



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

**COMPORTAMIENTO HISTERÉTICO DE
MATERIALES MAGNETOESTRICTIVOS.
ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS
APLICADO A ESTRUCTURAS AERONÁUTICAS.**

Autor

Rubén Forner Clari

Director

José Luis Pérez Aparicio

Codirector

Pablo Moreno Navarro

**Universidad Politécnica de Valencia
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño**

Valencia - de 2016

COMPORTAMIENTO HISTERÉTICO DE MATERIALES
MAGNETOESTRICTIVOS. ANÁLISIS POR ELEMENTOS
FINITOS APLICADO A ESTRUCTURAS AERONÁUTICAS.

Rubén Forner Clari

Universidad Politécnica de Valencia
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

..... de 2016

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	III
Índice de tablas	VI
Lista de símbolos	VIII
1. Introducción	1
1.1. Definición de <i>Smart Structure</i>	1
1.2. Definición de los materiales magnetostrictivos	3
1.2.1. Ciclo de histéresis	5
1.3. Aplicaciones de los materiales magnetostrictivos	6
1.3.1. El Sonar	6
1.3.2. Válvula magnetostrictiva	8
1.3.3. Telescopio astronómico de rayos-X	9
1.3.4. Sistema activo de control vibracional	10
1.3.5. Modificador de espesor de un perfil	11
1.4. Estado del arte	11
2. Formulación	13
2.1. Formulación elástica	13
2.1.1. Acoplamiento termoelástico	16
2.1.2. Condiciones de contorno	18
2.2. Formulación electromagnética	19
2.2.1. Ley de Biot-Savart	21
2.2.2. Acoplamiento electromagnético	23
2.2.3. Acoplamiento piezomagnético y piezoeléctrico	24
2.2.4. Condiciones de contorno	25
2.3. Resumen de las ecuaciones	26
3. Validaciones del programa	29
3.1. Problema electroestático bidimensional	29
3.2. Problema esfera termoelástica	31
3.3. Problema viga termoelástico	33
3.3.1. Viga biempotrada	34
3.3.2. Viga con articulación vertical móvil	35
3.3.3. Viga biarticulada	37
3.4. Acoplamientos	39
3.4.1. Acoplamiento electromagnético	41
3.4.2. Acoplamiento piezoeléctrico	42
3.5. Acoplamiento piezomagnético	43

4. Modelización de un miniactuador magnetostrictivo	46
4.1. Mallado	46
4.2. Propiedades del Terfenol-D	47
4.3. Resultados y limitaciones	51
4.4. Soluciones	52
4.4.1. Matriz de acoplamiento magnetostrictivo polinómica	52
4.4.2. Matriz de acoplamiento magnetostrictivo dependiente	53
4.4.3. Deformación magnetostrictiva	56
4.5. Conclusiones	57

Índice de figuras

1.1. Las <i>Smart Structures</i> imitan el sistema nervioso humano [1]	1
1.2. Avión F-111. Primer avión de geometría variable puesto en producción que entró en servicio el año 1967, diseñado por General Dynamics	2
1.3. Principio del efecto de la magnetoestricción	4
1.4. Elongación frente a campo magnético ideal	4
1.5. Ciclo de histéresis	5
1.6. Principio de funcionamiento del dispositivo Sonar	6
1.7. Composición y funcionamiento de un transductor magnetostrictivo [4], pág. 3	7
1.8. Composición y funcionamiento de un válvula magnetostrictiva [18]	8
1.9. Satélite Chandra X-RAY de la NASA. Telescopio espacial de rayos-X	9
1.10. Esquema de un actuador lineal magnetostrictivo [6], pág. 7	10
1.11. Esquema de un sistema activo de control vibracional [6], pág. 9	10
2.1. Conservación de la energía	17
2.2. Condiciones de frontera para campo elástico	18
2.3. Geometría para ilustrar la ley de Biot-Savart	21
2.4. Condiciones de frontera de la inducción magnética	25
2.5. Condiciones de frontera del campo magnético	26
3.1. Problema electrostático bidimensional	29
3.2. Distribución de voltaje V	30
3.3. Distribución del módulo del campo eléctrico \mathbf{E}	31
3.4. Comparación de la distribución de voltaje V en la diagonal	31
3.5. Esfera termoelástica. Distribución de la temperatura T	32
3.6. Esfera termoelástica. Tensión de Cauchy σ^c	33
3.7. Viga biempotrada	34
3.8. Tensión σ_x en la viga biempotrada	35
3.9. Viga con articulación vertical móvil	35
3.10. Tensión σ_x en la viga con articulación vertical móvil	36
3.11. Ampliación de la tensión σ_x en la viga con articulación vertical móvil	37
3.12. Desplazamiento vertical v en la viga con articulación vertical móvil	37
3.13. Viga biarticulada	38
3.14. Viga biarticulada simplificada	38
3.15. Desplazamiento vertical v en la viga biarticulada	39
3.16. Desplazamiento longitudinal u en la viga biarticulada	39
3.17. Dominio de los acoplamientos	40
3.18. Acoplamiento electromagnético. Distribución del potencial magnético φ	41
3.19. Acoplamiento electromagnético. Distribución del voltaje V	41
3.20. Acoplamiento electromagnético. Magnetización M_3 en $z = l_z/2$	42
3.21. Acoplamiento piezoeléctrico. Tensión de Cauchy σ^c en $z = l_z/2$	43
3.22. Acoplamiento piezoeléctrico. Tensión de Maxwell σ_3^m en $z = l_z/2$	43
3.23. Acoplamiento piezomagnético. Tensión de Cauchy σ^c en $z = l_z/2$	44
3.24. Acoplamiento piezomagnético. Tensión de Maxwell σ_3^m en $z = l_z/2$	44

4.1. Malla de 1/4 de la barra de Terfenol-D	46
4.2. MMA. Comparación resultados FEAP con experimentales [22]	51
4.3. Curva ajustada del campo magnético \mathbf{H} frente a la deformación \mathbf{S} [33]	53
4.4. Diagrama del procedimiento para obtener la solución por partes	55
4.5. Desplazamiento obtenido con FE frente al resultado experimental [27]	56
4.6. Desplazamiento obtenido con FE frente al experimental [31]	57

Índice de tablas

4.1. Propiedades térmicas del Terfenol-D	47
4.2. Propiedades mecánicas del Terfenol-D	48
4.3. Propiedades magnetomecánicas del Terfenol-D	48
4.4. Propiedades eléctricas del Terfenol-D	49
4.5. Transformaciones para las distintas variables dependientes e independientes	51

Lista de Símbolos

Abreviaturas

FE	—	Finite Element.
FEAP	—	Finite Element Analysis Program.
MMA	—	Mini Magnetostrictive Actuator.
J_a	—	Jacobiano.

Mayúsculas

\mathbf{J}, J_i	—	Densidad de corriente (A/m^2).
\mathbf{I}, I_i	—	Intensidad de corriente (A).
V	—	Potencial eléctrico (V).
\mathbf{E}, E_i	—	Campo eléctrico (V/m).
\mathbf{H}, H_i	—	Campo magnético (A/m).
\mathbf{D}, D_i	—	Desplazamiento eléctrico (C/m^2).
\mathbf{B}, B_i	—	Inducción magnética (Wb/m^2).
\mathbf{M}, M_i	—	Polarización magnética (A/m).
\mathbf{P}, P_i	—	Polarización eléctrica (C/m^2).
\mathbf{A}, A_i	—	Potencial vectorial magnético (Wb/m).
\mathbf{X}, \mathbf{Y}	—	Potencial vectorial cualquiera (-).
\mathbf{S}, S_i	—	Deformación (-).
E	—	Módulo de Young (Pa).
G	—	Módulo de rigidez a cortadura (Pa).
L	—	Longitud (m).
T	—	Temperatura ($^{\circ}\text{C}$).
H	—	Entalpía (J).
Q	—	Flujo de calor (J).
N	—	Número de espigas de la bobina (-).

Minúsculas

x, y, z	—	Componentes de los ejes espaciales (m).
u, v, w	—	Componentes del desplazamiento (m).
\mathbf{u}	—	Vector desplazamiento (m).
\mathbf{a}	—	Vector aceleración (m/s^2).
l	—	Longitud (m).
\mathbf{r}	—	Vector posición (m).
\mathbf{c}	—	Matriz de rigidez (Pa).
\mathbf{s}	—	Matriz de flexibilidad ($1/\text{Pa}$).
\mathbf{d}	—	Matriz de acoplamiento piezomagnético (m/A).
\mathbf{g}	—	Matriz de acoplamiento piezomagnético ($\text{A}/\text{Pa}\cdot\text{m}$).
\mathbf{h}	—	Matriz de acoplamiento piezomagnético (A/m).

ÍNDICE DE TABLAS

e^{φ}	—	Matriz de acoplamiento piezomagnético (Pa·m/A).
e^V	—	Matriz de acoplamiento piezoeléctrico (Pa·m/V).
q	—	Carga (C).
d_{33}	—	Constante piezomagnética (nm/A).
k_{33}	—	Factor de acoplamiento magnético (-).
c	—	Velocidad de la luz (m/s ²).
c_p	—	Calor específico (J/kg K).
e	—	Espesor (m).
h	—	Canto de la viga (m).
n	—	Número de iteración (-).

Letras griegas

$d\Gamma$	—	Diferencial de superficie (m ²).
$d\Omega$	—	Diferencial de volumen (m ³).
ρ	—	Densidad de carga (C/m ³).
ρ_v	—	Densidad volumétrica (kg/m ³).
ϵ	—	Permitividad eléctrica del medio (F/m).
μ	—	Permeabilidad magnética del medio (H/m).
χ_e	—	Susceptibilidad eléctrica (-).
χ_m	—	Susceptibilidad magnética (-).
ϕ_B	—	Flujo magnético (Wb).
ξ	—	Fuerza electromotriz (Wb/s).
φ	—	Potencial escalar magnético (A).
σ	—	Tensión total (Pa).
σ^c	—	Tensión de Cauchy (Pa).
σ^m	—	Tensión de Maxwell (Pa).
σ_{ii}	—	Componente normal del tensor tensión (Pa).
τ_{ij}	—	Componente tangencial del tensor tensión (Pa).
ν	—	Coefficiente de Poisson (-).
α	—	Coefficiente de dilatación térmica (1/°C).
ν	—	Matriz de acoplamiento electromagnético (s/m).
κ	—	Constante de conductividad térmica (W/(m ² ·K)).

Subíndices

0	—	Propiedades del vacío.
n	—	Componente normal.
t	—	Componente tangencial.
1, 2, 3	—	Componentes del vector.
i	—	Direcciones x , y y z .
s	—	De saturación.

r — Relativo al vacío.

Superíndices

H — A campo magnético constante.
 E — A campo eléctrico constante.
 B — A inducción magnética constante.
 σ — A tensión constante.
 s — Componente simétrico.
 R — Residual.

1.1. Definición de *Smart Structure*

En 1996, Spillman W. B., Sirkis J. S. y Gardiner P. T. establecieron una definición de estructura inteligente entre una amplia variedad de fuentes; dice lo siguiente: "Una estructura inteligente es una estructura no biológica que tiene los siguientes atributos:

1. Propósito definitivo;
2. Los medios e imperativo para lograr ese propósito; y
3. Un patrón biológico de funcionamiento."

Para explicar mejor el término -patrón biológico- (Figura 1.1), éste se desglosa en cinco partes fundamentales equivalentes al cuerpo humano:

1. La adquisición de datos (sentido táctil): sensores que se encargan de recoger los datos en bruto necesarios para el control y seguimiento de la estructura.
2. La transmisión de datos (los nervios de sensaciones): transmite los datos desde los sensores hasta el centro de control.
3. Centro de control (cerebro): gestiona y analiza los datos, tomando decisiones sobre las acciones determinantes a realizar.
4. Instrucciones de datos (nervios de movimiento): transmite las conclusiones del centro de control a los distintos componentes de la estructura.
5. Dispositivos de acción (músculos): actuadores que llevan a cabo las acciones decididas por el centro de control.

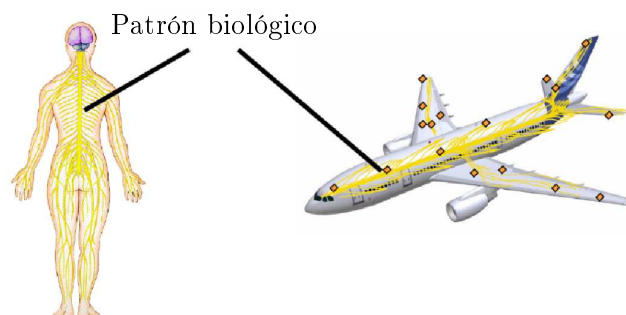


Figura 1.1: Las *Smart Structures* imitan el sistema nervioso humano [1]

En definitiva, el término *Smart Structures* se utiliza para definir estructuras que son capaces de percibir y adaptarse a las condiciones de su entorno, siempre con el fin de conseguir un diseño más útil, eficiente y seguro.

La aplicación de este concepto a la estructura de las aeronaves puede ofrecer mejoras significativas en muchos aspectos, como pueden ser:

- Disminución del peso total de la aeronave.
- Reducir el coste de mantenimiento y de operación.
- Aumentar y mejorar su ciclo de vida.

La principal ventaja de este tipo de estructuras reside en eliminar partes móviles de la aeronave, que comporta una reducción importante del peso y del coste de mantenimiento. Por ejemplo, el concepto *Smart Structure* permitiría sin necesidad de actuadores hipersustentadores, como los flaps y slats, adaptar la superficie del ala a las condiciones de vuelo.

En la actualidad, las aeronaves civiles presentan alas de geometría fija que optimizan un único punto de diseño: para una determinada altura, un peso concreto, un Mach de vuelo, etc. El ala recta permite una mayor sustentación a bajas velocidades, necesario para aterrizar y despegar, no obstante, a altas velocidades ofrece mayor resistencia y limita la velocidad máxima de vuelo debido a la aparición de ondas de choque sobre el ala. La distribución en flecha soluciona los problemas a altas velocidades del ala recta, pero tiene que tomar y salir de tierra a velocidades elevadas debido a su más baja sustentación.



Figura 1.2: Avión F-111. Primer avión de geometría variable puesto en producción que entró en servicio el año 1967, diseñado por General Dynamics

El concepto de geometría variable, ejemplificado en la Figura 1.2, permite aprovechar tanto las ventajas del ala recta como las del ala en flecha. También permite adaptarse al cambio de peso que origina el consumo de combustible, que puede llegar a ser alrededor del 30 % del peso total de la aeronave. Sin embargo, las desventajas estructurales que presenta instalar en la aeronave los actuadores necesarios para permitir la geometría variable son mayores que los beneficios, es por esto por lo que no se utiliza en aviación comercial. Las *Smart Structures* permitirían obtener todas las ventajas de la geometría variable sin

comprometer la integridad de la misma.

También es importante destacar que estas estructuras permitirían tener un control sobre el estado de la misma, con la capacidad de detectar y diagnosticar posibles problemas en su integridad. La técnica del llamado *Structure Health Monitoring* (SHM) o Vigilancia de la Salud Estructural, utiliza sensores incrustados en la estructura que reducirían el coste de inspección y mantenimiento, permitiendo un control más exhaustivo de su estado.

Como se puede leer en el artículo [1], pág. 7:

SHM es un nuevo concepto cuyo momento ha llegado, ya que la tecnología necesaria está disponible para dar los primeros pasos. La reducción de costes de mantenimiento, el aumento de la disponibilidad de aeronaves y el ahorro de peso son objetivos que se pueden alcanzar mediante SHM. Mientras los beneficios de ahorro en mantenimiento son útiles para el vuelo actual, así como para aviones nuevos y futuros, el ahorro de los beneficios del diseño de peso se puede lograr sólo para los nuevos programas de aviones. Independientemente de qué materiales se utilizarán en el futuro, la filosofía de diseño actual, que es aplicada hoy en día por los diseñadores estructurales, será desafiada por la nueva filosofía de diseño basada en SHM.

1.2. Definición de los materiales magnetostrictivos

Para lograr el concepto *-Smart Structure-* es necesario el empleo de materiales especiales, denominados *Smart Materials*. Entre estos destacan: materiales piezoeléctricos (producen voltaje cuando se aplica tensión mecánica y viceversa), polímeros electroactivos (cambian sus propiedades en función de la presencia de un campo eléctrico), materiales halocrómicos (con la capacidad de cambiar de color en función del pH), etc. Sin embargo, otro tipo de materiales dignos de estudio son los llamados materiales magnetostrictivos.

La magnetostricción es una propiedad de los materiales ferromagnéticos a partir de la cual cambian de dimensiones ante la presencia de un campo magnético. Este efecto fue identificado por el científico inglés James Prescott Joule en 1842 observando níquel puro, por lo que también se le conoce como efecto Joule. Dicho efecto se debe a que los materiales ferromagnéticos presentan una estructura dividida en regiones o dominios polarizados magnéticamente, por lo que al aplicar un campo magnético estos dominios se orientan y rotan produciendo un cambio dimensional. Es importante destacar que el volumen total se mantiene constante.

No obstante, denominarlo efecto Joule puede llevar a error, puesto que es fácil confundirlo con otro de sus grandes descubrimientos: el fenómeno irreversible por el cual, si por un conductor circula corriente eléctrica, parte de la energía cinética de los electrones se convierte en calor. Por esta razón se denomina *-Magnetostricción-*.

El principio de magnetoestricción es el responsable de las vibraciones a 100 o 120 Hz (dependiendo del país) que se notan cerca de un transformador o un dispositivo de alta potencia eléctrica. Se producen debido a las fluctuaciones del campo magnético que generan pequeñas deformaciones en el material que se traducen en impulsos sonoros (vibraciones).

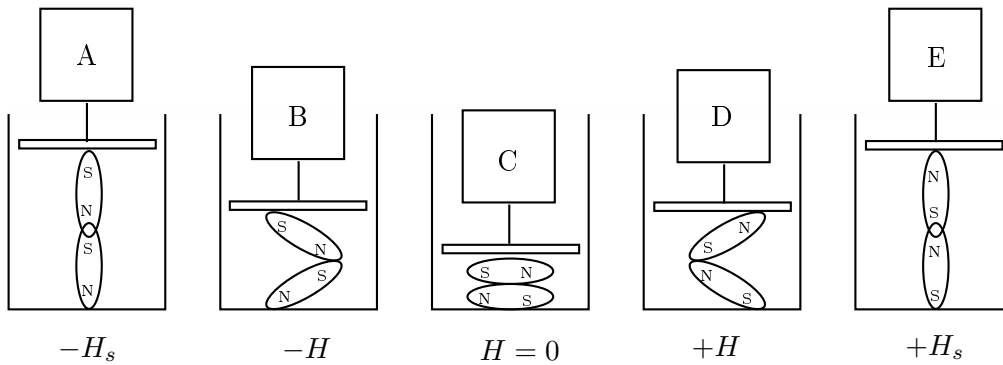


Figura 1.3: Principio del efecto de la magnetoestricción

La Figura 1.3 permite explicar mejor la magnetoestricción: para empezar, se toma como referencia el caso C en el que no hay aplicado ningún campo. A medida que se aplica un campo magnético pequeño $+H$ los dipolos o regiones polarizadas se orientan en la dirección del campo, produciendo un aumento de las dimensiones de la probeta, como se puede observar en el caso D. Esto se produce hasta llegar al punto de saturación (caso E) donde el campo alcanza el valor $+H_s$ y en el que todos los dominios se encuentran orientados, por lo que a partir del cual, aunque se aumente la fuerza del campo magnético no se va a cambiar la longitud de la probeta. En el caso de aplicar un campo magnético de signo inverso, la probeta también aumentará de longitud hasta llegar al punto de saturación, como podemos observar en el caso B y A, respectivamente. No obstante, existen materiales que presentan magnetoestricción negativa, como es el caso del níquel. El fenómeno es anisótropo, puesto que depende de la dirección cristalina del material.

