



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

# ESTUDIO ANALÍTICO Y POR ELEMENTOS FINITOS DE VIGA ARMADA BAJO TENSIÓN DIAGONAL

José Catalá Serralta

Dirigido por Prof. José L. Pérez Aparicio

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

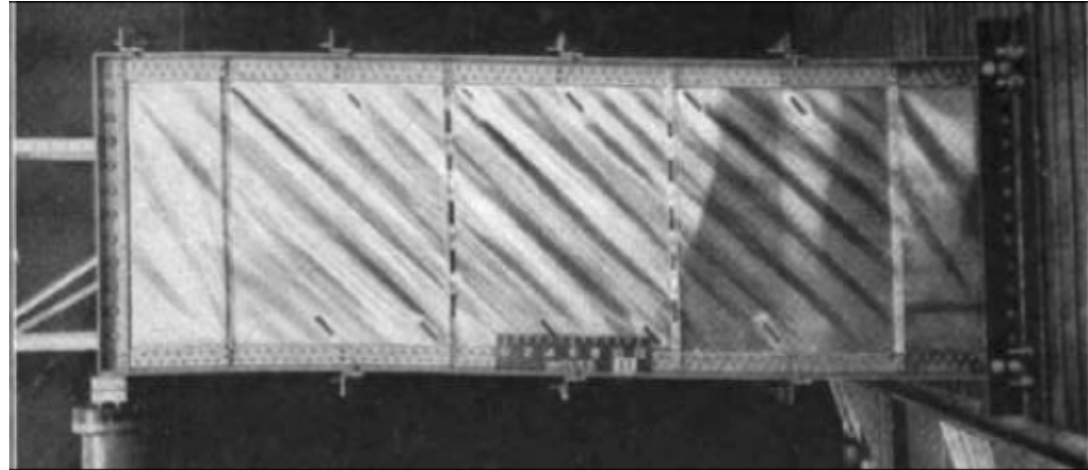
*Julio - 2016*

# Índice

- **Introducción**
- Metodología
- Inicio de pandeo
- Post-pandeo en placas a compresión
- Post-pandeo en placas a cortante
- Viga armada
- Conclusiones

# Viga armada

- Estudios NACA 1952
- Utilizados en industria actual



Languero del ala

# Post-pandeo

Pandeo: inestabilidad elástica



Capacidad a post-pandeo



Ahorro de peso en el diseño



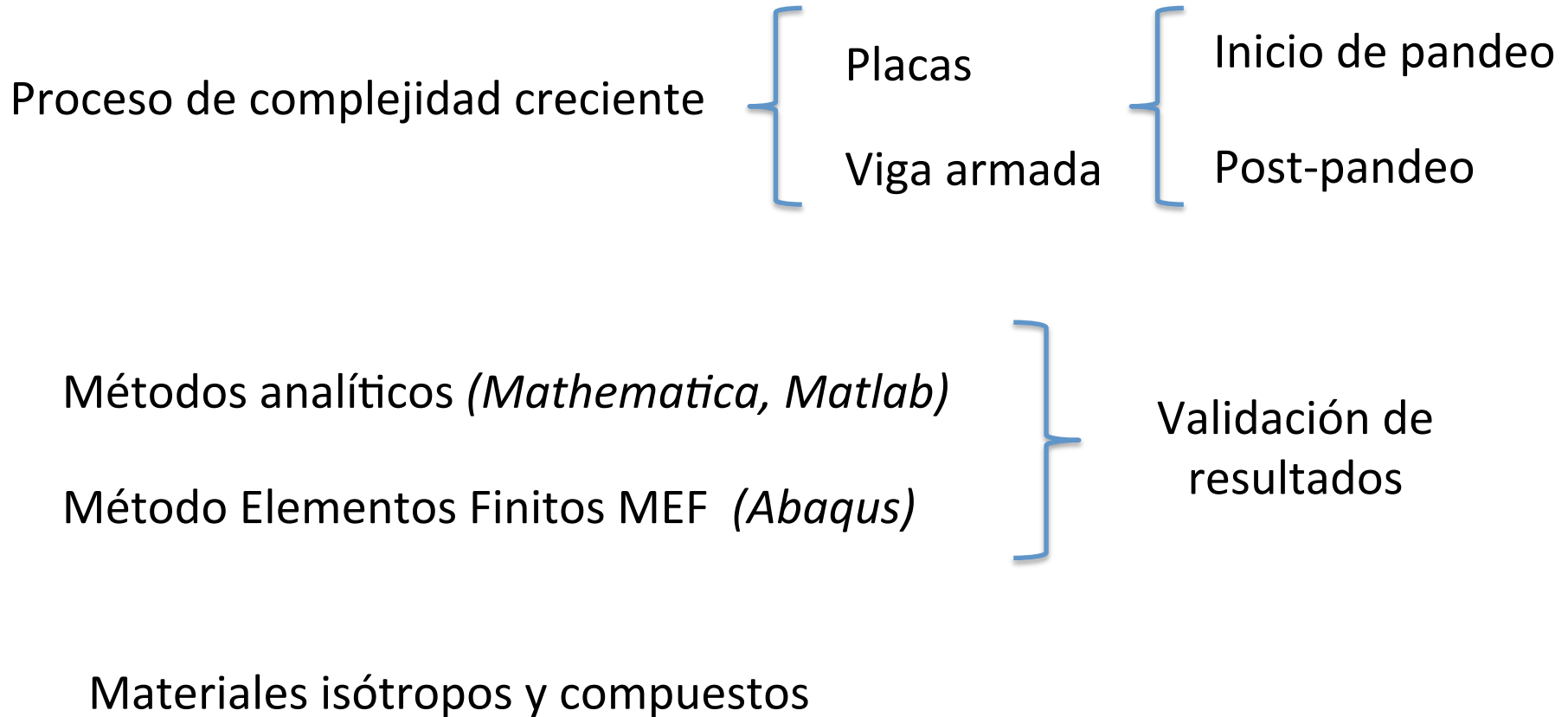
Aeronáutica: espesores muy finos



# Índice

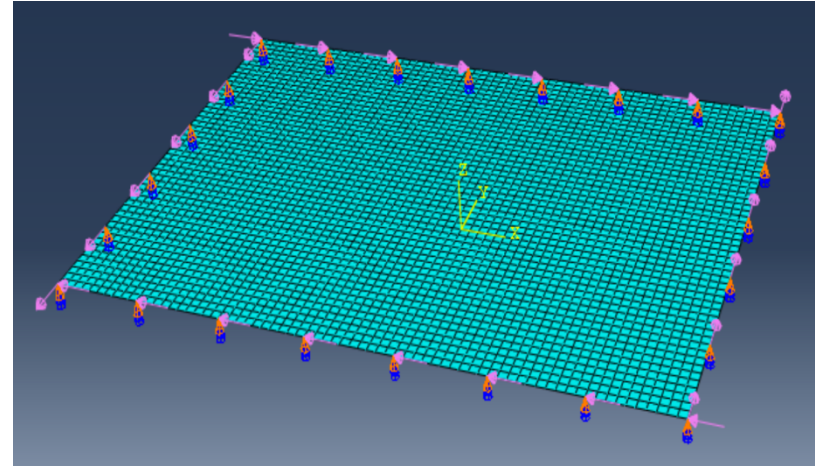
- Introducción
- **Metodología**
- Inicio de pandeo
- Post-pandeo en placas a compresión
- Post-pandeo en placas a cortante
- Viga armada
- Conclusiones

# Metodología general



# Metodología en Abaqus

- Elementos tipo *shell*
- 5 puntos de integración en el espesor



*Linear Perturbation - Buckle*

Inicio de pandeo

Carga Crítica  
Modos de pandeo

Ponderación

*Static - Riks*

Post-pandeo

Análisis estático no-lineal  
con imperfecciones iniciales

# Índice

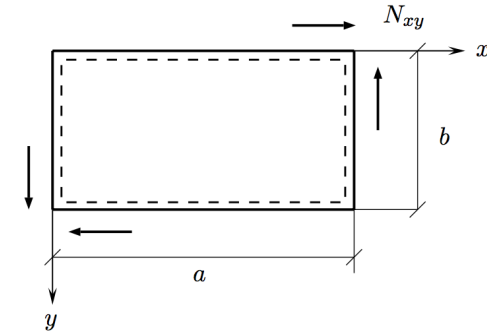
- Introducción
- Metodología
- **Inicio de pandeo**
- Post-pandeo en placas a compresión
- Post-pandeo en placas a cortante
- Viga armada
- Conclusiones



