), "Der Eisenbetonbau-seine Theorie und anwendung", 5<sup>th</sup> Edition, Ed. Wittwer, Stuttgart, Vol. 1, Part 2., 460 pp.
- [44] Navarro Gregori, Juan, (1999), "Cálculo de Secciones de Hormigón Armado Sometidas a Esfuerzos Combinados de Axil, Flexión y Cortante Esviados", Tesina de Investigación (Ejercicio Final de Carrera), Departamento de Ingeniería de la Construcción y de P. I. C., Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 251 pp.
- [45] Navarro Gregori, J., Miguel Sosa, P. M., Fernández Prada, M. A., Filippou, F. C., (2007), "A 3D Numerical Model for Reinforced and Prestressed Concrete Elements Subjected to combined axial, bending, shear and torsion loading", *Engineering Structures*, V. 29, No. 12, pp. 3404-3419.
- [46] Nielsen, M. P., (1968), "Om Forskydningsarmering i Jernbetonjælker (On Shear Reinforcement in Reinforced Concrete Beams)", *Bygningsstatistiske Meddelelser*, V. 38, No. 3, pp. 33-58.
- [47] Onsongo, W. M., (1978), "Diagonal Compression Field Theory for Reinforced Concrete Beams Subjected to Combined Torsion, Flexure, and Axial Load", Tesis Doctoral, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Canada, 246 pp.
- [48] Oñate E., (1992), "Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis Elástico y Lineal", Barcelona, CIMNE, 850 pp.
- [49] Park, R., Paulay, T., (1975), "Reinforced Concrete Structures", Wiley & Sons, Inc., 769 pp.
- [50] Petrangeli, M., Pinto, P. E., Ciampi, V., (1999), "Fiber Element for Cyclic Bending and Shear of RC Structures. I: Theory", *Journal of Engineering Mechanics*, V. 125, No. 9, pp. 994-1001.
- [51] Petrangeli, M., (1999), "Fiber Element for Cyclic Bending and Shear of RC Structures. II: Verification", *Journal of Engineering Mechanics*, V. 125, No. 9, pp. 1002-1009.
- [52] Popovics, S., (1973), "A Numerical Approach to the Complete Stress-strain Curve of Concrete", *Cement and Concrete Research*, V. 3, No. 5, pp. 583-599.

- [53] Powell, M. J. D., (1970), "A Fortran Subroutine for Solving Systems of Nonlinear Algebraic Equations", *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*, P. Rabinowitz, ed., Ch. 7.
- [54] Rabbat, B., Collins, M.P., (1978), "Variable Angle Space Truss Model for Structural Concrete Members Subjected to Complex Loading," Douglas McHenry International Symposium on Concrete and Concrete Structures, SP-55, American Concrete Institute, Detroit, pp. 547-587.
- [55] Rahal, K. N., Collins, M. P., (1995), "Effect of Thickness of Concrete Cover on Shear-Torsion Interaction - An Experimental Investigation", *ACI Structural Journal*, V. 92, No. 3, pp. 334-342.
- [56] Rahal, K. N., Collins, M. P., (1995), "Analysis of Sections Subjected to Combined Shear and Torsion - A Theoretical Model", *ACI Structural Journal*, V. 92, No. 4, pp. 1-13.
- [57] Rahal, K.N., Collins, M. P., (2003), "Combined Torsion and Bending in Reinforced and Prestressed Concrete Beams", *ACI Structural Journal*, V. 100, No. 2, pp. 157-165.
- [58] Ranzo, G., Petrangeli, M., (1998), "A Fibre Finite Beam Element with Section Shear Modelling for Seismic Analysis of RC Structures", *Journal of Earthquake Engineering*, V. 2, pp. 443-473.
- [59] Ranzo G., (2000), "Experimental and Numerical Studies on the Seismic Performance of Beam-column RC Structural Members Subjected to High Shear", Tesis Doctoral, University of Roma "La Sapienza", 238 pp.
- [60] Rausch, E, (1929), "Berechnung des Eisonbetons gegen Verdrehung (Design of Reinforced Concrete in Torsion)", Technische Hochschule, Berlin, Germany, 1929, 53 pp.
- [61] Reddy, J. N., (1984), "A Simple Higher-order Theory for Laminated Composite Plates", *Journal of Applied Mechanics*, V. 51, pp. 745-752.
- [62] Reddy, J. N., (1993), "An Introduction to the Finite Element Method", 2<sup>nd</sup> Edition, McGraw Hill Book Company, New York, 684 pp.

- [63] Reddy, J. N., (1997), "On Locking-free Shear Deformable Beam Finite Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 149, pp. 113-132.
- [64] Remino, M., (2004), "Shear Modeling of Reinforced Concrete Structures, Tesis Doctoral, Dipartimento di Ingegneria Civile, Università degli Studi di Brescia, Brescia, Italy.
- [65] Ritter, W., (1899), "Die Bauweise Hennebique", *Shweizerische Bauzeitung*, V. 33, No. 7, pp. 59-61.
- [66] Robbins, D. H., Reddy, J. N., (1993), "Modeling of Thick Composites Using a Layerwise Laminate Theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V. 36, pp. 665–677.
- [67] Saritas, A., (2006), "Mixed Formulation Frame Element for Shear Critical Steel and Reinforced Concrete Members", Tesis Doctoral, University de California, Berkeley, 206 pp.
- [68] Saritas A., Filippou F. C., (2006), "A Beam Finite Element for Shear Critical RC Beams", *ACI Special Publication SP-237*, 19, pp. 295-310.
- [69] Saritas, A., Filippou, F. C., (2009), "Numerical Integration of a Class of 3d Plastic-damage Concrete Models and Condensation of 3d Stress-strain Relations for Use in Beam Finite Elements", *Engineering Structures*, V. 31, No. 10, pp. 2327-2336.
- [70] Schlaich, J., Schäfer, K., Jennewein, M., (1987), "Toward a Consistent Design of Structural Concrete", *PCI Journal*, V.32, No. 3, pp. 74-150.
- [71] Scordelis, A.C., (1984), "Computer Models for Nonlinear Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures", *PCI Journal*, V. 29, No. 6, pp. 116-135.
- [72] Selby, R. G., Vecchio, F. J., Collins, M. P., (1996), "Analysis of Reinforced Concrete Members Subject to Shear and Axial Compression", *ACI Structural Journal*, V. 93, No. 3, pp. 306-315.
- [73] Selby, R. G., Vecchio, F. J., (1997), "A Constitutive Model for Analysis of Reinforced Concrete Solids", *Canadian Journal of Civil Engineering*, V. 24, No. 3, pp. 460-470.

- [74] Spacone, E., Filippou F. C., Taucer, F. F., (1996), "Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of R/C Frames: Part I. Formulation", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, V. 25, pp. 711–725.
- [75] Srinivas, S., (1973), "A Refined Analysis of Composite Laminates", *Journal of Sound and Vibration*, V. 30, pp. 495–507.
- [76] Stevens N. J., Uzumeri, S. M., Collins, M. P., (1987). "Analytical Modelling of Reinforced Concrete Subjected to Monotonic and Reversed Loadings", Publication No. 87-02, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada, 201 pp.
- [77] Stevens N. J., Uzumeri, S. M., Collins, M. P., and Will, G. T., (1991), "Constitutive Model for Reinforced Concrete Finite Element Analysis", *ACI Structural Journal*, V. 88, No. 1, pp. 49-59.
- [78] Stevens N. J., Uzumeri, S. M., Collins, M. P., (1991), "Reinforced Concrete Subjected to Reverse Cyclic Shear-Experiments and Constitutive Model", *ACI Structural Journal*, V. 88, No. 2, pp. 135-146.
- [79] Taylor R. L., Filippou F. C., Saritas A., Auricchio F., (2003), "A Mixed Finite Element Method for Beam and Frame Problems", *Computational Mechanics*, V. 31, No. 1-2, pp. 192–203.
- [80] Timoshenko, S. P., (1975), "Teoría de la Elasticidad", Editorial URMO, Bilbao, España, 549 pp.
- [81] Toledano, A., Murakami, H., (1987), "A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminate Configurations", *Journal of Applied Mechanics*, V. 54, pp. 181–189.
- [82] Vecchio, F. J., Collins, M. P., (1982), "The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stresses", Publication No. 82-03, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada, 332 pp.
- [83] Vecchio, F. J., Collins, M. P., (1986), "The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear", *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 2, pp. 219-231.
- [84] Vecchio, F. J., Collins, M. P., (1988), "Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory", *ACI Structural Journal*, V. 86, No. 3, pp. 258-268.

- [85] Vecchio, F. J., (1989), "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Membranes", *ACI Structural Journal*, V. 86, No. 1, pp. 26-35.
- [86] Vecchio, F. J., (1990), "Reinforced Concrete Membrane Element Formulations", *Journal of Structural Engineering*, V. 116, No. 3, pp. 730-750.
- [87] Vecchio, F. J., Selby, R. G., (1991), "Toward Compression-Field Analysis of Reinforced Concrete Solids", *Journal of Structural Engineering*, V. 117, No. 6, pp. 1740-1758.
- [88] Vecchio, F. J., (2000), "Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation", *Journal of Structural Engineering*, V. 126, No. 9, pp. 1070-1077.
- [89] Vecchio, F. J., (2001), "Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Implementation", *Journal of Structural Engineering*, V. 127, No. 1, pp. 12-20.
- [90] Vecchio, F. J., Shim, W., (2004), "Experimental and Analytical Reexamination of Classic Concrete Beam Tests", *Journal of Structural Engineering*, V. 130, No. 3, pp. 460-469.
- [91] Yang, P. C., Norris, C. H., Stavsky, Y., (1966), "Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates", *International Journal of Solids and Structures*, V. 2, pp. 665-684.



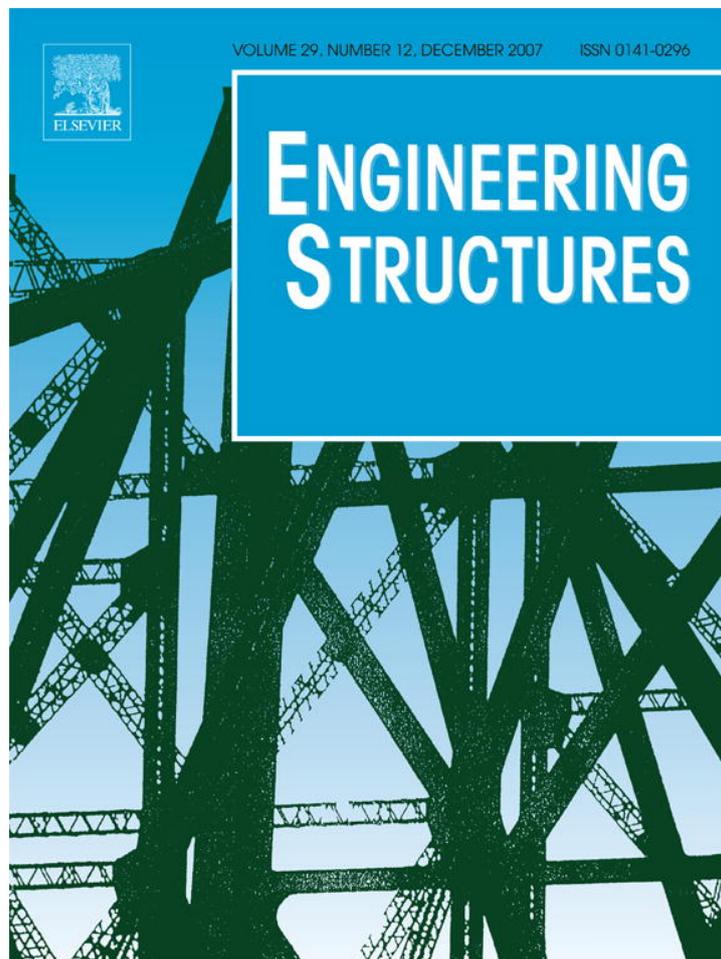
# ANEJO

1

## ARTÍCULO

**“A 3D numerical model for reinforced concrete and prestressed concrete elements subjected to combined axial, bending, shear, and torsion loading”**

Provided for non-commercial research and education use.  
Not for reproduction, distribution or commercial use.



This article was published in an Elsevier journal. The attached copy is furnished to the author for non-commercial research and education use, including for instruction at the author's institution, sharing with colleagues and providing to institution administration.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

<http://www.elsevier.com/copyright>



# A 3D numerical model for reinforced and prestressed concrete elements subjected to combined axial, bending, shear and torsion loading

J. Navarro Gregori<sup>a,\*</sup>, P. Miguel Sosa<sup>a</sup>, M.A. Fernández Prada<sup>a</sup>, Filip C. Filippou<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Department of Construction Engineering and Civil Engineering Projects, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022, Valencia, Spain*

<sup>b</sup> *Department of Civil and Environmental Engineering, University of California Berkeley, 760 Davis Hall, Berkeley, CA 94720-1710, USA*

Received 4 December 2006; received in revised form 3 September 2007; accepted 7 September 2007

Available online 1 November 2007

## Abstract

This paper presents a model for the analysis of reinforced and prestressed concrete frame elements under combined loading conditions, including axial force, biaxial bending, torsion and biaxial shear force. The proposed model is based on the simple kinematic assumptions of the Timoshenko beam theory and holds for curved three dimensional frame elements with arbitrary cross-section geometry. The control sections of the frame element are subdivided into regions with 1D, 2D and 3D material response. The constitutive material model for reinforced and prestressed concrete follows the basic assumptions of the Modified Compression Field Theory with a tangent-stiffness formulation. The validity of the model is established by comparing its results with several well-known tests from the literature. These simulations include a variety of load combinations under bending, shear and torsion. The analytical results show excellent agreement with experimental data regarding the ultimate strength of the specimen and the local strain response from initiation of cracking to ultimate load.

© 2007 Elsevier Ltd. All rights reserved.