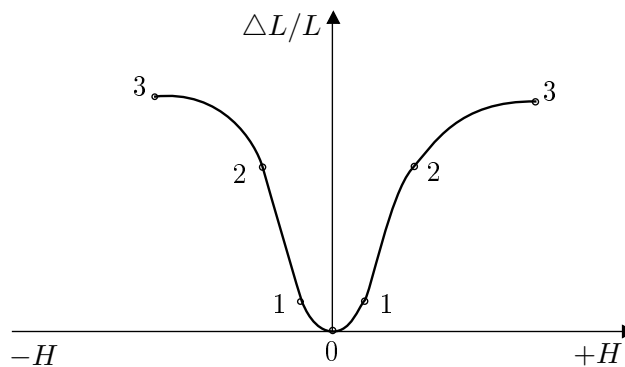


Figura 1.4: Elongación frente a campo magnético ideal

La Figura 1.4 representa el comportamiento ideal del cambio de longitud frente a la presencia de un campo magnético. Como se observa, en el caso de la figura, tanto un campo magnético positivo como negativo producen la misma deformación positiva en el material; ésto no se cumple siempre, puesto que se puede producir una deformación negativa. En la región entre 0 y 1, donde se aplica un campo pequeño, los dominios magnéticos no muestran una orientación en común. Dependiendo de cómo se ha formado el material y de la homogeneidad de la estructura obtendremos mayor o menor elongación. En la región 1-2 se produce la relación lineal más ideal, por lo que conociendo el campo aplicado es fácil predecir como va a deformarse el material; la pendiente se denomina factor de acoplamiento magnético. A partir del punto 2 la relación deja de ser lineal otra vez, debido a que gran parte de los dominios magnéticos están orientados en la dirección del campo. Por último en el punto 3 se produce la saturación.

Al efecto recíproco se le denomina efecto *Villari* o efecto magnetostrictivo inverso: aplicar una presión al material va a modificar sus propiedades electromagnéticas, consiguiendo crear un campo magnético que será función de la presión ejercida. El acoplamiento magnetostrictivo también presenta otros fenómenos como el efecto *Guillemín*: variación del módulo de Young debido a la magnetización; y el efecto *Wiedemann*: torsión que aparece debida al campo magnético longitudinal.

1.2.1. Ciclo de histéresis

El comportamiento de los materiales magnetostrictivos no es tan ideal como se muestra en Figura 1.4. Cuando en un material con propiedades magnetostrictivas, sobre el cuál ha estado actuando un campo magnético H , cesa la aplicación de éste, el material no recupera completamente su estado inicial, sino que permanece cierta elongación residual; este fenómeno recibe el nombre de histéresis.

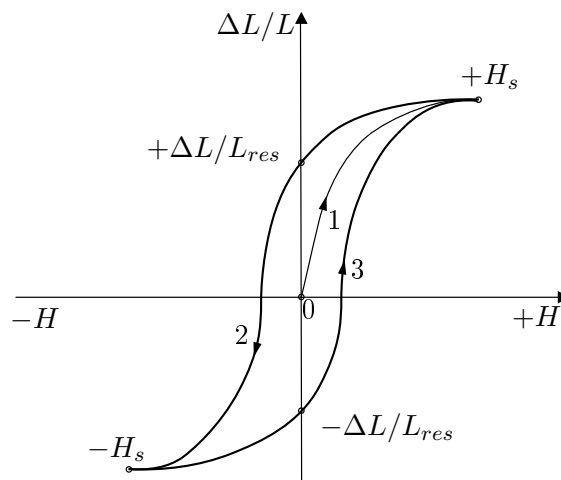


Figura 1.5: Ciclo de histéresis

La Figura 1.5 representa el llamado ciclo de histéresis. Se parte de la posición 0, donde no existe ni elongación ni campo magnético. A medida que se aumenta el valor del campo, se reorientan los dominios magnéticos y aumenta también la longitud $\Delta L/L$ a través de la curva 1, hasta el punto de saturación $+H_s$. Si ahora se restablece el campo como nulo, $\Delta L/L$ desciende a través de la curva 2, pero no se consigue una elongación nula, sino que debido a la histéresis se mantiene un cambio dimensional residual $+\Delta L/L_{res}$. En el caso de imponer un campo negativo $-H$ ocurriría algo similar, la elongación disminuiría hasta el punto de saturación $-H_s$ y al eliminar el campo quedaría una elongación residual negativa $-\Delta L/L_{res}$. Si se aumenta el campo magnético otra vez, lo hará a través de la curva 3 hasta llegar al primer punto de saturación $+H_s$, donde volverá a empezar el ciclo.

Hoy en día no existe ninguna modelización definitiva sobre el ciclo de histéresis, no obstante existen numerosos modelos, cada uno más o menos apropiado para distintos ámbitos de aplicación.

1.3. Aplicaciones de los materiales magnetostrictivos

La aplicación física del efecto de magnetoestricción se reduce al transductor o sensor magnetostrictivo y al actuador. Ambos son dispositivos que convierten energía mecánica en energía magnética y viceversa.

1.3.1. El Sonar

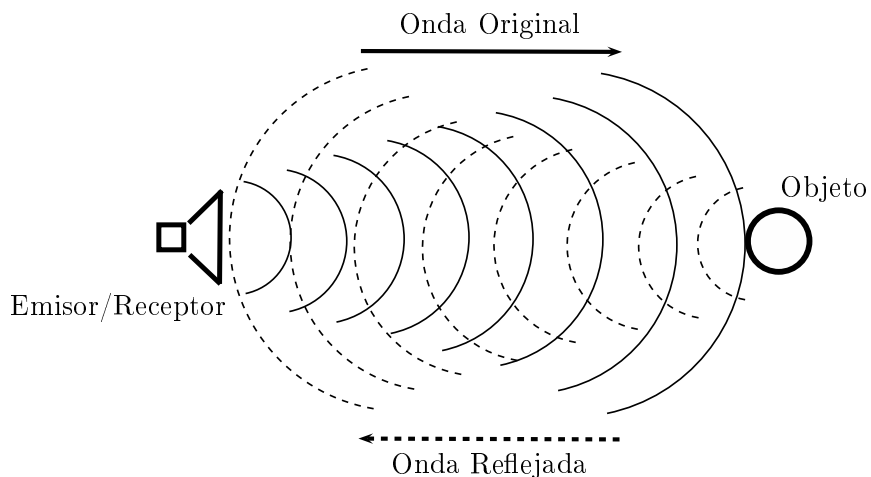


Figura 1.6: Principio de funcionamiento del dispositivo Sonar

El sonar (del inglés SONAR, *SOund Navigation and Ranging*) es un dispositivo que detecta la presencia y situación de objetos sumergidos. Su principio de funcionamiento consiste en medir el tiempo que tarda una onda sonora en salir desde el emisor, reflejarse en el objeto y volver a dicho emisor (Figura 1.6). De este modo, conociendo el tiempo y la

velocidad del sonido del medio, podremos calcular la distancia del obstáculo. En definitiva, funciona de forma similar al radar, pero en vez de utilizar ondas electromagnéticas emplea impulsos sonoros.

Para crear y detectar la reflexión de la onda sonora se emplea un transductor magnetostrictivo, puesto que el material magnetostrictivo permite transformar un campo magnético en deformación del material, y por tanto, en un impulso sonoro y viceversa. En la Figura 1.7 se observan los componentes principales del transductor magnetostrictivo:

- Guía de material magnetostrictivo.
- Imán permanente: genera el campo magnético longitudinal.
- Sensor: detecta que la onda sonora ha regresado al transductor después de reflejarse en un obstáculo.

Además, al final de la guía, el transductor dispone de un elemento que permite absorber todas las vibraciones, evitando interferencias y que el impulso sonoro generado se refleje sobre el propio material.

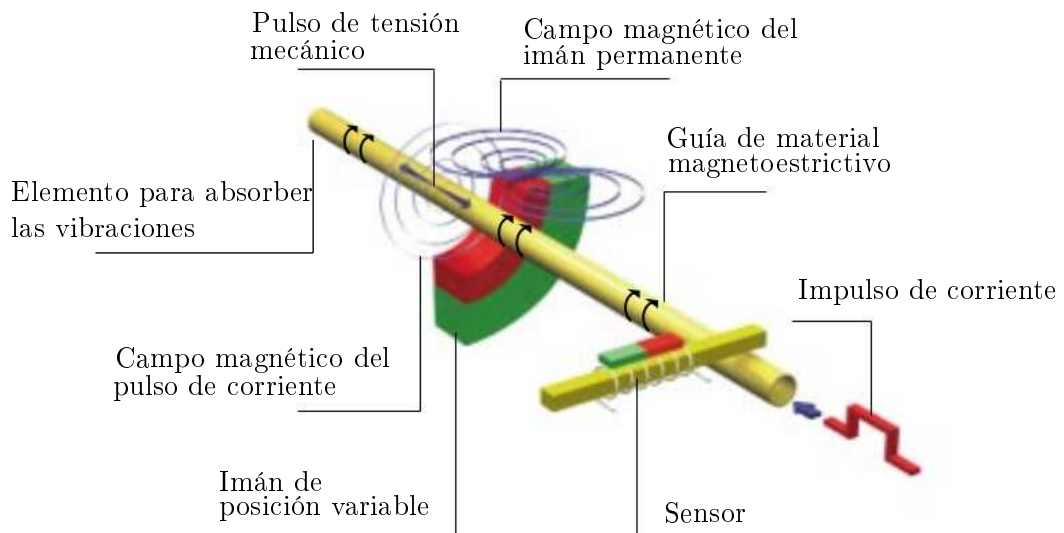


Figura 1.7: Composición y funcionamiento de un transductor magnetostrictivo [4], pág. 3

Para crear el impulso sonoro de alta frecuencia se hace resonar el material magnetostrictivo. Esto se consigue mediante la intersección de dos campos magnéticos: un campo longitudinal generado por un imán permanente y otro campo radial creado por un impulso de corriente que recorre la guía. La intersección de ambos campos genera una deformación violenta en la guía que se traduce en la onda sonora.

Cuando la onda se refleja en un obstáculo y vuelve al transductor, hace vibrar la guía de material magnetostrictivo. El sensor, que consiste en una bobina enrollada a la guía, permitirá detectar las vibraciones. Estas vibraciones sonoras provocaran pequeñas deformaciones en el material que generaran un campo magnético debido a la magnetoestricción; éste campo actuará sobre la bobina generando corriente eléctrica y permitiendo su detección. Conociendo el tiempo transcurrido y la velocidad del sonido se calcula fácilmente la distancia hasta el obstáculo.

1.3.2. Válvula magnetostrictiva

Una excelente alternativa al diseño de válvulas con accionamiento mecánico son las válvulas con actuador magnetostrictivo. Se trata de un diseño actual (2016) del *Goddard Space Flight Center* [18] con el propósito de sustituir las válvulas utilizadas en sistemas espaciales y en sistemas de propulsión de vehículos. Son totalmente herméticas, sin fugas y con una alta fiabilidad. Además, poseen un tiempo de respuesta muy rápido, del orden de milisegundos.

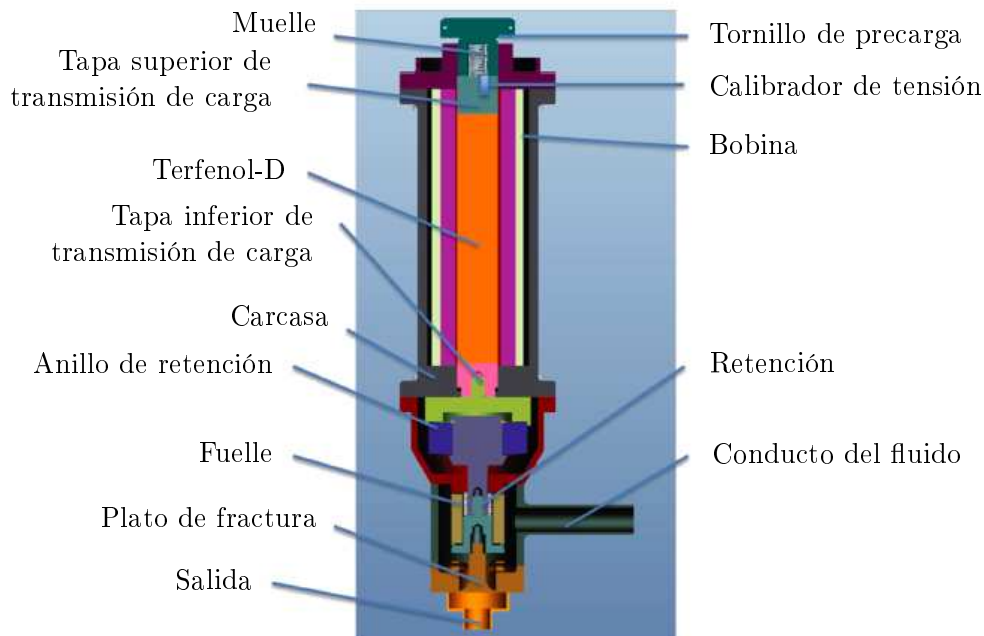


Figura 1.8: Composición y funcionamiento de un válvula magnetostrictiva [18]

La Figura 1.8 muestra el esquema de una válvula magnetostrictiva, su funcionamiento es sencillo: la válvula se abre cuando se aplica un campo magnético a la barra de material magnetostrictivo, en este caso Terfenol-D, y se cierra cuando el campo es nulo. Este campo magnético se genera aplicando corriente a una bobina enrollada a la barra de Terfenol-D y aislada del fluido. El Terfenol-D también se encuentra aislado del fluido a través de

un recubrimiento, generalmente de titanio, puesto que es compatible con la mayoría de propelentes. El resto de los componentes son equivalentes a la de una válvula cualquiera.

1.3.3. Telescopio astronómico de rayos-X

Los telescopios astronómicos de rayos-X permiten observar galaxias del espacio con una elevada resolución angular. La principal dificultad de estos telescopios reside en que no se pueden utilizar espejos convencionales para concentrar la radiación en el sensor de lectura, debido a que se consiguen ángulos de incidencia casi normales que produce que la radiación X sera absorbida, pero no reflejada. Fue el físico alemán Hans Wolter quien descubrió como construir dicho telescopio combinando dos espejos de bajo ángulo de incidencia (entre 10 minutos de arco y 2°) con forma de paraboloides e hiperboloides o bien paraboloides e elipsoides.

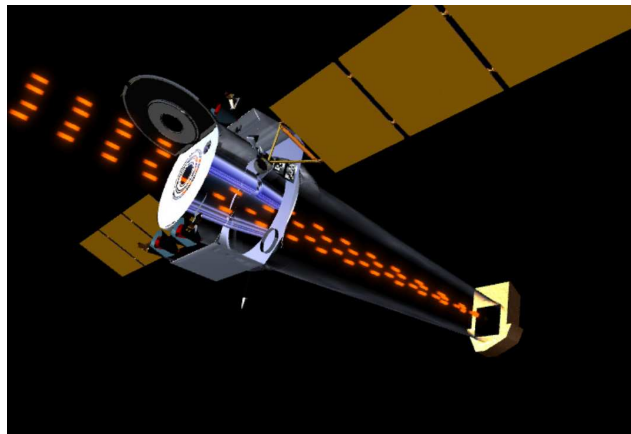


Figura 1.9: Satélite Chandra X-RAY de la NASA. Telescopio espacial de rayos-X

El principal modo de mejorar la capacidad de imagen de las nuevas generaciones de telescopios de rayos-X consiste en aumentar el área de los espejos para conseguir mejor resolución angular. No obstante, se debe procurar, al menos, mantener el peso debido a la incorporación en el satélite y es por esto que la única opción consiste en fabricar espejos más finos, sin embargo, una superficie delgada es más débil y susceptible a la deformación.

Para solucionar la susceptibilidad a la deformación, en un artículo de la universidad de Northwestern [17] proponen la idea de recubrir la cara no reflectante de los espejos de material magnetostrictivo, de tal modo que permita controlar la deformación del espejo simplemente con un campo magnético. Este método evita el uso de cualquier actuador mecánico que tendría numerosas desventajas: aumento del peso, mayor probabilidad de fallo, difícil mantenimiento, etc.

La mayor dificultad del empleo de este tipo de materiales es estudiar cómo y qué campo magnético aplicar para corregir la deformación en cuestión por lo que se trata de un problema de control.

1.3.4. Sistema activo de control vibracional

Esta aplicación se basa en el actuador magnetostrictivo. En la Figura 1.10 se observa el esquema de un actuador lineal. Éste está compuesto por una barra de material magnetostrictivo (Terfenol-D) enrollado por una bobina, que se encuentra dentro de una carcasa de aluminio recubierta por un aislante magnético en su interior. De este modo, al aplicar una corriente a la bobina, generará un campo magnético que orientará los dominios de la barra de Terfenol-D aumentando su longitud.

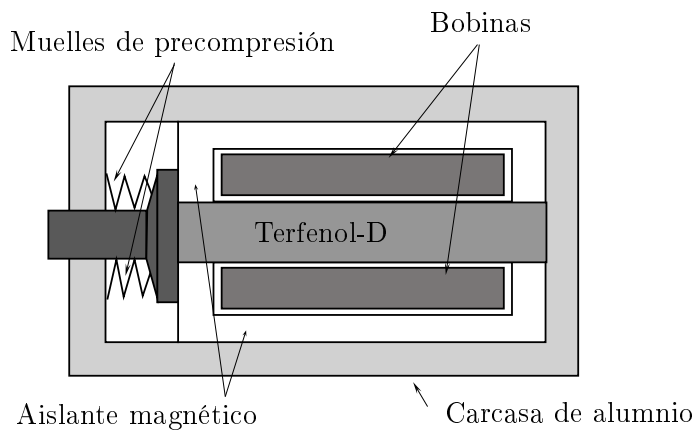


Figura 1.10: Esquema de un actuador lineal magnetostrictivo [6], pág. 7

El sistema de control vibracional (Figura 1.11) posee un pequeño sensor que recoge datos acerca de la vibración que sufre la estructura de estudio. Este señal eléctrica es amplificada y enviada al sistema de control, que se encargará de procesar los datos y enviar las señales necesarias al actuador para cancelar la vibración. La gran potencia que desarrollan estos tipos de actuadores permiten actuar sobre grandes superficies.

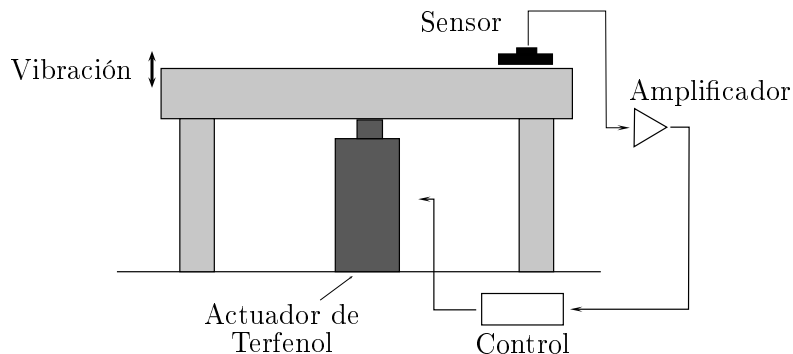


Figura 1.11: Esquema de un sistema activo de control vibracional [6], pág. 9

Como se expone en [15], en 1997 se realizó un estudio para utilizar un sistema de control vibracional basado en materiales magnetostrictivos en el rotor del helicóptero MD-900.

En el estudio se fabricaron y testearon prototipos y el resultado fue positivo; no obstante el proyecto finalizó con este estudio.

1.3.5. Modificador de espesor de un perfil

Por último, una aplicación futura del material magnetostrictivo en el ámbito aeronáutico consistiría en modificar el espesor y la forma del perfil alar de modo que permita adaptar la superficie de las alas a las condiciones de vuelo. Se trata de un proyecto muy ambicioso donde todavía no se han centrado recursos para una amplia investigación.

En la actualidad, no existen numerosas aplicaciones de estos materiales dentro de la industria aeroespacial, pero como se comenta en el Sección 1.1, el empleo de éstos tendría un impacto muy positivo que permitiría tanto mejores y nuevos diseños, como un importante ahorro económico de mantenimiento y costes de operación.

1.4. Estado del arte

A pesar de que el fenómeno de la magnetostricción se conoce desde mediados del siglo XIX, los estudios y análisis para modelizarlos se inician principalmente en la década de los 90. Durante estos años aparecen un gran número de trabajos que pretendían modelizar matemáticamente el comportamiento de estos materiales, y en algunos casos el modelo se implementaba en algún programa de elementos finitos.