# Método de –Ritz–

## Energía interna de deformación

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dy dx$$



Trabajo de las fuerzas externas

$$W = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy dx$$

Deflexión  $w$

Funciones de prueba que cumpla las CdC

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot X_m(x) \cdot Y_n(y)$$

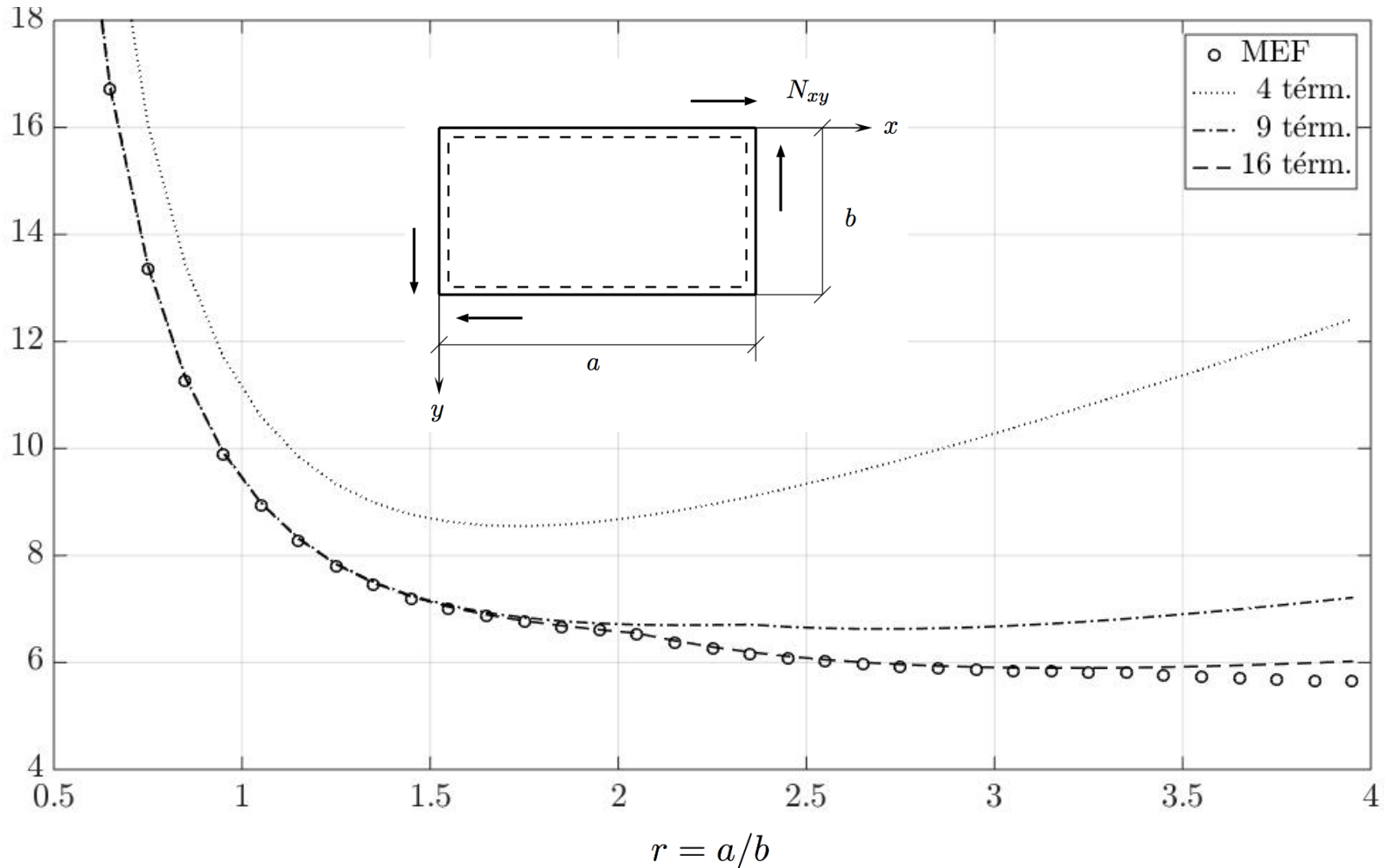
Minimización de  
energía potencial

$$\Pi = U - W \quad \frac{\partial \Pi}{\partial w_{ij}} = 0$$

Problema de autovalores

# Carga crítica – relación de aspecto

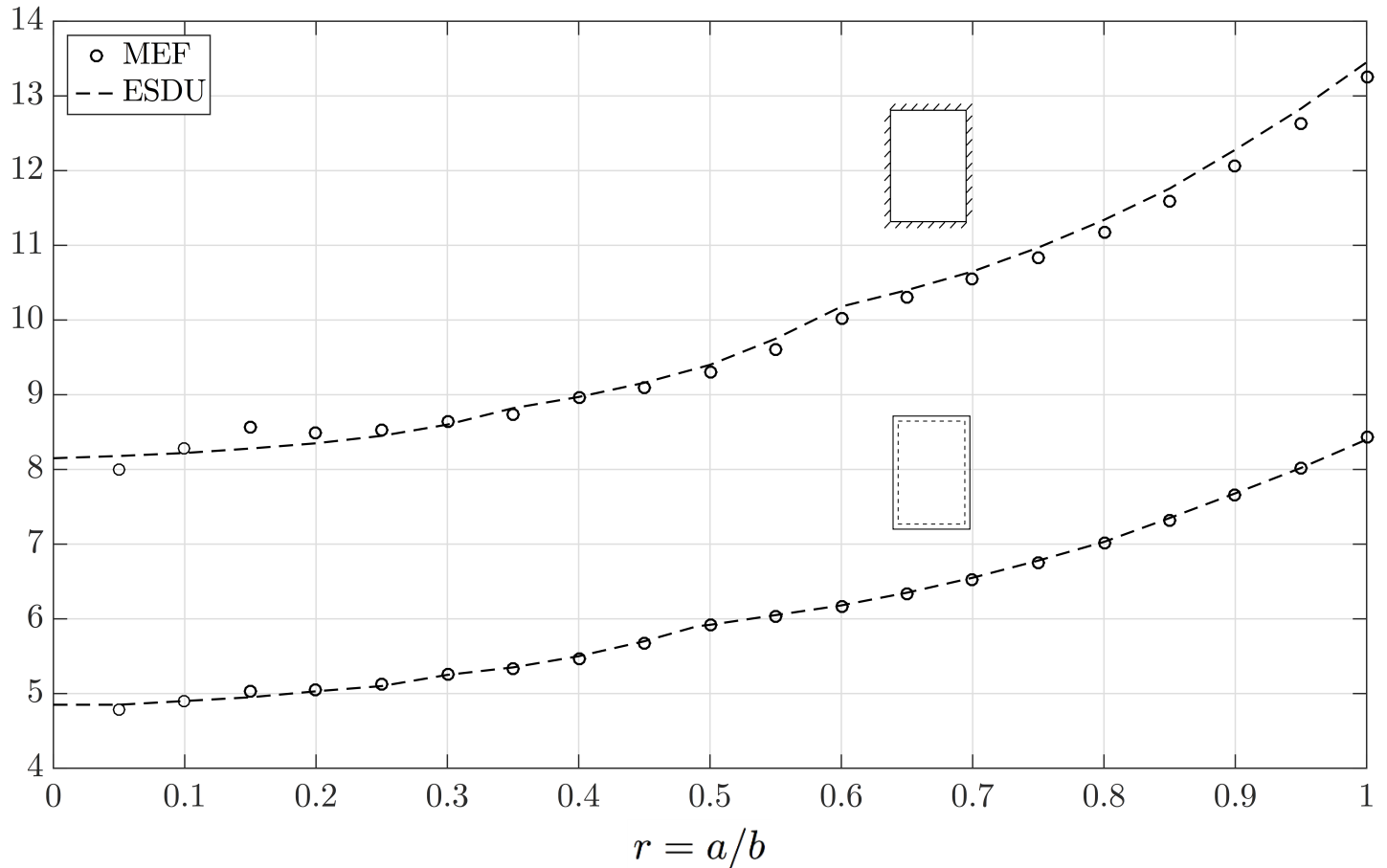
$$K = \frac{b^2 N_{cr}}{\pi^2 D}$$



# Reproducción documento ESDU 71005

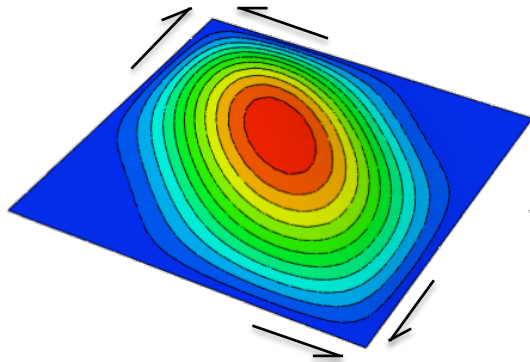
## Engineering Sciences Data Unit

$$K' = \frac{N_{cr}/h}{E (h/b)^2}$$

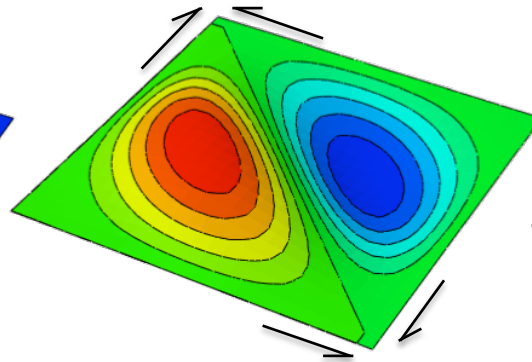


# Modos de pandeo

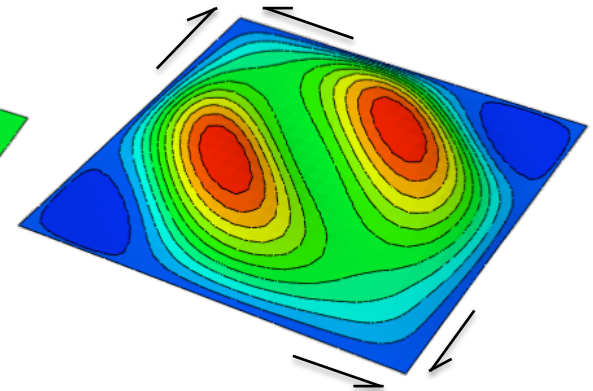
MEF



$K = 9.36$

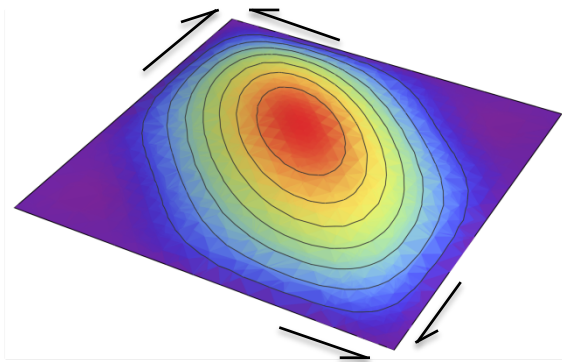


$K = 11.62$

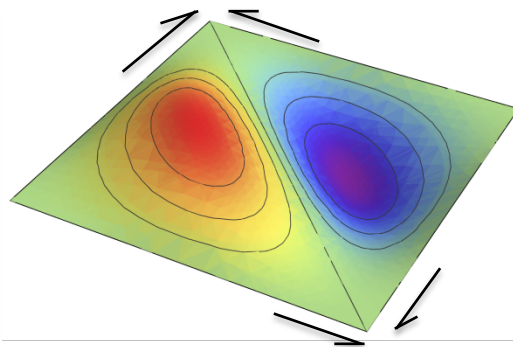


$K = 25.18$