*Keywords:* Biaxial bending; Biaxial shear; Concrete; Finite element; MCFT; Torsion

## 1. Introduction

Structural concrete members such as curved bridge decks, frames on the perimeter of a building and multideck bridge structures are subjected to complex loading combinations. Section forces such as axial and bending moments commonly generate only longitudinal stresses, while shear forces and torsion moments create shear as well as normal stresses due to diagonal cracking. The simultaneous action of both types of loading generates a complex stress-state, requiring the consideration of the interaction between normal and shear stresses. This complex interaction problem has been studied with various approaches during the last decades. Research thus far has, however, focused primarily on the relatively simple and most common load combinations.

Current design procedures [1,2] address specifically the interaction effect between normal and shear stress in the element or section response. Simple rules are established in

order to furnish structural concrete designers with simplified and accurate methods for considering this complex problem.

In recent years several theoretical models have been proposed to deal with the interaction between axial force, bending moment, shear force, and torsional moment. Such is the case for the section models developed by Vecchio and Collins [3] and Bentz [4]. These models are suitable for the analysis of prestressed and reinforced concrete sections under axial force, bending moment, and shear force. However, while arbitrary sections may be considered, biaxial bending, biaxial shear and torsional moments are not included in either model. The constitutive behaviour used is based on the Modified Compression Field Theory (MCFT), which resulted from extensive research on the behaviour of reinforced concrete panels under in-plane stress conditions. In these two models a shear strain profile is obtained by satisfying the equilibrium in the longitudinal direction rather than using a fixed pattern. In [3] this is done by imposing longitudinal equilibrium in two sections separated by a distance approximately equal to one sixth the total depth of the section. This method is called the dual section analysis. The analysis in [4] is performed

\* Corresponding author. Tel.: +34 96 387 7007x75617; fax: +34 96 387 7569.  
E-mail address: [juanagre@cst.upv.es](mailto:juanagre@cst.upv.es) (J. Navarro Gregori).

**Notation**

$\alpha, \beta$  shear correction functions  
 $\alpha_p$  panel orientation angle  
 $\hat{\mathbf{D}}'$  tangent-stiffness matrix of the section  
 $\mathbf{D}'_{1D} \mathbf{D}'_{2D} \mathbf{D}'_{3D}$  tangent-stiffness matrix (1D, 2D or 3D region)  
 $\hat{\mathbf{D}}'_{i,1D} \hat{\mathbf{D}}'_{i,2D} \hat{\mathbf{D}}'_{i,3D}$  section tangent-stiffness matrix  $i$ -region (1D, 2D or 3D)  
 $\mathbf{D}_{2D}, \mathbf{D}_{3D}$  matrix of tangent-stiffness ( $6 \times 6$ ) [ $\mathbf{D}_{11} \mathbf{D}_{12}; \mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{22}$ ]  
 $d_b$  reinforcement bar diameter  
 $\mathbf{D}_P$  tangent-stiffness matrix in the panel system  
 $\mathbf{D}_{c,prin}$  concrete tangent-stiffness matrix in principal directions  
 $\boldsymbol{\epsilon}'$  strain vector [ $\epsilon_{\bar{x}} \ \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \ \gamma_{\bar{x}\bar{z}}$ ]<sup>T</sup>  
 $\boldsymbol{\epsilon}'_t$  strain vector TBT [ $\epsilon_{\bar{x},t} \ \gamma_{\bar{x}\bar{y},t} \ \gamma_{\bar{x}\bar{z},t}$ ]<sup>T</sup>  
 $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'$  generalized strain vector of the section [ $\epsilon_0 \ c_y \ c_z \ c_x \ \gamma_{xy0} \ \gamma_{xz0}$ ]<sup>T</sup>  
 $\boldsymbol{\epsilon}_{2D}, \boldsymbol{\epsilon}_{3D}$  full strain vector [ $\epsilon_{\bar{x}} \ \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \ \gamma_{\bar{x}\bar{z}} \ \epsilon_{\bar{y}} \ \epsilon_{\bar{z}} \ \gamma_{\bar{y}\bar{z}}$ ]<sup>T</sup>  
 $\boldsymbol{\epsilon}_p$  strain vector in the panel system [ $\epsilon_{xp} \ \epsilon_{yp} \ \gamma_{xyp} \ \epsilon_{zp} \ \gamma_{xzp} \ \gamma_{yzp}$ ]<sup>T</sup>  
 $\boldsymbol{\epsilon}_P$  reduced strain vector in the panel system [ $\epsilon_{xp} \ \epsilon_{yp} \ \gamma_{xyp}$ ]<sup>T</sup>  
 $\boldsymbol{\epsilon}_1$  [ $\epsilon_{\bar{x}} \ \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \ \gamma_{\bar{x}\bar{z}}$ ]<sup>T</sup>  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  [ $\epsilon_{\bar{y}} \ \epsilon_{\bar{z}} \ \gamma_{\bar{y}\bar{z}}$ ]<sup>T</sup>  
 $\epsilon_L$  longitudinal principal strain in concrete  
 $\epsilon_T$  transverse principal strain in concrete  
 $\epsilon'_c$  peak strain of concrete  
 $\epsilon_{cu}$  ultimate strain of concrete  
 $\epsilon_{cr}$  concrete cracking strain  
 $\boldsymbol{\epsilon}_{prin}$  vector of strain principal directions:  $\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3$   
 $f'_c$  cylinder compressive concrete strength  
 $f_{cr}$  concrete cracking stress  
 $k_y, k_z$  shear correction factors  
 $\eta$  residual concrete strength factor  
 $\mathbf{L}$  transformation matrix between the global and the local system  
 $\rho_s$  reinforcement ratio  
 $\mathbf{S}$  matrix of section compatibility  
 $\mathbf{S}_t$  matrix of section compatibility TBT  
 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'$  vector of section resultant forces [ $N \ M_{\bar{y}} \ M_{\bar{z}} \ T \ V_{\bar{y}} \ V_{\bar{z}}$ ]<sup>T</sup>  
 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{i,1D} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{i,2D} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{i,3D}$  vector of section resultant forces  $i$ -region (1D, 2D or 3D)  
 $\boldsymbol{\sigma}'$  stress vector [ $\sigma_{\bar{x}} \ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \ \tau_{\bar{x}\bar{z}}$ ]<sup>T</sup>  
 $\boldsymbol{\sigma}'_t$  stress vector TBT [ $\sigma_{\bar{x},t} \ \tau_{\bar{x}\bar{y},t} \ \tau_{\bar{x}\bar{z},t}$ ]<sup>T</sup>  
 $\boldsymbol{\sigma}'_{1D} \boldsymbol{\sigma}'_{2D} \boldsymbol{\sigma}'_{3D}$  stress vector (1D, 2D or 3D region)  
 $\boldsymbol{\sigma}_{2D}, \boldsymbol{\sigma}_{3D}$  full stress vector [ $\sigma_{\bar{x}} \ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \ \tau_{\bar{x}\bar{z}} \ \sigma_{\bar{y}} \ \sigma_{\bar{z}} \ \tau_{\bar{y}\bar{z}}$ ]<sup>T</sup>  
 $\boldsymbol{\sigma}_p$  stress vector in the panel system [ $\sigma_{xp} \ \sigma_{yp} \ \tau_{xyp} \ \sigma_{zp} \ \tau_{xzp} \ \tau_{yzp}$ ]<sup>T</sup>  
 $\boldsymbol{\sigma}_P$  reduced stress vector in the panel system [ $\sigma_{xp} \ \sigma_{yp} \ \tau_{xyp}$ ]<sup>T</sup>

$\boldsymbol{\sigma}_1$  [ $\sigma_{\bar{x}} \ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \ \tau_{\bar{x}\bar{z}}$ ]<sup>T</sup>  $\boldsymbol{\sigma}_2 = [\sigma_{\bar{y}} \ \sigma_{\bar{z}} \ \tau_{\bar{y}\bar{z}}]$ <sup>T</sup>  
 $\sigma_c$  concrete stress  
 $\boldsymbol{\sigma}_{c,prin}$  vector of principal concrete stresses:  $\sigma_{c1} \ \sigma_{c2} \ \sigma_{c3}$   
 $\mathbf{T}^*$  transformation matrix between the local and the panel system  
 $\mathbf{u}$  vector of frame displacements in the global system [ $u_0 \ v_0 \ w_0 \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z$ ]<sup>T</sup>  
 $\mathbf{u}'$  vector of frame displacements in the local system [ $\bar{u}_0 \ \bar{v}_0 \ \bar{w}_0 \ \bar{\theta}_x \ \bar{\theta}_y \ \bar{\theta}_z$ ]<sup>T</sup>  
 $\bar{\mathbf{u}}$  displacements at any point of the section in the local system [ $\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}$ ]<sup>T</sup>

in the same way but enhancing the formulation in terms of derivative expressions instead of increments, through the so called longitudinal stiffness method. Moreover, shear strain and stress distribution in the cross section based on internal equilibrium among fibres has also been used to a certain extent through the approach given by Ranzo [5].

Rahal and Collins [6] presented a relatively straightforward sectional model to take into account the interaction between bending moment, shear force and torsional moment. These authors make a simplified analysis by idealizing the section as two systems in such a way as to consider one- and two-dimensional stresses on the elements separately while maintaining an interaction between them. The results of this model are quite good despite its simplicity. Moreover, though the model only takes into account rectangular sections, it addresses many critical effects such as spalling of concrete cover.

Other research teams, including Saritas and Filippou [7], and Petrangeli and Ciampi [8] have developed frame models incorporating the interaction effect of bending moment and shear force. These approaches encompass material models that are capable of taking into account cyclic loading conditions. In [7] the material model employed is also MCFT, while the constitutive model used in [8] is based on a microplane formulation. The two aforementioned models make an important contribution by advocating the use of the force or mixed formulation for the element, an approach that appears to offer computational advantages over displacement-based methods. The last two models use fixed patterns for the shear strain distribution based on a parabolic shear strain distribution. This simplification does not guarantee a perfect longitudinal equilibrium between fibres. It is worth to mention that in [3] also a parabolic shear strain profile and a constant shear stress pattern were employed. This was done in order to compare the results obtained with fixed-pattern models and those achieved by using the dual section analysis.

Finally, it is worth noting the proposal of Bairan and Mari [9,10] for the degree to which their model enhances traditional beam theories. The section response of this model takes into account the coupling between normal and shear stresses under general 3D loading. The section kinematics of the cross-section considers the distortion of the section

together with warping. This last aspect is very important to account for crack induced anisotropy and thus coupling effects between tangential and normal forces correctly. The level of compatibility and internal equilibrium is higher than in traditional models since it considers both aspects in longitudinal and transverse directions. However, warping and distortion are defined internally in the cross section and the compatibility is not strictly perfect since simplifications assumptions are present. The material model used for plain concrete is based on the rotating-smeared crack approach and post-cracked concrete is modelled as an orthotropic material.

In this paper, a general 3D model for the analysis of reinforced and prestressed concrete frame elements is presented. Arbitrary cross-section geometries and combined loading conditions, including axial force, biaxial bending moment, torsion and biaxial shear forces are taken into account. The model is a 3-node frame finite element based on the displacement formulation under the basic assumptions of the Timoshenko beam theory (TBT). Every section of the frame element is subdivided into regions to take into account 1D, 2D and 3D material response. The constitutive material model for concrete follows the basic assumptions of the Modified Compression Field Theory with a tangent-stiffness formulation. The primary objective of the proposed model is to address the challenges associated with the behaviour of structural concrete members of complex geometry under general load combinations within the framework of the simple kinematic assumptions of beam theory.

## 2. Model formulation

The proposed model is based on the displacement formulation and uses the Finite Element Method (FEM). It is described through the following levels of analysis: element formulation, section formulation, regional analysis and constitutive model.

### 2.1. Element formulation

Most of the following formulation is based on the presentation by Rao [11] and Oñate [12], with additional details specific to the element presented in later sections. A curved 3-node frame element is defined in the global coordinate system  $x, y, z$  (see Fig. 1). This element follows a directrix line  $s$  and a cross-section area  $A(s)$ . A local coordinate system  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  for any given section is located at any point of the element  $s$  with a general section initially normal to the directrix. A reference point in the section  $O$  denotes the origin of the local coordinate system.

For the description of the 3D response six degrees of freedom (dofs) are considered at each node of the element consisting of three translation and three rotation dofs. These displacement components are expressed as a six-component vector, both in the global  $\mathbf{u}$  and in the local system  $\mathbf{u}'$ :

$$\mathbf{u} = (u_o \quad v_o \quad w_o \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z)^T$$

$$\mathbf{u}' = (\bar{u}_o \quad \bar{v}_o \quad \bar{w}_o \quad \theta_{\bar{x}} \quad \theta_{\bar{y}} \quad \theta_{\bar{z}})^T. \quad (1)$$

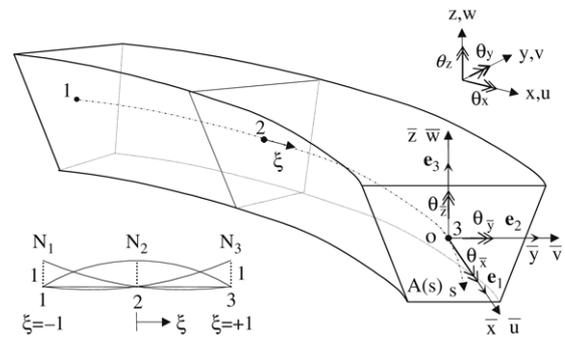


Fig. 1. Frame element definition.

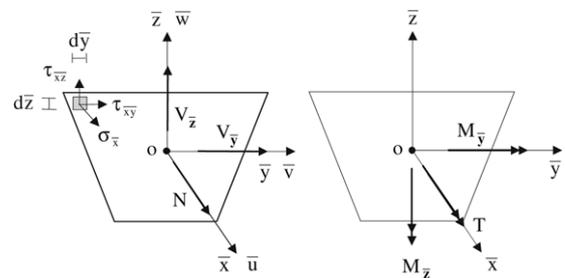


Fig. 2. Section loads.

These two vectors are geometrically related as follows:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} \quad \text{with } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad \text{and}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

where  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,$  and  $\mathbf{e}_3$  are the three local system unit vectors in the global system  $x, y, z$  (see Fig. 1). The definition of a unique orientation for the section requires that an additional assumption be used for the local vectors  $\mathbf{e}_2$  and  $\mathbf{e}_3$ : Here, the component  $e_{2z}$  is set equal to 0.

