

## ADAPTACIÓN DE SUPERFICIES DE DOBLE CURVATURA MEDIANTE SUPERFICIES DESARROLLABLES

### DOUBLE CURVATURE SURFACES ADAPTATION USING DEVELOPABLE SURFACES

*Paco González*

doi: 10.4995/ega.2016.4741

Las cuestiones relacionadas con la teoría de las superficies desarrollables han tenido una atención continua desde el punto de vista de la geometría. En los últimos años la proliferación del empleo de formas libres de doble curvatura en Arquitectura y la necesidad de su resolución constructiva y por tanto geométrica, han dado nuevos impulsos a esta cuestión. Apoyados en el desarrollo de la tecnología digital aplicada a la fabricación y al control de la forma, hemos asistido a espectaculares resultados. Mediante el empleo de los avances que permiten el uso de los sistemas de CAD y especialmente del procesamiento computacional y la parametrización de algunos temas clásicos de la geometría proyectiva, hemos desarrollado un método de adaptación de formas libres mediante el uso de superficies desarrollables.

**PALABRAS CLAVE: SUPERFICIES DE FORMA LIBRE. SUPERFICIES DE DOBLE CURVATURA. SUPERFICIES DESARROLLABLES. APROXIMACIÓN ALGORÍTMICA**

*Questions related with the developable surfaces theory have had a constant attention from the point of view of the Geometry. In recent years the employment of free forms and double curvature surfaces in Architecture have reported a noticeable development and the need of their constructive resolution and therefore geometric and graphic control have given new impulses to this question. Supported on the development of the digital technology applied to manufacturing and control of the form, we would have seen spectacular results. Using the advances allowed by CAD systems and especially by processing computational and parametrically some classical geometry topics, we have achieved the basis of a method to adapt Freeform Surfaces through Developable Surfaces Using Apparent Contours.*

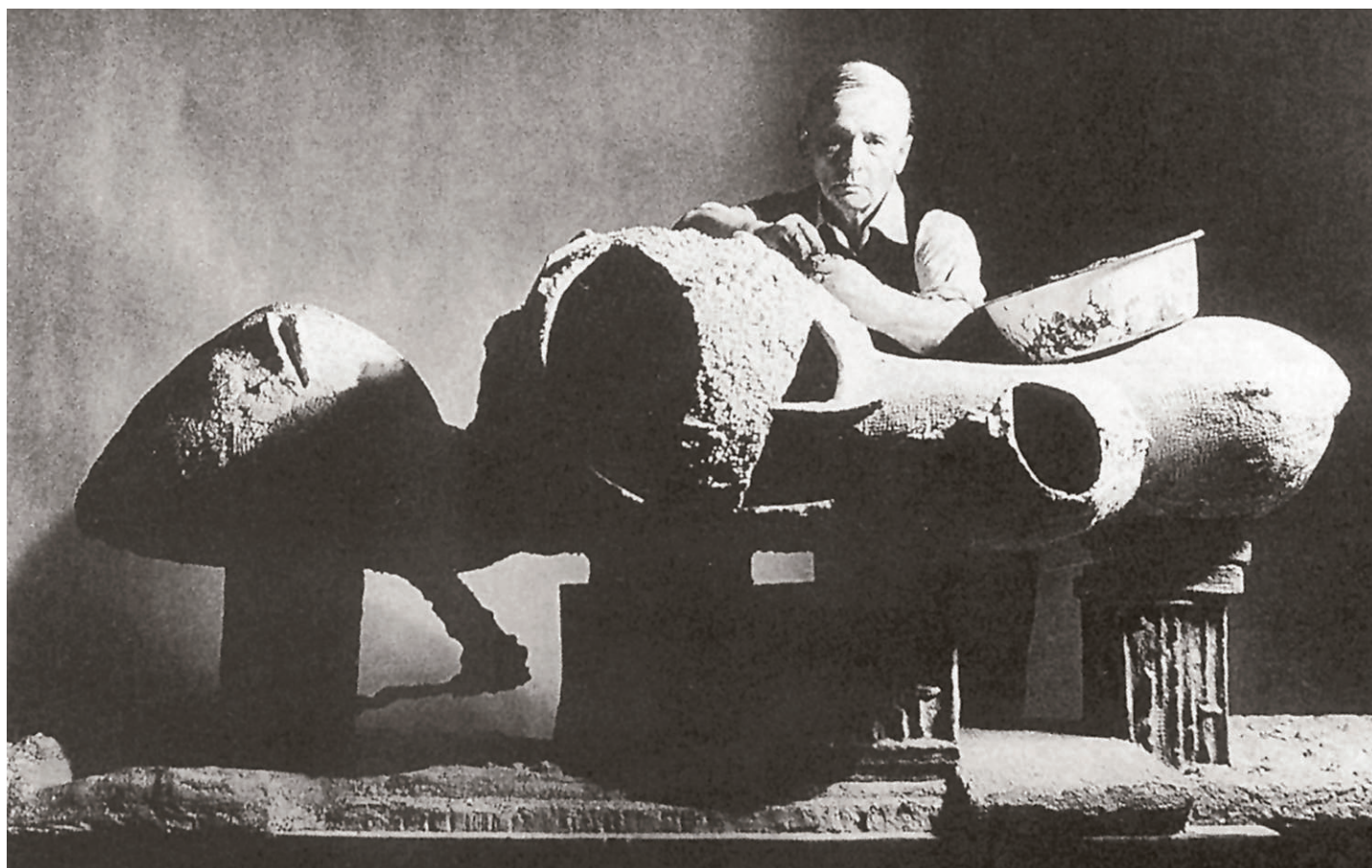
**KEYWORDS: FREEFORM SURFACES. DOUBLE CURVED SURFACES. DEVELOPABLE SURFACES. ALGORITHMIC APPROACH**





## 1. La forma libre y su limitación previa al control digital

### 1. Freeform and its limitations previous to digital control



1

## Introducción

Hemos presenciado en los últimos años un uso extensivo en Arquitectura de formas libres de doble curvatura **1**. Este hecho solo ha sido posible debido simultáneamente al rápido desarrollo de los sistemas digitales tanto de control gráfico como de fabricación. Las formas libres previamente a la introducción de elementos digitales solían quedar relegadas a desarrollos que raramente tenían una materialización física o esta se veía fuertemente condicionada por los sistemas de control geométrico disponibles en cada situación (Fig. 1). Sin el uso de herramientas digitales no ha sido posible por ejemplo

la materialización de las ideas de *Frank Gehry*, que paralelamente han necesitado de los avances geométricos teóricos propuestos a tal efecto en los trabajos de *J. Glymph* y *D. Shelden*. (1,2)

Resultan indudables las ventajas que presentan, principalmente desde el punto de vista económico, los procesos constructivos que utilizan superficies planas o desarrollables en la resolución de superficies de doble curvatura. Cuando se trata de construir formas complejas necesitamos de sistemas constructivos racionales donde la economía de medios esté presente sin dejar de lado la fide-

