

Aplicación del álgebra matricial en el estudio de los sistemas de control de ciertos procesos agroforestales

R. Cantó, B. Ricarte, A. M. Urbano
Instituto de Matemática Multidisciplinar
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n 46022 Valencia
e-mail: {rcanto,bearibe,amurbano}@mat.upv.es

RESUMEN

La finalidad de esta comunicación es presentar nuestro trabajo a la comunidad universitaria. Nuestra línea de investigación general se basa en estudiar la teoría matemática de los sistemas de control, concretamente en analizar las propiedades de los sistemas positivos y cuasi-positivos que se utilizan como herramientas de gestión de explotaciones agrícolas y cinegéticas, respectivamente. Para ello, ha sido necesario profundizar en la teoría matricial subyacente, en la que aparece la estructura de Jordan y la descomposición en valores singulares de matrices no invertibles, así como las factorizaciones de matrices.

OBTENCIÓN DE LA FORMA DE JORDAN, SVD Y FACTORIZACIONES

Relacionado con la forma de Jordan de una matriz, hemos profundizado en el estudio de un Teorema de Brauer, que indica cómo cambiar un valor propio de una matriz a partir de una perturbación de rango 1 sin modificar el resto de sus valores propios [1]. Esto nos ha permitido demostrar que los polos de un sistema de control pueden colocarse de forma arbitraria mediante un feedback de estados, incluso en el caso en que el sistema no sea controlable. También ha posibilitado el obtener un proceso para lograr la estabilización de los sistemas lineales de control positivos inestables.

Las factorizaciones de rango completo permiten reducir significativamente el número de menores a chequear en la caracterización de las matrices totalmente positivas y totalmente no positivas. Así en [2] describimos algunas propiedades de las matrices totalmente no positivas invertibles con el elemento (1,1) nulo a partir de una nueva factorización de rango completo que hemos definido como cuasi-LDU, donde L es una matriz triangular inferior por bloques, D es una matriz diagonal y U es una matriz triangular superior unitaria. Este resultado también es válido cuando el elemento (n,n) es no positivo y pueden extenderse a matrices rectangulares de rango deficiente gracias a una factorización de rango completo en forma cuasi-LDU, con L en forma escalonada inferior por bloques y U escalonada superior unitaria [3]. Estas factorizaciones tienen aplicación en los sistemas de control para lograr la reducción del modelo o construir realizaciones positivas [4].

Por otra parte, el estudio de la factorización de Cholesky nos ha conducido a iniciarnos en una nueva línea de investigación de carácter más numérico. Así, la factorización de Cholesky la hemos utilizado en el caso particular de matrices simétricas demostrando que cuando la matriz es semidefinida positiva dicha factorización de rango completo es única. Estos resultados pueden extenderse a matrices rectangulares de rango deficiente. Además, nos ha permitido abordar un problema clásico en álgebra lineal numérica, el ajuste lineal por mínimos cuadrados. Gran parte de la dificultad a la hora

de resolver problemas de ajustes por mínimos cuadrados radica en el hecho de que necesitamos resolver de forma implícita la ecuación normal $A^T Ax = A^T b$ siendo A una matriz $n \times m$ y b un vector de tamaño n . En [5] consideramos este problema cuando A es una matriz de rango deficiente, por lo que $A^T A$ es una matriz semidefinida positiva y su factorización de Cholesky no es única. Para ello, obtenemos una factorización de Cholesky de rango completo LL^T sin necesidad de construir la ecuación normal. Presentamos dos algoritmos que van calculando los elementos de L por filas o por columnas así como el correspondiente análisis del error. Estos algoritmos se ilustran con experimentos numéricos.

MODELIZACIÓN DE LA DINÁMICA DE UN NUTRIENTE EN UN CULTIVO LEÑOSO

Además de los aspectos teóricos, también trabajamos en modelización con sistemas de control. Concretamente, los sistemas de control positivos los utilizamos para modelizar la dinámica de un nutriente en un cultivo leñoso perennifolio, ya que constituyen una herramienta muy eficaz con la que obtener conclusiones que ayuden a un mejor ajuste de los programas de abonado.

Los modelos matemáticos conocidos que representan la dinámica de un nutriente en un cultivo leñoso perennifolio, no consideran la influencia de la concentración de la solución nutritiva en la absorción radicular ni el efecto de esta concentración en la producción final.

El primer problema lo abordamos introduciendo la ecuación de Michaelis-Menten en el modelo, lo que obligó a un reajuste de los coeficientes de transporte correspondientes. Para el segundo problema, estudiamos las ecuaciones de Mitscherlich, que indican que hay una concentración máxima a partir de la cual se produce un descenso en el rendimiento. No obstante, los resultados obtenidos no han sido los esperados. No hemos conseguido resultados satisfactorios desde el punto de vista de aplicabilidad del modelo. Análisis posteriores de este nuevo modelo nos han llevado a concluir que los dos motivos principales han sido:

1. La dificultad de relacionar la información encontrada en la bibliografía con los datos experimentales disponibles, lo que ha influido en la incierta identificación de los parámetros del modelo.
2. La utilización de un mismo concepto con significado distinto en ambas ecuaciones, concretamente, la concentración de la solución nutritiva, pero que estarían relacionadas mediante un nuevo parámetro a determinar.

Es decir, estamos ante un problema de identificabilidad del modelo, esto es, la determinación de los parámetros de un modelo asociado a un sistema a partir de variables medibles o calculables de un proceso asociado al mismo sistema.