The traditional Timoshenko Beam Theory is used, this is, planar sections remain planar after deformation but not necessarily normal to the directrix. This kinematic assumption makes it possible to relate the three translations of any point in a section  $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}]^T$  to the six generalized displacements of the reference point  $\mathbf{u}'$  according to the following expression:

$$\bar{u}(s, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{u}_o(s) + \bar{z} \cdot \theta_{\bar{y}}(s) - \bar{y} \cdot \theta_{\bar{z}}(s)$$

$$\bar{v}(s, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{v}_o(s) - \bar{z} \cdot \theta_{\bar{x}}(s)$$

$$\bar{w}(s, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{w}_o(s) + \bar{y} \cdot \theta_{\bar{x}}(s). \quad (3)$$

### 2.2. Section formulation

Each element comprises a group of sections composed of integration points. Each section must permit a load combination including axial force, biaxial bending moment, biaxial shear force and torsion (see Fig. 2).

At each point, only three strain components are considered:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\bar{x},t} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}_o}{\partial \bar{x}} + \bar{z} \cdot \frac{\partial \theta_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} - \bar{y} \cdot \frac{\partial \theta_{\bar{z}}}{\partial \bar{x}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y},t} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{v}_o}{\partial \bar{x}} - \theta_{\bar{z}} - \bar{z} \cdot \frac{\partial \theta_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{z},t} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{w}_o}{\partial \bar{x}} + \bar{y} \cdot \frac{\partial \theta_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \theta_{\bar{y}}\end{aligned}\quad (4)$$

where  $\varepsilon_{\bar{x},t}$  is the normal strain and  $\gamma_{\bar{x}\bar{y},t}, \gamma_{\bar{x}\bar{z},t}$  are the transverse strains, or better in vector form as

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_t = [\varepsilon_{\bar{x},t} \quad \gamma_{\bar{x}\bar{y},t} \quad \gamma_{\bar{x}\bar{z},t}]^T.$$

It is also possible to relate the strain vector at a material point of the section  $\boldsymbol{\varepsilon}'_t$  to the generalized strain vector of the section  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_t$ , and consequently the stress vector at any point  $\boldsymbol{\sigma}'_t$  by means of a suitable constitutive model, as follows:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}'_t &= \mathbf{S}'^T \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{z} & \bar{y} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_o \\ c_y \\ c_z \\ c_x \\ \gamma_{xy0} \\ \gamma_{xz0} \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_t &= \begin{bmatrix} \partial \bar{u}_o / \partial \bar{x} \\ \partial \theta_{\bar{y}} / \partial \bar{x} \\ -\partial \theta_{\bar{z}} / \partial \bar{x} \\ \partial \theta_{\bar{x}} / \partial \bar{x} \\ \partial \bar{v}_o / \partial \bar{x} - \theta_{\bar{z}} \\ \partial \bar{w}_o / \partial \bar{x} + \theta_{\bar{y}} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}'_t = \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x},t} \\ \tau_{\bar{x}\bar{y},t} \\ \tau_{\bar{x}\bar{z},t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}'_t(\boldsymbol{\varepsilon}'_t)\end{aligned}\quad (5)$$

where  $\varepsilon_o$  is the longitudinal strain at the section centroid;  $c_y, c_z$  are the curvatures about the y- and z- local axis;  $c_x$  is the angle of twist per unit of length; and  $\gamma_{xy0}, \gamma_{xz0}$  are the generalized shear strains. The expression for these six components has been derived directly from Eq. (4).

The classic Timoshenko beam theory does not guarantee the longitudinal equilibrium at a certain point  $\bar{y}, \bar{z}$  of the section. Consequently, two shear correction functions  $\alpha$ , and  $\beta$  and two shear correction factors  $k_y, k_z$  are introduced to take this effect into account. The above expression (5) is thereby rewritten as follows:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}'_t &= \mathbf{S}'^T \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{z}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{y} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{z} & \bar{y} \\ 0 & k_y \cdot \beta(\bar{y}, \bar{z}) & 0 \\ 0 & 0 & k_z \cdot \alpha(\bar{y}, \bar{z}) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_o \\ c_y \\ c_z \\ c_x \\ \gamma_{xy0} \\ \gamma_{xz0} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}'_t &= \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{z}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}'_t(\boldsymbol{\varepsilon}'_t).\end{aligned}\quad (6)$$

In the absence of an established condition to satisfy longitudinal equilibrium, the definition of shear strain profiles requires

certain simplified assumptions. For example, the following shear functions and shear correction factors guarantee longitudinal equilibrium for rectangular cross-sections of width  $b$  and total depth  $h$  composed of a linear, elastic material:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{3}{2 \cdot h^2} \cdot (h^2 - 4 \cdot \bar{z}^2) \Rightarrow k_z = 5/6 \\ \beta &= \frac{3}{2 \cdot b^2} \cdot (b^2 - 4 \cdot \bar{y}^2) \Rightarrow k_y = 5/6.\end{aligned}\quad (7)$$

The virtual work density of the generalized section forces must be equal to the virtual work density of the stress field in the section. Thus the definition of the section resultant forces  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'$  becomes:

$$\begin{aligned}\iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}'^T \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot dA &= \iint_A \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'^T \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot dA \\ &= \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'^T \cdot \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot dA = \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'^T \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}' \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}' &= \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot dA = \iint_A \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ \bar{z} \cdot \sigma_{\bar{x}} \\ \bar{y} \cdot \sigma_{\bar{x}} \\ -\bar{z} \cdot \tau_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{y} \cdot \tau_{\bar{x}\bar{z}} \\ k_y \cdot \beta(\bar{y}) \cdot \tau_{\bar{x}\bar{y}} \\ k_z \cdot \alpha(\bar{z}) \cdot \tau_{\bar{x}\bar{z}} \end{bmatrix} \cdot dA \\ &= [N \quad M_{\bar{y}} \quad M_{\bar{z}} \quad T \quad V_{\bar{y}} \quad V_{\bar{z}}].\end{aligned}\quad (8)$$

To complete the formulation the tangent stiffness matrix of the section is also required:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{D}}' &= \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}'}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'} = \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'} \left( \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot dA \right) = \iint_A \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'} \cdot dA \\ &= \iint_A \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}'_t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}'_t}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'} \cdot dA = \iint_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}' \cdot \mathbf{S}'^T \cdot dA.\end{aligned}\quad (9)$$

### 2.3. Regional analysis

The cross-section is divided into a number of regions. These regions are further classified based upon the governing stress state into three types: 1D-, 2D- and 3D-regions. 1D-regions are subjected only to normal stresses; 2D-regions are subjected to normal and transverse stresses in one direction; and 3D-regions are subjected to normal and transverse stresses in both local axes. An example of this subdivision is illustrated in Fig. 3(a).

#### 2.3.1. 1D-regions

1D-regions consist only of discrete longitudinal reinforcing bars (rebar). The longitudinal stress  $\sigma_{\bar{x}}$  in the rebar direction is the only stress accounted for (see Fig. 3(b)), whereas the influence of the surrounding concrete is not included in the analysis. The strain in the rebar direction  $\varepsilon'_s$  is equal to  $\varepsilon_{\bar{x}}$ . The normal stress  $\sigma'_s$  depends only upon the longitudinal strain and the force in the reinforcement is determined according to:

$$F'_s = A_s \cdot \sigma'_s(\varepsilon'_s)\quad (10)$$

where  $A_s$  is the area of the steel reinforcement.

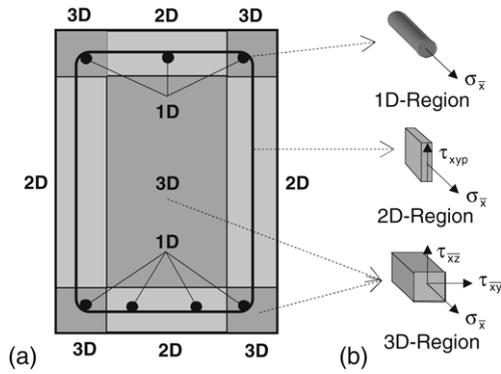


Fig. 3. (a) Cross-section region division, (b) Stress state behaviour in 1D, 2D and 3D regions.

It is additionally necessary to evaluate the tangent-stiffness contribution of the reinforcing bars. Only the axial component is taken into account for this purpose:  $D'_s = D'_s(\epsilon'_s)$ .

Finally, the section forces and tangent stiffness matrix of the 1D-region are calculated as the sum of all 1D-regions over the number of reinforcing bars ( $n_s$ ) in each region:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{o}}'_{1D} &= \iint_{A_{1D}} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}'_{1D} \cdot dA = \sum_{i=1}^{n_s} \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} \sigma'_{si} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot A_{si} \\ \hat{\mathbf{D}}'_{1D} &= \iint_{A_{1D}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}'_{1D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot dA \\ &= \sum_{i=1}^{n_s} \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} D'_{si} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S}^T \cdot A_{si}. \end{aligned} \quad (11)$$

### 2.3.2. 2D-regions

2D-regions correspond to portions of the section crossed by transverse reinforcement in one direction only and may also have distributed longitudinal reinforcement. The stress state of these regions is characterized by in-plane stresses. At each monitoring point, only in-plane stresses in the transverse reinforcement direction are accounted for (see Fig. 3(b)). The orientation of each panel is defined by the angle  $\alpha_p$  according to Fig. 4. The value of this angle will be equal to 0 in the case of horizontal, and  $\pi/2$  in the case of vertical transverse reinforcement, respectively.

After converting the strain tensor to a vector it is possible to relate the strains in the local system to those in the panel system

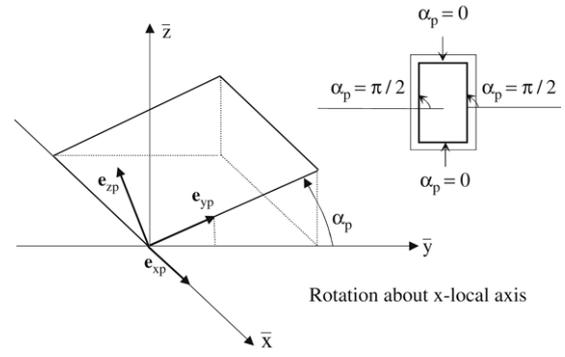


Fig. 4. Local panel coordinate system.

with the following simple transformation relation:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{2D} &= [\epsilon_{\bar{x}} \quad \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \quad \gamma_{\bar{x}\bar{z}} \quad \epsilon_{\bar{y}} \quad \epsilon_{\bar{z}} \quad \gamma_{\bar{y}\bar{z}}]^T \\ \boldsymbol{\epsilon}_p &= [\epsilon_{x_p} \quad \epsilon_{y_p} \quad \gamma_{x_y p} \quad \epsilon_{z_p} \quad \gamma_{x_z p} \quad \gamma_{y_z p}]^T \quad \text{and} \\ \boldsymbol{\epsilon}_p &= \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{2D} \end{aligned} \quad (12)$$

where  $\mathbf{T}^*$  is the following  $6 \times 6$  matrix that depends only on the angle  $\alpha_p$ : (see Box I)

The stress tensor is likewise converted to a vector

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{2D} &= [\sigma_{\bar{x}} \quad \tau_{\bar{x}\bar{y}} \quad \tau_{\bar{x}\bar{z}} \quad \sigma_{\bar{y}} \quad \sigma_{\bar{z}} \quad \tau_{\bar{y}\bar{z}}]^T \\ \boldsymbol{\sigma}_p &= [\sigma_{x_p} \quad \sigma_{y_p} \quad \tau_{x_y p} \quad \sigma_{z_p} \quad \tau_{x_z p} \quad \tau_{y_z p}]^T. \end{aligned}$$

And it is also possible to relate these two stress vectors through the transformation matrix  $\mathbf{T}^*$  as follows:

$$\boldsymbol{\sigma}_{2D} = \mathbf{T}^{*T} \cdot \boldsymbol{\sigma}_p. \quad (13)$$

Even though six stresses should be computed for  $\boldsymbol{\sigma}_p$ ,  $\sigma_{z_p}$ ,  $\tau_{x_z p}$  and  $\tau_{y_z p}$  components are set to zero to consider exclusively in-plane stresses in the panel. Moreover, note that while the above vector  $\boldsymbol{\sigma}_{2D}$  contains six components, only three of them are taken into account in the section analysis. The vector containing the stress components that are retained is denoted by  $\boldsymbol{\sigma}_1$ , while the vector of the stress components that are not included is denoted by  $\boldsymbol{\sigma}_2$ . Accordingly, this partition is also performed for the vector strains. Thus:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1 &= [\sigma_{\bar{x}} \quad \tau_{\bar{x}\bar{y}} \quad \tau_{\bar{x}\bar{z}}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = [\sigma_{\bar{y}} \quad \sigma_{\bar{z}} \quad \tau_{\bar{y}\bar{z}}]^T \\ \text{while } \boldsymbol{\epsilon}_1 &= [\epsilon_{\bar{x}} \quad \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \quad \gamma_{\bar{x}\bar{z}}]^T \quad \text{and} \\ \boldsymbol{\epsilon}_2 &= [\epsilon_{\bar{y}} \quad \epsilon_{\bar{z}} \quad \gamma_{\bar{y}\bar{z}}]^T. \end{aligned} \quad (14)$$

The relation for transformation of the tangent-stiffness matrix between the local and the panel coordinate system is as

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2 \alpha_p & \sin^2 \alpha_p & \sin \alpha_p \cdot \cos \alpha_p \\ 0 & \cos \alpha_p & \sin \alpha_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2 \alpha_p & \cos^2 \alpha_p & -\sin \alpha_p \cdot \cos \alpha_p \\ 0 & -\sin \alpha_p & \cos \alpha_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \cdot \sin \alpha_p \cdot \cos \alpha_p & 2 \cdot \sin \alpha_p \cdot \cos \alpha_p & \cos^2 \alpha_p - \sin^2 \alpha_p \end{bmatrix}$$

Box I.

follows:

$$\mathbf{D}_{2D} = \mathbf{T}^{*T} \cdot \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