## Introduction

Architecture in recent years has seen an extensive use of double curvature surfaces **1**. Simultaneously supported in new design and digital fabrication systems there has been an important development in the construction of this kind of surfaces. Before the use of these kind of processes freeform surfaces used to be relegated to developments that rarely were constructed or their construction were closely related and transformed by the geometric control systems which would be applied in each situation (Fig.1). The employment of this type of digital tools has allowed to see examples of buildings with spectacular results, like Frank Gehry's designs, supported by the researches and geometric developments of J. Glymph and D. Shelden (1,2). Undoubtedly constructive processes that use



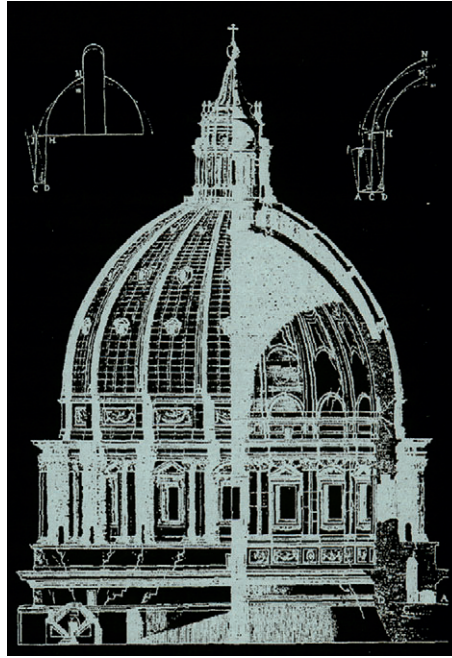
planar or developable surfaces solving double curvature forms suppose a great amount of advantages, mainly from the resource based economy point of view. When it comes to build complex shapes we should use rational constructive systems that offer simultaneously a great fidelity reproducing the projected form as an appropriate economy about the material use. The use of developable surfaces adapting freeform shapes represent a relevant strategy on their development and construction. Freeform adaptation strategies like those raised by H. Pottman (3) are passing through the adaptation of these kind of surfaces by using planar quadrilateral facets or developable strips.

In addition to the purely theoretical interest about developable surfaces, we must not forget that construction materials commonly used in building construction are produced in planar or laminated shape so their capacity to adapt double curvature surface is limited. Metallic materials and laminated wooden panels are adequate to reproduce single curvature surfaces, whereas glass requires expensive processes to allow its use over non planar geometries. As well, structural system unions as bar joints resolution became considerably easier if we use four side faces instead triangular ones.

Using two kind of prototypical developable surfaces a double curvature surfaces adaptation system has been achieved. Supporting on the apparent contours geometric concept 2 and by using the systematization of a process inspired by traditional projective Geometry. An algorithm has been developed that systematizes the way to obtain either single curvature strips or planar quadrilateral facets. From the geometric point of view, these strips are developable surfaces due to the fact that they are extracted from cones or cylinders.

### Theoretical basis

At any of the numerous examples of spherical domes (Fig. 2), the sphere shape is built by cylindrical sections actually, basic geometry of the dome, are supported on said surface along its meridian curves. These cylindrical sections and circumscribed developable tangent surfaces to the original spherical surface, two by two cylindrical sections intersecting along a curve outside the primitive surface, constructively materializing in said dome ribs, forming the



2

dad en la reproducción de la forma proyectada. Una estrategia adecuada para el desarrollo y construcción pasa por su adaptación mediante el uso de superficies desarrollables. Estrategias de adaptación de superficies libres, como las planteadas por H. Pottman (3) pasan por la adaptación de estas superficies mediante la generación de facetas cuadriláteras planas o tiras desarrollables.

Además del propio interés geométrico puramente teórico que plantean estos desarrollos, no podemos olvidar que los materiales empleados en construcción son producidos industrialmente en formatos planos o laminados, la capacidad de adaptarse a superficies de doble curvatura es escasa. Los elementos metálicos y los laminados de madera son adecuados para la reproducción de superficies de curvatura única, mientras que el vidrio requiere costosos procesos para su adaptación a geometrías que no sean planas. La resolución de nudos y uniones en sistemas estructurales se simplifica de forma significativa si en lugar de superficies triangulares, empleamos caras de cuatro o más lados.

2. Cúpula San Pedro. Vaticano. Secciones cilíndricas, geoméricamente desarrollables, que adaptan la forma esférica

3. Contorno aparente. (izquierda) Figura correspondiente al texto de F. Izquierdo Asensi. (derecha) Interpretación sobre una superficie de forma libre

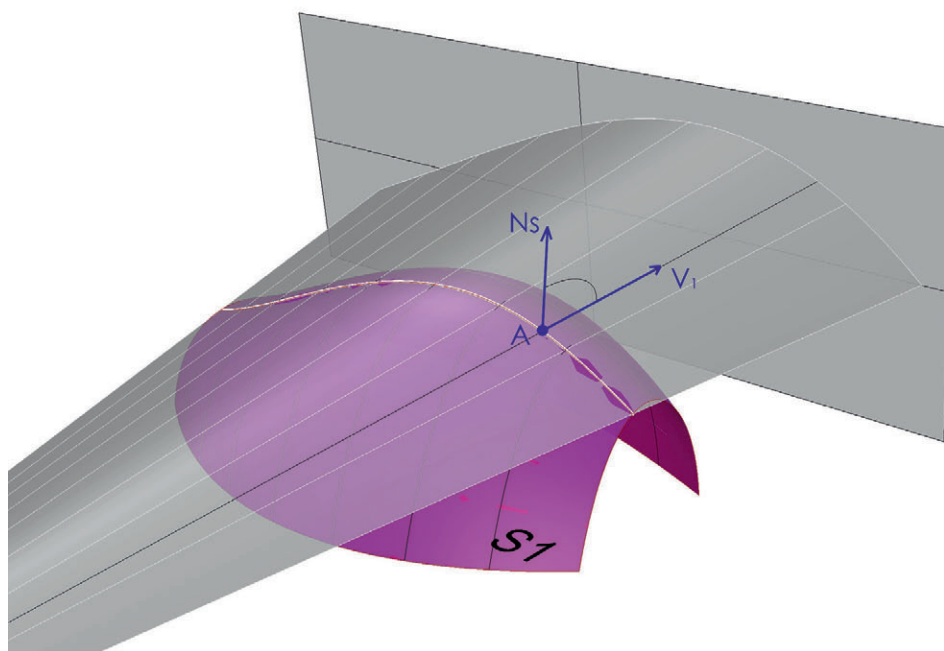
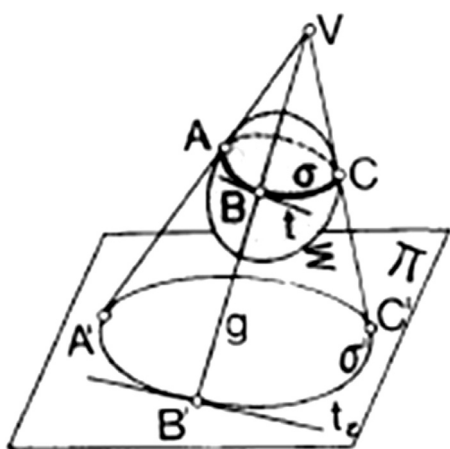
2. Saint Peter's Dome. Vatican. Cylindrical sections, geometrically developable, that adapt to the spherical shape