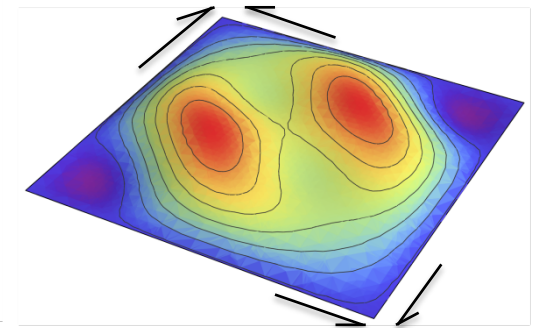
Ritz



$K = 9.40$



$K = 11.65$



$K = 27.24$

# Índice

- Introducción
- Metodología
- Inicio de pandeo
- **Post-pandeo en placas a compresión**
- Post-pandeo en placas a cortante
- Viga armada
- Conclusiones

# Ecuaciones de von Karman

- Gran deformación
- No lineal

$$1) \quad D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

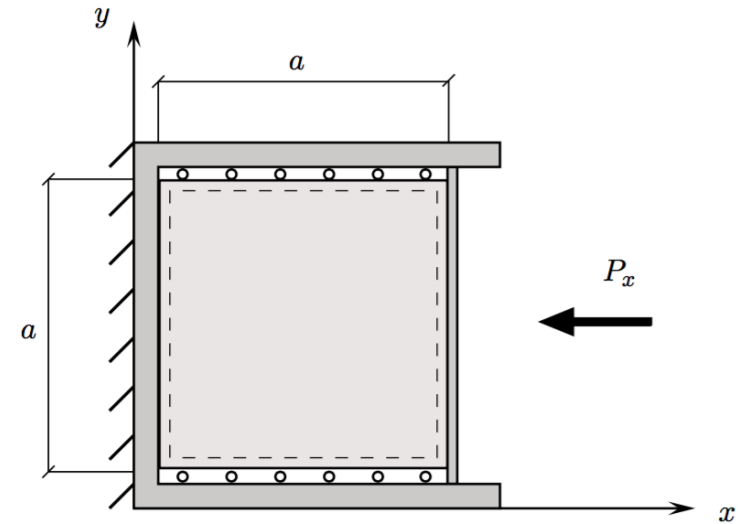
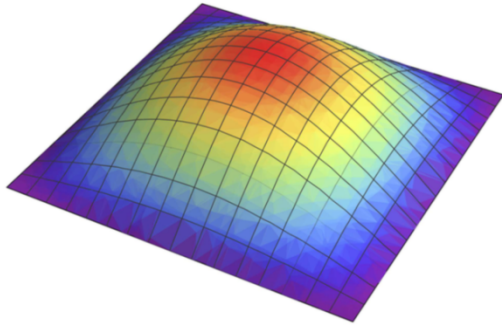
$$2) \quad \frac{1}{A_d} \left( A_{11} \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} - A_{12} \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - A_{12} \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{A_{66}} \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} =$$

$$= \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Función de tensiones de Airy  $N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$  ;  $N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$  ;  $N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