Algunos hitos importantes durante los años 90 fueron: [10] (1994), desarrollan un modelo para el estudio de un MMA que suprime la vibración de una viga resaltando la importancia de añadir un acoplamiento termoelástico; [19] (1995), trabajan en un modelo unidimensional utilizando ecuaciones constitutivas no lineales; [29] (1995), formulan un modelo dinámico y no lineal en 2D; [20] (1995), desarrolla su propio modelo y presenta el problema de los ciclos histeréticos; [11] (1997), formulan un esquema tridimensional de elementos finitos en el que se basa parte de la formulación del *elmt01.f* utilizado en el presente trabajo; [21] (1998), que realizan una caracterización completa del actuador ETREMA MP 50/6; y [34], que consigue una buena aproximación mediante unos coeficientes que obtiene experimentalmente (ver Subsección 4.4.1).

En estos trabajos no se definen de forma clara y precisa las propiedades del material utilizado, principalmente Terfenol-D por ser la aleación con mayor magnetostricción, sino que se centran en la formulación matemática. No es hasta el año 1999 cuando se publica [22], donde se definen perfectamente las propiedades del Terfenol-D (utilizadas en este trabajo), así como los coeficientes de las matrices del modelo expuesto.

De esta referencia son interesantes los capítulo 1 y 2. El primero trata sobre la física de la magnetostricción, es decir, tal y como se desarrolla en la sección 1.2 se explica el fundamento físico del acoplamiento entre el campo elástico y el campo magnético en materiales ferromagnéticos, además, también tratan aspectos como la anisotropía, la cristalización y

el efecto de la histéresis. El segundo capítulo se centra en los modelos matemáticos, donde desarrolla el modelo lineal mientras que explica brevemente el no lineal, así como comentarios superficiales sobre la modelización en elementos finitos; también se ofrece una tabla con los valores de los coeficientes de las matrices del modelo lineal. Del capítulo 3 destaca sobre todo la tabla de propiedades del Terfenol-D, de donde se obtienen los coeficientes descritos.

Los estudios que siguen el año 2010 se centran en implementar todos estos modelos en un programa de elementos finitos y se intenta solucionar el problema de los ciclos de histéresis. Así, algunas publicaciones destacadas son: [23] (2000), incluyen en su modelo la histéresis; [24] (2004), desarrollan una formulación para FE de un modelo dinámico 3D totalmente acoplado; [25] (2008), exponen una formulación de FE basada en la asociación de las ecuaciones constitutivas piezoeléctricas y magnetoelásticas; y [26] (2008), que también trabajan en un método de análisis de un MMA con una formulación 3D de FE con un acoplamiento electro-magneto-mecánico.

A partir del año 2010 se intensifican las publicaciones y surgen los estudios sobre el Galfenol, debido principalmente a que presenta mejores propiedades mecánicas que el Terfenol-D. Entre otros destacan [27] (2011), crean un modelo de FE 3D no lineal para realizar estudios con el Galfenol; [28] (2011), presentaron un modelo dinámico totalmente acoplado en 3D que cuantificaba el efecto de las corrientes de Eddy y las pérdidas de flujo en el actuador; [33] (2014), formulan un modelo de FE en el que para solucionar la no linealidad del acoplamiento magnetostrictivo recurren a un ajuste de datos experimentales; y [30] (2014), también desarrollan un modelo de FE para el Galfenol pero utilizando bucles de densidad de flujo menores.

Por último hay que destacar dos trabajos del presente año (2016): el análisis por FE de un transductor magnetostrictivo [31] y la formulación, tanto para equilibrio como para no equilibrio que abarca todos los acoplamientos posibles [13]; en este último trabajo se desarrolla el *elmt01.f*, un elemento isoparamétrico de elementos finitos en el programa de investigación FEAP.

2

Formulación

En este capítulo se abordarán las ecuaciones necesarias para modelar el comportamiento de un miniactuador magnetostrictivo. Para ello, debemos estudiar los campos eléctrico, magnético, elástico y térmico, así como algunos de sus acoplamientos. Se incluye el campo térmico, puesto que como se describe en [10], es fundamental tener en cuenta el acoplamiento termoelástico durante el estudio de miniactuadores magnetostrictivos.

2.1. Formulación elástica

El problema elástico se reduce a encontrar cuáles son los campos de desplazamientos \mathbf{u} , de deformaciones \mathbf{S} y de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^c$, definidos para cada punto del dominio (x, y, z) . Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo pueden ser volumétricas \mathbf{b} , superficiales \mathbf{t} o puntuales \mathbf{P} , además de las reacciones originadas por las restricciones a los desplazamientos.

Las deformaciones se definen mediante un tensor de segundo orden (3x3 para el caso tridimensional) denominada tensor de deformaciones, que contiene las deformaciones normales en la diagonal y las deformaciones tangenciales en el resto de posiciones. Si se asumen pequeños desplazamientos se puede despreciar el término antisimétrico de la ecuación cinemática $\mathbf{S} = \nabla \mathbf{u}$, y realizando equilibrio de momentos se deduce que las tensiones tangenciales y sus complementarias son iguales $\tau_{ij}^c = \tau_{ji}^c$; ver Ecs. (2.4).

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{yx} & S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Del mismo modo se puede definir el tensor de tensiones.

$$\boldsymbol{\sigma}^c = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^c & \tau_{xy}^c & \tau_{zx}^c \\ \tau_{xy}^c & \sigma_{yy}^c & \tau_{yz}^c \\ \tau_{zx}^c & \tau_{yz}^c & \sigma_{zz}^c \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Para simplificar la notación, los subíndices de las tensiones y deformaciones de la diagonal principal (xx, yy, zz) se denotarán con una única letra: x, y, z , respectivamente.

Como se ha comentado, en un problema elástico de un sólido sometido a esfuerzos aparecen distribuciones de tensiones normales y tangenciales. Estas magnitudes varían por todo el sólido, sin embargo, deben verificar siempre un equilibrio global de fuerzas y momentos, tanto a nivel global como a nivel local (infinitesimal). De este modo, haciendo un estudio de las fuerzas aplicadas en un elemento diferencial se obtienen las ecuaciones

de equilibrio

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x^c}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^c}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^c}{\partial z} + b_x &= \rho_v a_x \\
 \frac{\partial \tau_{xy}^c}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^c}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}^c}{\partial z} + b_y &= \rho_v a_y \\
 \frac{\partial \tau_{xz}^c}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^c}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^c}{\partial z} + b_z &= \rho_v a_z
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

siendo ρ_v la densidad volumétrica y a_x , a_y y a_z , las componentes de la aceleración \mathbf{a} . En condiciones estáticas $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

En la deducción de estas ecuaciones solo se ha tenido en cuenta el equilibrio de fuerzas, por lo que no queda garantizado el equilibrio de momentos del elemento diferencial. Si se toman momentos respecto al centro de gravedad del elemento, las tensiones normales y las fuerzas por unidad de volumen no generan momento. Realizando el equilibrio de momentos respecto a este punto con las fuerzas tangenciales τ_{ij}^c (en condiciones estáticas) se llega a

$$\begin{aligned}
 \tau_{zx}^c - \tau_{xz}^c &= 0 \\
 \tau_{xy}^c - \tau_{yx}^c &= 0 \\
 \tau_{yz}^c - \tau_{zy}^c &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde queda demostrada la igualdad de las tensiones tangenciales complementarias.

Si se asume un comportamiento elástico lineal del material, las tensiones y las deformaciones en cada punto estarán relacionadas a través de la ley de Hooke. A partir de la evidencia experimental, la ley de Hooke afirma que en un problema elástico unidimensional (por ejemplo dirección i), la tensión aplicada σ_i^c es directamente proporcional a la deformación S_i , siendo la constante de proporcionalidad el módulo de Young E .

$$\sigma_i^c = E S_i \tag{2.5}$$

A partir de este punto se cambiará la notación matricial de $\boldsymbol{\sigma}^c$ y \mathbf{S} a notación de Voigt.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}^c &= \{ \sigma_x^c \quad \sigma_y^c \quad \sigma_z^c \quad \tau_{xy}^c \quad \tau_{yz}^c \quad \tau_{zx}^c \}^\top \\
 \mathbf{S} &= \{ S_x \quad S_y \quad S_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \}^\top
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Teniendo en cuenta que

$$\gamma_{ij} = 2 S_{ij} \tag{2.7}$$

Si la ley de Hooke se generaliza para un sólido real con carácter multiaxial, se obtiene con notación matricial la ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma}^c = \mathbf{c} \mathbf{S} \tag{2.8}$$

donde \mathbf{c} es la matriz de rigidez. Ésta es una matriz simétrica, con coeficientes constantes para el caso de elasticidad lineal. Si se trata de un material isótropo, la matriz de rigidez

solo depende del módulo de Young E y del coeficiente de Poisson ν . La inversa de \mathbf{c} se denomina matriz de flexibilidad \mathbf{s} y obviamente, en las mismas condiciones, solo depende de E y ν .

$$\mathbf{S} = \mathbf{s} \boldsymbol{\sigma}^c \quad (2.9)$$

Las siguientes definiciones solo son válidas para materiales isótropos, sin embargo la formulación utilizada de elementos finitos permite analizar materiales parcialmente isótropos como se explica en la introducción al Capítulo 3. La formulación para materiales parcialmente isótropos se puede encontrar en [13].

La matrices \mathbf{c} y \mathbf{s} para materiales isótropos se definen como

$$\mathbf{c} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ -S- & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ -S- & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

El factor de proporcionalidad entre las tensiones tangenciales y sus correspondientes deformaciones angulares es conocido como módulo de rigidez a cortadura o cizalladura G .

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.12)$$

De la definición de la matriz de flexibilidad se observa que las deformaciones angulares γ_{ij} y sus correspondientes tensiones tangenciales τ_{ij}^c están relacionadas entre si de forma independiente al resto de componentes de tensión y deformación. No sucede igual con las deformaciones normales S_i y las tensiones normales σ_i^c , que están acopladas entre sí por términos que incluyen el coeficiente de Poisson ν . Se observa también que las deformaciones y tensiones normales están totalmente desacopladas de las deformaciones y tensiones tangenciales; esto no sucede así si el material es anisótropo.

Por tanto, la definición de matriz de flexibilidad Ec. (2.11) permite reescribir la ecuación constitutiva Ec. (2.9) para cada término

$$\begin{aligned}
 S_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x^c - \nu(\sigma_y^c + \sigma_z^c)] \\
 S_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y^c - \nu(\sigma_x^c + \sigma_z^c)] \\
 S_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z^c - \nu(\sigma_x^c + \sigma_y^c)] \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}^c}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}^c}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}^c}{G}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Es importante señalar que si se cumple la hipótesis de material isótropo y además las fuerzas por unidad de volumen \mathbf{b} son nulas, entonces las ecuaciones de equilibrio y las de compatibilidad son independientes de las constantes elásticas E y ν .

2.1.1. Acoplamiento termoelástico

Un acoplamiento termoelástico puede ser muy complejo, debido a que un cambio de temperatura puede deformar un sólido y a veces aparecen en él tensiones. Además, también se debe tener en cuenta el efecto Gough-Joule, a partir del cual en ciertos materiales se observa que una deformación elástica produce cambios de temperatura. No obstante, si estudiamos un material elástico y si solo se considera el acoplamiento en un sentido (la temperatura produce deformaciones), su formulación es sencilla.

Si se estudia el cambio unidireccional (dilatación lineal en la dirección i) debido a un incremento de temperatura ΔT en una barra de longitud inicial L_0 y de coeficiente de dilatación térmica α_i en dicha dirección, se obtiene

$$\Delta L = \alpha_i L_0 \Delta T \tag{2.14}$$

Extrapolando a tres dimensiones y teniendo en cuenta que la deformación se define como $S_i = \Delta L/L_0$, entonces

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\alpha} \Delta T \tag{2.15}$$

El efecto térmico realiza aportación únicamente a las deformaciones lineales y no a las angulares. De este modo, por el principio de superposición, solo hay que sumar el término $\boldsymbol{\alpha} \Delta T$ a las deformaciones S_i de las ecuaciones constitutivas Ecs. (2.13). Las relaciones desplazamiento-deformación Ec. (2.1) y las ecuaciones de equilibrio Ecs. (2.3) de la teoría de elasticidad permanecen inalteradas.

Para resolver un problema termoelástico es necesario conocer el estado térmico en cada punto del dominio de estudio, por lo que a continuación se va a desarrollar el problema térmico de transmisión de calor.

Cuando dos puntos de un cuerpo se encuentran a distinta temperatura, se produce un flujo de energía desde el sistema de mayor temperatura hacia el de menor temperatura.

Existen tres mecanismos de transmisión de calor: conducción, convección y radiación. En termoelasticidad interesa la conducción, puesto que es la propagación por contacto directo entre partículas de un cuerpo.

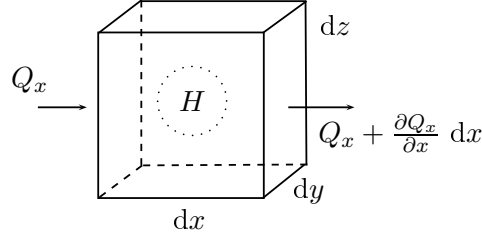


Figura 2.1: Conservación de la energía

El principio de conservación de la energía mostrado en la Figura 2.1 afirma que

$$\underbrace{Q_x}_{E. \text{ Entrante}} dy dz - \underbrace{\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right)}_{E. \text{ Saliente}} dy dz + \underbrace{H}_{E. \text{ Generada}} dx dy dz = \underbrace{\rho_v c_p \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t}}_{E. \text{ Acumulada}} dx dy dz \quad (2.16)$$

donde c_p es el calor específico del material; ρ_v , la densidad volumétrica; ΔT , el incremento de temperatura del volumen de estudio y H la entalpía acumulada que en todos los casos será nula $H = 0$. Sumando estos términos, considerando también el flujo en las direcciones y y z y definiendo el diferencial de volumen como $d\Omega = dx dy dz$, se obtiene

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} d\Omega - \frac{\partial Q_y}{\partial y} d\Omega - \frac{\partial Q_z}{\partial z} d\Omega = -\nabla \cdot \mathbf{Q} = \rho_v c_p \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} d\Omega \quad (2.17)$$

Dividiendo por el diferencial de volumen $d\Omega$ y utilizando la definición de Fourier

$$Q_i = -\kappa_i \frac{d(\Delta T_i)}{di} \quad (2.18)$$

donde Q_i es la tasa de transferencia de energía térmica (flujo de calor), κ_i es la constante de conductividad térmica y ΔT_i , el incremento de temperatura (todas las variables son en de la dirección i); se llega a

$$-\left[\kappa_x \frac{\partial^2(\Delta T_x)}{\partial x^2} + \kappa_y \frac{\partial^2(\Delta T_y)}{\partial y^2} + \kappa_z \frac{\partial^2(\Delta T_z)}{\partial z^2}\right] = \rho_v c_p \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} \quad (2.19)$$

O bien, considerando material isótropo

$$-\kappa \nabla^2(\Delta T) = \rho_v c_p \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} \quad (2.20)$$

Si se considera estado estacionario, la derivada temporal es nula y entonces se tiene la ecuación de Laplace.

$$-\nabla^2(\Delta T) = 0 \quad (2.21)$$

Por tanto para el acoplamiento termoelástico solo es necesario añadir la Ec. (2.15) a las ecuaciones constitutivas correspondientes y añadir la ecuación de Laplace a las ecuaciones de equilibrio para resolver el campo de temperaturas. El coeficiente de expansión térmica κ y el coeficiente de dilatación térmica α son tensores debido a que la formulación del *elmt01.f* permite estudiar materiales parcialmente isótropos.

2.1.2. Condiciones de contorno

En la superficie de un cuerpo elástico pueden existir fuerzas por unidad de superficie \mathbf{t} . En el caso más simple de dos dimensiones (Figura 2.2) las componentes de las fuerzas superficiales t_x y t_y tienen unidades de tensiones: fuerza por unidad de superficie. El equilibrio de las fuerzas en las dos direcciones requiere

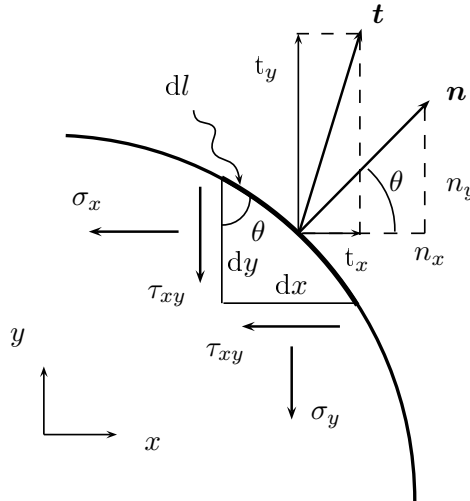


Figura 2.2: Condiciones de frontera para campo elástico

$$\begin{aligned} t_x e \, dl &= \sigma_x e \, dy + \tau_{xy} e \, dx \\ t_y e \, dl &= \tau_{xy} e \, dy + \sigma_y e \, dx \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde e es el espesor del elemento y dl el diferencial de longitud de arco. Teniendo en cuenta que se denomina \mathbf{n} al vector normal unitario al contorno con componentes n_x y n_y , que coinciden con los cosenos directores, de la figura se deduce

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dl} &= \cos \theta = n_x \\ \frac{dx}{dl} &= \sin \theta = n_y \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por tanto, las ecuaciones de equilibrio de contorno se pueden escribir como

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ t_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{aligned} \quad (2.24)$$

Estas ecuaciones son generales, al igual que las ecuaciones de equilibrio interno, y fácilmente son generalizables para el caso tridimensional

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ t_y &= \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ t_z &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.2. Formulación electromagnética

Las ecuaciones de Maxwell para un medio material son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Estas ecuaciones relacionan el campo eléctrico \mathbf{E} , el campo magnético \mathbf{H} , el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y la inducción magnética \mathbf{B} , así como la densidad de carga eléctrica ρ y la densidad de corriente \mathbf{J} . La primera y tercera ecuaciones son las ecuaciones de equilibrio magnética y eléctrica, respectivamente.

La primera de las ecuaciones de Maxwell Ec. (2.26)₁ se denomina ley de Gauss para el campo magnético. Define que la divergencia de la inducción magnética es nula, esto significa físicamente que no existen sumideros ni fuentes del campo, es decir, expresa la inexistencia de monopolos magnéticos; también indica que las líneas de los campos magnéticos son cerradas.

La Ec. (2.26)₂ se centra en el acoplamiento entre el campo magnético y el campo eléctrico: una variación temporal de la inducción magnética $\partial \mathbf{B} / \partial t$ provoca circulaciones del campo eléctrico $\nabla \times \mathbf{E}$ a lo largo de líneas cerradas. Esta ecuación recibe el nombre de ley de Faraday-Lenz, puesto que se deriva de la ley de Faraday

$$\xi = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (2.27)$$

siendo ϕ_B el flujo magnético. Esta ley postula que la existencia de un campo magnético variable en el tiempo induce sobre cualquier medio una fuerza electromotriz ξ ; el signo menos se debe a la contribución de Lenz. Además, la presencia de fuerza electromotriz indica que existe un campo eléctrico cuya integral cerrada a través de un diferencial de longitud dl es igual a dicha fuerza

$$\xi = \oint \mathbf{E} \, dl \quad (2.28)$$

La forma diferencial de la unión de las dos ecuaciones anteriores da lugar a la Ec. (2.26)₂.

La Ec.(2.26)₃ recibe el nombre de ley de Gauss. En formato integral se define del siguiente modo

$$\oint \mathbf{E} \, d\Gamma = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.29)$$

Esta ley define que el flujo del campo eléctrico a través de un diferencial de superficie $d\Gamma$ cerrada es igual al cociente entre el sumatorio de cargas q en el interior de dicha superficie y ϵ_0 . La forma diferencial afirma que la divergencia del campo eléctrico es proporcional a la densidad de carga eléctrica dividida por la permitividad del vacío.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.30)$$

Para obtener esta forma diferencial se derivan ambos lados de la Ec. (2.29) respecto a un diferencial de volumen $d\Omega$: como el término de la izquierda se encuentra integrado respecto a la superficie quedará con una derivada $\nabla \cdot \mathbf{E}$; en el término de la derecha se impone $dq/d\Omega = \rho$. Junto con la primera ecuación constitutiva Ec. (2.33) se podría obtener la ley de Gauss definida anteriormente.