3. Apparent contour. (left) Figure of F. Izquierdo Asensi text. (right) Example on a freeform surface

Utilizando dos tipos de superficies desarrollables prototípicas se ha desarrollado un sistema de adaptación de superficies de doble curvatura mediante superficies desarrollables. Apoyado en el concepto geométrico de los contornos aparentes 2 y mediante la sistematización de un proceso inspirado en la Geometría proyectiva tradicional se ha construido un algoritmo que sistematiza la obtención tanto de tiras de curvatura única como de facetas cuadriláteras planas. Estas tiras son desde el punto de vista geométrico superficies desarrollables por estar extraídas de conos o cilindros.

### Fundamento teórico

Si analizamos alguno de los numerosos ejemplos de cubrición de cúpulas esféricas (Fig. 2), podemos observar que desde el punto de vista geométrico, las superficies que realmente dan forma a la esfera, geometría básica de la cúpula, son secciones cilíndricas tangentes a dicha superficie esférica a lo largo de los meridianos de la misma. Estas secciones tangentes y circunscritas a la superficie esférica, se intersecan dos a dos a lo largo de una



curva exterior a la superficie primitiva, materializándose constructivamente en los nervios de dicha cúpula y delimitando esta superficie cilíndrica el entrepaño de la cúpula.

De manera análoga a esta adaptación realizada con cilindros, podríamos envolver la misma superficie esférica utilizando secciones cónicas y por tanto desarrollables pertenecientes a las superficies proyectantes que generan contornos cónicos, comprendidas entre los contornos aparentes y la intersección de las superficies de proyección contiguas o sus prolongaciones. En cualquier caso esta superficie tangente será envolvente exterior en el caso de la esfera.

Concluimos por tanto que podemos envolver una superficie esférica, de doble curvatura positiva, con una familia de superficies desarrollables, conos o cilindros de curvatura nula y por tanto desarrollables, que se apoyan tangencialmente en esta superficie a lo largo de las líneas de contorno aparente, que en este caso concreto son circunferencias.

En el caso de la cubrición de una cúpula, se realiza un proceso de adap-

tación de la superficie de doble curvatura ante una necesidad constructiva. Se produce a priori una simplificación, reducimos una superficie de doble curvatura y la adaptamos usando un conjunto de superficies de curvatura simple, desde el punto de vista geométrico desarrollables. Estas secciones desarrollables se pueden entender como una serie de tiras, un envoltorio de la forma esférica. La simplificación resulta solo aparente puesto que la complejidad geométrica en cuanto a las restricciones que la superficie desarrollable plantea en comparación con la superficie de forma libre, son mayores.

El método que planteamos a continuación tiene como inspiración este principio al que estamos habituados. Abstrayendo el proceso que produce la aproximación geométrica de la cúpula esférica, podríamos repetirlo en principio sobre cualquier superficie independientemente de su geometría. Nos interesa evidentemente el caso de las geometrías de doble curvatura y el caso clásico de la esfera es una de ellas.

Cuando dibujamos una superficie, mediante cualquier sistema de

border of the cylindrical surface of the panel. In a similar way to this cylindrical adaptation, we could involve the primitive spherical surface using conical sections and therefore the developable surfaces will go to produce conical projection contours, between the apparent contour and the intersection of the adjacent projection surfaces or their prolongations. This surface will always be the outer skin of the sphere.

We can therefore conclude that we can wrap a spherical surface with a family of developable surfaces, cones or cylinders, which are supported on this surface tangentially along apparent contour lines, which in this case are the sphere major circles.

It performs an adaptation process of the double-curved surface due to constructive request. Previously occurs a geometrical simplification the double curved surface is adapted using a set of single-curved surfaces, so developable from the geometrical point of view. These cylindrical or conical sections can be understood as a series of strips, a envelope of the spherical shape. The method we propose is inspired by this well known principle. Abstracting the process that produces the geometrical approximation of the spherical dome, it could be repeated at any surface regardless of its geometry, we want to solve evidently the case of double curvature surfaces and the spherical geometry is one of this kind of surfaces.

When we draw a surface, using any system of representation, either a freehand drawing on paper



4. Lámina XXIV. Application de L'analyse a la Geometrie. G. Monge

5. Contornos aparentes obtenidos mediante la proyección desde diversos puntos de vista. A la izquierda contornos aparentes desde puntos impropios. Centro y derecha contornos obtenidos desde diferentes trayectorias formadas por puntos propios

4. Page XXIV. Application de L'analyse a la Geometrie. G. Monge

5. Apparent contours obtained through the projection from different points of view. On the left, apparent contours from improper points. Center and right, contours obtained from different trajectories formed by proper points

representación, ya sea un dibujo a mano alzada sobre papel o un modelo *renderizado* informáticamente, el proceso necesita definir una línea que delimite el borde del objeto representado, separando la parte del

objeto que el observador es capaz de ver, de la que queda oculta. Esto es básicamente el contorno aparente de dicha superficie.

Geoméricamente, siguiendo la definición de Izquierdo Asensi (4):

or software-rendered model, the process needs to define a line that marks the edge of the object represented, separating the part of the object that the observer is able to see, which is hidden. This is basically the apparent contour of a surface.

Geometrically, following the definition of Izquierdo Asensi (4): "the apparent contours of a surface  $\Sigma$  from a point  $V$  outside it,  $\sigma$  is the locus of contact points  $A, B, C, \dots$  tangent to or belongs to tangent planes to  $\Sigma$  passing through  $V$ ." We also know that if  $V$  is an improper point, the cone becomes a cylinder. (Fig. 3)