## Funciones de prueba

$$w = w_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$



Factor de carga  
de post-pandeo

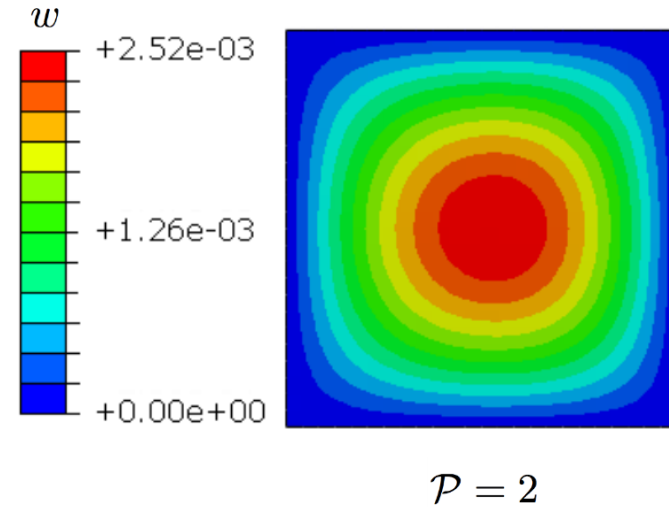
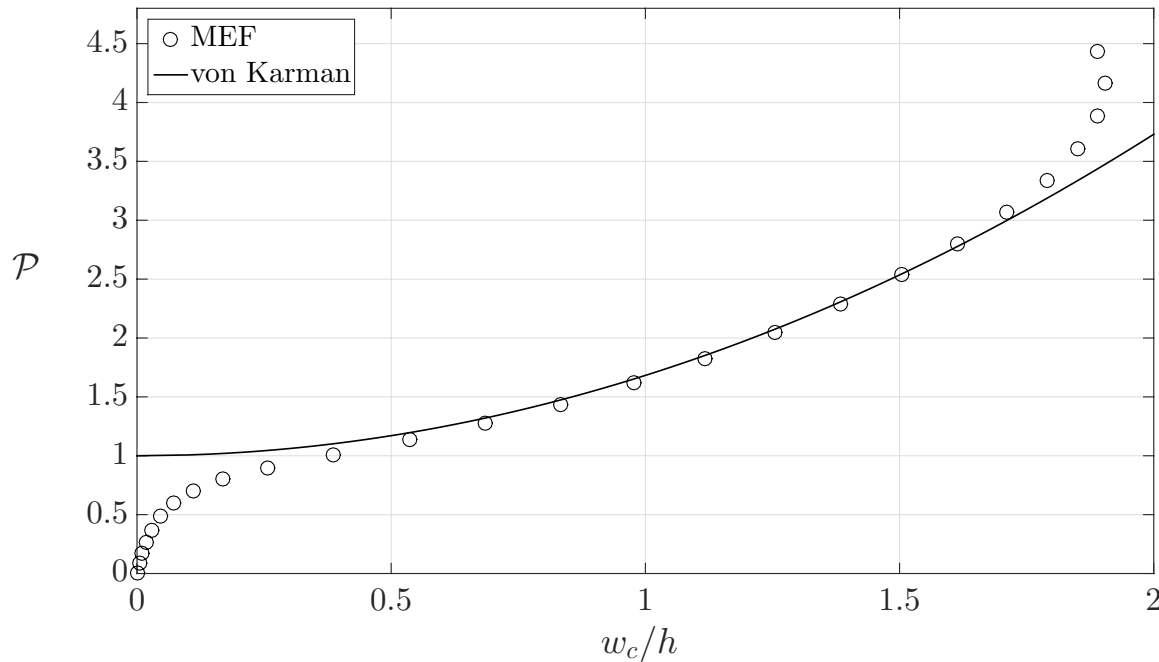
$$\mathcal{P} = P/P_{cr}$$

$$F = -\frac{P_x y^2}{2a} - \frac{P_y x^2}{2a} + C_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right)$$

Solución:

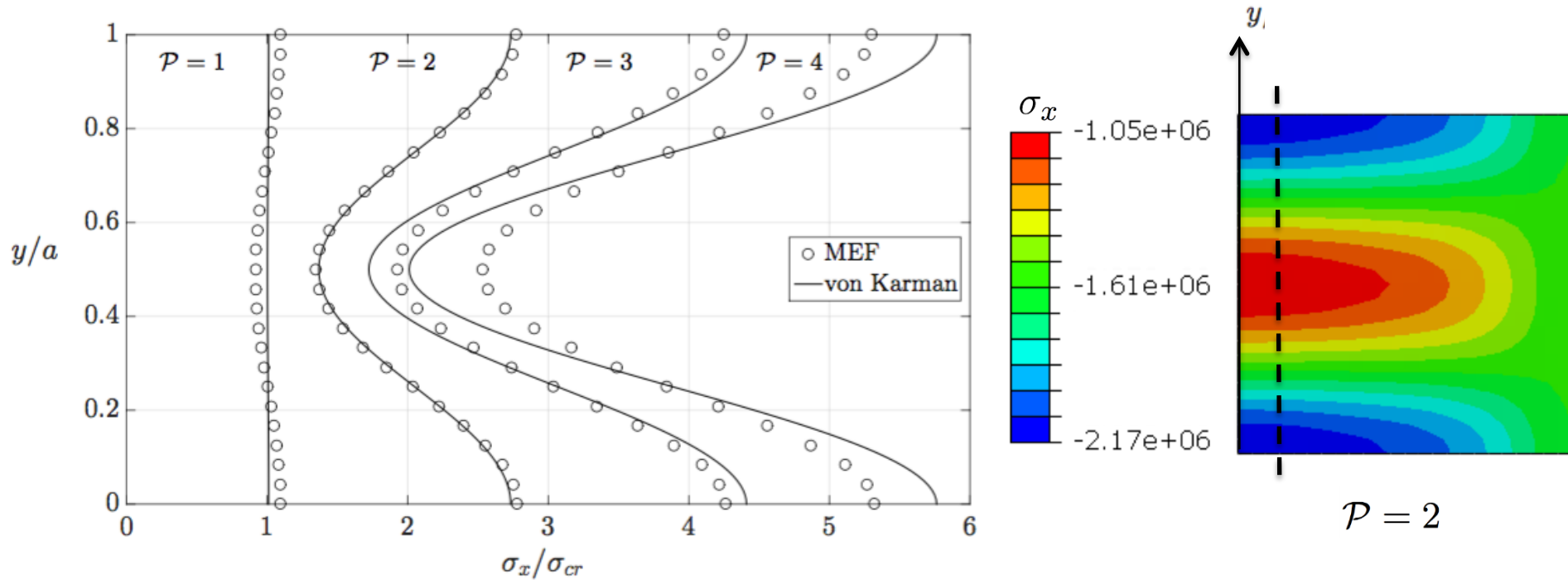
$$w_1 = \sqrt{\frac{16 A_{11} A_{22} [D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}]}{(A_{11} + 3A_{22}) A_d}} (\mathcal{P} - 1)$$

