Aplicaciones de las matrices totalmente positivas

R. Cantó, B. Ricarte, A.M. Urbano
Instituto de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València
Camino de Vera s/n 46022 Valencia
e-mail: {rcanto,bearibe,amurbano}@mat.upv.es

RESUMEN

Se dice que una matriz es totalmente positiva (se denota por TP) si el determinante de cada una de sus submatrices cuadradas es mayor o igual que cero, y es estrictamente totalmente positiva (denotada por STP) si todos los determinantes de sus submatrices cuadradas son positivos. En este trabajo vamos a considerar la teoría de la total positividad con considerables consecuencias y aplicaciones en diferentes áreas, como son en Biología, Física, Economía, etc. y también en la propia ciencia matemática.

INTRODUCCIÓN

Pinkus [1] nos señala en su monografía de 2010 que hay cuatro investigadores que realizaron notables contribuciones en el inicio de la total positividad y que conviene reseñar: I.J. Schoenberg en 1930 [2], M.G. Krein, F.R. Gantmacher, y S. Karlin.

Concretamente, del estudio de las vibraciones en sistemas mecánicos acoplados por Gantmacher y Krein en 1950, se deriva la primera monografía sobre matrices totalmente positivas [3]. El libro de Karlin en 1968 [4], que sigue siendo después de muchos años referencia básica en este tema, recogió y amplió gran parte de las investigaciones de Schoenberg sobre total positividad. Por otra parte, Karlin aplicó la total positividad a la Economía y, en particular, a la teoría de inventarios. Mientras que Schoenberg la relacionó con la teoría de splines. Estudió la interpolación mediante las funciones splines, obteniendo el importante resultado de Schoenberg-Whitney [5], introdujo los B-splines y conjeturó la total positividad de su matriz de colocación. Este último tema lo desarrolló con detalle Karlin en su libro. En concreto, las matrices de colocación pertenecen a la clase de matrices casi estrictamente totalmente positivas (que son aquellas cuyas submatrices tienen determinante no nulo sí y sólo si los elementos de su diagonal principal son no nulos). A esta clase pertenecen también las matrices de Hurwitz, que dan un criterio para que los ceros de un polinomio tengan parte real estrictamente negativa; esta propiedad tiene importantes aplicaciones en el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos. Más información sobre las matrices casi estrictamente positivas la encontramos en [6] donde se introducen y caracterizan.

Además de las aplicaciones mencionadas, continúan surgiendo aplicaciones de las matrices totalmente positivas a diferentes campos, como es el diseño geométrico asistido por ordenador (C.A.G.D.) dentro del campo de la Teoría de la Aproximación. Ello se debe a una de las características de la total positividad, la propiedad de la disminución de la variación (véase la reciente Tesis Doctoral [7]).

Gran parte de la motivación en el estudio de las matrices totalmente positivas se basa en problemas de análisis. No obstante, Ando, en su artículo [8] publicado en 1987, introduce el estudio desde un punto de vista algebraico. Estudio que ha sido seguido por numerosos autores en sus trabajos posteriores. Continuando con el enfoque de álgebra matricial, Fallat y Johnson [9] publican en 2011 un completo volumen que puede servir como referencia para todos aquellos que están interesados en las matrices totalmente positivas, sus propiedades y aplicaciones.

INTERPOLACIÓN

Consideremos dos magnitudes x e y de las que se conocen $n+1$ valores relacionados $\{(x_0, y_0), (x_1,y_1), \dots, (x_n,y_n)\}$, por ejemplo, datos obtenidos en un experimento de laboratorio con la condición $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Nos preguntamos si existe una función p tal que

$$p(x_i)=y_i \quad i=0,1,\dots,n, \tag{1}$$

es decir, pretendemos obtener una función cuya gráfica "pase" por los puntos del plano dados. Si la función p verifica (1) se dice que *p interpola* los datos dados.

Este tipo de problemas se presentan cuando tenemos datos obtenidos por experimentación y sabemos que hay una función f que rige el proceso pero que desconocemos, por lo que buscamos una función alternativa p que represente a los datos de la muestra. Si f rige el proceso entonces $f(x_i)=y_i$ luego exigiremos a la función p ese mismo requisito. Esto nos proporciona condiciones que imponer a p con las que trataremos de obtenerla y, una vez conseguido, nos permitirá conocer o predecir qué habría pasado para otros valores de x en los que no se ha experimentado.

Supongamos que existe la función f con $f(x_i)=y_i$, $i=0,1,\dots,n$. Nos podemos plantear varias preguntas:

i) La función p que interpola los datos dados ¿de qué tipo ha de ser? ¿Polinómica, trigonométrica, racional,...? La respuesta vendrá dada por los datos y_i.