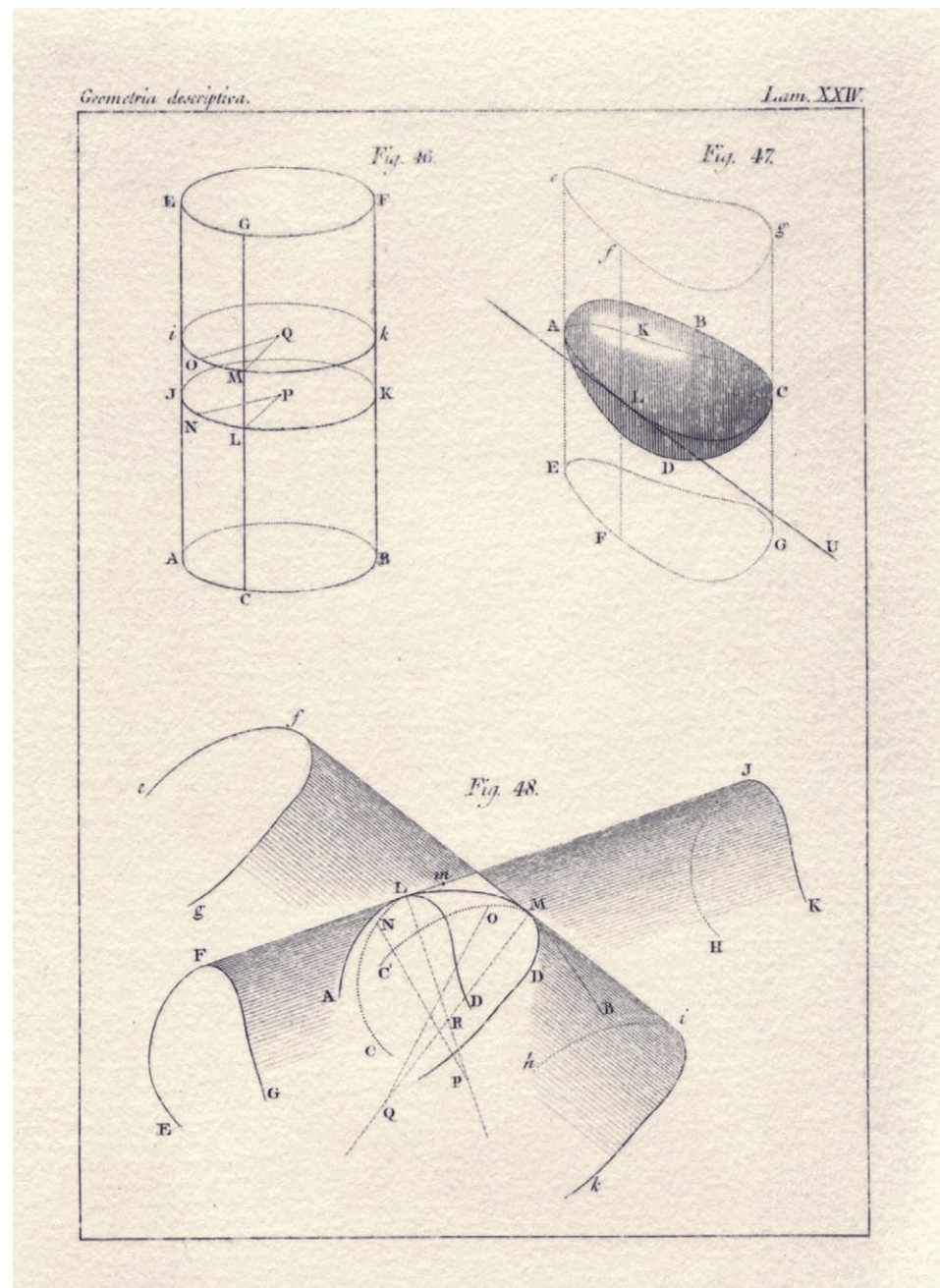
A surface wraps the object displayed, depending on the viewpoint  $V$ , the surface tangent to the object along a series of points that define their apparent contour is a developable surface, in this case a cone or a cylinder depending on the relative position of point  $V$ .

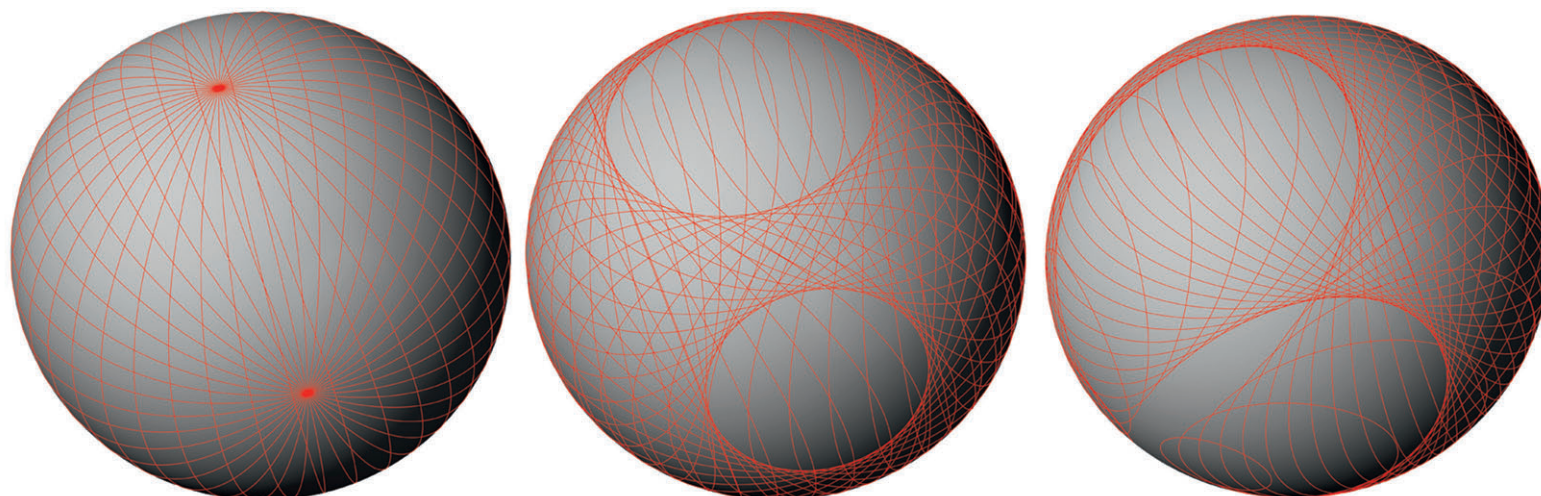
Thus we can draw on any surface several group of lines, apparent contours along that we can built tangent developable surfaces, at this case cones or cylinders, over the surface itself. And in this way extract a section delimited from these developable surfaces, similarly to what happens to the spherical dome, the intersection of the auxiliary cones or cylinders determining the limits of these.

Tracing apparent contours on freeform surfaces actually is a difficult work by manual processes, but using CAD software this process turns so much easier. As a result we obtain a sistematization of projective geometry procedures that were exposed yet by Gaspard Monge (Fig. 4).

### Development of the method

The adaptation proposed systematizes a classic process using an algorithm that allows the use on any kind of surface, regardless of their curvature. First the theoretical basis structure is translated and a codified using a generative





5

“el contorno aparente de una superficie  $\Sigma$  desde un punto  $V$ , exterior a ella, es el lugar geométrico  $\sigma$  de los puntos de contacto  $A, B, C, \dots$  de las tangentes o de los planos tangentes a  $\Sigma$  que pasan por  $V$ .” Además sabemos que si  $V$  es un punto impropio, el cono se transforma en un cilindro. (Fig. 3)

Una superficie envuelve el objeto que se visualiza, en función del punto de vista  $V$ , esta superficie, tangente al objeto a lo largo de una serie de puntos que definen su contorno aparente, es una superficie desarrollable, en este caso un cono o un cilindro en función de las características del punto  $V$ , de forma sencilla de su posición.