# Grandes deflexiones



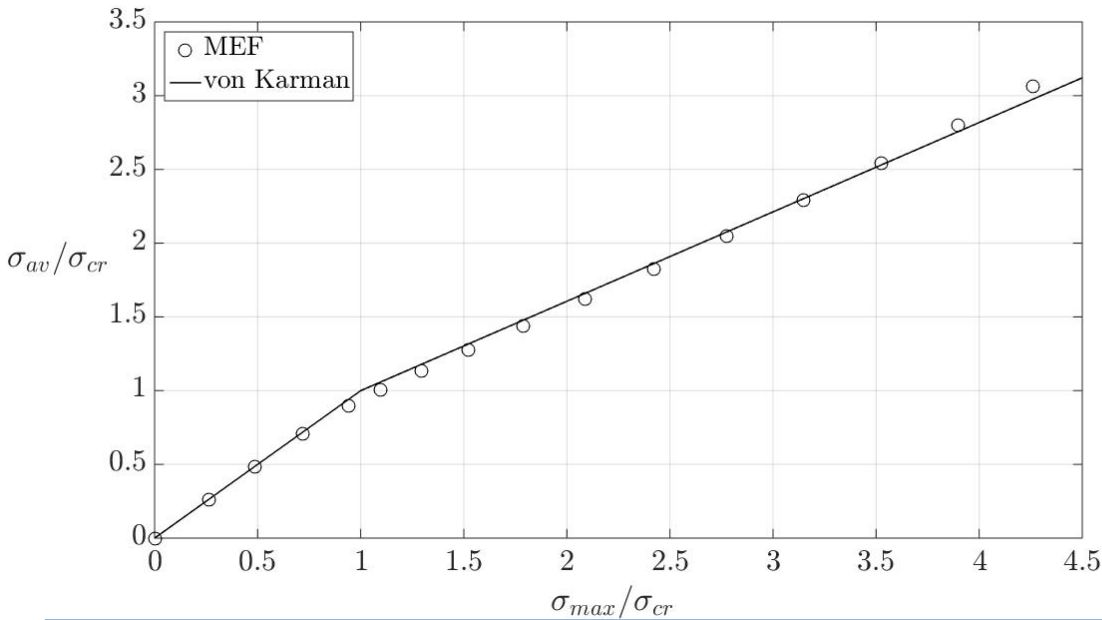
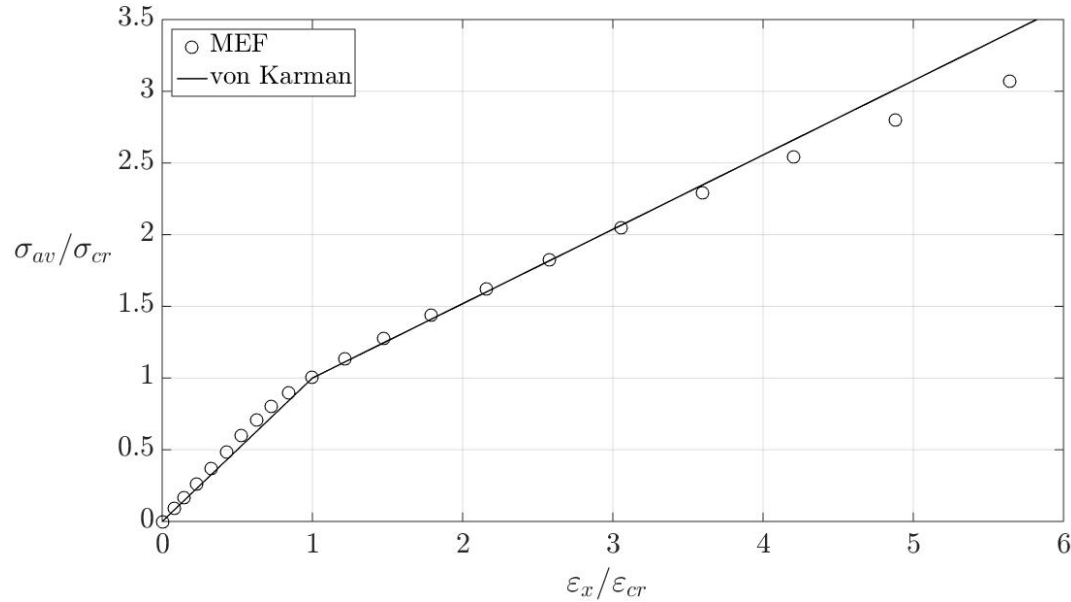


# Redistribución de tensiones



- Centro: pérdida capacidad carga
- Valores máximos en bordes

# Pérdida de rigidez (pendiente) compresiva



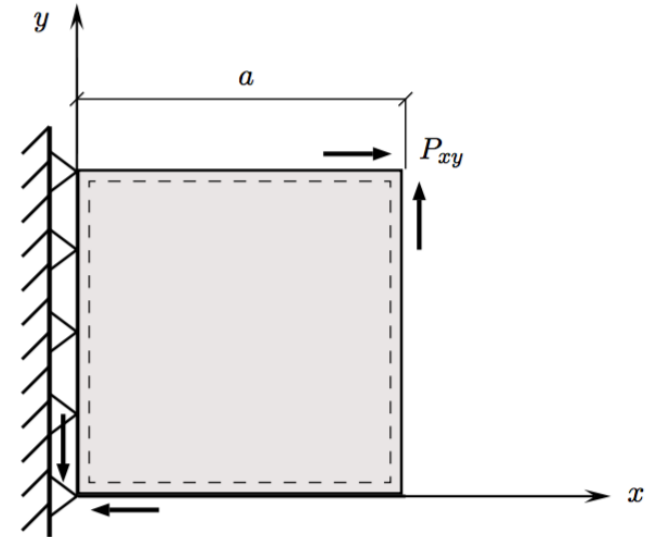
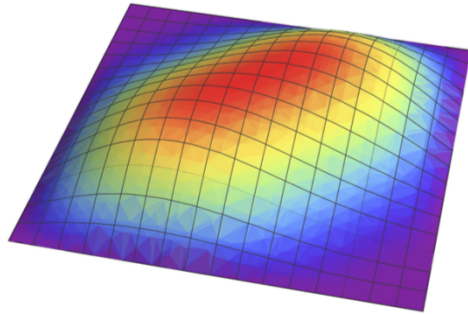
Tensión máxima  $\sigma_{max}$ ,  
 VS  
 Tensión media  $\sigma_{av}$

# Índice

- Introducción
- Metodología
- Inicio de pandeo
- Post-pandeo en placas a compresión
- **Post-pandeo en placas a cortante**
- Viga armada
- Conclusiones

## Funciones de prueba

$$w = w_1 \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \right]$$



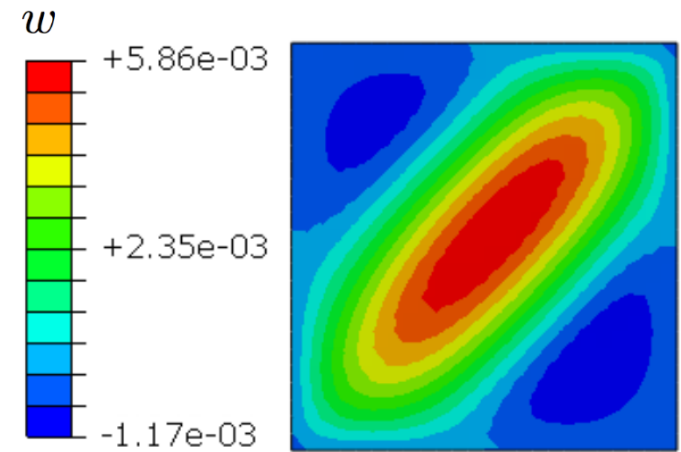
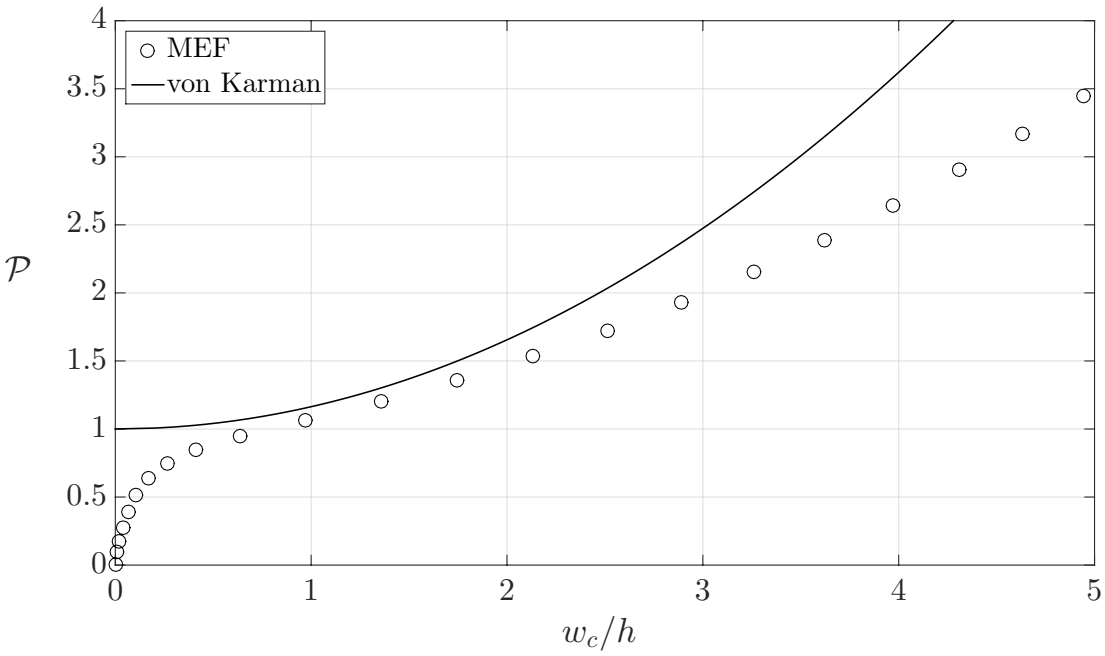
$$F = -\frac{P_{xy} x y}{a} + C_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + C_3 \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) +$$

$$+ C_4 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{a}\right) + C_5 \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) + C_6 \cos\left(\frac{4\pi y}{a}\right)$$

