

# APUNTES DE MECÁNICA DE FLUIDOS



EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA



---

# Apuntes de mecánica de fluidos

---

Franciso Javier Arregui de la Cruz

Enrique Cabrera Rochera

Ricardo Cobacho Jordán

Elena Gómez Sellés

Javier Soriano Olivares

2017

EDITORIAL

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:

Arregui de la Cruz, F. J.; Cabrera Rochera, E.; Cobacho Jordán, R.; Gómez Sellés, E.; Soriano Olivares, J. (2017). *Apuntes de mecánica de fluidos*. Valencia: Universitat Politècnica de València

© Francisco Javier Arregui de la Cruz  
Enrique Cabrera Rochera  
Ricardo Cobacho Jordán  
Elena Gómez Sellés  
Javier Soriano Olivares

Diseño gráfico y maquetación  
Javier Albert Pardo

© 2017, Editorial Universitat Politècnica de València  
*distribución:* Telf.: 963 877 012 / [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 6235\_01\_01\_01

ISBN: 978-84-9048-359-6 (versión impresa)  
Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es).

Impreso en España

Presentación.....	7
-------------------	---

## Capítulo 1 **Introducción a la Mecánica de Fluidos**

¿Qué es la Mecánica de Fluidos?.....	8
Alcance de esta asignatura.....	12
Breve introducción histórica.....	13
Definición de fluido.....	15
Viscosidad.....	16
Módulo de elasticidad volumétrico.....	18
Otras propiedades específicas de los fluidos.....	20
Conceptos y propiedades a recordar.....	23
Ecuaciones de estado de los fluidos.....	23
Conclusión.....	25
Bibliografía y anexos.....	27

## Capítulo 2 **Estática de fluidos**

Introducción.....	31
Ecuación general de la estática de fluidos.....	32
Fuerzas provocadas por la presión hidrostática.....	34
Flotación y estabilidad de los flotadores.....	40

## Capítulo 3 **Descripción del movimiento de los fluidos**

Introducción.....	47
Trayectoria de una partícula de fluido. Enfoque Lagrangiano.....	48
Campo de velocidades. Enfoque Euleriano. Otros campos de variables relacionadas con la Mecánica de Fluidos.....	50
Diferentes sistemas de referencia.....	52
Conceptos de trayectoria, línea de corriente, tubo de corriente y línea de traza.....	53
Clasificación de flujos de fluidos. Algunas condiciones de contorno.....	55
Concepto de caudal.....	57
Derivación en mecánica de fluidos: derivada total, local y convectiva. Aceleración del fluido.....	65
Teorema de arrastre de Reynolds.....	67
Técnicas a emplear para el análisis de flujos.....	71
Bibliografía.....	72

## Capítulo 4 **Dinámica de fluidos**

Introducción.....	75
Ecuaciones fundamentales de la dinámica diferencial.....	76
Modelación matemática del régimen turbulento. La ecuación de Reynolds.....	80
Los códigos CFD.....	81
Aplicación de la dinámica diferencial: flujo de Couette.....	83
Conclusión.....	85

## Capítulo 5 Dinámica integral de fluidos

Introducción.....	89
Ecuación de conservación de la masa.....	89
Ecuaciones de conservación de la energía.....	97
Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento.....	112
Ecuaciones de conservación del momento cinético.....	116

## Capítulo 6 Flujo a presión

Introducción.....	121
Balances que presiden el análisis del flujo a presión en conductos cerrados.....	123
Cálculo de las pérdidas de carga en las tuberías.....	124
Pérdidas de carga localizadas.....	128
Línea de altura geométrica, piezométrica y total.....	131
Caracterización de otros elementos de los sistemas a presión.....	135
Análisis, dimensionado y modelación de sistemas a presión.....	138
Análisis estático de redes.....	141
Modelaciones hidráulicas de los flujos a presión.....	143
Transitorios hidráulicos.....	145
Bibliografía.....	152

## Capítulo 7 Flujo en lámina libre

Introducción.....	155
Parámetros relacionados con la sección de paso.....	155
Caracterización de los diferentes flujos.....	156
Pendientes a definir en flujo en lámina libre.....	158
Flujo uniforme y permanente. Ecuación de Manning.....	159
Sección más eficiente de un conducto en lámina libre.....	161
Curvas de llenado en conductos circulares en lámina libre.....	162
Algunos fenómenos que se producen en el flujo en lámina libre.....	166
Bibliografía.....	170

## Capítulo 8 Flujo alrededor de cuerpos

Introducción.....	173
La teoría de la capa límite.....	173
La paradoja de D'Alembert.....	174
Fuerzas sobre cuerpos sumergidos en un fluido con movimiento relativo.....	174
Los alveolos en las pelotas de golf.....	175
Fuerzas de arrastre y sustentación.....	176
Resistencia y sustentación en automóviles.....	177
Bibliografía.....	182

## Presentación

Si la Física es la ciencia que modela e interpreta todos los fenómenos naturales como, por ejemplo, la caída libre de un cuerpo o el batir de un péndulo simple, la Mecánica de Fluidos es la parte de la Física que estudia los fenómenos en los que, de un modo u otro, los fluidos participan. Como sus movimientos, tanto los naturales (el agua discurriendo por el cauce de un río, el batir de las olas en una playa o el cálculo de las cargas que transmite el viento a la visera de un estadio), como los artificiales (por ejemplo, el bombeo de agua de un acuífero existente a centenares de metros de profundidad).