De esta forma podemos trazar sobre cualquier superficie una serie de líneas, siluetas, contornos generadores o aparentes, que son las tangentes de superficies desarrollables, conos o cilindros, con la propia superficie. Y extraer de esta superficie desarrollable una parte delimitada, análogamente a lo que sucede para la cúpula esférica, por la intersección de los conos o cilindros auxiliares que determinan los contornos.

El trazado de contornos aparentes en superficies libres resulta muy complejo si recurrimos a procesos manuales pero se simplifica sustan-

cialmente si empleamos programas de CAD. Resultando una sistematización de los mecanismos empleados en la geometría proyectiva que planteó en su momento Gaspard Monge (Fig. 4).

### Exposición del método

La aproximación que se plantea sistematiza un proceso clásico mediante el uso de un algoritmo que permitirá su aplicación sobre cualquier tipo de superficie, independientemente de la naturaleza de su curvatura. En primer lugar transcribimos la estructura del fundamento teórico y procedemos a construir el código usando una herramienta de modelado generativo que está viendo en la actualidad un extensivo uso en Arquitectura, conocida como *Grasshopper* (5). Se trata de una potente herramienta de diseño, un *plugin* que utiliza como soporte gráfico el programa de diseño de superficies NURBs *Rhinceros* (6).

Tomando una superficie de doble curvatura (Fig. 5), procedemos a generar una familia de contornos aparentes, mediante el desplazamiento del punto de vista a lo largo de una trayectoria de cualquier naturaleza, en nuestro caso utilizaremos una recta propia o impropia.

modelling tool known as *Grasshopper* (5). This is a powerful design tool that is used extensively not only in Architecture. This plug-in uses *Rhinceros* (6) as its graphical support. Taking a double curvature surface (Fig. 5), we proceed to generate a family of apparent contours, by moving the point of view along any kind of path, in our specific case a straight proper or improper line is used.

On the left, apparent contours from improper points. Center and right, Contours obtained from different improper point trajectories.

There is a projecting surface that contains each apparent contour, moreover this surface generate the contour and would be get in an easy way, in this case using the contour and the point of view. Thus for each contour a surface would be generated, a conic surface if proper points are taken or cylindrical if they are improper ones. Any way, both types of warped surfaces are tangential surfaces in relation with the original shape.

The number of projectant surfaces by mean cones or cylinders are parametrically determinated depending on the kind of the surface to adapt and also the design constraints. After having determined this set of circumscribed surfaces, the intersections between adjacent cylinder or cones would be obtained. In this way, every section from the projective surface are delimited. The extraction of the patch bounded by the intersections between cylinders allows to obtain a cylindrical developable strip that fits the surface. (Figs. 6 and 7)

In this way it is possible to probe multiple options using the same primitive freeform shape; if appropriate, the best set will be chosen, meaning the path that enables to obtain the optimal contour set and consequently allows



to ensure a more favorable set of curves which could be used to fit the developable strips. Consequently, from the constructive point of view, a key feature of the developable surfaces from which the most useful application is obtained, is that theoretically they can be deployed on a plane. They can be developed without creases or folds, on a flat surface. Conversely, a developable surface can be constructed from a plane. It means that by using any kind of flat or planar constructive element a developable surface can be built.

### Implementation. Adaptation of physical models

The basic objective of the research is to find results that can be extrapolated to the physical and constructive environment so once the graphical way of the surface of double curvature adaption is solved, the checking of the validity of the method must be done by transferring the geometric resolution results to physical models. (Fig.8)

Several cases have been studied from both graphical and physical points of view through the construction of prototypes using different types of light materials. We are talking about prototypes, not models. On the prototypes and during their implementation process, the behaviour of materials could be anticipated in relation to the way in which they are arranged, and their physical interaction. The prototype has an added value in relation to a purely formal model. The results in terms of tolerances can be checked. Furthermore the deformation and the adaptability in lightweight materials from which the prototypes are made up, anticipate somehow the behaviour of materials that will be used to build the final model.

We can see that this graphic and geometrical process can be directly extrapolated to physical environment by using digitally controlled tools. This is only possible if there would be the correct interconnection of software and hardware that allows a constant feedback process from one to another area, from the physical to digital. So the relationship between graphical design and geometric control results verifiable through digital fabrication. There is no intermediary any more inside the procedure. So construction returns to the architect control directly.

6. Obtención de tiras cónicas sobre superficie de puntos elípticos (arriba) e hiperbólicos (abajo) a partir de superficies cónicas proyectantes circunscritas sobre contornos cónicos  
7. Aplicación del método sobre superficie de curvatura no uniforme

Conteniendo cada contorno aparentemente obtenido existe una superficie proyectante que además geométricamente la genera y que se puede obtener de forma sencilla, en este caso de manera inversa, utilizando el contorno y su punto de proyección. De esta forma y para cada contorno obtenemos una superficie bien sea esta cónica si utilizamos puntos propios o cilíndrica si por el contrario utilizamos puntos impropios, en cualquiera de los casos tangente a la superficie base de partida.

El número de superficies proyectantes, es decir los conos o cilindros, es determinado paramétricamente, dependiendo del tipo de superficie a adaptar y de los condicionantes propios del diseño. Determinado este conjunto de superficies circunscritas, procedemos a obtener la intersección de los cilindros o conos proyectantes contiguos. Delimitamos así una sección de superficie proyectante entre las dos intersecciones. (Figs. 6 y 7)

El proceso resulta flexible en cuanto de la elección tanto de los puntos de vista como de las trayectorias, estando estas parametrizadas mediante la subdivisión de la propia trayectoria elegida. De forma inversa, podemos obtener las trayectorias que generan contornos que contienen determinados puntos de la superficie, mediante la intersección del plano tangente a la superficie en dicho punto y la recta utilizada como trayectoria.

Cada una de las secciones o tiras que obtenemos son perfectamente desarrollables, es posible desplegarlas sobre un plano sin ningún tipo de deformación ni rotura e inversamente pueden ser construidas a partir de un plano, pertenecen a una superficie generadora cónica o cilíndrica.

6. Conic strips on a surface of elliptic (up) and hyperbolic points (down) obtained from conic circumscribed surfaces projected on conic contours  
7. Implementation of the method on a surface of non regular curvature

El despliegado de estas tiras permite generar sobre el plano el conjunto de elementos que geométricamente adaptan la superficie, lo que permite emplear el proceso en el desarrollo de modelos físicos, como se describe a continuación.