Por último, la Ec. (2.26)₄ es la forma diferencial de la ley de Ampère generalizada. Ampère formuló la relación entre un campo magnético y una corriente eléctrica.

$$\oint \mathbf{B} \, dl = \mu_0 \int \mathbf{J} \, d\Gamma \quad (2.31)$$

Esta relación es válida mientras los campos no varíen con el tiempo; si lo hacen, la ecuación viola la ley de conservación de la carga. Maxwell corrigió esta ecuación para adaptarla a campos no estacionarios añadiendo un tercer término.

$$\oint \mathbf{B} \, dl = \mu_0 \int \mathbf{J} \, d\Gamma + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \, d\Gamma \quad (2.32)$$

Del formato diferencial de esta ecuación se obtiene la ley de Ampère generalizada Ec. (2.26)₄.

Para un medio material determinado, las ecuaciones constitutivas relacionan el desplazamiento eléctrico y la inducción magnética con el campo eléctrico y magnético respectivamente. Si se toma una relación lineal se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y \mathbf{P} y \mathbf{M} , la polarización y la magnetización del material, respectivamente. Estas dos magnitudes se definen como

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}; \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (2.34)$$

Los parámetros χ_e y χ_m reciben el nombre de susceptibilidad eléctrica y magnética. Reescribiendo las Ecs. (2.33) con la definición anterior se llega a

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 (\mathbf{E} + \chi_e \mathbf{E}) = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Estas ecuaciones permiten definir la permeabilidad magnética $\boldsymbol{\mu}$ y la permitividad eléctrica $\boldsymbol{\epsilon}$ de un material concreto del siguiente modo

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) ; \quad \boldsymbol{\mu} = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (2.36)$$

Utilizando las definiciones anteriores, las ecuaciones constitutivas quedan

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{E} ; \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{H} \quad (2.37)$$

2.2.1. Ley de Biot-Savart

La ley de Biot-Savart es una de las leyes fundamentales de la magnetoestática, así como la ley de Coulomb lo es de la electrostática. Define el campo magnético creado por distribuciones de corrientes eléctricas estacionarias.

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} d\Omega \quad (2.38)$$

donde \boldsymbol{r}' es el vector posición de los puntos del conductor, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ es la densidad volumétrica de corriente estacionaria en el elemento diferencial de volumen $d\Omega$ y \boldsymbol{r} es el vector posición del punto X en el que se quiere calcular el campo; véase la Figura 2.3.

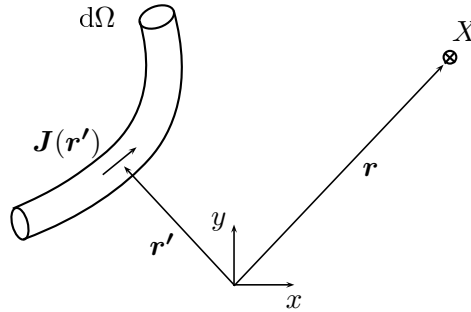


Figura 2.3: Geometría para ilustrar la ley de Biot-Savart

Aplicando el operador divergencia a la Ec. (2.38) se obtiene

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \right) d\Omega \quad (2.39)$$

Teniendo en cuenta que el operador ∇ no actúa sobre las variables de integración del vector \boldsymbol{r}' (solo afecta a las coordenadas del vector \boldsymbol{r}) y que

$$\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \quad (2.40)$$

se llega a la siguiente expresión

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \left[\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \right] d\Omega \quad (2.41)$$

Como se cumple que

$$\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = 0 \quad (2.42)$$

se demuestra la ley de Gauss para el campo magnético Ec. (2.26)₁.

Aplicando ahora el operador rotacional

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) d\Omega \quad (2.43)$$

y haciendo uso de la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = (\mathbf{Y} \cdot \nabla) \mathbf{X} - (\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{Y} + \mathbf{X}(\nabla \cdot \mathbf{Y}) - \mathbf{Y}(\nabla \cdot \mathbf{X}) \quad (2.44)$$

donde $\mathbf{X} = \mathbf{J}(\mathbf{r}')$ y $\mathbf{Y} = \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)$, el integrando de la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right] &= \left[\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \cdot \nabla \right] \mathbf{J}(\mathbf{r}') - [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla] \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) + \\ &+ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right] - \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) (\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Esta ecuación se puede simplificar sabiendo que el operador ∇ no afecta a \mathbf{r}' , es decir, $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$. Además, teniendo en cuenta la Ec. (2.40) y con la expresión $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r})$ (derivada de la propia definición de delta de dirac tridimensional), se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla] \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) d\Omega + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V 4\pi \mathbf{J}(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\Omega \quad (2.46)$$

Haciendo uso de otra identidad vectorial

$$-\mathbf{X} \nabla' f = f(\nabla' \mathbf{X}) - \nabla'(f \mathbf{X}) \quad (2.47)$$

siendo $f = \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ (siendo x y x' las primeras componentes de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' respectivamente), $\mathbf{X} = \mathbf{J}(\mathbf{r}')$ y ∇' el operador del vector \mathbf{r}' . Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ (puesto que las corrientes se han supuesto estacionarias); y utilizando el teorema de la divergencia se puede demostrar que

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla] \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) d\Omega = 0 \quad (2.48)$$

Por tanto, se demuestra la ley de Ampère generalizada Ec. (2.26)₄ para el caso estacionario.

2.2.2. Acoplamiento electromagnético

Cuando tenemos un campo vectorial con divergencia nula, se sabe que existe un potencial vectorial tal que su rotacional es igual a este campo. Es decir, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implica que existe un campo \mathbf{A} , al que se denomina potencial vectorial magnético, tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.49)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la segunda ecuación de Maxwell Ec. (2.26)₂ se obtiene

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.50)$$

A su vez y debido a que su rotacional es nulo, existe un campo escalar V , que recibe el nombre de potencial escalar eléctrico (voltaje), tal que su gradiente cambiado de signo es igual a la expresión anterior

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (2.51)$$

Se observa que para el caso estacionario se cumple la definición de campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.52)$$

Teniendo en cuenta las Ecs.(2.37) y que $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, siendo c la velocidad del sonido en el sonido, si se reescribe la tercera y la cuarta ecuaciones de Maxwell Ecs. (2.26)₃ y (2.26)₄ en función de los potenciales se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (2.53)$$

De acuerdo con la condición de Lorentz, se puede escoger arbitrariamente que los potenciales cumplan

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (2.54)$$

Entonces, tanto el potencial escalar como el vectorial cumplen una ecuación de D'Alembert que se derivan de las Ecs. (2.53).

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.55)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (2.56)$$

Estas ecuaciones solo son válidas para el vacío y en el presente trabajo se busca una caracterización para el sólido, por lo que se utilizarán la permeabilidad magnético μ y la permitividad eléctrica ϵ del medio en cuestión.

Para el caso de estudio presente, estacionario y sin corriente $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, la cuarta ecuación de Maxwell Ec. (2.26)₄ queda tal que

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (2.57)$$

De este modo podemos simplificar el caso magnetoestático que nos ocupa. Como el rotacional de \mathbf{H} es nulo se puede definir un nuevo potencial escalar φ , denominado potencial escalar magnético, que cumpla

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi \quad (2.58)$$

Esta formulación permite que el problema de la resolución del campo magnético reciba un tratamiento equivalente a la del campo eléctrico: imponiendo dos valores de potencial magnético φ en la frontera del elemento de estudio se puede crear cualquier campo magnético deseado.

En la formulación de FEAP utilizada (*elmt01.f*), la condición $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ acaba con el acoplamiento electromagnético a través de la corriente eléctrica que define las ecuaciones de Maxwell. No obstante, este elemento sí permite el acoplamiento entre el campo eléctrico y el campo magnético a través de la matriz de acoplamiento electromagnético $\boldsymbol{\nu}$, añadiendo un nuevo término a las ecuaciones constitutivas Ecs. (2.37)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \boldsymbol{\nu} \mathbf{H}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \boldsymbol{\nu} \mathbf{E} \quad (2.59)$$

Se utiliza la misma matriz $\boldsymbol{\nu}$ para ambos acoplamientos porque es recíproca, es decir, el efecto se produce en ambos sentidos.

2.2.3. Acoplamiento piezomagnético y piezoeléctrico

Los acoplamientos entre el campo elástico y los campos magnético y eléctrico tienen una definición equivalente, por lo que se tratarán en la misma subsección. En primer lugar se definirá una nueva tensión global $\boldsymbol{\sigma}$.

$$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\sigma}^c + \boldsymbol{\sigma}^m \quad (2.60)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^c$ es la tensión de Cauchy definida en la Sección 2.1 y $\boldsymbol{\sigma}^m$ es la tensión de Maxwell. Los acoplamientos se realizan en ambas tensiones.

En la tensión de Cauchy el acoplamiento se realiza a través de dos matrices denominadas matrices de acoplamiento piezomagnético \mathbf{e}^φ y matriz de acoplamiento piezoeléctrico \mathbf{e}^V , tal que

$$\boldsymbol{\sigma}^c = -\mathbf{e}^\varphi \mathbf{H} - \mathbf{e}^V \mathbf{E} \quad (2.61)$$

La tensión de Maxwell se deriva de convertir la fuerza de Lorentz volumétrica en una fuerza de superficie (despreciando la componente antisimétrica) y se define como

$$\boldsymbol{\sigma}^m = \frac{1}{2} [\mathbf{D} \times \mathbf{E} + \mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \times \mathbf{B} - (\epsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H} \mathbf{H}) \mathbf{I}] \quad (2.62)$$

Esta tensión solo se produce por la existencia de campo eléctrico o magnético.

2.2.4. Condiciones de contorno

Se consideran dos medios en contacto que se denominaran en esta sección como Medio 1 (abajo del plano horizontal) y Medio 2 (arriba); estos medios pueden ser magnéticos o diamagnéticos. Se considera también un elemento diferencial con forma de cilindro, cuya superficie completa (cilindro y tapas) es $d\Gamma$; su plano medio coincide con la unión entre ambos medios tal y como se muestra en la Figura 2.4. La altura total del cilindro Δh es muy pequeña frente a su diámetro D .

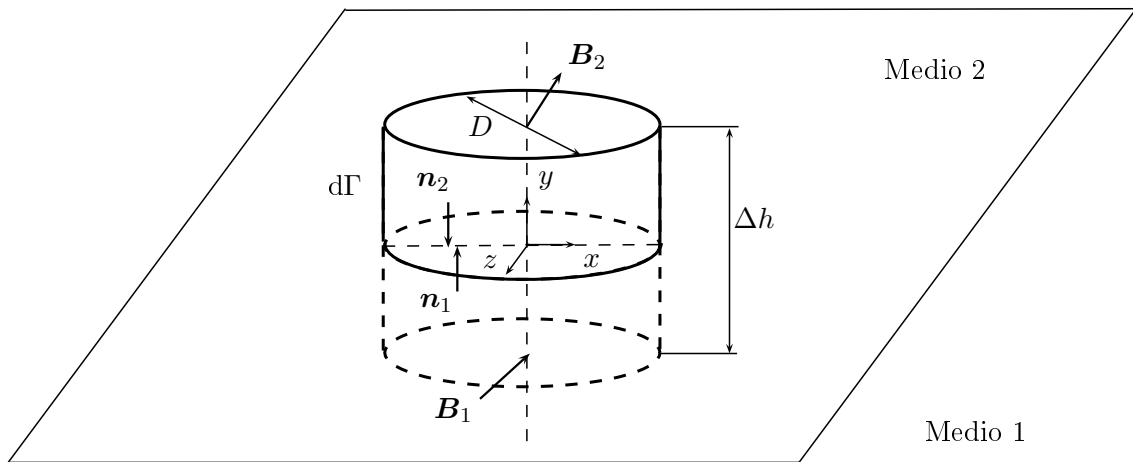


Figura 2.4: Condiciones de frontera de la inducción magnética

Se parte de la ecuación de Gauss para el campo magnético Ec. (2.26)₁, pero en formato integral

$$\oint \mathbf{B} \, d\Gamma = 0 \quad (2.63)$$

Como se ha definido que la dimensión en la dirección y es despreciable frente a la de la dirección x , solo se tendrá en cuenta la componente normal del vector \mathbf{B} (la superficie del cilindro tiende a su plano medio), por lo que

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \, d\Gamma - \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \, d\Gamma = 0 \quad (2.64)$$

La ecuación anterior se puede reescribir como $\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$. Así, la componente normal del vector inducción magnética \mathbf{B} es continua en la interfaz entre dos medios.

Aplicando el mismo procedimiento a la Ec.(2.26)₃, se llega a $\mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n} = \rho$. Por tanto, la discontinuidad en la componente normal del desplazamiento eléctrico \mathbf{D} viene dada por la densidad de carga superficial en la zona interfaz. Dicho de otro modo, si no hay ninguna carga entre los medios de estudio, la componente normal de \mathbf{D} es continua.

A continuación se considera una trayectoria rectangular cerrada centrada en la intersección de ambos medios, cuya superficie encerrada se denota como Γ ; ver Figura 2.5. Como en el caso anterior, la altura Δh es despreciable con respecto a su longitud Δl .

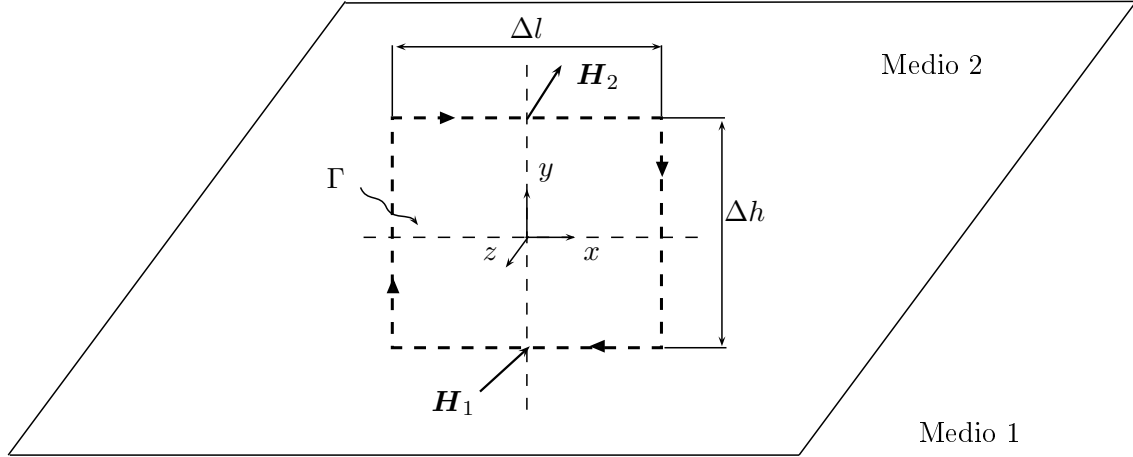


Figura 2.5: Condiciones de frontera del campo magnético

Aplicando el teorema de Stokes a la ley de Ampère generalizada Ec. (2.26)₄ en condiciones estacionarias se llega a

$$\mathbf{H}_{2t} \Delta l + \mathbf{H}_{1t} (-\Delta l) = \mathbf{J} n_z \Gamma \quad (2.65)$$

como $\Delta h \ll \Delta l$, la superficie Γ será muy pequeña y el lado derecho de la ecuación anterior se anula. Además, como se comentará en la Sección 2.2.2, en ninguna de las aplicaciones del proyecto existirá intensidad \mathbf{J} . Por tanto $(\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t}) \Delta l = 0$, de donde se infiere que la componente tangencial del campo magnético \mathbf{H} es continua al atravesar una zona interfacial.

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \quad (2.66)$$

Utilizando el mismo razonamiento con la ley de Faraday-Lenz Ec. (2.26)₂, se demuestra que la componente tangencial del campo eléctrico \mathbf{E} también es continua al cambiar de medio.

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad (2.67)$$

2.3. Resumen de las ecuaciones

En esta sección se realizará una revisión organizada de las ecuaciones implementadas en la formulación del *elmt01.f*. Esta formulación es mucho más amplia que la desarrollada a lo largo del Capítulo 2, pero para realizar el presente trabajo es suficiente.

Las ecuaciones cinemáticas Ecs. (2.1), (2.52) y (2.58) son

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \nabla^s \mathbf{u} \\ \mathbf{H} &= -\nabla \varphi \\ \mathbf{E} &= -\nabla V \end{aligned} \quad (2.68)$$

Las ecuaciones de equilibrio Ecs. (2.3), (2.17), (2.26)₁ y (2.26)₃ son

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \rho_v \mathbf{a} \\
 \nabla \cdot \mathbf{Q} &= -\rho_v c_p \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Y por último, las ecuaciones constitutivas Ecs. (2.8), (2.18) y (2.33), con los acoplamientos tratados y con los residuales son

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c} \mathbf{S} - e^\varphi \mathbf{H} - e^V \mathbf{E} + \alpha \Delta T + \boldsymbol{\sigma}^m + \boldsymbol{\sigma}^R \\
 \mathbf{Q} &= -\kappa \nabla(\Delta T) \\
 \mathbf{B} &= \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} + e^\varphi \mathbf{S} + \nu \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{M}^R \\
 \mathbf{D} &= \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} + e^V \mathbf{S} + \nu \mathbf{H} + \mathbf{P}^R
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

3

Validaciones del programa

Los cálculos del presente proyecto se van a realizar con el programa de elementos finitos FEAP, desarrollado en Fortran por Robert L. Taylor de la universidad de Berkeley, California [14]. Para su realización es necesario utilizar elementos programados por el usuario, puesto que en la biblioteca de este programa no existe ningún elemento capaz de simular los acoplamientos necesarios.

Se utilizará el *Elmt01.f*, desarrollado en [13], elemento que tiene programadas todas las ecuaciones y las matrices descritas en el Capítulo 2. En particular, se hará hincapié en los acoplamientos magnetostrictivo y termoelástico. Es importante destacar que este elemento permite realizar estudios de materiales transversalmente isótropos: en la dirección x e y presenta las mismas propiedades, no obstante, en la dirección z pueden ser distintas.

En este apartado se realizarán algunos ejemplos sencillos, tanto de campos desacoplados como de algunos acoplamientos, siempre con solución analítica o suficiente información para ser contrastados.

3.1. Problema electrostático bidimensional

Se tienen dos conductores coaxiales de sección cuadrada, el interior con un lado de 0.05 m y el exterior con un lado de 0.15 m; el esquema del problema se muestra en la Figura 3.1. El conductor interior está sometido a un voltaje de 1000 V respecto al exterior conectado a masa, siendo el aislante entre ambos el dominio de estudio con una permitividad igual a la del vacío ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m).

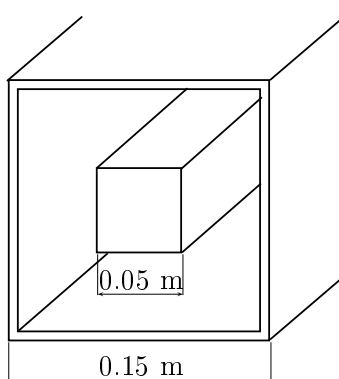


Figura 3.1: Problema electrostático bidimensional

Se trata de estudiar el campo eléctrico y la distribución de voltajes en el aislante. Según la Ec. (2.30), la divergencia del campo eléctrico es igual a una constante, y según la definición de campo eléctrico $E = -\nabla V$; uniendo las dos expresiones anteriores obtenemos la ecuación a resolver que queda como

$$\nabla^2 V = 0 \tag{3.1}$$

La solución de esta ecuación diferencial para la geometría dada no es sencilla, por lo que contrastaremos los resultados obtenidos con los presentados en [7], que resuelve el problema utilizando diferencias finitas.

Como la dimensión longitudinal de los conductores es indefinidamente larga, el campo \mathbf{E} tiene únicamente componentes transversales y se puede resolver bidimensionalmente. Para el estudio se ha representado solo un cuadrante, debido a la simetría existente, y para su modelización con FEAP se ha elegido un modelo de 15006 nodos y 7200 elementos de 8 nodos cada uno y con forma de hexaedro. Se trata de una malla muy fina para un problema de este tipo, pero es necesaria para conseguir buenos resultados en la zona cercana conductor interior, donde se produce una singularidad y el campo eléctrico \mathbf{E} tiende a infinito.

En las Figuras 3.2 y 3.3 se observa la distribución de voltajes y del campo eléctrico respectivamente.