Solución:

$$w_1 = h \sqrt{\frac{6400}{1659(1-\nu^2)}} (\mathcal{P} - 1)$$

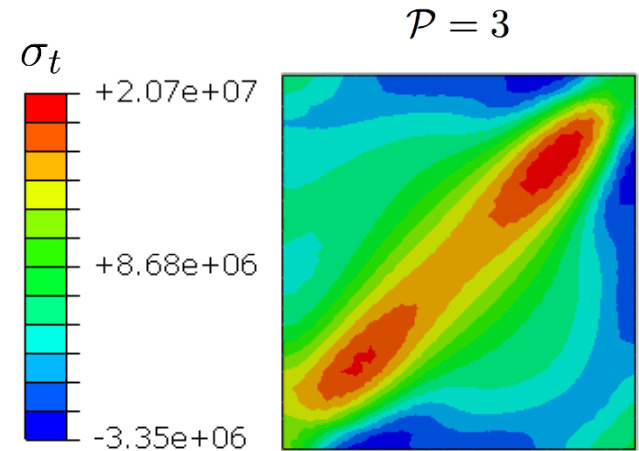
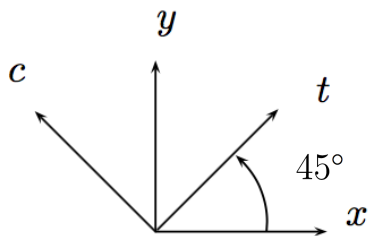
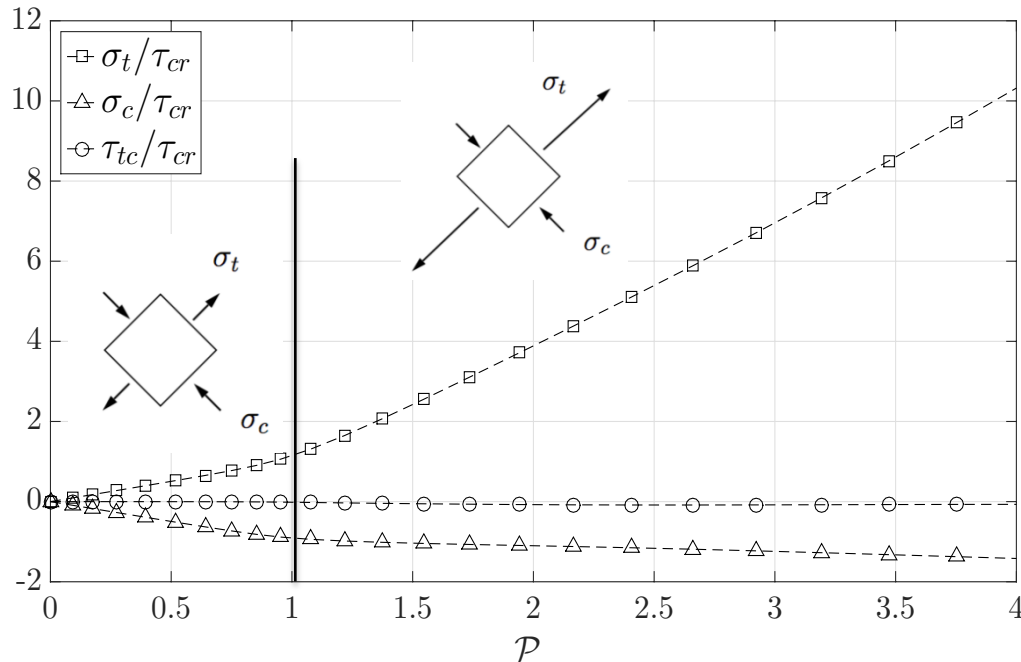
# Estudio de la deflexión



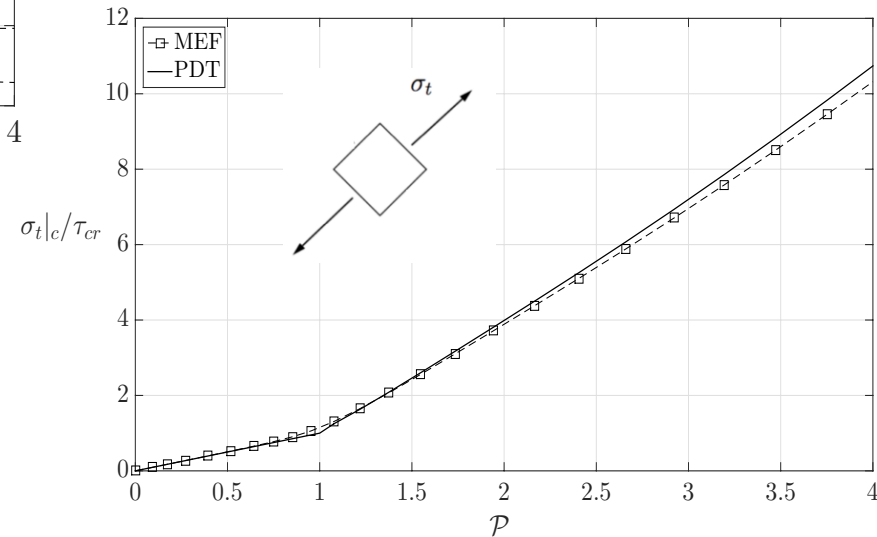
$\mathcal{P} = 2$

Errores mayores que en compresión

# Tensiones diagonales



## Comportamiento PDT



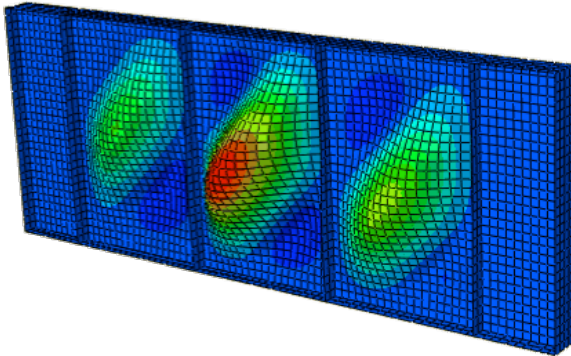
# Índice

- Introducción
- Metodología
- Inicio de pandeo
- Post-pandeo en placas a compresión
- Post-pandeo en placas a cortante
- **Viga armada**
- Conclusiones