At this point, the three stress components that are not accounted for, i.e.  $\sigma_{\bar{y}}$ ,  $\sigma_{\bar{z}}$  and  $\gamma_{\bar{y}\bar{z}}$ , are set equal to zero; or, in short notation  $\boldsymbol{\sigma}_2$ . This condition provides the method for determining the corresponding three strain values of  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ , i.e.  $\varepsilon_{\bar{y}}\varepsilon_{\bar{z}}\gamma_{\bar{y}\bar{z}}$  that cannot be obtained from the matrix of section compatibility  $\mathbf{S}$  and the generalized section deformations  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'$  by using Eq. (6). Since the constraint condition is nonlinear, the determination of the corresponding strain values requires an internal iterative solution procedure. It is worth mentioning that imposing  $\boldsymbol{\sigma}_2$  to be zero is actually an internal equilibrium condition between reinforcing steel and concrete in each fibre of the section. This condition also implies that the normal stress  $\sigma_{yp}$  considered in the panel is also zero (Fig. 3(b)). The  $3 \times 1$  local stress vector is now defined as  $\boldsymbol{\sigma}'_{2D} = \boldsymbol{\sigma}_1$ , and for the tangent stiffness matrix the following formula of static condensation results:

$$\mathbf{D}'_{2D} = \mathbf{D}_{11} - \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{D}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{21}. \quad (16)$$

Finally, by summing up the stress and stiffness matrix contributions over the area  $A_{2D}$ , it is possible to calculate the section forces and stiffness matrix for the 2D-region according to

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{2D} &= \iint_{A_{2D}} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}'_{2D} \cdot dA \quad \text{and} \\ \hat{\mathbf{D}}'_{2D} &= \iint_{A_{2D}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}'_{2D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot dA. \end{aligned} \quad (17)$$

### 2.3.3. 3D-regions

3D-regions correspond to parts of the cross-section that contain distributed longitudinal reinforcement and are crossed by more than one transverse reinforcement direction. At each integration point the constitutive behaviour is three-dimensional. The stress state involves the normal stress  $\sigma_{\bar{x}}$  and the transverse stresses  $\tau_{\bar{x}\bar{y}}$  and  $\tau_{\bar{x}\bar{z}}$  (see Fig. 3(b)). Consequently, a 3D constitutive relation for the behaviour of reinforced concrete is required. This results in a six-component vector  $\boldsymbol{\sigma}_{3D}$  and  $6 \times 6$  stiffness matrix relating the increments of the stress vector to the increments of the six-component strain vector according to:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{3D} &= [\sigma_{\bar{x}} \quad \tau_{\bar{x}\bar{y}} \quad \tau_{\bar{x}\bar{z}} \quad \sigma_{\bar{y}} \quad \sigma_{\bar{z}} \quad \tau_{\bar{y}\bar{z}}]^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \\ \mathbf{D}_{3D} &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Take note that the same partition performed for the 2D region is done for 3D-regions. It is additionally necessary to set to zero those stresses not taken into account in the analysis ( $\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{0}$ ). A similar procedure as used for the 2D-regions is required, so that:

$$\boldsymbol{\sigma}'_{3D} = \boldsymbol{\sigma}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{D}'_{3D} = \mathbf{D}_{11} - \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{D}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{21}. \quad (19)$$

Finally, the integration of stress and stiffness matrix contributions over the 3D region area  $A_{3D}$  gives:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{3D} &= \iint_{A_{3D}} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}'_{3D} \cdot dA \quad \text{and} \\ \hat{\mathbf{D}}'_{3D} &= \iint_{A_{3D}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}'_{3D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot dA. \end{aligned} \quad (20)$$

### 2.3.4. Section response

Once the section forces and stiffness matrix for each of the three types of region are determined, they are summed up to give the resisting forces and the tangent stiffness matrix of the entire section. This is expressed as follows:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}' &= \sum_{i=1}^{n_{1D}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{i,1D} + \sum_{j=1}^{n_{2D}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{j,2D} + \sum_{k=1}^{n_{3D}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_{k,3D} \quad \text{and} \\ \hat{\mathbf{D}}' &= \sum_{i=1}^{n_{1D}} \hat{\mathbf{D}}'_{i,1D} + \sum_{j=1}^{n_{2D}} \hat{\mathbf{D}}'_{j,2D} + \sum_{k=1}^{n_{3D}} \hat{\mathbf{D}}'_{k,3D}. \end{aligned} \quad (21)$$

This model makes it possible to use different types of region depending on the type of analysis to be conducted. For example, if the structure or the section is subjected to only bending moment and shear force in one direction, then the model makes use of 1D- and 2D-regions only. On the other hand, 3D-regions may be used always in lieu of 2D-regions for more sophisticated analysis of 3D material effects.

Even though in Fig. 3 is suggested to use a width equal to the double of the concrete cover over the transverse reinforcement, the authors do not fix a rule to define the effective width for 2D- and 3D-regions. The predicted results of the model can vary depending on the widths considered mainly when the dominant failure mode is due to concrete crushing. Researchers like [6] have suggested computing the effective width depending on the wall's curvature and the level of compression stresses at every integration point for load combinations including bending, shear and torsion. It is also important to outline that in any analysis including torsion load the centroid for the transverse reinforcement should be conserved.

## 2.4. Constitutive model

The constitutive equations depend on the type of region in which the material model is used. A bilinear stress–strain diagram with strain hardening is used for the description of the response of discrete reinforcing bars.

### 2.4.1. Constitutive material model for 2D-regions

The constitutive behaviour of the material for 2D-regions is based upon the model proposed by Stevens et al. [13], which is based closely on the MCFT proposed by Vecchio and Collins [14]. The primary features of this material model are: the assumption that the principal direction in the concrete is coincident with the principal strain direction, the inclusion of the tension-stiffening effect, and the softening of concrete due to transverse tension strains. The great advantage of the Stevens model is that it combines the tangent-stiffness formulation with the basic assumptions of the original MCFT.

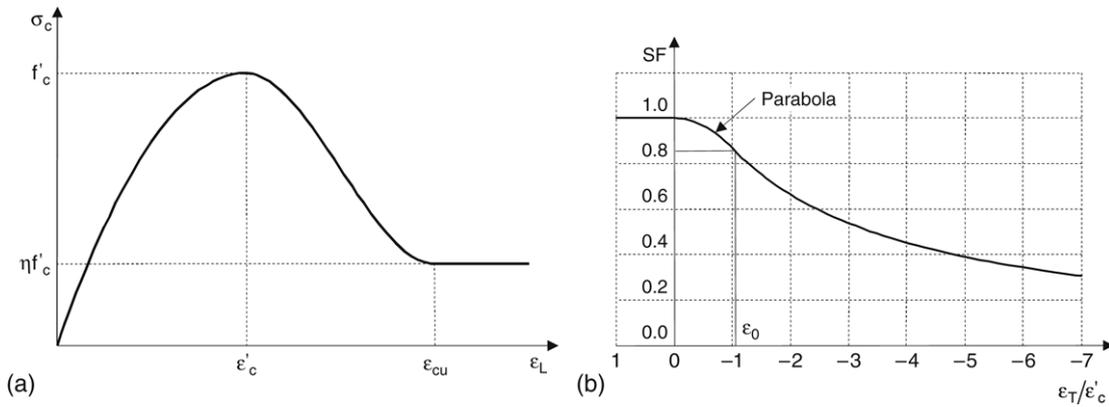


Fig. 5. Behavior of concrete in compression (Stevens [13]).

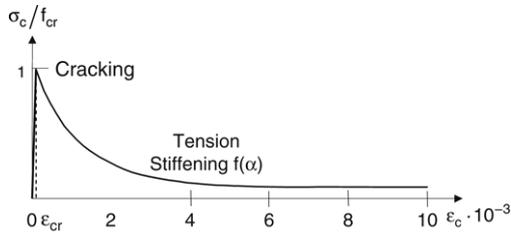


Fig. 6. Behaviour of concrete in tension (Stevens [13]).

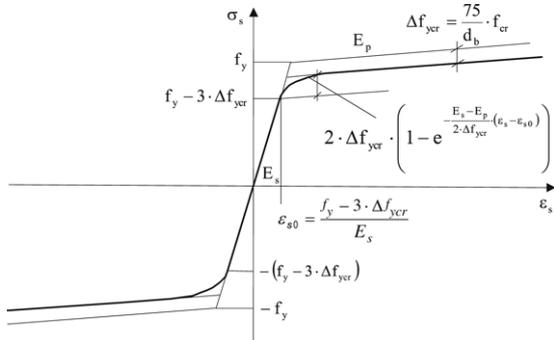


Fig. 7. Embedded reinforcement in concrete (Stevens [13]).

The confinement effect has not been included in the proposed model. The assumption that requires setting to zero those stresses not considered in the section analysis ( $\sigma_2 = 0$ ) does not let a correct analysis with confinement. The 2D response is determined separately for reinforcement and for concrete and the resulting stresses are added up after transformation to a common coordinate system to give the response of reinforced concrete.

The concrete response is defined in two principal strain directions, a longitudinal principal strain  $\epsilon_L$ , and a transverse principal strain  $\epsilon_T$ . The formulation of the stress–strain constitutive relation for concrete is summarized in Table 1 and Figs. 5(a), (b), 6 according to [13].

The formulation described in [13] accounts for the variation of stresses in the smeared reinforcement of cracked concrete (Fig. 7). This makes it possible to compute an average stress, including the effect of concrete cracking, while avoiding the crack check imposed by the original MCFT.

Typical 2D behaviour for this constitutive material is obtained by adding the response of the concrete defined in the principal strain directions to the reinforcement with reinforcement ratios  $\rho_{sx}$  and  $\rho_{sy}$ . Thus:

$$\sigma_P = \begin{bmatrix} \sigma_{xp} \\ \sigma_{yp} \\ \tau_{xyp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{cxp} \\ \sigma_{cyp} \\ \tau_{cxyp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{sxp} \cdot \sigma_{sxp} \\ \rho_{syp} \cdot \sigma_{syp} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$d\sigma_P = D_P \cdot d\epsilon_P$$

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{xp} \\ d\sigma_{yp} \\ d\tau_{xyp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{cxp}}{\partial \epsilon_{xp}} & \frac{\partial \sigma_{cxp}}{\partial \epsilon_{yp}} & \frac{\partial \sigma_{cxp}}{\partial \gamma_{xyp}} \\ \frac{\partial \sigma_{cyp}}{\partial \epsilon_{xp}} & \frac{\partial \sigma_{cyp}}{\partial \epsilon_{yp}} & \frac{\partial \sigma_{cyp}}{\partial \gamma_{xyp}} \\ \frac{\partial \tau_{cxyp}}{\partial \epsilon_{xp}} & \frac{\partial \tau_{cxyp}}{\partial \epsilon_{yp}} & \frac{\partial \tau_{cxyp}}{\partial \gamma_{xyp}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{sxp} \cdot D'_{sxp} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{syp} \cdot D'_{syp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\epsilon_{xp} \\ d\epsilon_{yp} \\ d\gamma_{xyp} \end{bmatrix} \quad (23)$$

It is easier to express the concrete tangent stiffness in terms of the principal directions as  $D_{c,prin}$ . Hence:

$$\sigma_{c,prin} = \begin{bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \epsilon_{prin} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d\sigma_{c,prin} = D_{c,prin} \cdot d\epsilon_{prin}$$

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{c1} \\ d\sigma_{c2} \\ d\gamma_{c12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \gamma_{12}} \\ \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \gamma_{12}} \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{c2}}{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (24)$$

The degree of nonsymmetry of this stiffness matrix can be sometimes large. Authors had the necessity of implementing robustness numerical methods to solve this problem. It is worth noting that out-of-plane stresses in the panel are equal to zero so as to consistently follow the formulation established for 2D-regions.

### 2.4.2. Constitutive material model for 3D-regions

Following the example of Vecchio and Selby [15], the proposed model extends the original MCFT to describe the material response of 3D-regions. The modified constitutive relations differ from those originally proposed by their use of a tangent-stiffness formulation. The constitutive behaviour is described in a total 3D stress space formulation.

The stresses and tangent-stiffness matrix of this 3D material are established very similarly to what was used for the 2D material model: the concrete and reinforcement contribution are first set up separately and then added. Hence,

$$\sigma_{3D} = \sigma_{c3D} + \sum_{i=1}^3 \rho_{si} \cdot \sigma_{si}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}} \\ \sigma_{\bar{z}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{z}} \\ \tau_{\bar{y}\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{c\bar{x}} \\ \sigma_{c\bar{y}} \\ \sigma_{c\bar{z}} \\ \tau_{c\bar{x}\bar{y}} \\ \tau_{c\bar{x}\bar{z}} \\ \tau_{c\bar{y}\bar{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{sx} \cdot \sigma_{s\bar{x}} \\ \rho_{sy} \cdot \sigma_{s\bar{y}} \\ \rho_{sz} \cdot \sigma_{s\bar{z}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$d\sigma_{3D} = \mathbf{D}_{3D} \cdot d\epsilon_{3D} = \left[ \mathbf{D}_{c3D} + \sum_{i=1}^3 \rho_{si} \cdot \mathbf{D}_{si} \right] \cdot d\epsilon_{3D}$$

$$\mathbf{D}_{3D} = \mathbf{D}_{c3D} + \begin{pmatrix} \rho_{sx} D'_{s\bar{x}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{sy} D'_{s\bar{y}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{sz} D'_{s\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

It is convenient to formulate the concrete contribution in the principal strain directions, while the reinforcement contribution is set up in the local coordinate system. The six-component vectors  $\sigma_{c,prin}$  and  $\epsilon_{c,prin}$  have only three nonzero components:

$$\sigma_{c,prin} = [\sigma_{c1} \ \sigma_{c2} \ \sigma_{c3} \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \text{and}$$

$$\epsilon_{prin} = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

It is important to keep in mind that the normal stresses so far have all been dependent upon the longitudinal and transverse strains,  $\epsilon_L$  and  $\epsilon_T$ . The 3D case requires the following assumptions for deriving the constitutive relation from the 2D behaviour observed in experiments.