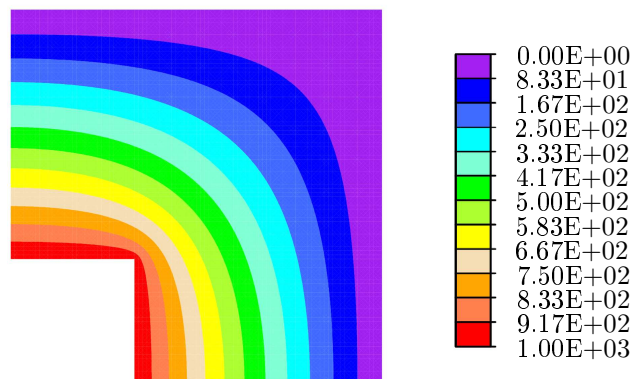


Figura 3.2: Distribución de voltaje V

En la Figura 3.4 se compara la distribución de voltaje en la diagonal (línea que une la esquina del conductor interior con su correspondiente del conductor exterior) obtenida mediante el programa FEAP y un gráfico extraído del libro ya mencionado [7], pág. 67.

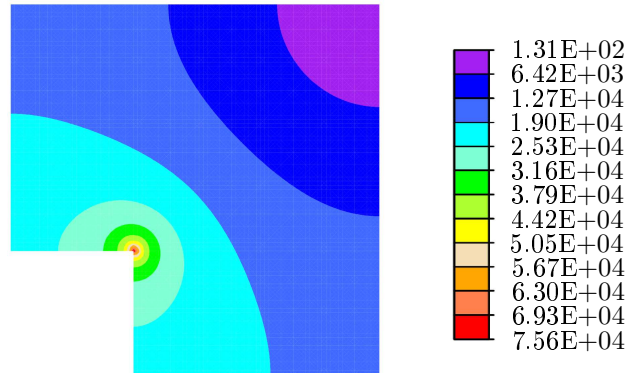


Figura 3.3: Distribución del módulo del campo eléctrico E

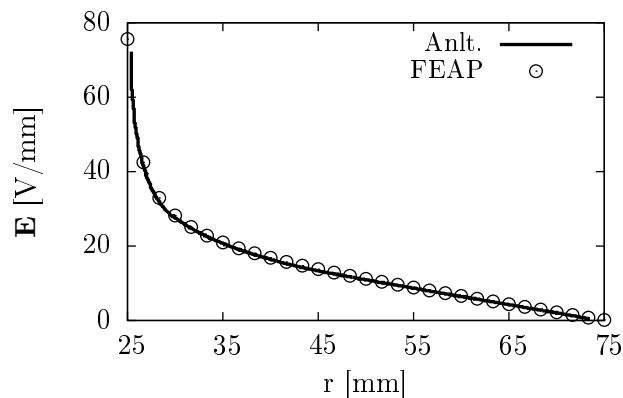


Figura 3.4: Comparación de la distribución de voltaje V en la diagonal

Existe elevada coincidencia de los resultados obtenidos por ambos métodos, salvo en el punto crítico de la esquina del conductor interior. La malla utilizada es bastante fina, por lo que permite un buen resultado en dicho punto; en otras comprobaciones con mallas más gruesas se obtuvieron peores resultados, más bajos a medida que aumenta el tamaño del elemento.

3.2. Problema esfera termoelástica

En esta sección se estudiará la distribución de tensión de Cauchy que se obtiene al imponer una diferencia de temperatura en la cara interna y externa de una esfera hueca. El radio interior r_1 es de 2 m y el exterior r_2 , de 4 m. En la superficie interior se impone una temperatura $T_1 = 80$ °C, mientras que en el exterior $T_2 = 100$ °C, siendo la temperatura de referencia $T_0 = 0$ °C. Se utilizarán las propiedades del acero: $E = 210 \cdot 10^9$ Pa, $\nu = 0,3$ y $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/°C.

En FEAP se ha modelizado tan solo un octavo de la esfera debido a las simetrías existentes. Las condiciones de contorno impuestas han sido de temperatura en ambas superficies y simetría, puesto no se ha representado la esfera completa. Se ha utilizado una malla de 5808 nodos y 4500 elementos hexaédricos de 8 nodos cada uno.

La solución analítica se ha obtenido de la Subsección 4.4.3 de [16], no obstante, se han detectado dos errores que han sido corregidos en las ecuaciones 3.3 y 3.6. Para obtener la distribución de temperaturas se debe resolver la ecuación esférica de Laplace (2.21)

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.2)$$

cuya solución es

$$T(r) = \frac{(r_2/r_1) T_2 - T_1}{(r_2/r_1) - 1} + \frac{T_1 - T_2}{(r_2/r_1) - 1} \frac{r_2}{r} \quad (3.3)$$

En la Figura 3.5 se representa la solución de la distribución de temperaturas que ofrece FEAP comparada con la solución analítica, observándose que coinciden. Al tratarse de una esfera la distribución de temperaturas no es lineal, sino que se trata de una distribución inversa.

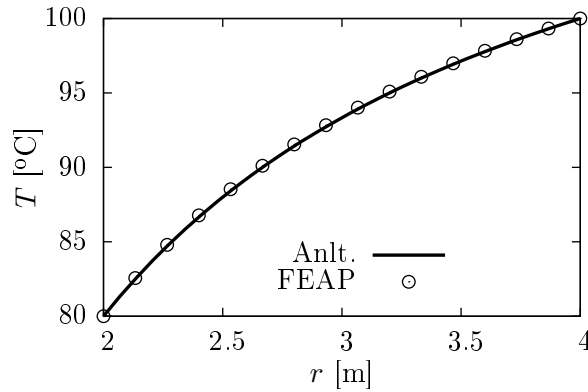


Figura 3.5: Esfera termoelástica. Distribución de la temperatura T

El cálculo de la tensión de Cauchy radial y angular se deriva de la ecuación de compatibilidad mecánica en coordenadas esféricas

$$S_r = \frac{d}{dr}(rS_\theta) \quad (3.4)$$

en la que sustituimos las ecuaciones constitutivas (2.13), definidas también para coordenadas esféricas y que tienen en cuenta el acoplamiento térmico.

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta) + \alpha T \\ S_\theta &= \frac{1}{E}[(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] + \alpha T \end{aligned} \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta la distribución de temperaturas obtenida en 3.3 y resolviendo para las condiciones de contorno $\sigma_r(r_1) = \sigma_\theta(r_2) = 0$ se llega a

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\lambda \left[\frac{r_2}{r} - \frac{1}{(b/a)^2 + (b/a) + 1} \left(\frac{b^3}{r^3} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b}{a} \right) \right] \\ \sigma_\theta &= -\lambda \left[\frac{r_2}{2r} + \frac{1}{(b/a)^2 + (b/a) + 1} \left(\frac{b^3}{2r^3} - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.6)$$

siendo r la coordenada radio, σ_r y σ_θ la tensión de Cauchy radial y angular, respectivamente, en coordenadas esféricas y $\lambda = \frac{E \alpha (T_1 - T_2)}{(1 - \nu)(\frac{b}{a} - 1)}$.

En las Figura 3.6 se comparan los resultados obtenidos con FEAP con la solución analítica.

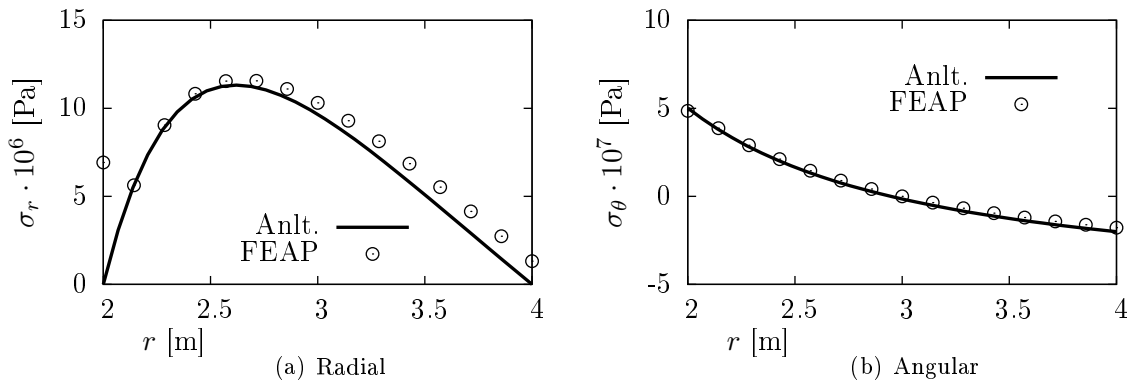


Figura 3.6: Esfera termoelástica. Tensión de Cauchy σ^c

En la tensión angular se obtienen buenos resultados, no obstante, en la tensión radial aparece un anomalía en la cara interna $r = 2$ m y a medida que se aproxima a la cara externa $r = 4$ m el error entre ambas soluciones aumenta. Ésto puede ser debido a que con las condiciones de contorno dadas, el programa FEAP no es capaz de interpretar que las tensiones en los extremos son nulas (no es posible establecer la tensión como condición de contorno).

3.3. Problema viga termoelástico

Se dispone de una viga con restricciones de desplazamientos en las caras perpendiculares a la dirección x y con un incremento de temperatura en la dirección y . La temperatura en la cara superior es de 300 °C, mientras que en la inferior es de 0 °C, que coincide con la temperatura de referencia.

Se utilizará una viga de sección cuadrada, de lado $h = 0,3$ m y de longitud $L = 3$ m, obteniendo una relación $L/h = 10$, valor mínimo para poder aplicar la teoría de vigas a un

cuerpo real tridimensional. El material es acero, por lo que las propiedades utilizadas serán las mismas que en la Sección 3.2. Para comparar los resultados con FEAP se ha utilizado una malla con 1125 nodos y 88 elementos isoparamétricos tridimensionales de 27 nodos cada uno.

Se realizará el estudio de tres casos: viga biempotrada, viga con articulación vertical móvil y viga biarticulada.

3.3.1. Viga biempotrada

El primer caso consistirá en la viga biempotrada, tal y como se muestra en la Figura 3.7. Debido a la dilatación por el incremento de temperatura, la fibra superior tiende a alargarse, pero como los apoyos lo impiden, aparece tensión de compresión.

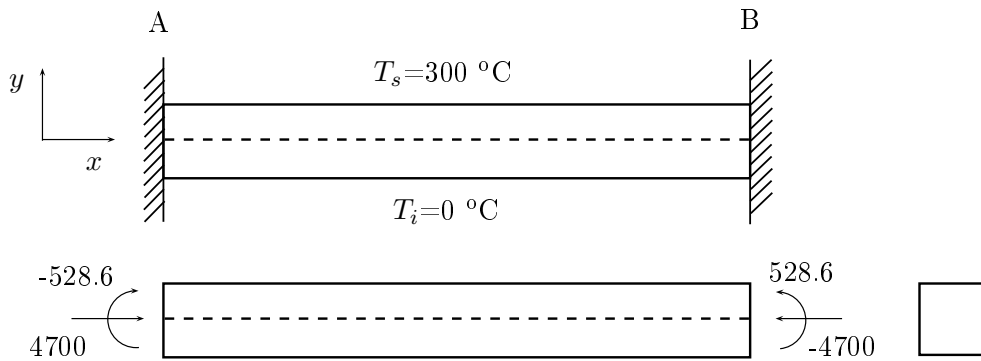


Figura 3.7: Viga biempotrada

Resulta sencillo calcular las fuerzas N y momentos M que aparecen

$$\begin{aligned} N &= EA T_m \alpha = 4700 \text{ kN} \\ M &= EI T_g \alpha = 568,6 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $T_m = 150 \text{ }^\circ\text{C}$, que es el incremento de temperatura en el centro de la viga, $T_g = (T_s - T_i)/h = 1000 \text{ }^\circ\text{C/m}$ y h es el canto de la viga. Se puede demostrar fácilmente (por ejemplo con análisis matricial o con el teorema de Castigliano) que los desplazamientos son nulos en este caso.

También resulta trivial obtener las reacciones de los empotramientos A y B

$$\begin{aligned} R_{xA} &= 4700 \text{ N} & R_{xB} &= -4700 \text{ N} \\ R_{yA} &= 0 \text{ N} & R_{yB} &= 0 \text{ N} \\ R_{mA} &= -528,6 \text{ N}\cdot\text{m} & R_{mB} &= -528,6 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Si se calcula la tensión σ_x en la cara superior se obtiene

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M h}{I} = -\frac{EA T_m \alpha}{A} + \frac{EI T_g \alpha h}{I} = -6,3 \cdot 10^8 \text{ Pa} \quad (3.9)$$

que, como se puede comprobar, no depende del área de la viga A ni del momento de inercia I . Comparando con la tensión obtenida con la malla de FEAP (Figura 3.8), se comprueba que la tensión en la fibra superior coincide.

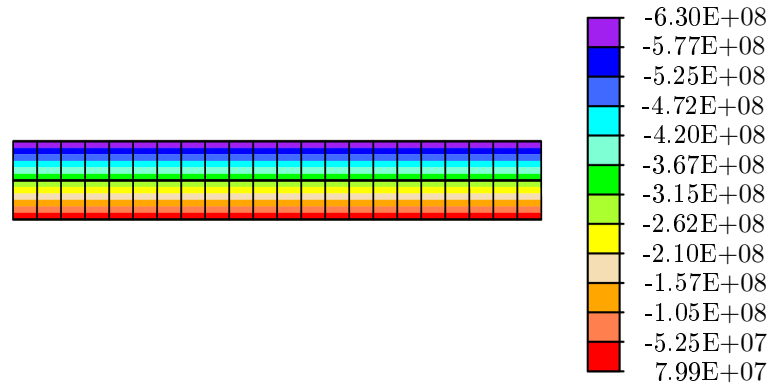


Figura 3.8: Tensión σ_x en la viga biempotrada

Para simular los empotramientos se han restringido los tres desplazamientos de los nodos centrales de las superficies de los extremos, y además, al resto de nodos de estas caras se ha restringido el desplazamiento en la dirección x , para que se puede expandir libremente en las direcciones transversales (no tenidas en cuenta en teoría de vigas).

3.3.2. Viga con articulación vertical móvil

A continuación se cambiará el empotramiento de la derecha por una articulación vertical móvil que permitirá que la viga pueda doblarse libremente en este extremo; obsérvese la Figura 3.9.

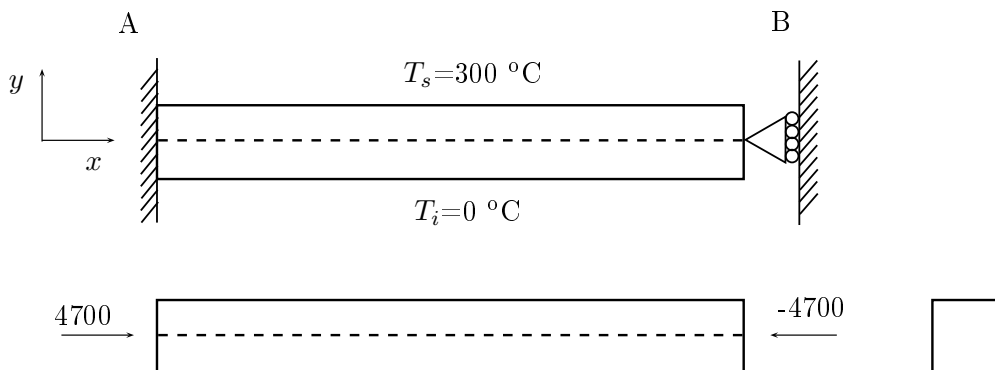


Figura 3.9: Viga con articulación vertical móvil

Las fuerzas N que aparecen son las mismas que en el caso anterior, mientras que los momentos M son nulos debido a que no existen cargas externas y que en el apoyo derecho $M = 0$. Se demuestra con análisis matricial y un solo elemento que calculando las reacciones

en los extremos A y B y teniendo en cuenta que debido a la articulación vertical móvil $R_{yB} = R_{mB} = 0$, se obtiene

$$\begin{array}{ll} R_{xA} = 4700 \text{ N} & R_{xB} = -4700 \text{ N} \\ R_{yA} = 0 \text{ N} & R_{yB} = 0 \text{ N} \\ R_{mA} = 0 \text{ N}\cdot\text{m} & R_{mB} = 0 \text{ N}\cdot\text{m} \end{array} \quad (3.10)$$

Si se calcula la tensión constante σ_x a la que se somete la viga se obtiene

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = -E T_m \alpha = -3,15 \cdot 10^8 \text{ Pa} \quad (3.11)$$

Para la resolución con FEAP, en el extremo izquierdo se han impuesto las mismas condiciones de contorno que en el caso anterior, y para simular la articulación vertical móvil se ha restringido el desplazamiento en la dirección x de todos los nodos de la superficie central de la malla (superficie $y = 0$ m; ver Figura 3.9).

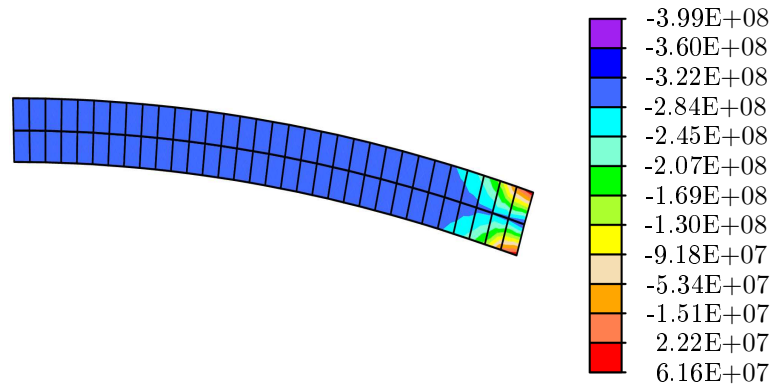


Figura 3.10: Tensión σ_x en la viga con articulación vertical móvil

Como se observa en la Figura 3.10, aparecen concentradores de tensiones en el extremo derecho debido a las restricciones de desplazamiento impuestas. Si nos alejamos suficiente de este extremo, se puede comprobar que la tensión tiene una distribución uniforme entre $-2.84 \cdot 10^8$ y $-3.22 \cdot 10^8$ Pa, rango que incluye el valor calculado anteriormente.

Si se realiza una ampliación del tercio central de la viga, se puede observar de forma más precisa, como la tensión coincide con el valor $-3.15 \cdot 10^8$ Pa.

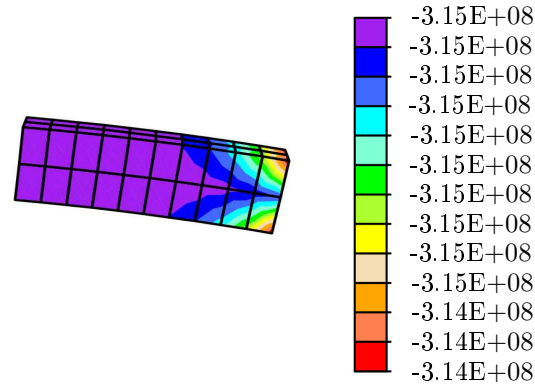


Figura 3.11: Ampliación de la tensión σ_x en la viga con articulación vertical móvil

También es posible calcular el desplazamiento vertical en el extremo derecho mediante análisis matricial

$$v_B = -\frac{1}{2} L^2 T_g \alpha = -4,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (3.12)$$

que coincide con el valor obtenido con FEAP: rango entre $-4,74 \cdot 10^{-2}$ y $-4,32 \cdot 10^{-2}$ m.

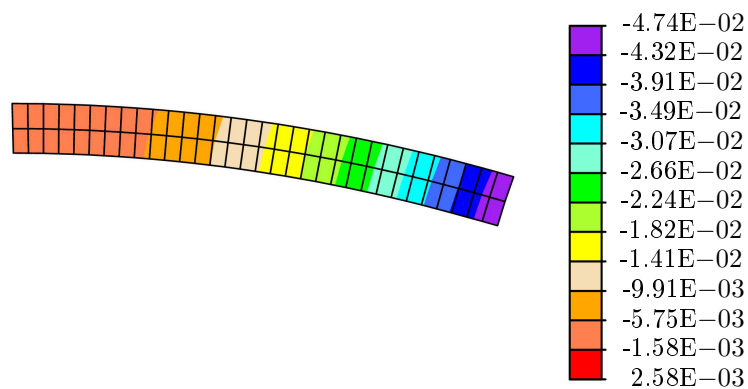


Figura 3.12: Desplazamiento vertical v en la viga con articulación vertical móvil

3.3.3. Viga biarticulada

Por último se estudiará una viga biarticulada, con una articulación horizontal móvil en cada extremo tal y como se muestra en la Figura 3.13.