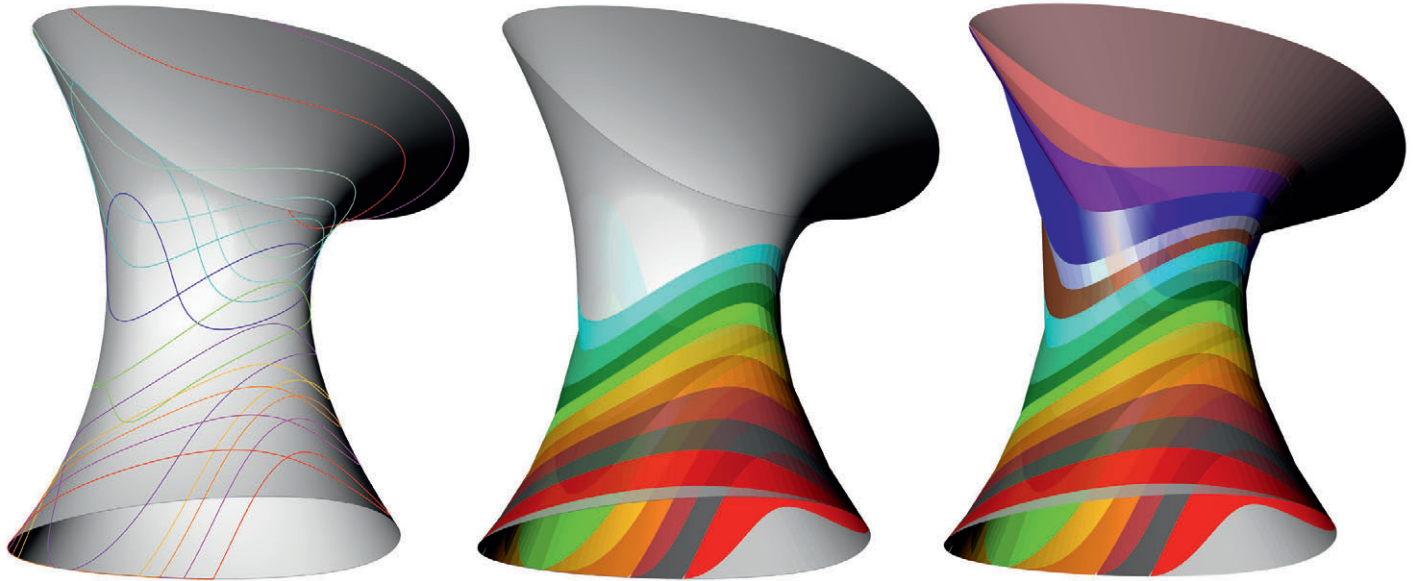
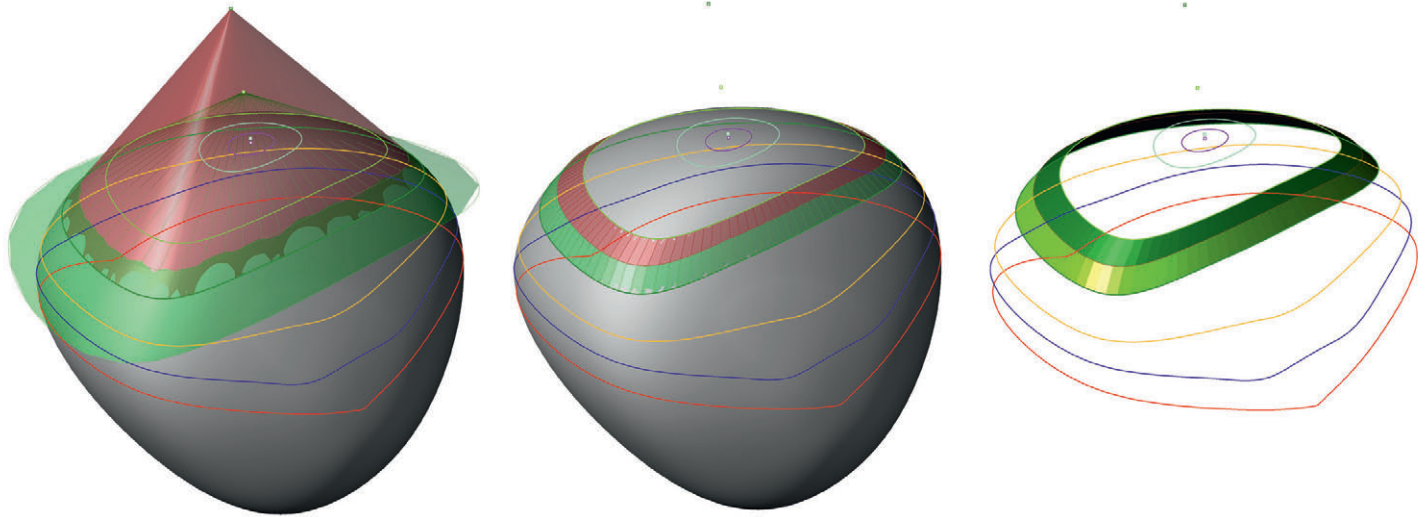
### Aplicación. Desarrollo de modelos físicos

Como se señalaba inicialmente, el objetivo básico de la investigación es encontrar unos resultados geométricos extrapolables al ámbito físico y constructivo por lo que se ha procedido a comprobar físicamente la realidad del sistema, la aproximación de la forma y el comportamiento del material.

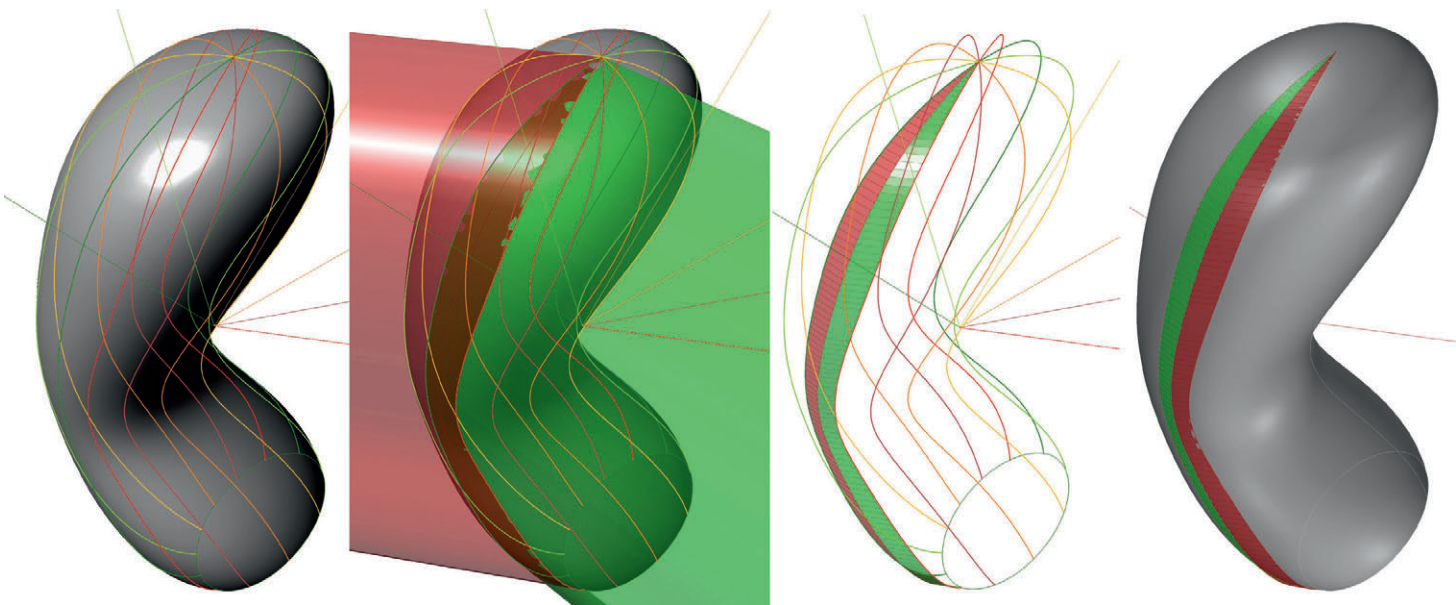
Todos los casos se han estudiado gráfica y físicamente, mediante la construcción de prototipos en diferentes materiales. En ambas vías se puede apreciar la fidelidad en la reproducción física del resultado comparándolo con el modelo. (Fig. 8)