According to [15], first, the normal stress  $\sigma_{c3}$  is assumed dependent only on the longitudinal strain  $\epsilon_L = \epsilon_3$ , while the transverse strain  $\epsilon_T = \epsilon_1$ . Second, the normal stress  $\sigma_{c1}$  is assumed dependent on the longitudinal strain  $\epsilon_L = \epsilon_1$ , while the transverse strain,  $\epsilon_T$  is set equal to zero. Finally, in the absence of a complete three-dimensional model, the intermediate longitudinal stress  $\sigma_{c2}$  is assumed dependent on  $\epsilon_L = \epsilon_2$  and  $\epsilon_T = \epsilon_1$ . Note that the extension of the MCFT to 3D response is an approximation that produces reliable results according to [15]. Concluding the definition of the concrete response requires the derivation of the tangent-stiffness relative to the principal strain directions. This is accomplished in a

Table 1

1D-concrete behaviour

Concrete in Compression (Fig. 5)

$$\sigma_c(\epsilon_T, \epsilon_L) = SF(\epsilon_T) \cdot f'_c \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{\epsilon_L}{\epsilon'_c} \right) - \left( \frac{\epsilon_L}{\epsilon'_c} \right)^2 \right], \quad \epsilon_L \in ]\epsilon'_c, 0]$$

$$\sigma_c(\epsilon_T, \epsilon_L) = SF(\epsilon_T) \cdot \left[ a \cdot \epsilon_L^3 + b \cdot \epsilon_L^2 + c \cdot \epsilon_L + d \right], \quad \epsilon_L \in ]\epsilon_{cu}, \epsilon'_c]$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot \epsilon_c'^2 & 2 \cdot \epsilon_c' & 1 & 0 \\ 3 \cdot \epsilon_{cu}^2 & 2 \cdot \epsilon_{cu} & 1 & 0 \\ \epsilon_c'^3 & \epsilon_c'^2 & \epsilon_c' & 1 \\ \epsilon_{cu}^3 & \epsilon_{cu}^2 & \epsilon_{cu} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f'_c \\ \eta \cdot f'_c \end{bmatrix}$$

$$\sigma_c(\epsilon_L, \epsilon_T) = SF(\epsilon_T) \cdot \eta \cdot f'_c, \quad \epsilon_L \in ]-\infty, \epsilon_{cu}]$$

Softening Factor (SF) (Fig. 5(b))

$$SF(\epsilon_T) = \frac{1}{0.8 - 0.34 \cdot \epsilon_T / \epsilon'_c} \leq 1.0, \quad \epsilon_0 \leq \epsilon_T \rightarrow \epsilon_0 = -1.03857 \epsilon'_c$$

$$SF(\epsilon_T) = 1 + \frac{0.34 / \epsilon'_c}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot (0.8 - 0.34 \cdot \epsilon_0 / \epsilon'_c)^2} \cdot \epsilon_T^2, \quad 0 \leq \epsilon_T < \epsilon_0$$

Concrete in Tension (Fig. 6)

$$\sigma_c = \frac{\epsilon_L}{\epsilon_{cr}} \cdot f_{cr}, \quad 0 \leq \epsilon_L \leq \epsilon_{cr}, \quad (\text{uncracked concrete})$$

$$\sigma_c = \left( (1 - \alpha) \cdot e^{-\lambda_t \cdot (\epsilon_L - \epsilon_{cr})} + \alpha \right) \cdot f_{cr}, \quad \epsilon_{cr} < \epsilon_L, \quad (\text{cracked concrete})$$

$$\alpha = C_t \cdot \frac{\rho_s}{d_b}, \quad C_t = 75 \text{ mm}, \quad \lambda_t = \frac{270}{\sqrt{\alpha}}, \quad \lambda_t \leq 1000$$

For 2d response and several reinforcing layers:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \left[ \cos^2 \Delta\theta_i + \sin^2 \left( \frac{4 \cdot \Delta\theta_i^2}{\pi} \right) \right] \cdot \alpha_i$$

manner similar to that used for the 2d response and results in the stiffness matrix given in Box II.

None of the nine components responsible for evaluating the variation of  $\sigma_{ci}$  over  $\gamma_{jk}$  in this matrix have been included in the numerical implementation of the proposed model.

### 3. Numerical implementation

A 3-node frame finite element with six degrees of freedom per node is used in the following numerical simulations. The element axis may be curved, but only small curvatures are allowed by the formulation. The isoparametric element formulation uses three parabolic shape functions (see Fig. 1). Otherwise, the details of the analytical formulation are available in the literature, in particular [12].

The proposed finite element requires attention to the problem of shear locking. Following the recommendation in [12], the issue of shear locking is addressed by resorting to reduced integration. For a three node element, this implies the use of at most two integration points or sections in the element. The rule used to integrate the section resultant forces and section stiffness along the element is Gauss integration method, while the midpoint rule is employed to integrate the stresses and material stiffness in the section.

The numerical implementation of the model was done in FEDEASLab, a Matlab-based toolbox developed at the University of California, Berkeley [16] for the simulation of the nonlinear structural response under static and dynamic loads. To this end several functions have been added to the toolbox libraries for the element response description, the section response including the subdivision into regions and the proposed constitutive material models.

$$d\sigma_{c,prin} = \mathbf{D}_{c,prin} \cdot d\epsilon_{prin} \rightarrow \mathbf{D}_{c,prin} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{c1}}{\partial \epsilon_1} & 0 & 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial \sigma_{c2}}{\partial \epsilon_2} & 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ \frac{\partial \sigma_{c3}}{\partial \epsilon_1} & 0 & \frac{\partial \sigma_{c3}}{\partial \epsilon_3} & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{c2}}{2 \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{c3}}{2 \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{c2} - \sigma_{c3}}{2 \cdot (\epsilon_2 - \epsilon_3)} \end{bmatrix}$$

Box II.

#### 4. Validation examples

In order to validate the theoretical model proposed, a wide array of experiment types performed by a diverse group of researchers has been selected for analysis. The selected simulations address varying load combinations under bending, shear and torsion. All results have been verified using a section analysis and taking only a constant shear strain profile into account.

The first series of tests, performed by Arbesman [18], simulated two specimens (SA3 and SA4) under pure shear and rectangular hollow cross-section. The second series of tests was performed by Kani [18] on two specimens (SK3 and SK4) under pure shear and rectangular solid cross-section. In the third series, performed by Onsongo [15,19], a total of 14 specimens under combined bending and torsion with variable  $T/M_y$  ratios were tested. Here, ten beams (TBOs and TBUs) corresponded to hollow cross-sections, while the other four cross-sections (TBSs) contained no voids. The fourth series of tests, conducted by Rahal and Collins [6], subjected four specimens (RC1-2, RC1-3, RC1-4, RC2-2) to combined shear and torsion, with no bending moment applied. The fifth and final series consisted of two specimens (V-6 and V-7) tested by McMullen [17]. These beams were tested under combined bending, shear, and torsion. The cross-section was rectangular, with prestressed strands present for both specimens.

The regionalization for specimens under pure shear (SA3, SA4, SK3, SK4, and also RC1-2, RC2-2) has been performed by using only 2D regions. An example of subdivision corresponding to specimen SA3 is shown in Fig. 8(b). Only two different types of 2D-regions are used, one with vertical transverse reinforcement (R2) and another one with no reinforcement (R1). All the longitudinal bars have been considered as discrete and implemented as 1D-regions in the section analysis. With this type of regionalization only vertical shear stresses and normal stresses are considered. Further details corresponding to this test are not included in this paper and can be obtained from [18].

The region subdivision for Onsongo beams has been done in a very similar way to that given in the presentation by Vecchio and Selby in [15]. Fig. 9(a), (b) and Table 2 show the types of regions and the reinforcement ratios given to each of them. 2D-regions have been used in the whole section

except for the corners of the section where 3D regions are mainly employed. The longitudinal reinforcement at the top and bottom flanges is uniformly smeared. The transverse reinforcement is concentrated in the outer regions. Thus, the centroids of the smeared reinforcement are coincident with the real locations of the reinforcement in the section. More details on this test can be seen in [15].

Another significant type of regionalization is presented in the last part of this section, corresponding to specimens tested by McMullen [17] under a load combination including bending, torsion and shear loads.

Table 3 reveals the results of a comparison, by series and for each load combination, between the actual experimental results and the results calculated by the proposed model. Results are grouped by series in order to facilitate comparison by load combination. The table additionally contains a global verification encompassing all twenty-four specimens. Overall, the average ratio between experimental and calculated results is 1.03, with a reasonable coefficient of variation (CV) of 6.9%.

A total of six specimens (SA3, SA4, SK3, SK4, RC1-2, RC2-2) are tested under pure shear. The accuracy rate is high for all specimens with the exception of SK3. It is worth noting that SA3 and RC2-2 suffered spalling prior to failure, thereby

Table 2  
Data definition for all regions

Region	Type	Reinforcement ratio/angle		
		$\rho_x$	$\rho_y$	$\rho_z/\alpha_p$
R1	3D	0.09247	0.04473	0.04473
R2	2D	0.09247	0.04473	0°
R3	2D	0.09247	0.04473	0°
R4	2D	0.09247	0.04473	90°
R5	3D	0.09247	0.01112	0.01112
R6	2D	0.09247	0.01112	0°
R7	2D	0.01104	0.04473	90°
R8	2D	0.01104	0.01112	90°
R9	2D	0.09490	0.04473	90°
R10	3D	0.09490	0.01076	0.01112
R11	2D	0.09490	0.01076	0°
R12	3D	0.09490	0.04303	0.04473
R13	2D	0.09490	0.04303	0°
R14	2D	0.09490	0.04303	0°
R15	3D	0	0	0

Onsongo specimens.

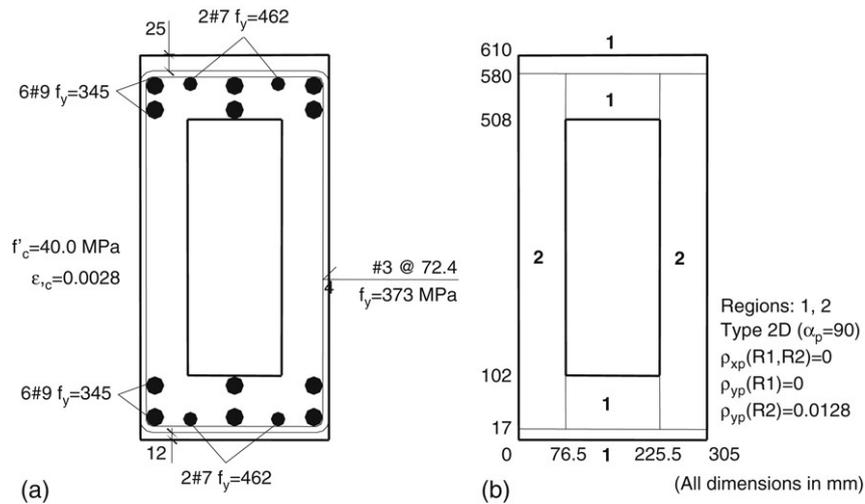


Fig. 8. (a) Details of specimen SA3 by Arbesman [18]. (b) Subdivision of SA3 specimen in regions.

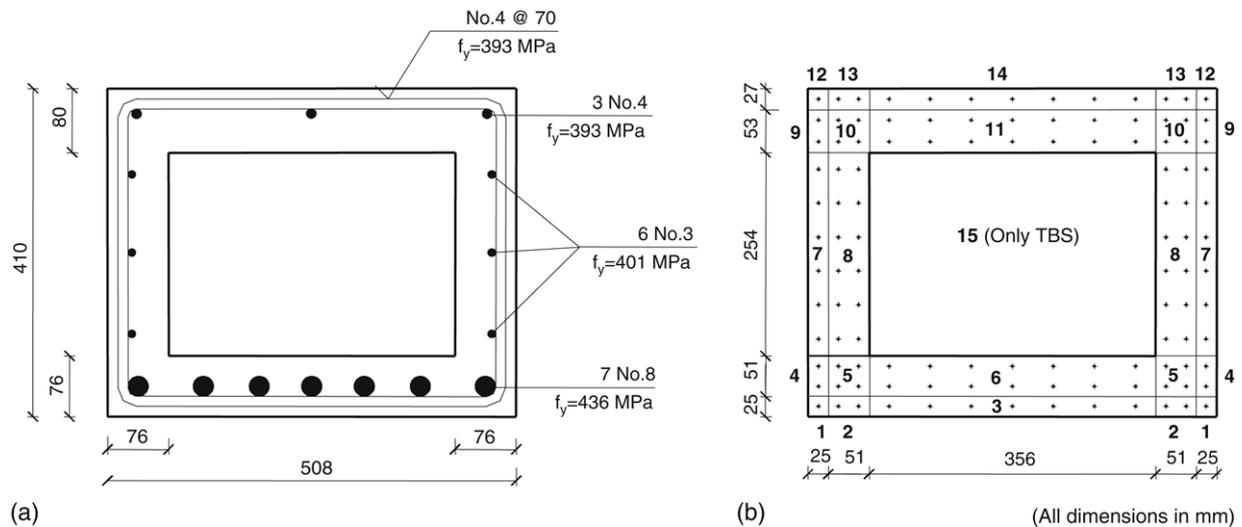


Fig. 9. (a) Details of Onsongo beams [18]. (b) Subdivision of Onsongo beams in regions.

modifying the ultimate carrying capacity. The theoretical model does not take into account the spalling effect. This problem is solved for this particular case, in accordance with the recommendation of Vecchio and Collins [18], by removing from consideration the concrete zone outside of the stirrups.

Of the series of 14 beams tested by Onsongo, the average ratio (1.027) is highly accurate, and the coefficient of variation is only 8.1%. The numerical analysis employed by the proposed model is similar to that established by Vecchio and Selby [15] in the three-dimensional nonlinear program SPARCS. The notion that sufficient results may be obtained using nothing more than a simplified cross-section analysis, thereby achieving a significant increase in computational efficiency, was suggested by Vecchio and Selby and is confirmed in this paper as well as it was previously confirmed by Rahal [6].

The next series, in which Rahal and Collins tested a combination of shear and torsion, also generates good results. However, while the results are positive, it is important to note that some of the specimens were excluded from the numerical

analysis because they had failed under combined torsion and shear due to spalling. The spalling effect under combined shear and torsion is not addressed by the proposed model.