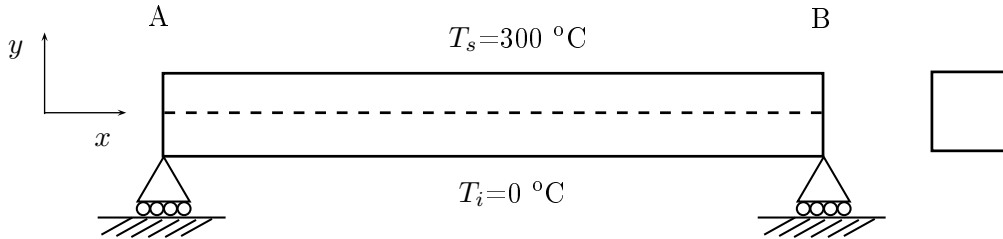


Figura 3.13: Viga biarticulada

A la hora de realizar el análisis matricial se simplificará el estudio a un único elemento que equivale a la mitad de la viga; obsérvese Figura 3.14. Esto es posible debido a la simetría existente en el plano perpendicular a la dirección x en el centro de la viga. Se puede observar que debido a la relatividad del movimiento, esta simplificación equivale al estudio de una viga en boladizo.

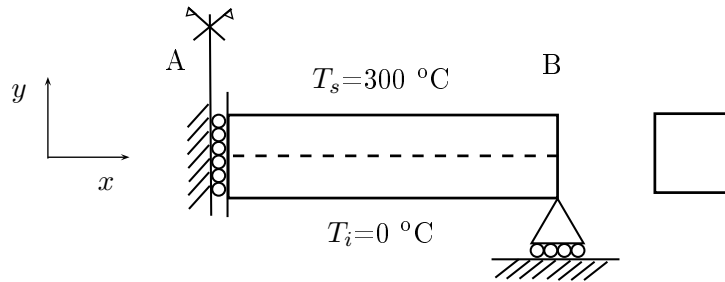


Figura 3.14: Viga biarticulada simplificada

Calculando se obtiene que las reacciones son todas nulas, por lo que no existe ninguna fuerza nodal $N = M = 0$ y $\sigma_x = 0$. En cuanto a los desplazamientos se tiene

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{1}{2} L^2 T_g \alpha = 1,13 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ u_B &= L T_m \alpha = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ m;} \end{aligned} \quad (3.13)$$

En la Figura 3.15 se observa el resultado del desplazamiento vertical v obtenido con FEAP. En el extremo izquierdo tiene un valor entre $1.06 \cdot 10^{-2}$ y $1.16 \cdot 10^{-2}$ m, rango que incluye el valor v_A calculado anteriormente. La Figura 3.16 representa el desplazamiento longitudinal u , donde el punto central del extremo derecho (color verde) incluido en el rango $1.95 \cdot 10^{-3}$ y $2.34 \cdot 10^{-3}$ m, coincide con el valor u_B calculado.

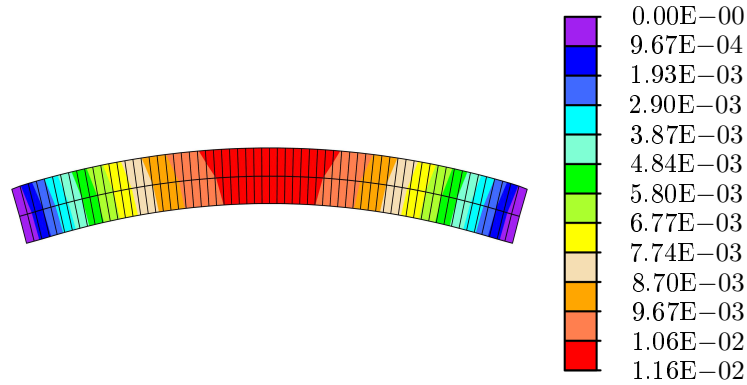


Figura 3.15: Desplazamiento vertical v en la viga biarticulada

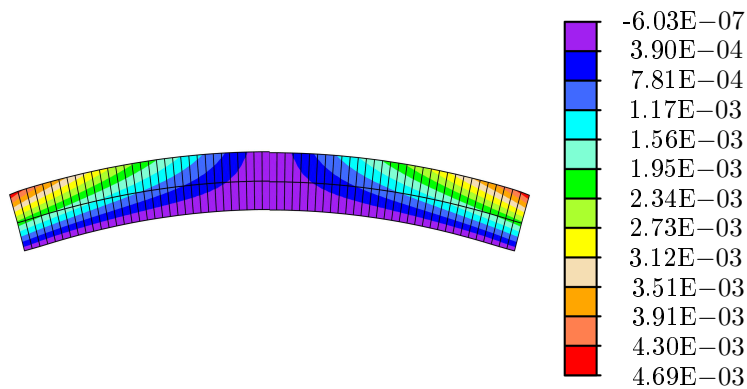


Figura 3.16: Desplazamiento longitudinal u en la viga biarticulada

En este caso las restricciones impuestas son las siguientes: todos los nodos de la cara del extremo derecho presentan restringido el movimiento en la dirección y ; el nodo central de la cara del extremo izquierdo está restringido en las direcciones x y z y el resto de los nodos de esta cara solo en la dirección x .

3.4. Acoplamientos

En esta sección se estudiarán los acoplamientos magnetoeléctrico, piezoeléctrico y piezomagnético. Su geometría de estudio será común para todos tal y como se expone en [13].

Es una geometría de dos dimensiones (ver Figura 3.17), con $l_z = 1.14 \cdot 10^{-3} \text{m}$ y $l_y = 3 l_z$. En la cara superior se impone un valor de $\varphi = 10 \text{ A}$ o $V = 10 \text{ V}$, dependiendo de la validación, mientras que en el resto de caras su valor es nulo; además las restricciones de los desplazamientos se muestran en la figura mencionada.

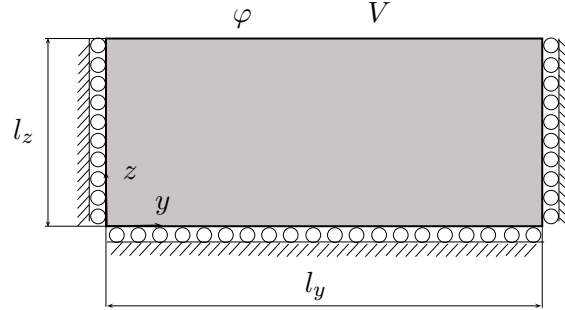


Figura 3.17: Dominio de los acoplamientos

Se utilizará una malla de FEAP con 882 nodos y 400 elementos de 8 nodos cada uno y forma de hexaedro. El dominio se considerará transversalmente isótropo y las propiedades utilizadas (en SI) son las descritas en [13], han sido obtenidas de múltiples fuentes y principalmente son de BaTiO₃-CoFeO₄ (piezoeléctrico). Según las búsquedas realizadas, de momento no se ha realizado ninguna caracterización completa de ningún material del ámbito magnetostrictivo debido a la dificultad experimental y a la ausencia de formulación general; no obstante en [22] sí se definen las matrices \mathbf{c} , $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{e}^φ , insuficientes para validar todos los acoplamientos.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} 116 & 77 & 78 & 0 & 0 & 0 \\ & 116 & 78 & 0 & 0 & 0 \\ & & 162 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 89 & 0 & 0 \\ -S- & & & 86 & 0 & 0 \\ & & & & 86 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^9; & \boldsymbol{\mu} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}; \\
 \mathbf{e}^V &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11,6 & 0 \\ -4,4 & -4,4 & 18,6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \mathbf{e}^\varphi &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,5 & 0 \\ 5,8 & 5,8 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^2; \\
 \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 5,37 & 0 & 0 \\ 0 & 5,37 & 0 \\ 0 & 0 & 2737,5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12}; & \boldsymbol{\epsilon} &= \begin{bmatrix} 11,2 & 0 & 0 \\ 0 & 11,2 & 0 \\ 0 & 0 & 12,6 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}; \\
 \boldsymbol{\alpha} &= \{1,67, 1,67, 1,96\}^\top \cdot 10^{-6}; & k &= 2,61; \\
 \rho_v &= 5,7 \cdot 10^3; & c_e &= 434; & \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7}; & \epsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12};
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

3.4.1. Acoplamiento electromagnético

En este caso se impone en la cara superior $\varphi = 10$ A; se tendrá en cuenta la relación directa, en la que un campo magnético (efecto) genera un campo eléctrico (causa). La ecuación constitutiva es la Ec. (2.70)₄, que sin el resto de acoplamientos queda $\mathbf{D} = \nu \mathbf{H}$. Además, si solo tenemos en cuenta únicamente la componente en el eje z tenemos $D_3 = \nu_{33} H_3$. El campo magnético \mathbf{H} se obtiene de resolver la Ecuación (2.68)₂.

En la Figura 3.18 se observa la distribución del potencial magnético φ , que sería equivalente a la distribución de voltaje obtenida al imponer en la cara superior $V = 10$ V. Esta distribución es correcta de acuerdo a las condiciones de contorno y coincide con la expuesta en [13].

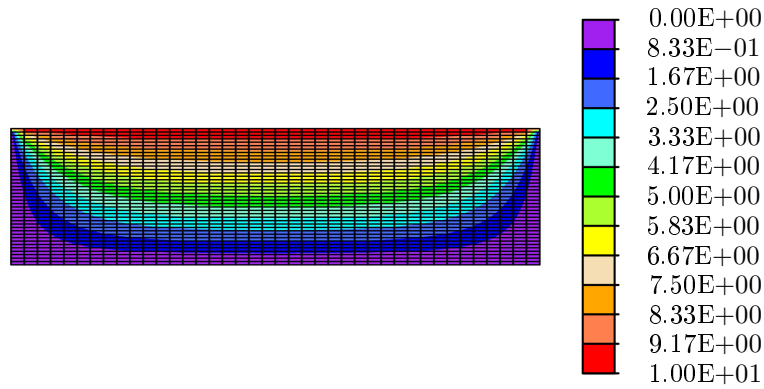


Figura 3.18: Acoplamiento electromagnético. Distribución del potencial magnético φ

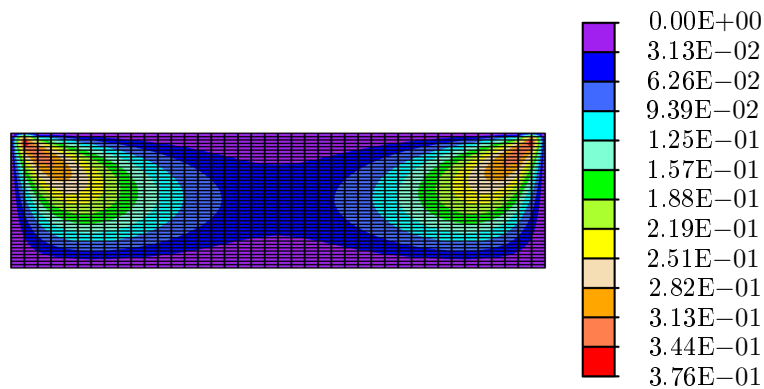


Figura 3.19: Acoplamiento electromagnético. Distribución del voltaje V

En la Figura 3.19 se representa la distribución del voltaje debido al acoplamiento. La ecuación constitutiva se obtiene eliminado el resto de acoplamientos de la Ec. (2.70)₄, es decir, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \nu \mathbf{H}$. Comparando las distribuciones obtenidas con las expuestas en [13] se observa elevada coincidencia.

Además, también se compara la distribución de la magnetización en la línea $z = l_z/2$ con la solución analítica, obteniendo un buen resultado (véase Figura 3.20). Esta solución analítica se obtiene de la ecuación es $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, donde χ_m se puede despejar de la Ec. (2.36) y si solo se tiene en cuenta la componente z se obtiene

$$M_3 = \left(\frac{\mu_{33}}{\mu_0} - 1 \right) H_3 \quad (3.15)$$

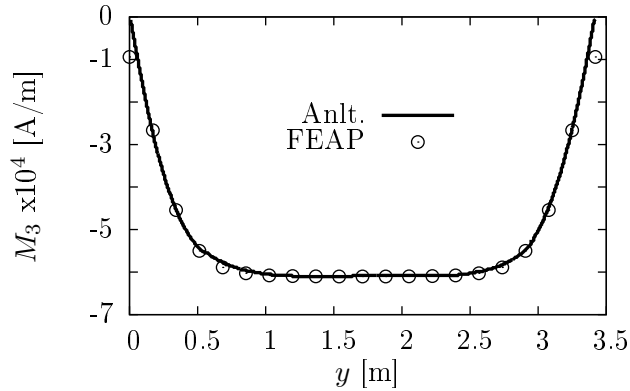


Figura 3.20: Acoplamiento electromagnético. Magnetización M_3 en $z = l_z/2$

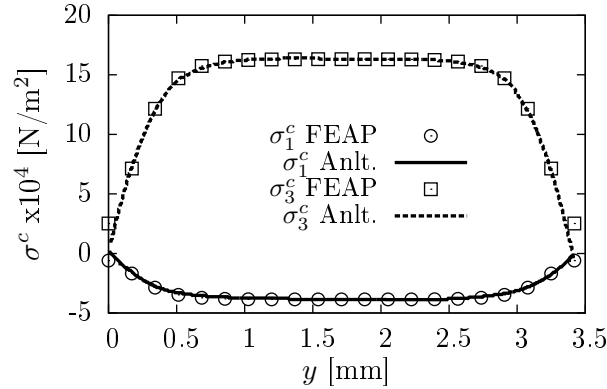
3.4.2. Acoplamiento piezoeléctrico

Para el acoplamiento entre el campo elástico y el campo eléctrico se impondrá en la cara superior del dominio $V = 10$ V. Como se ha explicado en la Subsección 2.2.3 el acoplamiento entre ambos campos se realiza a través tanto de la tensión de Cauchy σ^c como a través de la tensión de Maxwell σ^m .

La aportación a la tensión de Cauchy se expresa en la Ec. (2.61), en la que si el resto de acoplamientos son nulos queda como $\sigma^c = -e^V \mathbf{E}$. Teniendo en cuenta que solo existe campo eléctrico en la dirección z , la ecuación se puede simplificar a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^c \\ \sigma_3^c \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} e_{13}^V \\ e_{33}^V \end{Bmatrix} E_3 \quad (3.16)$$

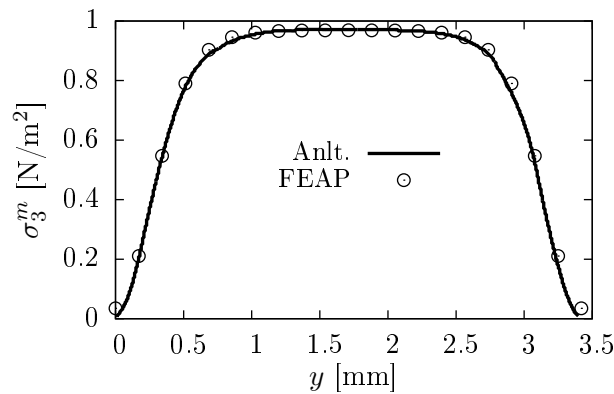
Representando a través de la línea $z = l_z/2$ los resultados obtenidos con FEAP y la solución analítica de la ecuación anterior en la Figura 3.21 se observa elevada coincidencia en ambas componentes de la tensión de Cauchy. El campo eléctrico \mathbf{E} se obtiene de resolver la Ecuación (2.68)₃.


 Figura 3.21: Acoplamiento piezoeléctrico. Tensión de Cauchy σ^c en $z = l_z/2$

La tensión de Maxwell se calcula según la Ec. (2.62) que simplificada para únicamente componente z del campo eléctrico \mathbf{E} , se llega a

$$\sigma_3^m = \left(\epsilon_{33} - \frac{\epsilon_0}{2} \right) E_3 \quad (3.17)$$

En la Figura 3.22 se observa la aportación de la tensión de Maxwell debida a la presencia de un campo eléctrico, y se compara la solución analítica con los valores calculados en FEAP, obteniendo buenos resultados. Como se puede apreciar, en el acoplamiento piezoeléctrico la componente de la tensión de Maxwell es despreciable frente a la componente de la tensión de Cauchy que es cuatro órdenes superior.


 Figura 3.22: Acoplamiento piezoeléctrico. Tensión de Maxwell σ_3^m en $z = l_z/2$

3.5. Acoplamiento piezomagnético

En el caso del acoplamiento piezomagnético se impondrá en la cara superior del dominio $\varphi = 10$. Esta validación es equivalente a la anterior pero sustituyendo el campo eléctrico por el magnético. Así, el acoplamiento también se realiza a través tanto de la tensión de Cauchy σ^c como de la tensión de Maxwell σ^m .

La ecuación de la aportación a la tensión de Cauchy se expresa también en la Ec. (2.61), que simplificada queda como $\sigma^c = -e^\varphi \mathbf{H}$. Si solo existe componente z del campo magnético \mathbf{H} , se tiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^c \\ \sigma_3^c \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} e_{13}^\varphi \\ e_{33}^\varphi \end{Bmatrix} H_3 \quad (3.18)$$

En la Figura 3.23 se representan los resultados de las dos componentes de σ^c obtenidos con FEAP y con la solución analítica de la ecuación anterior a través de la línea $z = l_z/2$; se observa elevada coincidencia.

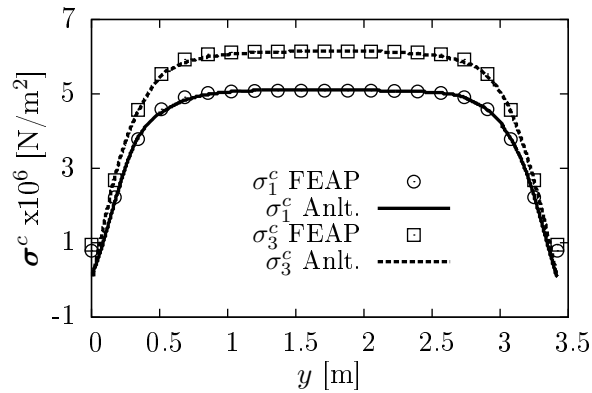


Figura 3.23: Acoplamiento piezomagnético. Tensión de Cauchy σ^c en $z = l_z/2$

Para calcular la tensión de Maxwell se simplifica la Ec. (2.62) para la componente z del campo eléctrico \mathbf{H} , obteniendo

$$\sigma_3^m = \left(\mu_{33} - \frac{\mu_0}{2} \right) H_3 \quad (3.19)$$

En la Figura 3.24 se compara la solución analítica y los valores obtenidos de FEAP de la aportación de la tensión de Maxwell, consiguiendo buena coincidencia. En este caso, la tensión de Maxwell también es despreciable frente a la tensión de Cauchy.

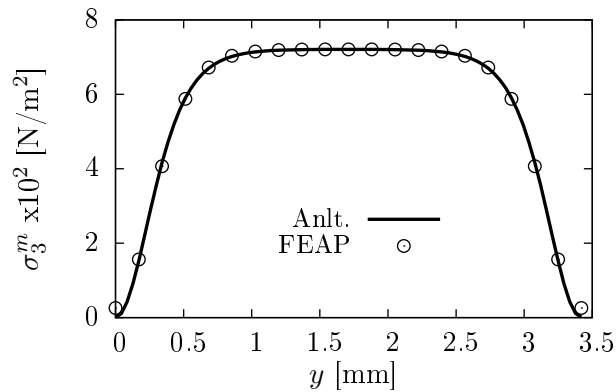


Figura 3.24: Acoplamiento piezomagnético. Tensión de Maxwell σ_3^m en $z = l_z/2$

4

Modelización de un miniactuador magnetostrictivo

En este capítulo se va a modelar un miniactuador magnetostrictivo de Terfenol-D y se compararan los resultados con medidas experimentales para comprobar la validez de la formulación.

4.1. Mallado

Para realizar el modelado del miniactuador magnetostrictivo solo es necesario mallar la barra de Terfenol-D (con forma de cilindro), puesto que la formulación con potencial escalar magnético φ permite imponer, mediante condiciones de contorno, el campo magnético generado por la bobina que la envuelve (ver Figura 1.10). Además, debido a la simetría angular existente se puede representar tan solo un cuarto de la barra, tal y como se muestra en la Figura 4.1.