Es interesante destacar como en el prototipo es posible observar las dificultades que pueden plantear los materiales en situaciones constructivas reales debidos a su propia naturaleza, espesor, tolerancia en el corte, etc.

El salto del desarrollo gráfico a la forma física hace necesario desarrollar un sistema de uniones a lo largo de las curvas isoperimétricas que para tiras contiguas constituyen los bordes de las mismas y que hemos generado por desarrollo o despliegado de las superficies de proyección tangentes a los contornos aparentes. Este punto se resuelve desde el propio prototipo, formulando un sistema de unión mecánico válido para cada caso y material. Cabe destacar la importancia que la curvatura tiene a la hora del



6



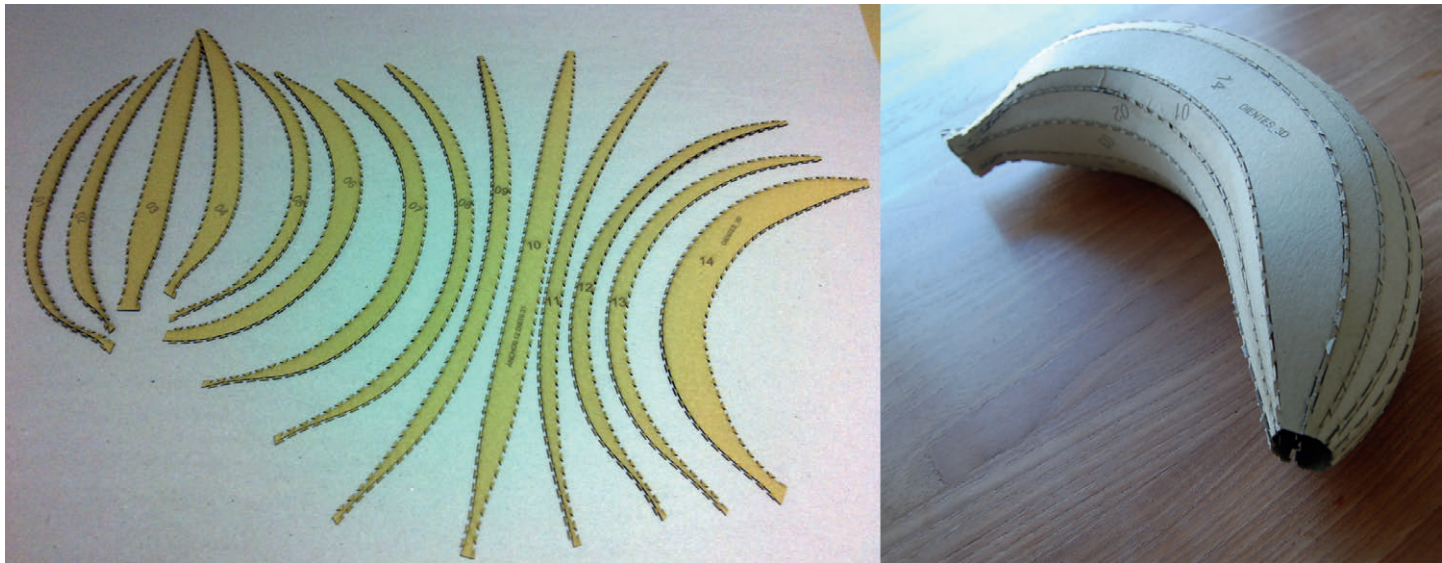
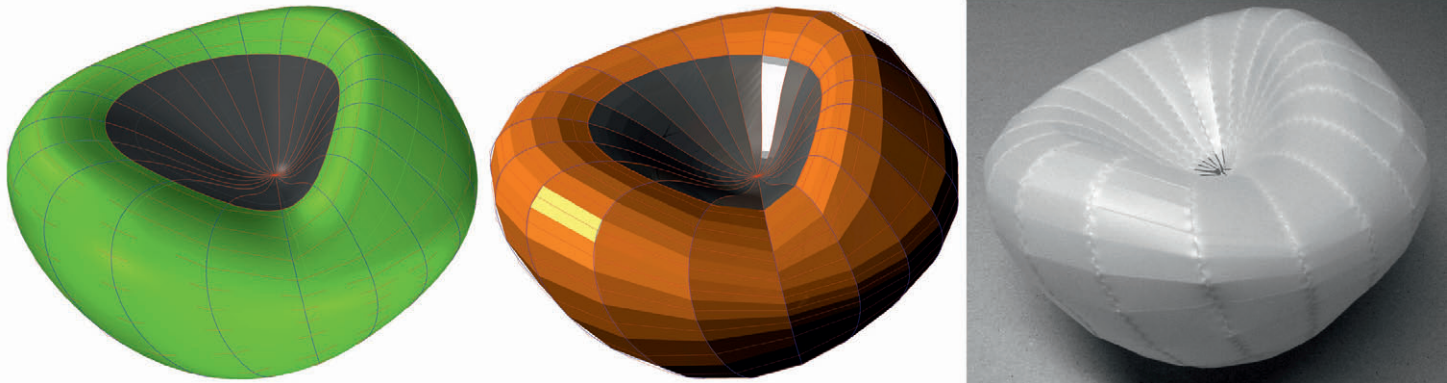
7



## 8. Diferentes soluciones de modelos físicos a partir de formas complejas

### 8. Different prototypes of freeform shape physical models

218



8

## Conclusion

In conclusion, adaptation is a procedure that implies an alteration of the original shape, so it is necessary to find a balance between constructive economy and fidelity in the reproduction of the form. Based on these premises the theoretical geometric method of adaptation of double curvature surfaces has been formulated, using developable strip surfaces as well as quadrilateral planar facets. The method pretends to be suitable for use over any kind of free form surfaces construction. The formulation of a geometrical method is shown; as we have seen it offers

montaje de los prototipos, necesitando adaptar la dimensión de los elementos de unión a dicha curvatura. Este aspecto a pesar de que plantea una dificultad añadida es fácilmente abordable pudiendo ser igualmente parametrizado, generando un algoritmo que posibilita el trazado gráfico automático de las uniones.