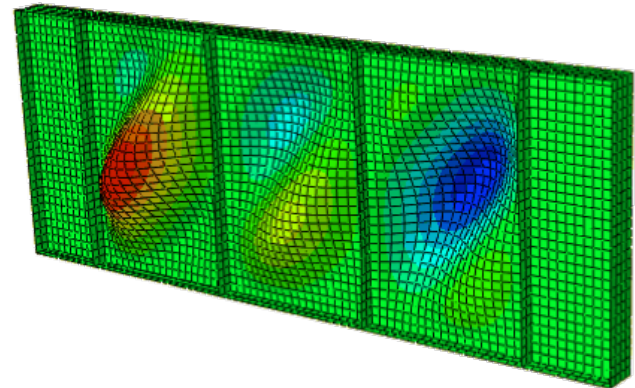
# Modos de pandeo en *Abaqus*

3760 elementos tipo *shell*

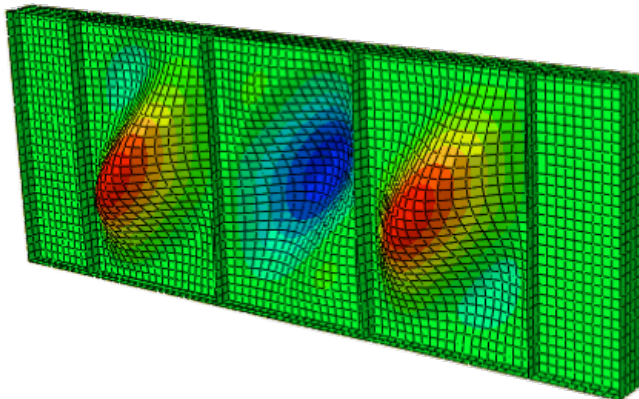
#1



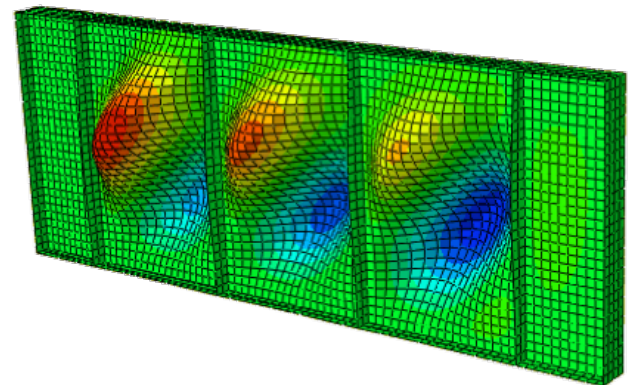
#2



#3

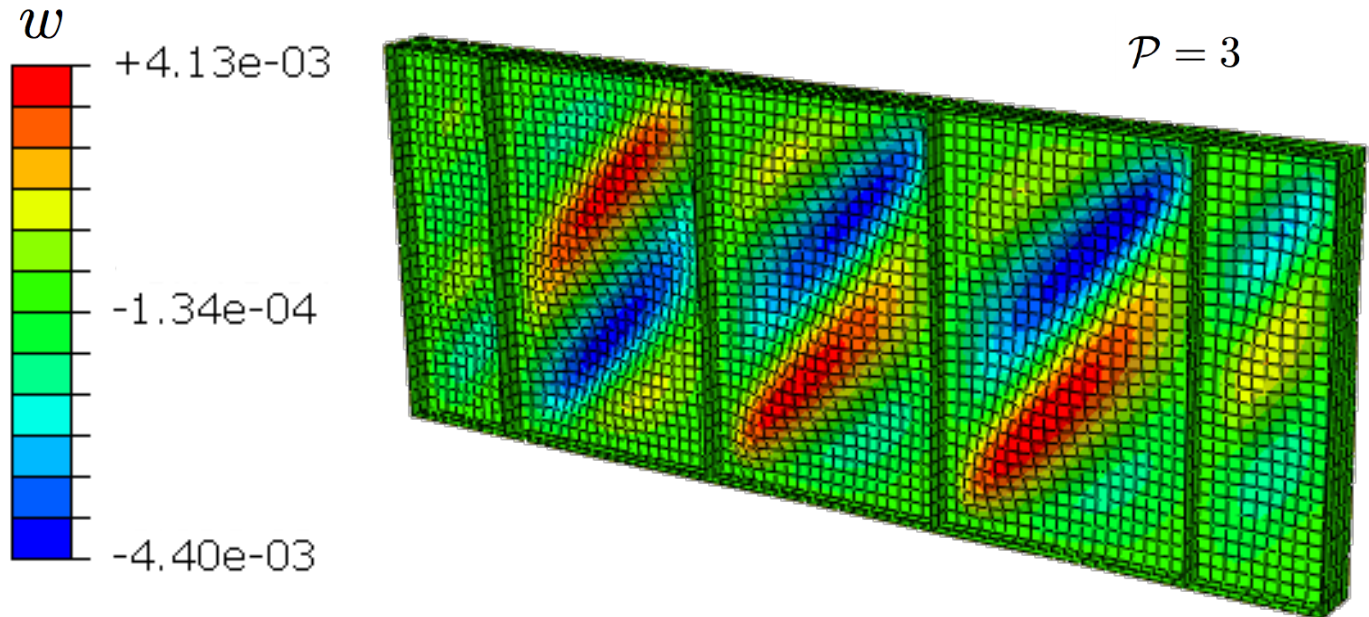


#4





# Deflexión



- Ondas diagonales en dirección de pandeo
- Tensión diagonal

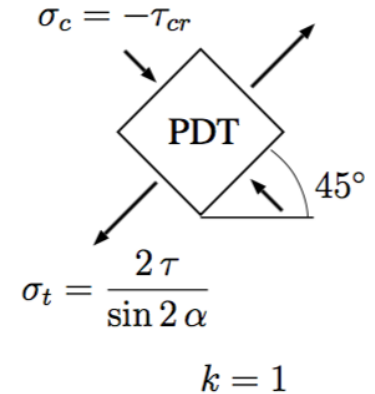
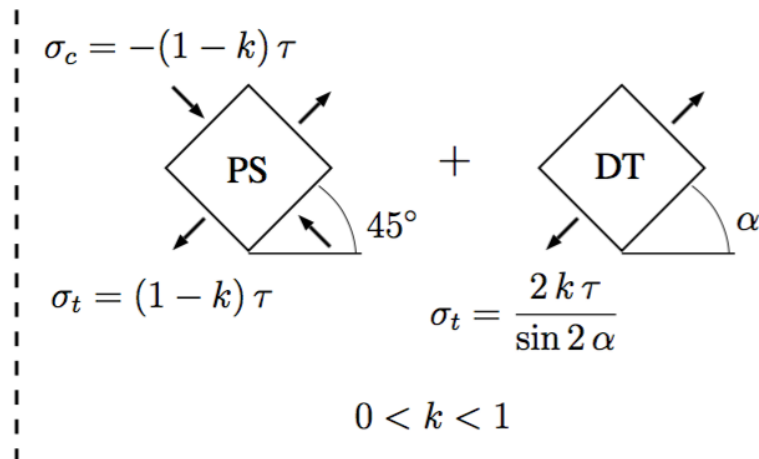
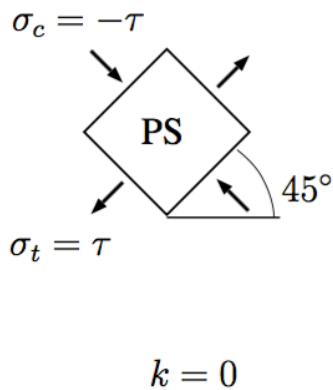
# Tensión Diagonal Incompleta

Pure Shear  
PDT

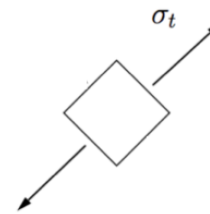
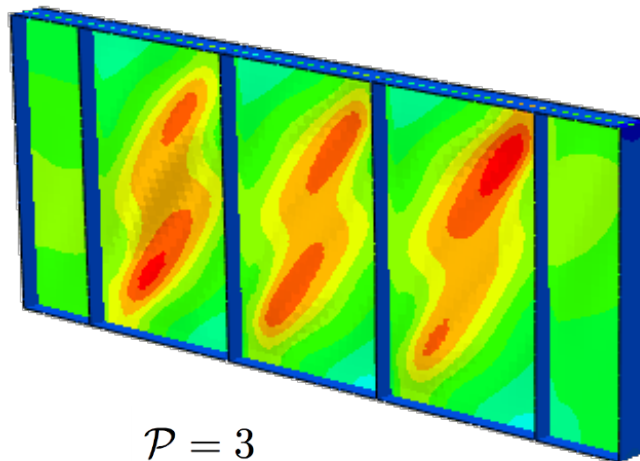
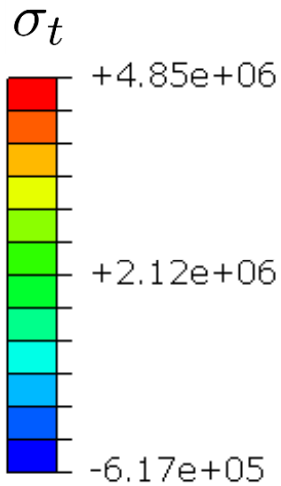
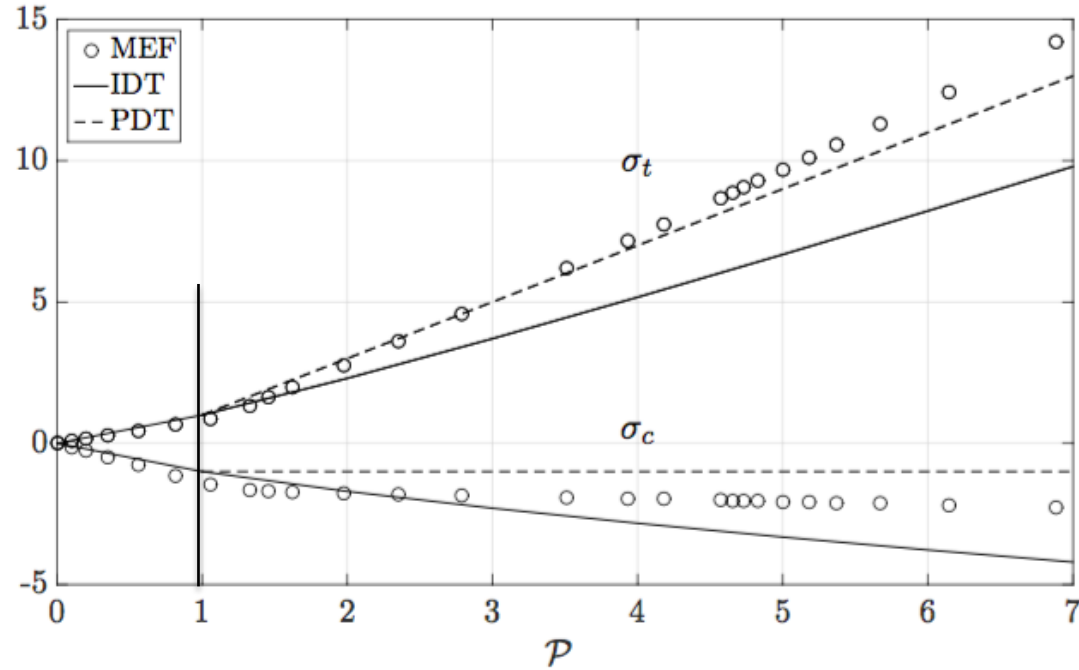
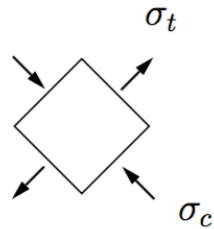