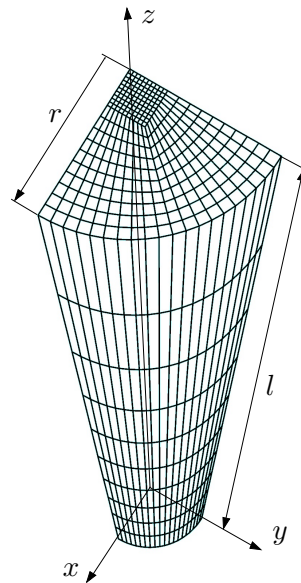


Figura 4.1: Malla de 1/4 de la barra de Terfenol-D

Las dimensiones de la malla son $l = 100$ mm de longitud y $r = 5$ mm de radio, para que sean concordes con las dimensiones del prototipo del miniactuador del cual se han obtenido los datos experimentales [31]. Se han utilizado un total de 3993 nodos y 3000 elementos hexaédricos de 8 nodos. Para simular la simetría, en la superficie $x = 0$ y $y = 0$ se han impuesto restricciones de desplazamiento en la dirección x y en la dirección y , respectivamente. Además, en el conjunto de nodos $z = 0$ se han restringido los 3 desplazamientos y se ha impuesto $\varphi = 0$.

El campo magnético que genera la bobina se calcula a partir de la longitud l , el número de espiras N y la intensidad I que circula por la misma, de tal modo que

$$H_3 = \frac{N}{l}I \quad (4.1)$$

Conocida la definición de \mathbf{H} Ec. (2.58) se calcula de una forma sencilla el potencial escalar magnético φ que hay que imponer en la superficie $z = l$ para simular el campo magnético generado por una intensidad I determinada

$$\varphi_{z=l} = -N I \quad (4.2)$$

siendo $N = 850$.

4.2. Propiedades del Terfenol-D

El elemento puro con mayor magnetostricción a temperatura ambiente es el cobalto, que puede llegar a deformarse 60 partes por millón ($6 \cdot 10^{-5}$ m/m). De entre las aleaciones, la más destacable es el Terfenol-D ($\text{Tb}_{0,27}\text{Dy}_{0,73}\text{Fe}_2$: Aleación de Terbio, Disprosió y Hierro), que presenta una magnetostricción de 2000 partes por millón (0.002 m/m); el nombre Terfenol-D deriva de 'Ter' (Terbio), 'Fe' (Hierro), 'Nol' (Naval Ordnance Laboratory) y 'D' (Disprosió).

A continuación se exponen las propiedades del material Terfenol-D y se compararan principalmente con las propiedades del acero para poder tener una mejor visión de los valores de las tablas.

Propiedades térmicas	Unidades	Tefenol-D
Calor específico c_p	J/kg·K	330
Conductividad térmica κ	W/m·K @25°C	13.5
Coefficiente de expansión térmica α	ppm/°C	12
Temperatura de fusión	°C	1240

Tabla 4.1: Propiedades térmicas del Terfenol-D

El Terfenol-D es una aleación que, aunque no llega a ser aislante, es poco conductora térmicamente. Si comparamos su conductividad térmica con la del acero (47-58 W/m·K), se puede estimar que es 4 veces menos conductor, sin embargo no se reduce a valores como el del aire (0.026 W/m·K) o el del agua (0.58 W/m·K), que se consideran aislantes. Tanto el punto de fusión como el coeficiente de expansión térmica presentan valores muy similares

al acero.

Propiedades mecánicas	Unidades	Tefenol-D
Densidad másica	kg/m ³	9200 - 9300
Módulo de Young a \mathbf{E} cte. E^E	GPa	10 - 75
Módulo de Young a \mathbf{B} cte. E^B	GPa	30 - 85
Resistencia a tracción	MPa	28 - 40
Resistencia a compresión	MPa	300 - 880
Velocidad del sonido c	m/s	1395 - 2444
Mínimo espesor laminar	mm	1
Dureza Vickers	HV	650

Tabla 4.2: Propiedades mecánicas del Terfenol-D

Como se puede observar tiene una densidad elevada, superior a la del acero, que es de 7850 kg/m³. Sin embargo, el resto de propiedades mecánicas, como son resistencia a tracción y a compresión, dureza y módulo de Young, son relativamente inferiores. Presenta una buenas características mecánicas, aunque no son comparables con la de los metales más utilizados como el acero o el aluminio.

Propiedades magnetomecánicas	Unidades	Tefenol-D
Densidad energética	kJ/m ³	4.9 - 25
Permeabilidad relativa a σ cte. μ_r^σ	-	9 - 12
Permeabilidad relativa a \mathbf{S} cte. μ_r^S	-	3 - 5
Constante piezomagnética d_{33}	nm/A	6 - 10
Factor de acoplamiento magnético k_{33}	-	0.7 - 0.8
Deformación por magnetoestricción	ppm	800 - 1200

Tabla 4.3: Propiedades magnetomecánicas del Terfenol-D

SECCIÓN 4.2. *Propiedades del Terfenol-D*

Es una aleación magnética: su permeabilidad es aproximadamente un orden superior a la del vacío. El factor de acoplamiento magnético k_{33} indica la eficiencia en que la energía magnética se convierte en energía mecánica, en el caso por ejemplo de un actuador magnetostrictivo. Se define por la ecuación

$$k_{33}^2 = \frac{(d_{33})^2}{\mu_{33}^T} E^H \quad (4.3)$$

donde d_{33} es la constante piezomagnética, μ_{33}^T es la permeabilidad a tensión constante y E^H es el módulo de Young a campo magnético constante.

Propiedades eléctricas	Unidades	Tefenol-D
Temperatura de Curie	°C	380
Resistividad eléctrica	Ω m	$(58-63) \cdot 10^{-8}$

Tabla 4.4: Propiedades eléctricas del Terfenol-D

Se trata de una aleación conductora eléctricamente. El acero inoxidable presenta una resistividad eléctrica del mismo orden: $72 \cdot 10^{-8} \Omega$ m.

En la actualidad se están centrado los estudios en fabricar los actuadores a partir de una nueva aleación llamada Galfenol que, aunque tiene una magnetoestricción (200-350 ppm) inferior al Terfenol-D, presenta una propiedades mecánicas más óptimas. Su densidad es aproximadamente 7800 kg/m^3 , su módulo de Young se encuentra entre 40-75 GPa, presenta una dureza Vickers de 200-250 HV y su permeabilidad relativa es del orden de 75-100. No obstante, destaca principalmente por su resistencia a la tracción (350 Mpa) que es un orden superior a la del Terfenol-D.

Todas las propiedades comentadas se introducen en el programa de elementos finitos FEAP a través de las matrices vistas en el Capítulo 2. Estas matrices han sido comparadas con las descritas en [22] y teniendo en cuenta que solo se estudiará el acoplamiento magnetostrictivo, las matrices relevantes son \mathbf{c}^H , $\boldsymbol{\mu}^S$ y \mathbf{e}^φ . No obstante, en [22] utiliza otras variables independientes, es decir, en la ecuación constitutiva (2.70)₁ en vez de igualar el término $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{S}, \mathbf{H})$, iguala la deformación $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H})$ de tal modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{s}^H \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d} \mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{d}^\top \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\mu}^\sigma \mathbf{H} \end{aligned} \quad (4.4)$$

siendo \mathbf{s}^H la matriz de flexibilidad, y \mathbf{d} , $\boldsymbol{\mu}^\sigma$, las matrices de acoplamiento magnetostrictivo y la permeabilidad (a tensión constante), respectivamente, para la formulación de [22]. Por lo tanto hay que aplicar unas transformaciones a las matrices (también definidas en la

referencia) para adaptarlas a la formulación del trabajo presente. Las matrices de [22] sin las transformaciones son

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}^H &= \begin{bmatrix} 12,5 & -0,18 & -1,7 & 0 & 0 & 0 \\ & 12,5 & -1,7 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 18 & 0 & 0 \\ -S- & & & & 18 & 0 \\ & & & & & 5,4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-11}; & \quad \boldsymbol{\mu}^\sigma &= \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 5,3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}; \\
 \mathbf{d} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,8 & 0 & 0 \\ -0,53 & -0,53 & 1,1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8};
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

y aplicando las transformaciones adecuadas, que se obtienen simplemente de despejar $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{B} de las Ecuaciones (4.4) y dejarlas en función de \mathbf{S} y \mathbf{H} .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}^H &= (\mathbf{s}^H)^{-1} \\
 \boldsymbol{\mu}^S &= \boldsymbol{\mu}^\sigma - \mathbf{d} (\mathbf{s}^H)^{-1} \mathbf{d}^\top \\
 \mathbf{e}^\varphi &= \mathbf{d} (\mathbf{s}^H)^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

se obtienen las matrices para la formulación del *elmt01.f*

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}^H &= \begin{bmatrix} 8,54 & 0,65 & 3,91 & 0 & 0 & 0 \\ & 8,54 & 3,91 & 0 & 0 & 0 \\ & & 28,32 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 5,56 & 0 & 0 \\ -S- & & & & 5,56 & 0 \\ & & & & & 18,52 \end{bmatrix} \cdot 10^9; & \quad \boldsymbol{\mu}^S &= \begin{bmatrix} 8,64 & 0 & 0 \\ 0 & 8,64 & 0 \\ 0 & 0 & 2,27 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}; \\
 \mathbf{e}^\varphi &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 155,56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 155,56 & 0 & 0 \\ -5,75 & -5,75 & 270,12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

todo en unidades del sistema internacional.

Si se desea trabajar con otras variables dependientes e independientes se deben utilizar otras transformaciones, en la Tabla 4.5 se muestran las distintas combinaciones posibles.

Variables	Efecto directo e inverso
$B = B(S, H)$ $\sigma = \sigma(S, H)$	$B = [(s^H)^{-1}d] S + [\mu^\sigma - d(s^H)^{-1}d^\top] H = e^\varphi S + \mu^S H$ $\sigma = [(s^H)^{-1}] S - [(s^H)^{-1}d] H = c^H S - (e^\varphi)^\top H$
$H = H(\sigma, B)$ $S = S(\sigma, B)$	$H = [-(\mu^\sigma)^{-1}d^\top] \sigma + [(\mu^\sigma)^{-1}] B = -g\sigma + (\mu^\sigma)^{-1}B$ $S = [s^H - d(\mu^\sigma)^{-1}d^\top] \sigma + [d(\mu^\sigma)^{-1}] B = s^B \sigma + g^\top B$
$H = H(S, B)$ $\sigma = \sigma(S, B)$	$H = [d - s^H(d^\top)^{-1}\mu^\sigma]^{-1} S - [f s^H(d^\top)^{-1}] B = -hS + (\mu^S)^{-1}B$ $\sigma = [-(d^\top)^{-1}\mu^\sigma f] S + [(d^\top)^{-1} + f s^H(d^\top)^{-1}] B = c^B S - h^\top B$

Tabla 4.5: Transformaciones para las distintas variables dependientes e independientes

siendo

$$f = (d - s^H (d^\top)^{-1} \mu^\sigma)^{-1} \quad (4.8)$$

4.3. Resultados y limitaciones

El modelo se ha resuelto para intensidades de entre 0 y 12 A. En la Figura 4.2 se presentan los resultados obtenidos, comparados con la solución experimental de [31], en el que se ensaya con un prototipo a una precompresión de 7,2 MPa.

Es importante destacar que se comprobaron distintos valores del parámetro principal del acoplamiento μ_3 , y mientras se mantenía en el mismo orden de magnitud, es decir, que correspondía con los valores de las propiedades obtenidas de diferentes fuentes, el resultado de la Figura 4.2 variaba de forma insignificante.

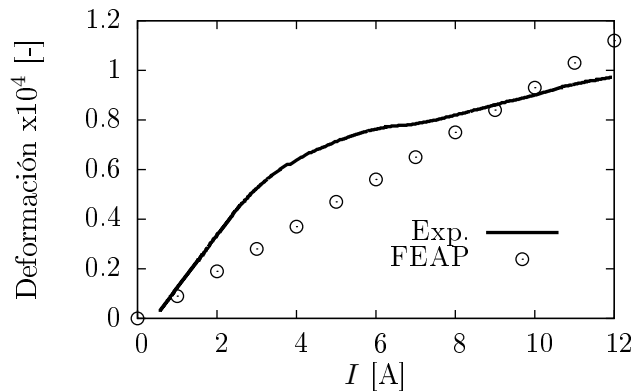


Figura 4.2: MMA. Comparación resultados FEAP con experimentales [22]

La principal limitación que se observa es que el modelo es lineal; esto no es del todo cierto, porque en la programación del elemento hay términos no lineales (como el tensor

de Maxwell σ^m), no obstante, y debido a que las ecuaciones constitutivas son lineales, no son suficientes para el acoplamiento magnetostrictivo.

Por otro lado, el término de tensión residual σ_r , pensado para solucionar el problema de la precompresión, no funciona adecuadamente; se debe a que la formulación de la tensión residual, no es teóricamente equivalente a una tensión externa de compresión, como es este caso. Además, no es posible establecer como condición de contorno una tensión, a no ser que se formulen FE mixtos; el elemento está programado para imponer desplazamientos, voltaje, potencial escalar magnético y temperatura, pero no tensiones.

También cabe destacar que parámetros como la deformación, tensión y magnetización de saturación, S_s , σ_s y M_s , respectivamente, que definen muy bien el comportamiento del MMA no se han tenido en cuenta como propiedades.

4.4. Soluciones

En esta sección se van a presentar posibles soluciones a las limitaciones de la programación del *elmt01.f*. Todas son actuales y han sido desarrolladas en distintos documentos, comparando los resultados con valores experimentales.

4.4.1. Matriz de acoplamiento magnetostrictivo polinómica

Una primera solución sería la propuesta en la referencia [33], que presenta un modelo no lineal de elementos finitos 3D para materiales magnetostrictivos implementado en el programa COMSOL multiphysics 3.2a. La característica principal es que utiliza los datos de una curva experimental para solucionar el problema de la no linealidad entre el campo magnético \mathbf{H} y la deformación \mathbf{S} .

Este modelo utiliza las mismas variables dependientes (\mathbf{S} y \mathbf{H}) e independientes (σ y \mathbf{B}) que el trabajo presente, de tal modo que, teniendo en cuenta solo el acoplamiento magnetostrictivo, las ecuaciones constitutivas (2.70) son

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbf{c}^H \mathbf{S} - (\mathbf{e}^\varphi)^\top \mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{e}^\varphi \mathbf{S} + \mu^S \mathbf{H}\end{aligned}\tag{4.9}$$

Utilizando ecuaciones constitutivas lineales no se puede caracterizar bien el comportamiento del efecto piezomagnético, por lo que en [33] se recurre a una función no lineal para el término $\mathbf{e}^\varphi \mathbf{H}$. Esta función es un polinomio de orden 6 que se obtiene ajustando puntos experimentales obtenidos en el laboratorio a una precompresión de 0 MPa, tal y como se muestra en la Figura 4.3.

El polinomio ajustado es

$$e^\varphi \mathbf{H} = -1,405 \cdot 10^{-35} H_3^6 + 1,861 \cdot 10^{-29} H_3^5 - 9,041 \cdot 10^{-24} H_3^4 + 2,140 \cdot 10^{-18} H_3^3 - 2,742 \cdot 10^{-13} H_3^2 + 2,121 \cdot 10^8 H_3 + 1,37 \cdot 10^{-4} \quad (4.10)$$

sin embargo, hay que tener en cuenta que este ajuste limita el modelo a la dirección principal del actuador (dirección z) y además, utilizar un orden 6 permite una mejor aproximación en el rango de trabajo pero imposibilita la extrapolación de resultados y empeora el tiempo de computo frente a ajustes de menor orden.

Se trata de una solución válida solo para un caso en concreto, es decir, no soluciona el problema de la precompresión y hay que definir un nuevo polinomio para distintos actuadores y distintas precompresiones. También presenta problemas en la implementación en elementos finitos debido al orden del ajuste. No obstante, en la referencia se realiza un estudio sobre un nuevo método para la elaboración precisa de orificios no cilíndricos del pasador de un pistón, obteniendo buenos resultados.

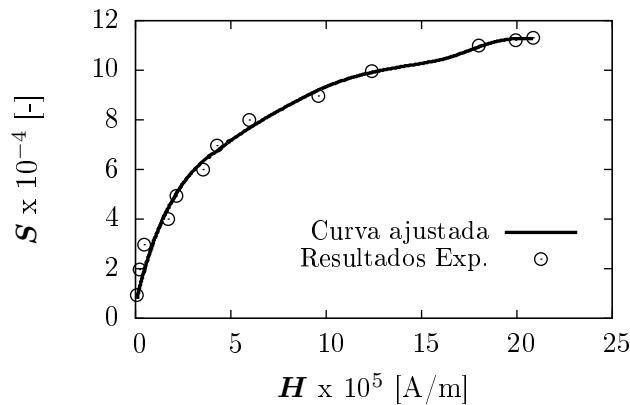


Figura 4.3: Curva ajustada del campo magnético \mathbf{H} frente a la deformación \mathbf{S} [33]

La referencia [34] utiliza un método similar, en el que divide la inducción en una parte reversible y otra irreversible. Ésta última aporta la no linealidad (puesto que las ecuaciones constitutivas son lineales), sin embargo, se define como un polinomio cuyos coeficientes se obtienen de modo experimental.

4.4.2. Matriz de acoplamiento magnetostrictivo dependiente

En la referencia [27] se desarrolla un modelo de FE no lineal en 3D enfocado principalmente para el Galfenol. Se basa en el trabajo [28] y se extiende para ecuaciones constitutivas no lineales basándose en el modelo discreto de energía media utilizando el programa COMSOL (versión 3.5a). Además, también propone una solución por partes muy interesante, utilizando ecuaciones constitutivas lineales, en las que con el programa Matlab (versión R2009a) al final de cada paso actualiza los coeficientes de las matrices de propiedades para

conseguir el efecto no lineal.

Esta formulación utiliza el potencial vectorial magnético \mathbf{A} , puesto que aunque aunque la dificultad a la hora de imponer un campo magnético como condición de contorno, es más apropiado para modelos dinámicos ya que permite tener en cuenta las corrientes de Eddy. Utilizando el potencial escalar φ , estas corrientes se deben especificar manualmente.

Para el procedimiento de la solución por partes, en la que utiliza ecuaciones constitutivas lineales, las variables dependientes son $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{S}, \mathbf{B})$ y $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{S}, \mathbf{B})$ de tal modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\mathbf{h} \mathbf{S} + \boldsymbol{\mu}^S \mathbf{B} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c}^B \mathbf{S} - \mathbf{h}^\top \mathbf{B}\end{aligned}\quad (4.11)$$

donde \mathbf{h} es la matriz de acoplamiento piezomagnético, $\boldsymbol{\mu}^S$ es la matriz de permeabilidad a deformación constante y \mathbf{c}^B es la matriz de rigidez a campo magnético constante.

En total se utilizan 33 coeficientes del material

$$\mathbf{c}^B = \begin{bmatrix} c_{11}^B & c_{12}^B & c_{13}^B & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^B & c_{23}^B & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^B & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^B & 0 & 0 \\ -S- & & & & c_{55}^B & 0 \\ & & & & & c_{66}^B \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\mu}^S = \begin{bmatrix} \mu_{11}^S & \mu_{12}^S & \mu_{13}^S \\ \mu_{12}^S & \mu_{22}^S & \mu_{23}^S \\ \mu_{13}^S & \mu_{23}^S & \mu_{33}^S \end{bmatrix}; \quad (4.12)$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} & h_{26} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} & h_{36} \end{bmatrix};$$

Utiliza muchos más coeficientes que la formulación expuesta en el Capítulo 2 y además son dependientes de la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ y el campo magnético \mathbf{H} ; como éste último depende de la posición espacial, los coeficientes también y por lo tanto, no son constantes para toda la malla. Los coeficientes son declarados como funciones interpoladas en las coordenadas del espacio, de tal modo que cuando el programa COMSOL lea el archivo que almacena los componentes de las matrices seleccionará los datos que corresponden a la localización en concreto o interpolará entre los puntos más cercanos.