Finally, McMullen's series produces extremely accurate results for the two prestressed concrete specimens tested under bending, shear, and torsion. As this example is a prestressed concrete beam, adequate consideration of the prestressing effect requires setting the prestressed strains for the six strands.

Reconsideration of the TBO and TBU specimens in Onsongo's series facilitates observation not only of the ultimate load capacity predicted but also of the failure modes for different cross-sections and the full response of members at any, rather than merely the ultimate. Fig. 10(a) show the bending vs torsion moment interaction diagrams both for TBO and TBU series. In these graphs it can be observed a good prediction of the experimental results. Table 4 shows the comparison between the mode failures reported in the experimental test and those obtained by the proposed model. The failure mode for most of the specimens has been predicted with good accuracy.

Table 3  
Comparison between calculated and experimental results

Specimen	$T_{exp}$	$V_{exp}$	$M_{exp}$	$T_{calc}$	$V_{calc}$	$M_{calc}$	Ratio exp/calc	Ratio media	CV (%)		
Arbesman [18]											
SA3	–	730	–	–	750	–	0.973	0.964	1.3		
SA4	–	534	–	–	559	–	0.955				
Kani [18]											
SK3	–	725	–	–	639	–	1.134	1.088	5.9		
SK4	–	601	–	–	576	–	1.043				
Onsongo [15,19]											
TBO1	0	–	401	0	–	386	1.039	1.027	8.1		
TBO2	78	–	334	88	–	378	0.884				
TBO3	143	–	232	142	–	230	1.009				
TBO4	149	–	117	145	–	114	1.026				
TBO5	143	–	35	130	–	32	1.094				
TBU1	0	–	551	0	–	540	1.020				
TBU2	104	–	439	120	–	506	0.868				
TBU3	207	–	327	203	–	320	1.022				
TBU4	195	–	147	198	–	149	0.987				
TBU5	175	–	41	170	–	40	1.025				
TBS1	209	–	164	177	–	139	1.180				
TBS2	216	–	169	193	–	151	1.119				
TBS3	245	–	186	224	–	170	1.094				
TBS4	125	–	108	123	–	106	1.019				
Rahal and Collins [5]											
RC1-2	0	805	–	0	817.29	–	0.985			1.035	4.4
RC1-3	140	107	–	128.54	98.13	–	1.090				
RC1-4	11	764	–	7.54	754.30	–	1.013				
RC2-2	0	796	–	0	757.77	–	1.050				
McMullen [17]											
V-6	8.6	37.5	71.5	8.13	35.75	72.42	1.058	1.038	2.7		
V-7	9.9	43.4	81.5	9.73	42.72	86.63	1.018				
Global								1.03	6.9		

Units in kN and m.

Table 4  
Failure mode comparison (TBO and TBU specimens)

Beam	Exper.	Calculated	Beam	Exper.	Calculated
TBO1	CC-T	(1) LY-T; (2) CC-T;	TBU1	CC-T; LY-B	(1) CC-T; (2) LY-T; (3) LY-B;
TBO2	CC-T	(1) LY-T; (2) CC-T;	TBU2	CC-T; LY-B	(1) LY-B; (2) LY-T; (3) CC-T;
TBO3	CC	(1) CC	TBU3	CC; LY-B; TY-B	(1) TY-RLB; (2) CC;
TBO4	CC	(1) TY-RL; (2) CC;	TBU4	CC; TY-RLTB	(1) TY-RLTB; (2) CC;
TBO5	CC; LY-T	(1) TY-L; (2) CC; (3) LY-T	TBU5	CC; LY-T; TY-T	(1) TY-RL; (2) LY-T; (3) TY-T; (4) CC;

CC: Concrete Crushing.

LY: Yielding of Longitudinal Reinforcement.

TY: Yielding of Transverse Reinforcement.

R, L, T, B: Right, Left, Top and Bottom faces.

(1), (2), (3), (4) is the order of appearance of each failure mode registered in the numerical validation.

Table 4 also shows a number with the order of appearance of the failure mode in each numerical validation. Most of them show different failure modes since yielding of the longitudinal and transverse reinforcement have been taken into account as failure modes and thus, concrete crushing can appear before or after yielding occurs. It is worth noting that for specimens TBU2, TBU3, TBU4 and TBU5, yielding appears at a load level which is minor than the maximum load capacity which is reached

when concrete crushes. Furthermore, graphs in Fig. 10(b) and (c) represent both the torsion moment vs. bending curvature for and the torsion moment vs. angle of twist per unit of length for TBO3 and TBU3 specimens at any load. The predictions reached in almost all specimens and at almost all load levels are quite accurate.

In order to better describe how the model behaves, it is also shown the internal force distribution for TBO3 specimen

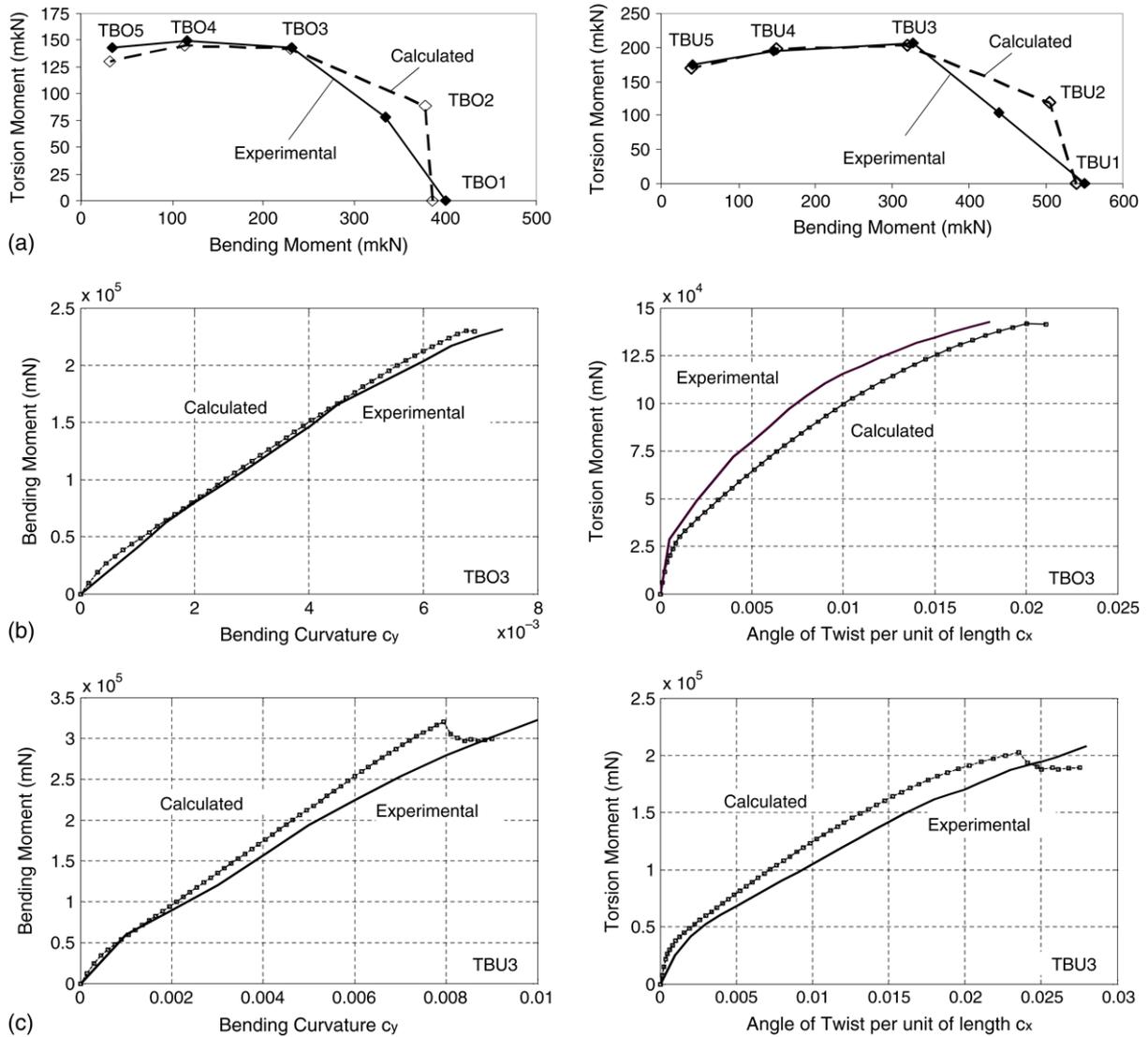


Fig. 10. (a) TBO and TBU diagrams for bending and torsion at ultimate load. Bending moment vs. bending curvature and torsion vs. twist response for TBO3 (b) and TBU3 (c) specimens.

at ultimate load (Fig. 11). In this figure, six different graphs have been presented. In Fig. 11(a) the internal shear force distribution is presented while in Fig. 11(b) the total internal force distribution is shown. Each total internal force is obtained as the vectorial summation of each stress component times the weight of each integration point. The shear internal forces are obtained in a similar way without taking into account the normal stress and each shear force has been represented separately. It is interesting to see how the orientation of these forces changes considerably in the web panels thanks to the varying ratios between transverse and longitudinal strains. Moreover, the orientations of these forces are opposite due to the closed shear stress flow produced by the torsion load. Fig. 11(c)–(f) show the average stresses in all faces (Top TF, Bottom BF, Right RF and Left LF). The stress diagrams corresponding to the normal and shear stresses are presented for each face. Regarding the shear stress distribution, it can be perfectly seen how the top and bottom faces are mainly resisting horizontal shear stresses while the right and left faces

are resisting vertical shear stresses. However, due to the normal stresses created by the bending moment, the vertical shear stress distribution is not constant. The shear stresses in the compression zone are higher than the in the tension one. This effect does not appear at the top and bottom faces because the normal strains remain basically constant in the whole face.

*Example of a prestressed concrete beam with rectangular cross-section under combined bending, shear and torsion*

In the following an example of how to apply the model by using a structure analysis is shown. The example is based on the before mentioned specimen (beam V-6) tested by McMullen [17]. All section details are shown in Figs. 12(a) and 13(a), and the specimen is tested according to the load combination shown in Fig. 12(a) under a fixed ratio of  $T/V_b$  equal to 1.5.

First, the specimen is subdivided into nine frame elements (Fig. 12(b)). According to the frame element definition, a total of 19 nodes are required to describe the response of the

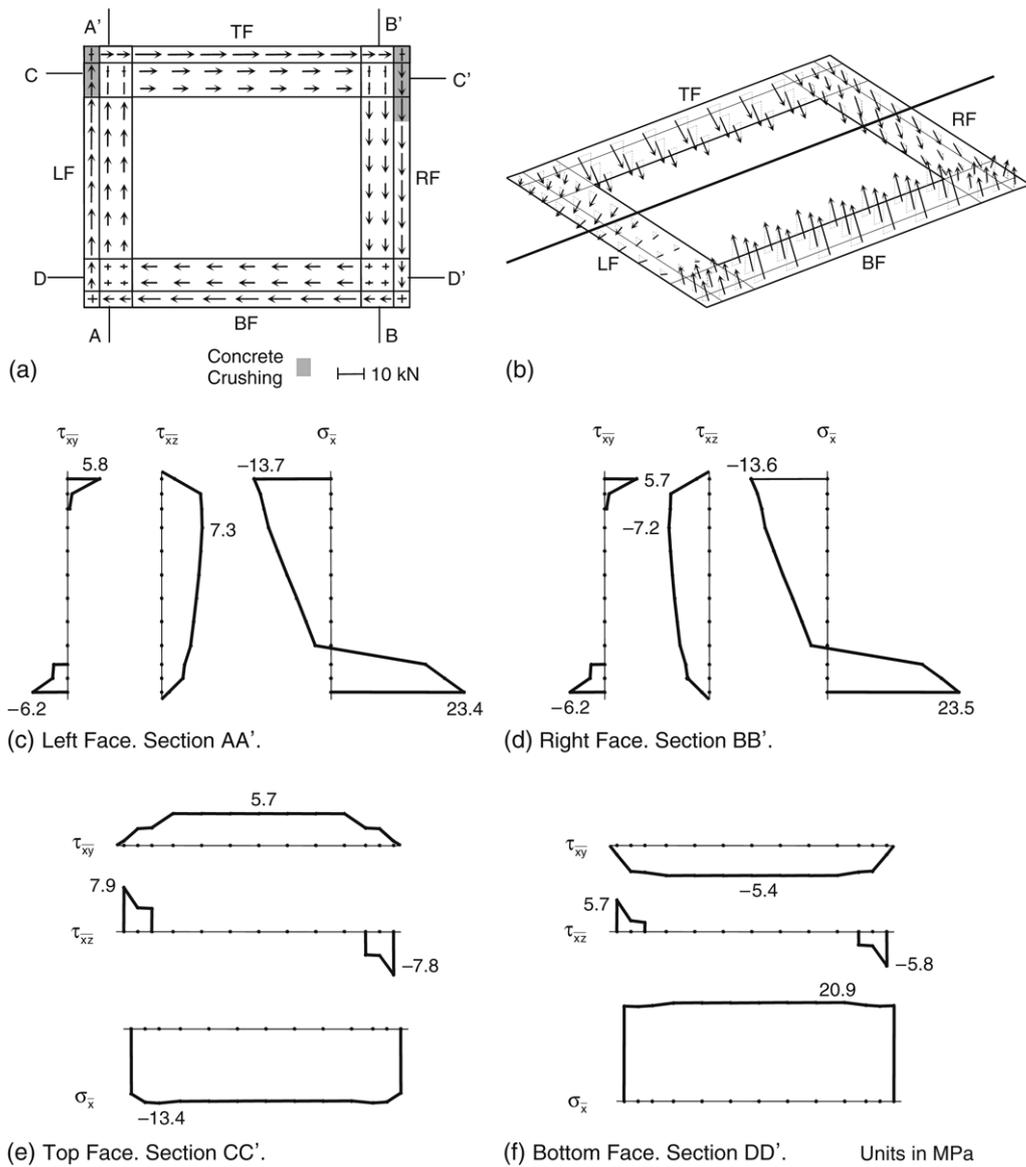


Fig. 11. TBO3 specimen at ultimate load. (a) Internal shear force distribution. (b) Total internal force distribution. (c), (d), (e), (f) Average stress distributions.

model. Fig. 13(b) shows the subdivision of the cross-section into different types of region and the distribution of integration points in each region.