- Si se observa que los datos presentan periodicidad, entonces buscaremos a p dentro de las funciones trigonométricas.
- Si los datos presentan asíntotas entonces p debería ser una función racional.
- Si los y_i presentan un comportamiento polinomial, entonces p se escogería de tipo polinómico. Nos centraremos en cómo resolver este caso.

ii) Una vez escogido el tipo de función habrá que responder dos cuestiones, ¿existe p del tipo escogido que interpole los datos dados? Y si existe, ¿es única?

iii) ¿Es la función polinómica escogida una buena aproximación de la función original f en los puntos x que no son de la muestra?

Vamos a realizar el estudio contestando a estas cuestiones suponiendo que la función p es una función polinómica.

INTERPOLACIÓN POLINÓMICA

El objetivo es hallar un polinomio p de grado menor o igual que n que cumpla la ecuación (1). El polinomio p vendrá dado por:

$$p(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

donde los coeficientes a_i se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema, que representamos por *V*, es de orden *n+1*, y recibe el nombre de matriz de Vandermonde. Su determinante viene dado por la expresión:

$$det(V)=\prod_{j>i}(x_j-x_i)$$

Nótese que si se verifica la condición $0<x_0 < x_1 <\ldots< x_n$, el determinante de V es positivo y, en consecuencia, el sistema es compatible determinado. En este caso también se satisface la siguiente propiedad:

Propiedad 1. Para *n+1* números reales $0<x_0 < x_1 <\ldots< x_n$, la matriz de Vandermonde es STP.

MATRIZ DE PASCAL

En matemáticas, más concretamente, en teoría de matrices y en combinatoria, la matriz de Pascal es aquella cuyos elementos son los coeficientes del binomio de Newton que forman el triángulo de Tartaglia. Por tanto, la matriz de Pascal, $P_n=(p_{ij})$, *es simétrica,* los elementos de su primera fila y columna iguales a 1, y el resto de elementos satisface la condición

$$p_{ij}= p_{i-1,j}+p_{i,j-1} \quad 2\leq i,j\leq n,$$

Por ejemplo, la matriz de Pascal simétrica de tamaño 4×4 es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Propiedad 2. La matriz de Pascal es STP.

PROPIEDADES DE LAS MATRICES TP y STP

En la última década distintos métodos de caracterización de matrices TP o STP han sido estudiados, de manera que para demostrar que una matriz dada es TP o STP no es necesario comprobar el signo de cada uno de sus menores.

Propiedad 3. ([6]) Una matriz cuadrada e invertible A es TP sí y sólo si A=LU, siendo $L(U)$ triangular inferior (superior) invertible TP.

Propiedad 4. ([6]) Una matriz cuadrada A es STP sí y sólo si $A=LU$, siendo $L(U)$ triangular inferior (superior) ΔSTP.

Ejemplo 5. La matriz de Pascal P_n es una matriz STP, ya que puede factorizarse de la forma $P_n= LL^T$ donde L es una matriz de tamaño n×n triangular inferior y ΔSTP. Por ejemplo, la matriz de Pascal de tamaño 4×4 puede factorizarse de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto DGI MTM2013-43678-P.

REFERENCIAS

[1] Pinkus, A., “Totally Positive Matrices”, vol. 181 of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, UK, 2010.
[2] Schoenberg, I.J., “Über variationsvermindernde lineare Transformationen”, Math. Z., 32, 321-328 (1930).
[3] Gantmacher, F.R. y Krein, M.G., “Ostsillyatsionye Matritsy i Yadra i Malye Kolebaniya Mekhanicheskikh Sistem”, Gosudarstvenoe Izdatel'stvo, Moskva-Leningrad, 1950. (English transl. as “Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems”, USAEC, 1961.
[4] Karlin, S., “Total Positivity”, volume I, Stanford University Press, Stanford, California, 1968.
[5] Schoenberg, I.J. y Whitney, A., “On Pólya frequency functions III. The positivity of translation determinants with applications to the interpolation problem by spline curves”, Trans. Am. Math. Soc. 14, 246-259 (1953).
[6] Gasca, M., Micchelli, C.A. y Peña, J.M., “Almost strictly totally positive matrices”, Numerical Algorithms 2, 225-236 (1992).
[7] Barreras, A., “Matrices estructuradas y alta precision relativa”, Tesis Doctoral-2014-054, Universidad de Zaragoza, Junio de 2014.
[8] Ando, T., “Totally positive matrices”, Linear Algebra and its Applications 90, 165-219 (1987).
[9] Fallat, S.M. y Johnson, C.R., “Totally nonnegative matrices”, Princeton University Press, New Jersey, 2011.