Para calcular los coeficientes se recurre a la matriz Jacobiana, no obstante, no se obtienen directamente estas matrices, sino que se obtienen \mathbf{s}^H , \mathbf{d} y $\boldsymbol{\mu}^\sigma$ (matrices descritas en la Ec. (4.4)).

$$\mathbf{J}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^\sigma = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{H}_0) & \mathbf{d} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{H}_0) \\ \mathbf{d}^\top = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{H}}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{H}_0) & \mathbf{s}^H = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{H}_0) \end{bmatrix}\quad (4.13)$$

Para obtener las matrices deseadas se deben aplicar las transformaciones descritas en

la Tabla 4.5 obteniendo el sistema de ecuaciones a resolver en incrementos

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{H} \\ \Delta \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^S & -\mathbf{h} \\ -\mathbf{h}^\top & \mathbf{c}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{B} \\ \Delta \mathbf{S} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \mathbf{a}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{B} \\ \Delta \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

El diagrama de la Figura 4.4 muestra el procedimiento a seguir para obtener la solución por partes descrita. En primer lugar se inicializan los coeficientes, calculados para $\mathbf{H} = 0$ y $\boldsymbol{\sigma} = 0$ y se imprimen en un archivo que posteriormente será leído por el programa de elementos finitos COMSOL. A partir de las condiciones dadas del problema y las matrices calculadas se obtiene un desplazamiento $\Delta \mathbf{u}$ que permite obtener unos valores de $\Delta \mathbf{H}$ y $\Delta \boldsymbol{\sigma}$. A partir de estos nuevos resultados se actualizarán los valores de $\mathbf{H} = \mathbf{H} + \Delta \mathbf{H}$ y $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}$ y se recalcularán los coeficientes con Matlab; este proceso se realizará iterativamente hasta que se llegue al número de iteraciones n_T . Se podría modificar de tal modo que el proceso terminara cuando los valores de los incrementos de \mathbf{H} y $\boldsymbol{\sigma}$ sean inferiores a cierto valor de error, de tal modo que se considerara que ha convergido la solución.

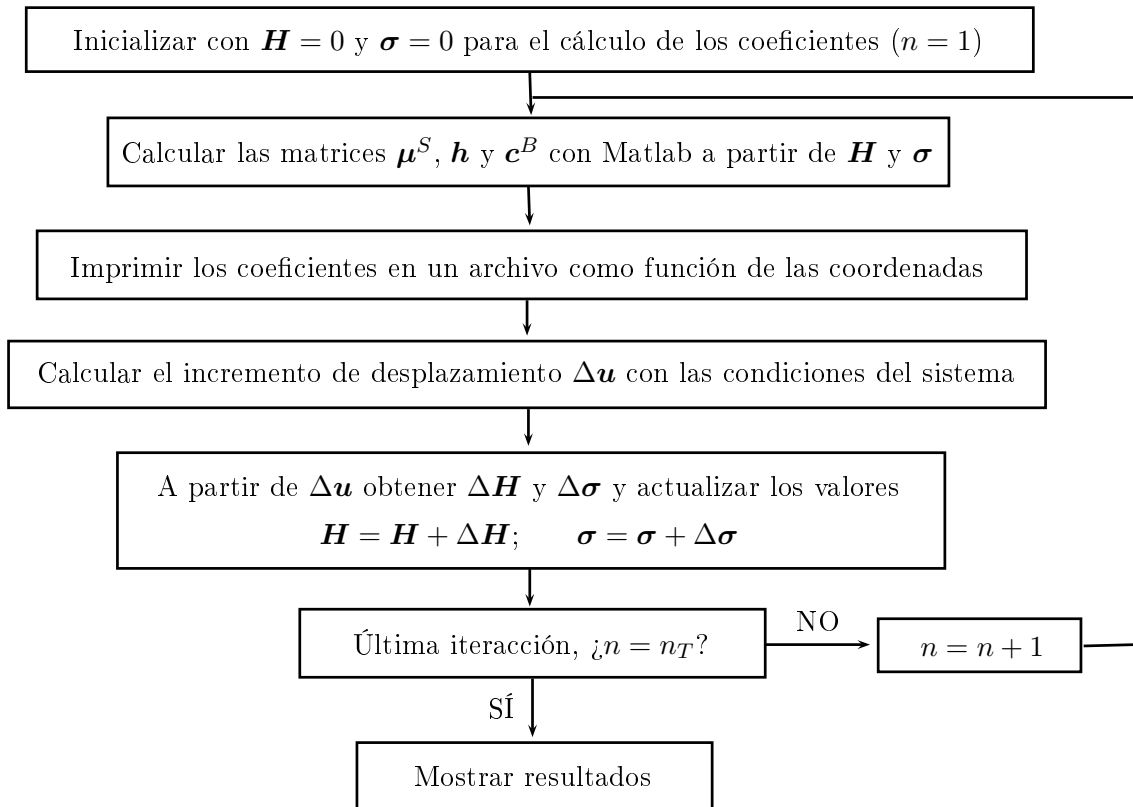


Figura 4.4: Diagrama del procedimiento para obtener la solución por partes

Para validar el método en la referencia [27] se modela un actuador de Galfenol, incluyendo el bobinado puesto en la formulación utiliza potencial vectorial magnético, y no potencial escalar como en la formulación propuesta en el Capítulo 2. Se comparan los datos

experimentales y los calculados por elementos finitos para un voltaje impuesto en la bobina de 0 a 18 V obteniendo unos muy buenos resultados como se puede observar en la Figura 4.5.

En definitiva se trata de un método complejo que requiere un alto tiempo de cálculo, las mallas son muy completas debido a la utilización del potencial vectorial magnético y por ello se recurre a Matlab para facilitar la obtención de los coeficientes. Además, no resuelve el problema de la precompresión ni tiene en cuenta los ciclos de histéresis. No obstante, es una solución al problema de la no linealidad sin recurrir a coeficientes experimentales y el error entre los datos de FE y los experimentales es recudido.

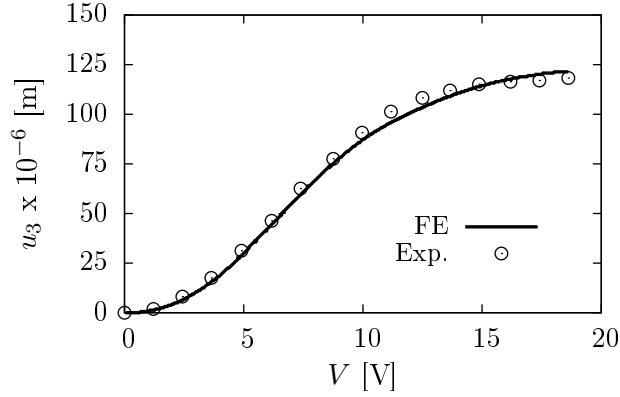


Figura 4.5: Desplazamiento obtenido con FE frente al resultado experimental [27]

4.4.3. Deformación magnetostrictiva

En la referencia [31] se ha realizado en el año actual (2016) un estudio con un modelo de elementos finitos 2-D de un miniactuador magnetostrictivo. La principal diferencia entre su formulación y la presente en este trabajo reside en la definición de la deformación magnetostrictiva, es decir, divide la deformación total \mathbf{S} en dos componentes: la deformación mecánica \mathbf{S}_{mec} y la magnetostrictiva \mathbf{S}_{mag} .

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{mec} + \mathbf{S}_{mag} \quad (4.15)$$

La deformación mecánica se define como la deformación generada, únicamente, por las tensiones de Cauchy, de tal modo que

$$\mathbf{S}_{mec} = \mathbf{s}^H \boldsymbol{\sigma}^c \quad (4.16)$$

siendo \mathbf{s} la matriz de flexibilidad y $\boldsymbol{\sigma}^c$ la tensión de Cauchy. Mientras que la deformación magnetostrictiva incluye el acoplamiento entre el campo magnético y el campo elástico de tal modo que ya no es necesaria la definición de la tensión de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}^M$; una aproximación desarrollada en [32] es la siguiente

$$\mathbf{S}_{mag} = \mathbf{S}_s \left(1 - \frac{1}{2} \tanh \frac{2\sigma_p}{\sigma_s} \right) \left(\frac{\mathbf{M}}{M_s} \right)^2 \quad (4.17)$$

donde S_s , M_s y σ_s son la deformación, magnetización y tensión de saturación, respectivamente, σ_p es la tensión de precompresión y \mathbf{M} es la magnetización.

La magnetización de saturación es aproximadamente $M_s = 765$ kA/m según [31] y [23], entre otras fuentes. La deformación de saturación de un material policristalino como el Terfenol-D, es muy dependiente de la dirección, aunque se puede calcular un valor de referencia a partir de la deformación de saturación en las direcciones cristalográficas $\langle 100 \rangle$ S_{100} y $\langle 111 \rangle$ S_{111} , del siguiente modo

$$S_s = \frac{2}{5} S_{100} + \frac{3}{5} S_{111} \quad (4.18)$$

siendo los valores típicos de saturación del Terfenol-D $S_{100} = 90 \cdot 10^{-6}$ y $S_{111} = 1,6 \cdot 10^{-6}$.

De este modo se solventa el problema de la linealidad y el de la precompresión y se caracteriza muy bien el problema al utilizar los valores de saturación. Para la simulación utiliza el programa COMSOL Multiphysics y obtiene, para 3 precompresiones distintas, unos resultados con un error inferior al 9,5% respecto a los datos experimentales del prototipo del MMA; tal y como se muestra en la Figura 4.6.

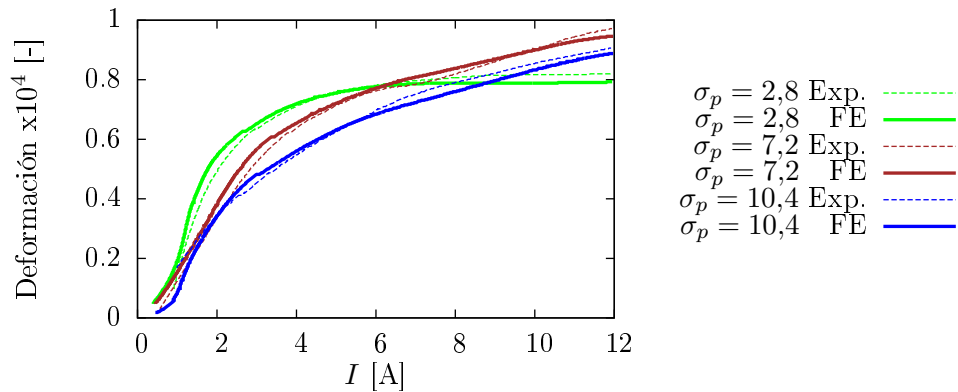


Figura 4.6: Desplazamiento obtenido con FE frente al experimental [31]

Se trata de una solución muy eficaz y relativamente simple, puesto que utiliza el potencial escalar magnético φ que permite simplificar la malla y no requiere una elevada complejidad a la hora de implementar el modelo en elemento finitos. Con una nueva ecuación constitutiva de segundo orden consigue la no linealidad y añadiendo el parámetro σ_p adapta el modelo a las distintas precompresiones, no obstante, no resuelve el problema de la histéresis.

4.5. Conclusiones

Actualmente no existe una solución estandarizada para el acoplamiento entre el campo magnético y el elástico que permita realizar estudios sobre los actuadores magnetoestrictivos de forma sencilla, por esta razón, estos materiales todavía no tienen un peso importante en la ingeniería. Como se ha comprobado en este último capítulo hay numerosos

estudios sobre el tema, pero todavía no se ha desarrollado un modelo definitivo.

El *elemt01.f* es un proyecto muy ambicioso porque, aunque en el presente trabajo solo se ha estudiado el acoplamiento magnetostrictivo, es una formulación 3D que pretende incorporar todos los acoplamientos posibles con la finalidad de conseguir un único modelo global que permita estudios de cualquier ámbito ingenieril. Como se ha comprobado en el Capítulo 3, la misma formulación permite resolver distintos acoplamientos con buenos resultados. Sin embargo, para el caso del actuador (Sección 4.3) no se obtuvieron buenos resultados debido principalmente a que las ecuaciones constitutivas eran lineales.

Del estudio de las soluciones propuestas se puede obtener distintas conclusiones: utilizar el potencial escalar magnético φ simplifica mucho la imposición de condiciones de contorno y la generación de la malla, puesto que no es necesario incluir la bobina, no obstante, las corrientes de Eddy se deben introducir manualmente y es complicado imponer campos magnéticos complejos; la precompresión del actuador es un factor a tener muy en cuenta y no puede ser tratado como una tensión residual, sino como una tensión externa y establecerlo como condición de contorno; y, por último, el problema de la histéresis es muy complejo y solo se puede implementar en modelos dinámicos.

También es importante destacar que se trata de un acoplamiento no lineal, y las soluciones posibles se pueden clasificar, aunque tengan muchas variables, en dos grandes bloques: o se utilizan ecuaciones constitutivas no lineales o se recurre a medir coeficientes experimentalmente que permitan definir algún polinomio que consiga la no linealidad.

De las tres soluciones propuestas la más óptima a la hora de obtener buenos resultados y de incorporarla en la formulación del *elemt01.f* es la Subsección 4.4.3. Es una solución sencilla y aunque habría que hacer modificaciones de los residuales de elementos finitos debido a que la ecuación constitutiva es cuadrática, no supondría un cambio importante puesto que también utiliza potencial escalar magnético.

Bibliografía

- [1] HOLGER SPECKMANN y HENRIK ROESNER, *Structural Health Monitoring: A Contribution to the Intelligent Aircraft Structure*, ECNDT-Europe Conference of Non-Destructive Testing, 2016.
- [2] F. CLAEYSSEN, N. LHERMET, R. LE LETTY y P. BOUCHILLOUX, *Actuators, transducers and motors based on giant magnetostrictive materials*, Journal of Alloys and Compounds 258 (61-73), 1997.
- [3] FRANÇOIS DUFAULD Y GEORGE AKHRAS, *Smart Structure Applications in Aircraft*, The Canadian Air Force Journal 1 (31-39), Summer 2008.
- [4] TEMPOSONICS, *Contactless absolute linear displacement sensor working on the magnetostrictive principle*, MTS Sensors Group, 2001.
- [5] A.G. OLABI y A. GRUNWALD, *Design and Application of Magnetostrictive "MS" Materials*, Materials and Design 29 (469-483), 2007.
- [6] MANUEL SILVESTRE SALAS, *Modelización y Simulación de Materiales Magnetostrictivos en Elementos Finitos*, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, Junio de 2001.
- [7] FRANCISCO GARCÍA-OCHOA GARCÍA, *Elementos de electromagnetismo clásico*, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, segunda edición 2008, ISBN: 9788484681274.
- [8] JOSEP LLOSA Y ALFRED MOLINA, *Relativitat especial i electrodinàmica clàssica*, Textos docentes: 43, Text-guia, Ediciones Universidad de Barcelona, 2ª edición, 1998, ISBN: 84-8338-048-X
- [9] RAHUL PANDEY, *Applications of giant magnetostrictive materials (Terfenol-D)*, US Academic Research Journal of Industrial Technology 1, 2015.
- [10] M ANJANAPPA Y J BI, *Magnetostrictive mini actuators for smart structure applications*, Smart Materials and Structures 3 (83-91), 1994.
- [11] K S KANNAN Y A DASGUPTA, *A nonlinear Galerkin finite-element theory for modeling magnetostrictive smart structures*, Smart Materials and Structures 6 (341-350), 1997.
- [12] EUGENIO GINER MARAVILLA, *Ampliación de Mecánica. Análisis elástico de tensiones: revisión de fundamentos*, Apuntes de clase, Universitat Politècnica de València, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales.
- [13] JOSÉ L. PÉREZ-APARICIO, ROBERTO PALMA Y ROBERT L. TAYLOR, *Multiphysics Thermodynamic Formulations for Equilibrium and Non-equilibrium Interactions: Non-linear Finite Elements Applied to Multi-coupled Active Materials*, Arch Computat Methods Eng, CIMNE, Barcelona, España 2015.
- [14] ROBERT L. TAYLOR, *FEAP A Finite Element Anaysis Program: User Manual*, University of California, Berkeley, 2010. <http://www.ce.berkeley.edu/feap>.

BIBLIOGRAFÍA

- [15] FRIEDRICH K. STRAUB, MARK A. EALEY Y 'MAC' L. MCD. SCHETKY, *Application of smart materials to helicopter rotor active control*, McDonnell Douglas Helicopter Systems, Mesa, Arizona, 1997.
- [16] JACOB LUBLINER, *Plasticity Theory*, University of California, Berkeley, 2005.
- [17] NORTHWESTERN ENGINEERING, *Application of Magnetostrictive Films in Astronomical X-Ray Telescopes*, <http://ampl.mech.northwestern.edu/research/current-research/magnetostriction.html>, 2015.
- [18] DANIEL RAMSPACHER Y JAMES RICHARD, *Normally-Closed Zero-Leak Valve with a Magnetostrictive Actuator*, Goddard Space Flight Center, <http://www.techbriefs.com/component/content/article/ntb/tech-briefs/mechanics-and-machinery/24260>, Abril de 2016.
- [19] GREG P. CARMAN Y MILAN MITROVIC, *Nonlinear constitutive relations for magnetostrictive materials with applications to 1-D problems*, Mechanical, Aerospace and Nuclear Engineering Department, University of California, Los Angeles, 1995.
- [20] D.C. JILES, *Theory of the magnetomechanical effect*, Journal of Physics D: Applied Physics 28 (1537-1546), 1995.
- [21] R. VENKATARAMAN, J. RAMEAU, P.S. KRISHNAPRASAD, *Characterization of an ETREMA MP 50/6 magnetostrictive actuator*, CDCSS T.R. 98-1, Institute for systems research and electrical engineering department, University of Maryland, 1998.
- [22] GÖRAN ENGD AHL, *Handbook of giant magnetostrictive materials*, Academic Press, Royal institute of technology, Estocolmo, Suecia, 1999, ISBN: 9780080533605.
- [23] F.T. CALKINS, T.C. SMITH Y A.B. FLATAU, *Energy-based hysteresis model for magnetostrictive transducers*, IEEE transactions on magnetics 36 NO.2 (429-439), Marzo del 2000.
- [24] JOSÉ L. PÉREZ-APARICIO Y HORACIO SOSA, *A continuum three-dimensional, fully coupled, dynamic, non-linear finite element for magnetostrictive materials*, Institute of Physics Publishing, Smart Materials and Structures 13 (493-502), 2004.
- [25] N. GALOPIN, X. MININGER, F. BOUILLAULD Y L. DANIEL, *Finite element modeling of magnetoelectric sensors*, IEEE Transactions on Magnetism 44 NO.6 (834-837), 2008.
- [26] B. YOO, M. HIRANO, K. HIRATA, *Fully coupled electro-magneto-mechanical analysis method of magnetostrictive actuator using 3-D finite element method*, International Conference on Electrical Machines, Japón, 2008.
- [27] S. CHAKRABARTI Y MARCELO J. DAPINO, *Nonlinear finite element model for 3-D Galfenol systems*, Smart Materials and Structures 20 (105034 11 págs), 2011.
- [28] PHILLIP G. EVANS Y MARCELO J. DAPINO, *Dynamic Model for 3D Magnetostrictive Transducers*, IEEE transactions on magnetics, ISBN: 0018-9464, 2011.

- [29] M.E.H BENBOUZID, G. REYNE Y G. MEUNIER, *A 2D dynamic formulation for non-linear finite element modelling of Terfenol-D rods*, IEEE Transactions on Magnetics 31 NO.3 (1821-1824), 1995.
- [30] Z. DENG Y MARCELO J. DAPINO, *Characterization and finite element modeling of Galfenol minor flux density loops*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures 26 NO.1 (47-55), 2014.
- [31] DOROTA STACHOWIAK, *Finite element analysis of the active element displacement in a giant magnetostrictive transducer*, COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering 35 No.4 (1371-1381), 2016.
- [32] YANG YONG Y LI LIN, *Dynamic model considering the ΔE effect for giant magnetostrictive actuators*, IEEE International Conference on Control and Automation, Diciembre 2009.
- [33] XIAOMEI SUI, ZHANGRONG ZHAO, WENZOU CHEN Y XIAOYU ZHANG, *Multi-Physics Coupling Field Nonlinear Finite Element Model for Giant Magnetostrictive Smart Component*, Applied Mechanics and Materials 543-547 (617-620), 2014.
- [34] M. KALTENBACHER, M. MEILER Y M. ERTL, *Physical Modeling and numerical computation of magnetostriction*, COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering 38 No.4 (819-832), 2009.