Table 5 gives the geometrical and reinforcing data for these according to type of region and reinforcement ratio. In this example, the prestressing strands are included as 1D-regions, while 2D-regions are located in the web of the section as well as at the top-centre and bottom-centre of the cover, where only horizontal transverse reinforcement is present. 3D-regions are used for the rest of the section.

The numerical testing is conducted with a load control displacement method that imposes the criterion of a minimum displacement increment norm during both incrementation and iteration. Fig. 14(a) shows the relation of the applied load  $P$  vs. the vertical displacement at node 7. Two different analyses were performed, one with a constant profile and the other with a parabolic profile for the shear strain distribution according to Eq. (7).

The complexity of the prestressed concrete beam under a complex load combination that includes bending, shear and torsion loading — is an excellent showcase of the capabilities of the proposed model. In the case of specimen V-6, the measured ultimate load capacity was 113.16 kN, while the analytical result was 110.84 kN with the constant shear strain profile, and 113.17 kN with the parabolic shear strain profile. Thus, the ratio of measured to analytical value amounts to 1.02 and 1.00, respectively, reflecting a very satisfactory agreement. Regarding the cracking load, it can be seen in Fig. 14(a) how the model predicts quite accurately the cracking load obtained in the experimental test. It is worth noting that the cracking concrete stress employed for the analysis is  $0.33 \cdot \sqrt{f'_c}$  as suggested in other references like [13] or [18].

For specimen V-6 failure occurs very near the point of load application. Fig. 14(b) shows the response of each integration point at ultimate load. From this it is clear that the material state behavior of each integration point corresponds to the second

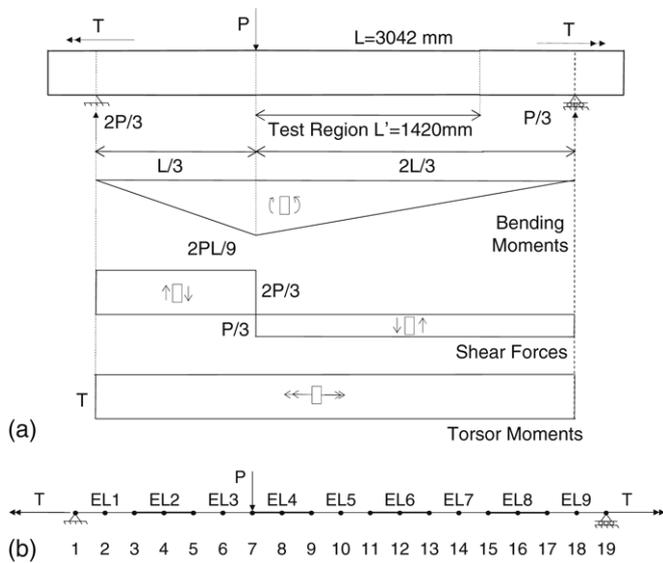


Fig. 12. (a) Schematic diagrams of forces. (b) Structure subdivision in frame finite elements.

Table 5  
Data definition for all regions McMullen specimen V-6

Region	Type	Reinforcement ratio/angle		
		$\rho_x$	$\rho_y$	$\rho_z/\alpha_p$
R1	3D	0	0.00523	0.00586
R2	2D	0	0.00523	–
R3	3D	0	0.00523	0.00586
R4	3D	0	0.00523	0.00360
R5	2D	0	0.00586	–
R6	2D	0	0.00360	–

monitoring section of element number 3 which is in fact located close to the failure location in the beam.

To investigate the failure of the specimen further a section analysis was conducted. As stated previously, the critical position of the beam is located at node 7. In this analysis the measured ultimate torsion moment for specimen V-6 which was equal to 8.6 kN m compared with calculated torsion values of

8.13 kN m for the constant shear strain profile and 8.44 kN m for the parabolic shear strain profile, respectively. The resulting ratios of experimental and analytical values are 1.06 and 1.02 for both profiles, respectively, thus confirming the accuracy of the section analysis. In this particular case it suffices to use a simplified section analysis, since the beam is statically determined and the failure section is known from the observed experimental response. Moreover, for this particular case it seems that the adoption of a constant or a parabolic shear strain profile does not give significant variations for the predicted results.

In this example very similar results have been obtained by using a section or a structure analysis. Then, it would be better to use the section analysis in order to increase the computational efficiency of the model by reducing computational time for a given number of monitoring points in each cross-section.

From the results obtained in the validation examples it is possible to conclude that the proposed model is predicting quite accurately not only the ultimate carrying capacity, but also the full response of the beam at any load. At the global level, the model is representing with significant accuracy notably different types of load combinations, including simultaneously normal and shear stresses.

### 5. Conclusions

A model for the analysis of reinforced and prestressed concrete sections under combined loading has been presented. The model may be used for the analysis of a structure made up of frame finite elements, but also for the analysis of a single cross-section. The model has been formulated in a general way, allowing for any load combination as well as for arbitrary cross-section geometry. However, certain limitations in the model should be taken into account to apply the model efficiently.

The model is based on the Timoshenko Beam Theory and uses a reinforced concrete constitutive model based on the MCFT. This simplifies the description of the response of three-dimensional structural elements with relatively simple 1D-frame finite elements, thus reducing significantly the computational requirements, without appreciable penalty in the

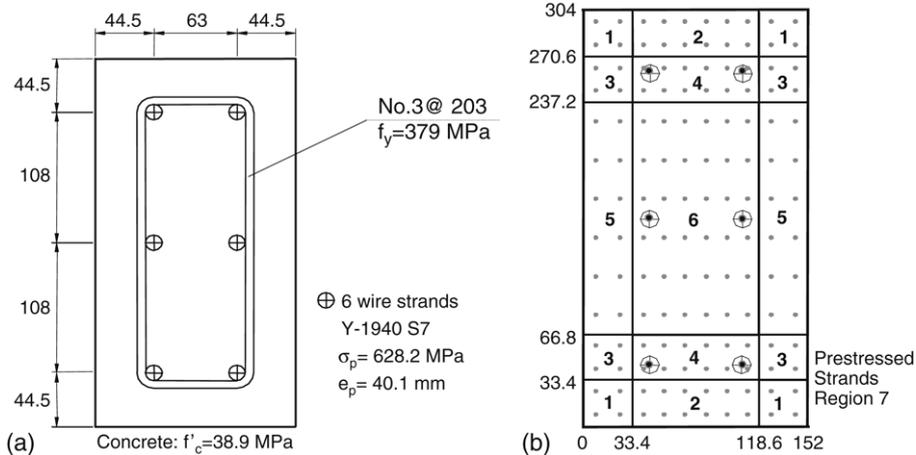


Fig. 13. (a) Details of specimen tested. (b) Subdivision of the cross-section into regions (1D, 2D, & 3D).

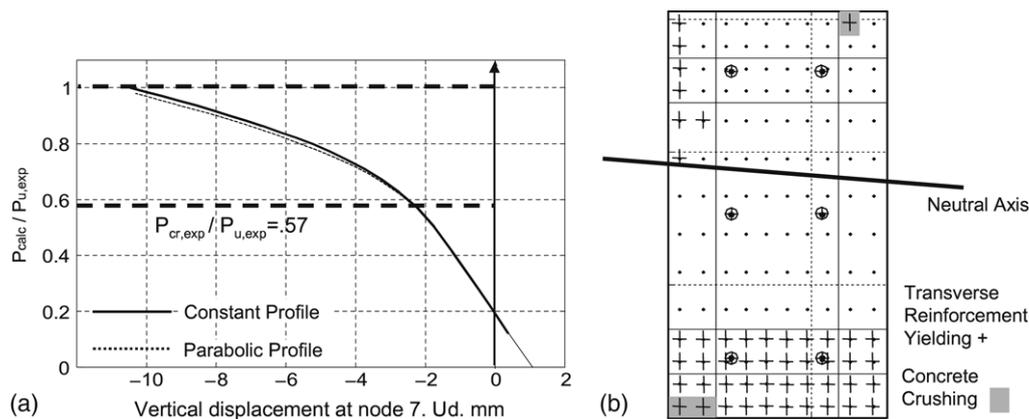


Fig. 14. (a) Applied load  $P$  vs. deflection node 7, (b) Cross-section behavior at ultimate load.

accuracy of the analytical response. The Timoshenko beam theory cannot, however, guarantee with the assumption of a constant shear strain profile neither energy balance in the whole section nor the longitudinal equilibrium at every point of the cross section. For linear elastic material response the energy balance problem is traditionally solved with shear correction factors. Even if a parabolic strain profile is assumed, the longitudinal equilibrium between fibres will only be exact for linear elastic materials. Nonetheless, the results do not seem very sensitive to the assumption about the shear strain profile and display sufficient accuracy under the load conditions of pure shear and bending with torsion, for the cross-section geometry investigated in this paper. The following reasons are offered for this conclusion: in the absence of shear forces the violation of longitudinal equilibrium in the section does not appear to be of great significance; on the other hand, the response under pure shear loading depends mainly upon the yielding of the transverse reinforcement. The model is, however, likely to produce poor results for cases involving interaction of axial force and bending moment with shear, mainly for the normal and shear stress distributions in the section. For this type of problem improved shear strain profiles should be developed that approximate the satisfaction of the longitudinal force equilibrium in the section, at least in an average sense.

The model is used for the simulation of the response of twenty-four specimens that are widely used in the literature for the purpose. These simulations show the ability of the model to represent accurately the ultimate capacity, the failure mode and the response of the element at different stages of loading for individual sections and for the entire specimen.

The proposed model is also used for the simulation of the response of a prestressed concrete beam under combined bending, shear, and torsion. This example presents clearly issues related to the model discretization, to the description of the cross-section by subdivision into different regions, and to the nonlinear algorithm for the analysis of the structure.

Finally, it is important to note that, in spite the simplifying assumptions like considering a fixed shear strain pattern or the fact of not considering confinement analysis and spalling effects, the proposed model is capable of reproducing with very

satisfactory accuracy the experimental results of a wide range of specimens under combined bending and torsion or pure shear. Thus, it should be a valuable tool in the evaluation of the nonlinear response of structures for design purposes.

It is believed that further research should be used to derive a procedure for establishing shear strain profiles for general loading conditions. In this regard, it is recommended to retain the simplicity of the simple frame formulation of the proposed model, but enhance the shear strain profile so as to approximately satisfy the longitudinal stress equilibrium. Some important efforts towards this end have been undertaken already by Collins et al. [3,4], or Bairan [9,10] for the section response, but have yet to be extensively applied to a general frame element formulation.

### Acknowledgments

This work has been possible thanks in part to the financial support of Universidad Politécnic de Valencia, Spain, through the *Programa de Incentivo a la Investigación* (PPI-00-05). The first author acknowledges Prof. Filip C. Filippou for his supervision in this research work during a seven-month stay in the Department of Civil and Environmental Engineering at University of California, Berkeley.

### References

- [1] Eurocode 2. Design of concrete structures. ENV EC2 Part 1.1. 1992.
- [2] ACI committee 318 building code requirements for structural concrete and commentary (ACI 318-05/318R-05). Farmington Hill (MI): American Concrete Institute; 2005.
- [3] Vecchio FJ, Collins MP. Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using modified compression field theory. *ACI Structural Journal* 1988;85(3):258–68.
- [4] Bentz EC. Section analysis of reinforced concrete members. Ph.D. thesis. University of Toronto; 2000.
- [5] Ranzo G. Experimental and numerical studies on the seismic performance of beam–column RC structural members subjected to high shear. Ph.D. thesis. University of Roma “La Sapienza”; 2000.
- [6] Rahal KN, Collins MP. Combined torsion and bending in reinforced and prestressed concrete beams. *ACI Structural Journal* 2003;100(2):157–65.
- [7] Saritas A, Filippou FC. A beam finite element for shear critical RC beams, 19. *ACI Special Publication SP-237*; 2006. p. 295–310.

- [8] Petrangeli M, Pinto PE, Ciampi V. Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures I: Theory. *Journal of Engineering Mechanics* 1999; 125(9):994–1001.
- [9] Bairan JM, Mari AR. Coupled model for the non-linear analysis of anisotropic sections subjected to general 3d loading. Part 1: Theoretical formulation. *Computers & Structures* 2006;84:2254–63.
- [10] Bairan JM, Mari AR. Multiaxial-coupled analysis of RC cross-sections subjected to combined forces. *Engineering Structures* 2007;29(8): 1722–38.
- [11] Rao SS. *The finite element method in engineering*. Boston: Butterworth Heinemann; 1999.
- [12] Oñate E. *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis Elástico y Lineal*, Barcelona: CIMNE; 1992.
- [13] Stevens NJ, Uzumeri SM, Collins MP, Will GT. Constitutive model for reinforced concrete finite element analysis. *ACI Structural Journal* 1991; 88(2):135–46.
- [14] Vecchio FJ, Collins MP. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Structural Journal* 1986;83(2):219–31.
- [15] Vecchio FJ, Selby RG. Toward compression-field analysis of reinforced concrete solids. *Journal of Structural Engineering* 1991;127(6): 1740–58.
- [16] Filippou FC, Constantinides M. FEDEASLab. Getting started guide and simulations examples. Technical report NEEsgrid-2004-22. 2004.
- [17] McMullen AE, Woodhead HR. Experimental study of prestressed concrete under combined torsion, bending and shear. *PCI Journal* 1973; 18(5):85–100.
- [18] Vecchio FJ, Collins MP. The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses. Civil Engineering report. Toronto (Canada): University of Toronto; 1982.
- [19] Rahal KN, Collins MP. Analysis of sections subjected to combined shear and torsion. *ACI Structural Journal* 1995;92(4):1–13.