Modelos ideales

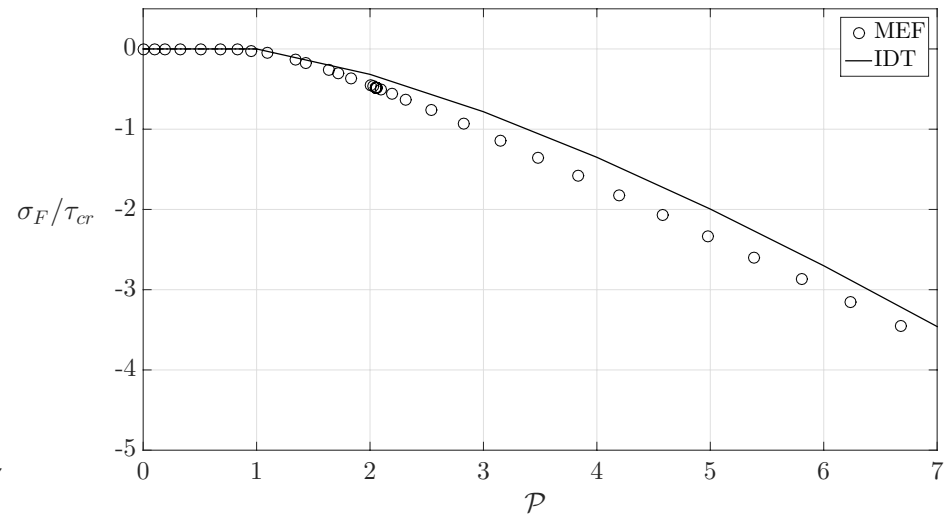
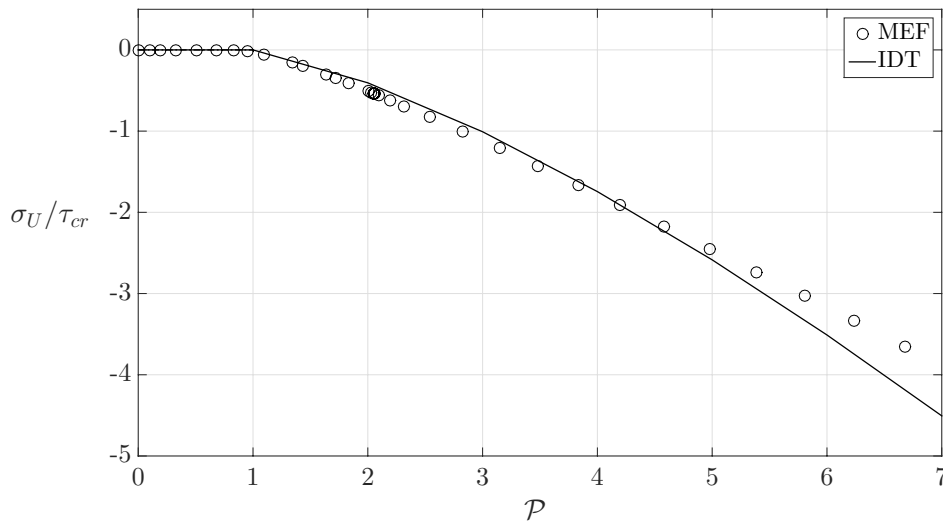
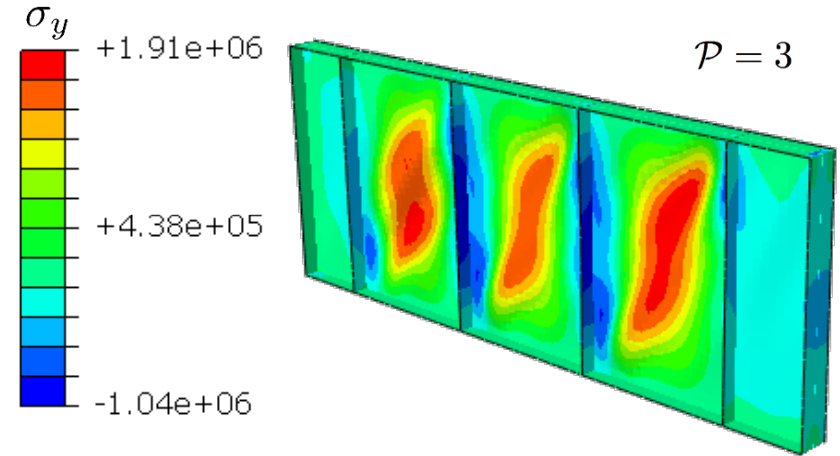
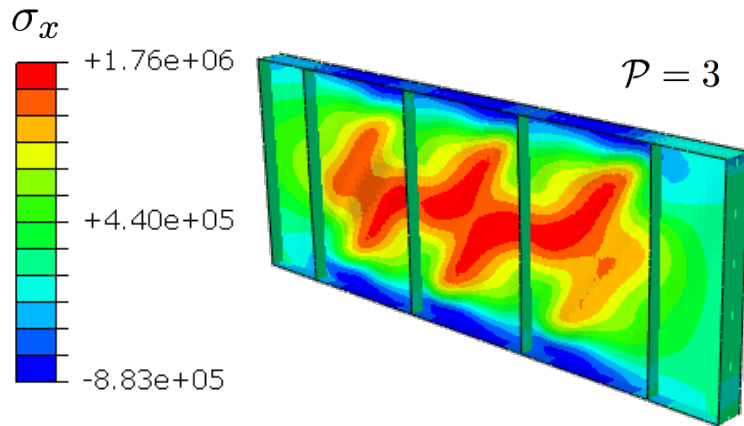
NACA TN2661: Método semi-empírico para viga completa



# Tensiones diagonales en el alma



# Tensiones en los refuerzos



# Índice

- Introducción
- Metodología
- Inicio de pandeo
- Post-pandeo en placas a compresión
- Post-pandeo en placas a cortante
- Viga armada
- **Conclusiones**

# Conclusiones

- Bases teóricas: fundamentales para interpretación de resultados MEF
- Post-pandeo: régimen no lineal y complejo
- Capacidad a post-pandeo: reducción de peso en diseño
- Validación satisfactoria de resultados MEF-analíticos



Gracias por su atención

¿Preguntas?