Una técnica para abordar este problema consiste en considerar los parámetros inciertos como nuevos estados del modelo y analizar la propiedad de observabilidad de este nuevo sistema, i.e., el concepto de identificabilidad está fuertemente ligado a la noción de observabilidad. En los sistemas dinámicos y teoría de control, se dice que un sistema es observable si en cualquier punto dado en el tiempo podemos deducir los valores de todos los estados del sistema a través de medidas de salida anteriores. De aquí que una metodología utilizada para la identificación de parámetros siga un

enfoque basado en observadores de estado. Un observador de estados es un sistema dinámico cuyos estados convergen a los del sistema observado. En estos últimos meses hemos realizado una actualización del estado del arte en el desarrollo de observadores de estado, tanto en sistemas lineales como no lineales, y su aplicación en distintos modelos fisiológicos presentes en la literatura. En esta línea se está trabajado en colaboración con miembros del Instituto Universitario de Automática e Informática Industrial de la Universidad Politécnica de Valencia. En concreto, con ellos trabajamos en temas relacionados con el control de la diabetes tipo 1. Las estrategias de control actuales no son eficientes porque no tienen en cuenta la variabilidad de un mismo paciente a lo largo del tiempo. Los procesos con alta variabilidad no permiten deducir de manera fiable los valores de los parámetros de los modelos matemáticos que los representan. Mientras que hay sólo un comportamiento posible para un modelo con parámetros constantes, la incertidumbre paramétrica produce un gran conjunto de diferentes posibles soluciones. El cómputo de la envoltura de este conjunto de soluciones desempeña un papel clave en la simulación de sistemas bajo incertidumbre paramétrica. Los límites inferior y superior de las salidas de un sistema deben garantizar la inclusión tanto de la dinámica modelada como de la no modelada con el fin de poder predecir el comportamiento del sistema y mejorar así su control. En [6] exponen las herramientas de que se dispone para la predicción de glucemia ante variabilidad en pacientes con diabetes tipo 1.

CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS CUASI-POSITIVOS

Otro grupo de sistemas de control, lo forman los sistemas cuasi-positivos. Son aquellos en los que los estados deben mantenerse no negativos a lo largo del tiempo independientemente del control aplicado. Nos hemos centrado en el análisis de los modelos cuasi-positivos de aplicación en el estudio de dinámica de poblaciones, como herramienta de ayuda en la elaboración de un plan de aprovechamiento cinegético.

Hemos desarrollado un modelo que permite estimar la caza anual, estructurada según edad y sexo de los individuos, a la que puede verse sometida la población de manera que se consiga llevar y mantener alrededor de la capacidad de carga de la reserva, garantizando la máxima eficiencia dentro de la sostenibilidad del medio natural [7]. Puede utilizarse para predecir la evolución en el tiempo que experimentaría la población en estudio debido a sus características intrínsecas, es decir tasas de natalidad y supervivencia de cada grupo poblacional, así como al efecto de medidas correctoras que mejoren la supervivencia de los animales o la caza.

La eficiencia de éste y otros sistemas cuasi-positivos como metodologías de trabajo para gestionar de forma correcta la actividad cinegética de una reserva la hemos evaluado modelizando la dinámica de crecimiento de la población de cabra montés (*Capra pyrenaica*) de la Reserva Valenciana de Caza Muela de Cortes. Hemos analizado tres modelos distintos, un primer modelo en el que se considera la caza como un parámetro que modifica la matriz del sistema (sistema autónomo) frente a otros modelos donde la caza es una entrada del sistema (sistema con control). A lo largo de los tres modelos que se han utilizado, se ha observado que la modelización matemática efectivamente es una buena herramienta de gestión, pero que el modelo a utilizar dependerá del objetivo final al que se quiere llegar: la comparación de distintos planes técnicos de ordenación cinegética, alcanzar una determinada distribución poblacional sin superar cierta densidad de población o ambos objetivos a la vez.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto DGI MTM2010-18228.

REFERENCIAS

- [1] Bru, R., Cantó, R., Soto, R. y Urbano, A.M., "A Brauer's theorem and related results", *Central European Journal of Mathematics*, 10(1), 312-321 (2012). DOI: 10.2478/s11533-011-0113-0
- [2] Cantó, R., Ricarte, B. y Urbano, A.M., "Quasi-LDU factorization of nonsingular totally nonpositive matrices", *Linear Algebra and its Applications*, 439, 836-851 (2013). DOI: 10.1016/j.laa.2012.06.010
- [3] Cantó, R., Ricarte, B. y Urbano, A.M., "Full rank factorization in quasi LDU form of totally nonpositive rectangular matrices", aceptado LAA, 5/11/2013.
- [4] Cantó, R., Moll, S.E., Ricarte, B. y Urbano, A.M., "A full rank factorization method to obtain minimal realizations from a polynomial matrix and its applications in linear control theory", sometido.
- [5] Cantó, R., Peláez, M.J. y Urbano, A.M., "Cholesky factorization for rank deficient matrices", sometido.
- [6] de Pereda, D., Romero-Vivo, S., Ricarte, B. y Bondia, J., "Predictive Tools on Diabetes Management based on Cooperativity", 4th International Symposium on Positive Systems (POSTA 2012), Maynooth, Irlanda, Septiembre 2-4, (2012).
- [7] Cantó, R., Ricarte, B. y Urbano, A.M., "Modelling of big game populations when hunting is age and sex selective", *Mathematical and Computer Modelling*, 57(7-8), 1744-1750 (2013). DOI: 10.1016/j.mcm.2011.11.027