**ANEJO**

**2**

**ELEMENTO FINITO  
EULER-BERNOULLI**

## ANEJO 2. ELEMENTO FINITO EULER-BERNOUILLI

### 2.1 TEORÍA DE VIGAS DE EULER-BERNOUILLI (EBT)

La teoría de vigas de Euler-Bernouilli es la teoría más simple para el análisis de elementos 1D. Se basa en la hipótesis cinemática de que las secciones planas permanecen planas tras la deformación, y además, perpendiculares a la directriz del elemento. El campo de desplazamientos responde a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) - z \cdot \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \\ w(x, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (\text{A2-1})$$

Las deformaciones que aparecen en la formulación son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \varepsilon_0 + z \cdot c_y \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2-2})$$

$$\text{siendo: } \varepsilon_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; c_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

las deformaciones seccionales correspondientes a esta hipótesis cinemática.

La deformación transversal  $\gamma_{xz}$  se anula. Por lo tanto, no se incluye este término de deformación en la formulación. Esto se consigue habitualmente utilizando ecuaciones constitutivas unidimensionales.

La hipótesis cinemática de Euler-Bernouilli se puede expresar de forma matricial como sigue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= [1 \quad z] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ c_y \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon_x; \boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{S}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s; \text{ siendo } \boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ c_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2-3})$$

Por otra parte, la aplicación del principio de los trabajos virtuales permite obtener los esfuerzos seccionales.

$$\iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \iint_A \begin{bmatrix} \sigma_x \\ z \cdot \sigma_x \end{bmatrix} \cdot dA = \begin{bmatrix} N \\ M_y \end{bmatrix} \quad (\text{A2-4})$$

Y tras derivar los esfuerzos con respecto a las deformaciones seccionales se obtiene la matriz de rigidez de la sección:

$$\mathbf{D}_s = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \left[ \iint_A \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA \right] = \iint_A \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \cdot dA = \iint_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T \cdot dA$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} = D_{11}$$

$$\mathbf{D}_s = \iint_A \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} \cdot D_{11} \cdot [1 \quad z] \cdot dA = \iint_A \begin{bmatrix} D_{11} & z \cdot D_{11} \\ z \cdot D_{11} & z^2 D_{11} \end{bmatrix} \cdot dA \quad (\text{A2-5})$$

Seguidamente se presenta la implementación del cálculo seccional en un elemento 1D capaz de integrar el comportamiento descrito (Fig. A2.1).

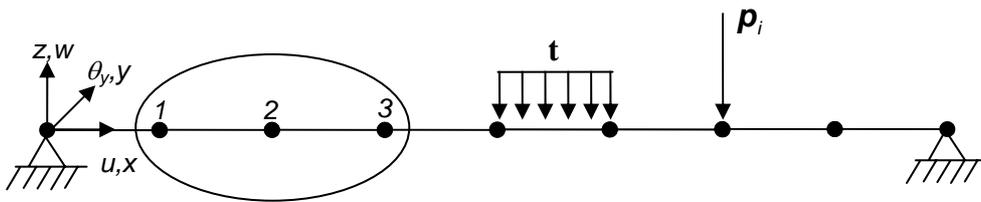


Fig. A2.1 Discretización de elemento viga en elementos finitos 1D (EBT)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta_y \end{bmatrix} \text{ es el vector de desplazamientos en cualquier punto del elemento.}$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales a lo largo de todo el elemento se debe cumplir que el trabajo generado por las fuerzas internas debe ser igual a trabajo producido por las fuerzas externas:

$$W_{int} = W_{ext} \quad (A2-6)$$

$$W_{int} = \iiint_V \delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x \cdot dV \quad (A2-7)$$

Las variaciones de las deformaciones se pueden calcular como:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \varepsilon_0 + z \cdot \delta c_y = \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + z \cdot \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación del  $W_{int}$ :

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left( \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \cdot \sigma_x + z \cdot \delta \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \cdot \sigma_x \right) \cdot dV = \\ & = \int_0^L \left[ \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \cdot \iint_A \sigma_x \cdot dA + \delta \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \cdot \iint_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \right] \cdot dl = \\ & = \int_0^L \left[ \delta \varepsilon_0 \cdot N + \delta c_y \cdot M_y \right] \cdot dl = \int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl \end{aligned} \quad (A2-8)$$

Por otra parte, el trabajo ejercido por las fuerzas exteriores es igual a:

$$W_{ext} = \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} \cdot dl + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{p}_i \quad (A2-9)$$

siendo:

$\mathbf{t} = [t_x \quad t_z \quad m_y]^T$  el vector de fuerzas exteriores repartidas en el elemento

$\mathbf{p}_i = [P_{x_i} \quad P_{z_i} \quad M_{y_i}]^T$  el vector fuerzas exteriores puntuales en el elemento

Por lo tanto, el principio de los trabajos virtuales se puede formular a través de una integral a lo largo de la directriz del elemento como se indica a continuación:

$$\int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl = \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} \cdot ds + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{p}_i \quad (A2-10)$$

## 2.2 DISCRETIZACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS

Se considera un elemento finito 1D de 3 nodos con 7 grados de libertad (Fig. A2.2). Se tienen en cuenta 3 gdl en los nodos extremos y un solo gdl para el nodo central, tal y como se indica a continuación:

$$\mathbf{r}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_{y1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_2^{(e)} = u_2 \quad \mathbf{r}_3^{(e)} = \begin{bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \theta_{y3} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-11})$$

Los desplazamientos de un punto cualquiera de la directriz del elemento se obtienen a partir de la siguiente estrategia de interpolación.

La interpolación del desplazamiento longitudinal  $u(\xi)$  se realiza empleando funciones de interpolación parabólicas.

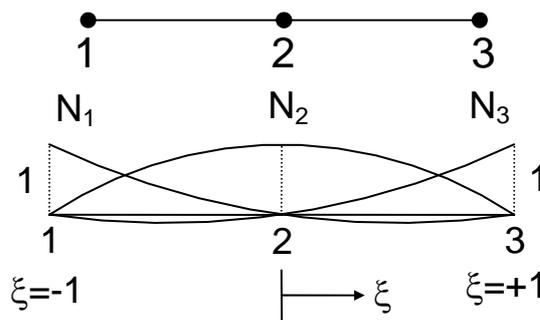


Fig. A2.2 Elemento finito EBT de 3 nodos. Funciones de interpolación parabólicas

$$u(\xi) = N_1(\xi) \cdot u_1 + N_2(\xi) \cdot u_2 + N_3(\xi) \cdot u_3 \quad (\text{A2-12})$$

siendo las funciones de forma:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi \cdot (\xi - 1) \quad N_2(\xi) = -(\xi + 1) \cdot (\xi - 1) \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\xi + 1) \quad (\text{A2-13})$$

y  $\xi = \frac{2}{L} \cdot \left( x - \frac{L}{2} \right) \in [-1 \ 1]$  es la coordenada intrínseca empleada para

representar la posición de cualquier punto de integración en el elemento.

La interpolación del desplazamiento vertical  $w(\xi)$  se realiza en función de los cuatro grados de libertad restantes.

$$w = [N_4(\xi) \quad N_5(\xi) \quad N_6(\xi) \quad N_7(\xi)] \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_3 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{y3} \end{bmatrix}$$

La interpolación del giro se obtiene derivando con respecto de la directriz la función interpolada  $w$ .

A continuación, se obtienen las funciones de forma tras aplicar las pertinentes condiciones de contorno.

Función de forma  $N_4(\xi)$ :

$$N_4(\xi) = a_4 \cdot \xi^3 + b_4 \cdot \xi^2 + c_4 \cdot \xi + d_4$$

$$\frac{dN_4(\xi)}{d\xi} = 3 \cdot a_4 \cdot \xi^2 + 2 \cdot b_4 \cdot \xi + c_4$$

Condiciones de contorno:

$$N_4(-1) = 1; \quad N_4(1) = 0; \quad \frac{dN_4}{d\xi}(-1) \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0; \quad \frac{dN_4}{d\xi}(1) \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0$$

Sustituyendo las condiciones de contorno y agrupando matricialmente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ -3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (\text{A2-14})$$

$$N_4(\xi) = \frac{1}{4} \cdot (\xi^3 - 3 \cdot \xi + 2)$$

Función de forma  $N_5(\xi)$ :

$$N_5(\xi) = a_5 \cdot \xi^3 + b_5 \cdot \xi^2 + c_5 \cdot \xi + d_5$$

$$\frac{dN_5(\xi)}{d\xi} = 3 \cdot a_5 \cdot \xi^2 + 2 \cdot b_5 \cdot \xi + c_5$$

Condiciones de contorno:

$$N_5(-1) = 0; \quad N_5(1) = 1; \quad \frac{dN_5}{d\xi}(-1) \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0; \quad \frac{dN_5}{d\xi}(1) \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0$$

Sustituyendo las condiciones de contorno y agrupando matricialmente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \\ c_5 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \\ c_5 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (\text{A2-15})$$

$$N_5(\xi) = \frac{1}{4} \cdot (-\xi^3 + 3 \cdot \xi + 2)$$

Función de forma  $N_6(\xi)$ :

$$N_6(\xi) = a_6 \cdot \xi^3 + b_6 \cdot \xi^2 + c_6 \cdot \xi + d_6$$

$$\frac{dN_6(\xi)}{d\xi} = 3 \cdot a_6 \cdot \xi^2 + 2 \cdot b_6 \cdot \xi + c_6$$

Condiciones de contorno:

$$N_6(-1) = 0; \quad N_6(1) = 0; \quad \frac{dN_6}{d\xi}(-1) \cdot \frac{d\xi}{dx} = 1; \quad \frac{dN_6}{d\xi}(1) \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0$$

Sustituyendo las condiciones de contorno y agrupando matricialmente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_6 \\ b_6 \\ c_6 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_6 \\ b_6 \\ c_6 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L/8 \\ -L/8 \\ -L/8 \\ L/8 \end{bmatrix} \quad (\text{A2-16})$$

$$N_6(\xi) = \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1)$$

Función de forma  $N_7(\xi)$ :

$$N_7(\xi) = a_7 \cdot \xi^3 + b_7 \cdot \xi^2 + c_7 \cdot \xi + d_7$$

$$\frac{dN_7(\xi)}{d\xi} = 3 \cdot a_7 \cdot \xi^2 + 2 \cdot b_7 \cdot \xi + c_7$$

Condiciones de contorno:

$$N_7(-1) = 0; \quad N_7(1) = 0; \quad \frac{dN_7}{d\xi}(-1) \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0; \quad \frac{dN_7}{d\xi}(1) \cdot \frac{d\xi}{dx} = 1$$

Sustituyendo las condiciones de contorno y agrupando matricialmente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_7 \\ b_7 \\ c_7 \\ d_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_7 \\ b_7 \\ c_7 \\ d_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L/8 \\ L/8 \\ -L/8 \\ -L/8 \end{bmatrix} \quad (\text{A2-17})$$

$$N_7(\xi) = \frac{L}{8} \cdot (\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1)$$

A continuación, se obtiene la matriz de deformación del elemento  $\mathbf{B}(\xi)$  que relaciona el vector de desplazamientos nodales del elemento  $\mathbf{r}^{(e)}$  con el vector de deformaciones seccionales  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} [N_1(\xi) \cdot u_1 + N_2(\xi) \cdot u_2 + N_3(\xi) \cdot u_3] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \\ &= \left[ \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \cdot u_1 + \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \cdot u_2 + \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} \cdot u_3 \right] \cdot \frac{2}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [N_4(\xi) \cdot w_1 + N_5(\xi) \cdot w_3 + N_6(\xi) \cdot \theta_{y1} + N_7(\xi) \cdot \theta_{y3}] \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \\ &= \left[ \frac{\partial^2 N_4(\xi)}{\partial \xi^2} \cdot w_1 + \frac{\partial^2 N_5(\xi)}{\partial \xi^2} \cdot w_3 + \frac{\partial^2 N_6(\xi)}{\partial \xi^2} \cdot \theta_{y1} + \frac{\partial^2 N_7(\xi)}{\partial \xi^2} \cdot \theta_{y3} \right] \cdot \left( \frac{-4}{L^2} \right) \end{aligned}$$

Las expresiones correspondientes a las derivadas de las funciones de forma son:

$$\frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} = \xi - \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} = -2 \cdot \xi; \quad \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} = \xi + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial N_4(\xi)}{\partial \xi} = \frac{3}{4} \cdot (\xi^2 - 1); \quad \frac{\partial^2 N_4(\xi)}{\partial \xi^2} = \frac{3 \cdot \xi}{2}$$

$$\frac{\partial N_5(\xi)}{\partial \xi} = \frac{3}{4} \cdot (1 - \xi^2); \quad \frac{\partial^2 N_5(\xi)}{\partial \xi^2} = -\frac{3 \cdot \xi}{2}$$

$$\frac{\partial N_6(\xi)}{\partial \xi} = \frac{L}{8} \cdot (3 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi - 1); \quad \frac{\partial^2 N_6(\xi)}{\partial \xi^2} = \frac{L}{4} \cdot (3 \cdot \xi - 1)$$

$$\frac{\partial N_7(\xi)}{\partial \xi} = \frac{L}{8} \cdot (3 \cdot \xi^2 + 2 \cdot \xi - 1); \quad \frac{\partial^2 N_7(\xi)}{\partial \xi^2} = \frac{L}{4} \cdot (3 \cdot \xi + 1)$$

Finalmente, la matriz **B** adopta la siguiente expresión:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \cdot \left( \xi - \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & -\frac{4 \cdot \xi}{L} & \frac{2}{L} \cdot \left( \xi + \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6 \cdot \xi}{L^2} & \frac{1 - 3 \cdot \xi}{L} & 0 & 0 & \frac{6 \cdot \xi}{L^2} & -\frac{1 + 3 \cdot \xi}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-18})$$

De la ecuación (A2-18) se deduce que las dos componentes de las deformaciones seccionales tienen una variación lineal a lo largo del elemento. Esto va a permitir que en los análisis de elementos de hormigón armado se pueda captar el efecto de la fisuración y su evolución a lo largo del elemento.

Una vez obtenida la matriz de deformaciones generalizadas se puede calcular la matriz de rigidez del elemento y el vector de fuerzas nodales del elemento como:

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot dl \quad (\text{A2-19})$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{B} \cdot dl \quad (\text{A2-20})$$

Y con ello queda formulado este elemento finito 1D con comportamiento de Euler-Bernouilli.