Vemos que este proceso geométrico y gráfico tiene una extrapolación directa al espacio físico mediante el empleo

de las herramientas digitalmente controladas. Esto es posible mediante la interconexión del software y hardware que permite un proceso continuo de ida y vuelta desde uno al otro ámbito, desde el entorno digital al físico y a la inversa. El diseño gráfico y el control geométrico resultan fácilmente validables mediante la fabricación digital. No existe intermediario en el procedimiento. La construcción regresa así directamente al control del arquitecto.



## Conclusión

Como conclusión podemos decir que el proceso de adaptación expuesto, implica una alteración de la forma original pero en cualquier caso, en cualquier proceso de adaptación es necesario encontrar un equilibrio entre la economía constructiva y la fidelidad en la reproducción de la forma proyectada. Basado en estas premisas se ha alcanzado un desarrollo teórico geométrico de un método de adaptación de superficies de doble curvatura que es capaz de utilizar tanto facetas cuadriláteras planas como tiras desarrollables. El método es capaz de adaptarse a la resolución de cualquier tipo de superficie de doble curvatura de forma libre dentro del ámbito de la Arquitectura. La formulación geométrica del método, como se ha expuesto, ofrece resultados satisfactorios, siendo apropiada para los objetivos indicados, es decir la adaptación de formas libres y su consiguiente empleo en el desarrollo de formas arquitectónicas y su construcción tanto de prototipos como de formas finales.

Podemos señalar además, que la potencia que ofrece la computación y la parametrización de los procesos gráficos tradicionales puede llegar a alcanzar como resultado la generación y el desarrollo de conceptos que difícilmente pueden ser abordados sin la capacidad que ofrecen en la actualidad las herramientas digitales. Las posibilidades que ofrece el control geométrico y la fabricación digital no se reducen a la realización de “arquitecturas digitales”. La implantación de estos procesos, especialmente en los campos de la investigación y la enseñanza de la Arquitectura, permiten tanto la profundización como el desarrollo de

la geometría como disciplina. Retomar el control gráfico y geométrico de la forma que se pretende construir y poder extender este control hasta el objeto material, validar la forma y poder regresar al diseño en un proceso único, extendiendo la frontera de la capacidad de proyectar y construir. ■

### Notas

1 / La denominación como superficies de doble curvatura sigue la clasificación más extendida en cuanto a las superficies curvas, tal como podemos encontrar en toda la bibliografía referenciada, además de en el texto de A. Gheorghiu y V. Dragomir acerca de la cualidad de la curvatura de las superficies.

Izquierdo Asensi menciona así mismo la cualidad de la curvatura de una superficie en relación a la ecuación de Euler de donde se deduce el valor de la curvatura media y total, y así: “ Si una de las secciones principales es una recta ( curvatura nula ), la superficie es de simple curvatura, y si las dos secciones principales son curvas, de doble curvatura”. Además, podríamos añadir que en caso de que el valor de la curvatura fuese respectivamente positivo o negativo, estaríamos hablando de una superficie de puntos elípticos donde las dos curvaturas principales tienen el mismo signo o hiperbólicos donde el signo es contrario.

2 / El fundamento del método se basa en la utilización del lugar geométrico de los puntos que sobre una superficie cualquiera  $\Sigma$ , son generados por rectas tangentes que pasan por un punto dado V exterior a la superficie. Nos estamos refiriendo a la curva  $\sigma$  que aparece en la figura 3, extraída del texto de Izquierdo Asensi.

### Referencias

- (1) James GLYMPH, Dennis SHELDEN, Cristiano CECCATO, Judith MUSSEL & Hans SCHOBBER “A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets”, *Automation in Construction*, vol. 13, no. 2, pp. 187-202.
- (2) SHELDEN, D.R. & Massachusetts Institute of Technology. Department of Architecture 2002, *Digital surface representation and the constructibility of Gehry's architecture*, .
- (3) POTTMANN, H. & BENTLEY, D. 2010, *Architectural geometry*, Bentley Institute Press.
- (4) IZQUIERDO ASENSI, F. 1996, *Geometría descriptiva superior y aplicada*, 4a corr y amp edn, Paraninfo.
- (5) GRASSHOPPER. Generative modeling for Rhino. <http://www.grasshopper3d.com>
- (6) RHINOCEROS. NURBs modeling for Windows. <http://www.es.rhino3d.com/>

satisfactory results, being suitable for the objectives indicated at the beginning of the paper: graphic adaptation of form and its consequent development and construction, prototypes as well as finished architectural elements.

In addition, should be said that computation and parametrization applied within the traditional graphic processes would reach as a result the development and generation of concepts that hardly could be approached without the power that nowadays offer digital tools. Possibilities allowed by digital geometric control and fabrication do not finish at “digital architectures”. The use of these kinds of processes, especially in Architectural researching and teaching, allows a deeper development of the Geometry as proper knowledge. ■

### Notes

1 / Double curvature surfaces is a common denomination profusely used in general bibliography. A. Gheorghiu y V. Dragomir use this denomination about the curvature quality of the surfaces. Izquierdo Asensi mentions the curvature quality of a surface related with Euler's equation where the mean and total curvature value is reduced, so: “One of the principal sections is a straight line ( zero curvature), this surface is named as simple curvature surface, and if both principal sections are curves, this surface is named as double curvature surface”. Besides, we would say that if the curvature value was respectively positive or negative, we would talk about a elliptic points surface where both curvatures were equal in sign or hyperbolic points surface if the sign were opposite.

2 / The foundation of the method is focused on the use of apparent contours. They are defined as the geometrical place on any surface  $\Sigma$  where several points are generated by tangent straight lines passing through a selected point V outside the surface. We are referring to the curve  $\sigma$ , that appears on the figure 3 extracted from Izquierdo Asensi's text.

### References

- (1) James GLYMPH, Dennis SHELDEN, Cristiano CECCATO, Judith MUSSEL & Hans SCHOBBER “A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets”, *Automation in Construction*, vol. 13, no. 2, pp. 187-202.
- (2) SHELDEN, D.R. & Massachusetts Institute of Technology. Department of Architecture 2002, *Digital surface representation and the constructibility of Gehry's architecture*, .
- (3) POTTMANN, H. & BENTLEY, D. 2010, *Architectural geometry*, Bentley Institute Press.
- (4) IZQUIERDO ASENSI, F. 1996, *Geometría descriptiva superior y aplicada*, 4a corr y amp edn, Paraninfo.
- (5) GRASSHOPPER. Generative modeling for Rhino. <http://www.grasshopper3d.com/>
- (6) RHINOCEROS. NURBs modeling for Windows. <http://www.es.rhino3d.com/>