La importancia de esta rama de la Física es evidente. De una parte el agua y el aire, los dos fluidos más abundantes en la naturaleza que tanto el hombre como cualquier otra forma de vida posible en este planeta necesita para vivir. Entender su comportamiento para manejarlos y conservarlos es, sin duda, un asunto crucial. Pero la Mecánica de Fluidos no es sólo el estudio de los fenómenos ligados al agua o al aire. Hay otros muchos fluidos de notable relevancia. Como los aceites minerales, en su papel de lubricantes, la sangre, el medio que transporta el oxígeno por el cuerpo humano o en fin el petróleo o el gas natural, dos de las fuentes de energía más utilizadas a día de hoy. Y otros muchos ejemplos se podían citar. Así, pues, conocer su comportamiento, cómo trasegarlos o, en fin, cómo aprovechar su movimiento natural (mediante, por ejemplo, un aerogenerador eólico), es de una importancia incuestionable que no ha hecho sino aumentar con el paso del tiempo. Tendencia que la creciente relevancia de estos asuntos mantendrá.





Capítulo 1

# Introducción a la Mecánica de Fluidos

## Índice

¿Qué es la Mecánica de Fluidos?

Alcance de esta asignatura

Breve introducción histórica

Definición de fluido

Viscosidad

Módulo de elasticidad volumétrico

Otras propiedades específicas de los fluidos

Conceptos y propiedades a recordar

Ecuaciones de estado de los fluidos

Conclusión

Bibliografía

**Anexos**

Unidades de las principales variables mecánicas y factores de conversión entre el sistema inglés y el internacional (SI)

Factores de conversión entre el sistema inglés y el internacional (SI)

Viscosidades dinámicas de los fluidos en función de la temperatura

Viscosidades cinemáticas de los fluidos en función de la temperatura

## ¿Qué es la mecánica de fluidos?

Si la Física es la ciencia que modela e interpreta todos los fenómenos naturales como, por ejemplo, la caída libre de un cuerpo o el batir de un péndulo simple, la Mecánica de Fluidos es la parte de la Física que estudia los fenómenos en los que, de un modo u otro, los fluidos participan. Como sus movimientos, tanto los naturales (el agua discurriendo por el cauce de un río, el batir de las olas en una playa o el cálculo de las cargas que transmite el viento a la visera de un estadio), como los artificiales (por ejemplo, el bombeo de agua de un acuífero existente a centenas de metros de profundidad).

La importancia de esta rama de la Física es evidente. De una parte el agua y el aire, los dos fluidos más abundantes en la naturaleza que tanto el hombre como cualquier otra forma de vida posible en este planeta necesita para vivir. Entender su comportamiento para manejarlos y conservarlos es, sin duda, un asunto crucial. Pero la Mecánica de Fluidos no es sólo el estudio de los fenómenos ligados al agua o al aire. Hay otros muchos fluidos de notable relevancia. Como los aceites minerales, en su papel de lubricantes, la sangre, el medio que transporta el oxígeno por el cuerpo humano o en fin el petróleo o el gas natural, dos de las fuentes de energía más utilizadas a día de hoy. Y otros muchos ejemplos se podían citar. Así, pues, conocer su comportamiento, cómo trasegarlos o, en fin, cómo aprovechar su movimiento natural (mediante, por ejemplo, un aerogenerador eólico), es de una importancia incuestionable que no ha hecho sino aumentar con el paso del tiempo. Tendencia que la creciente relevancia de estos asuntos mantendrá.

Los fluidos se dividen en líquidos y gases. De entre los líquidos el más representativo es, ya se ha dicho, el agua. Tanto por la importancia que para el ser humano tiene como porque abunda, y mucho, en la Naturaleza. Conviene decir que la superficie terrestre está cubierta por  $360 \cdot 10^6 \text{ km}^2$  de agua (entre mares, océanos, ríos y lagos), lo que supone un 70% del total del globo terráqueo. Pero conviene matizar que del total de agua presente en la Naturaleza, menos del 1% es aprovechable. Un hecho que ligado al progresivo aumento de la población humana (en la Tierra viven ya más de 7000 millones de personas) y al constante aumento de la contaminación de las aguas como consecuencia de

su creciente utilización, exige utilizar este recurso cada vez de manera más eficiente, otra de las razones que explican el creciente interés del hombre por la Mecánica de Fluidos.

Aunque el nacimiento de la moderna Mecánica de Fluidos es muy reciente (acaba de cumplir cien años) el hombre siempre ha sido consciente de la importancia del agua para la vida humana como, por otra parte, no podía ser de otro modo. Ya Tales de Mileto decía hace más de 2500 años que todo es agua y que todo comienza con el agua. La necesidad de aprender a manejarla (no sólo es necesaria para sobrevivir, también lo es para aumentar, con el riego, la fertilidad de la tierra y así multiplicar su rendimiento) ha contribuido a que la Mecánica de Fluidos aplicada al agua, es decir, la hidráulica, sea una de las áreas de la ingeniería en la que desde el primer momento el hombre evidenció su extraordinaria creatividad. Por ello, sin margen de error, se puede afirmar que la historia de la Ingeniería del Agua, particularmente en la antigüedad, nos ha legado algunas de las más brillantes creaciones del saber humano. Así lo evidencia, sólo es un ejemplo cercano en el espacio, el acueducto de Segovia. Un fluido, el agua, que el hombre creía era un elemento hasta que Lavoisier y Cavendish, ya en el siglo XVII e independiente uno del otro, concluyeran que era un compuesto integrado por dos elementos básicos como el hidrógeno y el oxígeno.

No le va a la zaga en importancia el segundo de los fluidos, el aire, el gas más representativo de cuantos se nos presentan de esta forma en la Naturaleza. El aire rodea por completo la superficie de la tierra y, como el agua, tampoco el hombre puede prescindir de él. Con todo, estando mucho más accesible que el agua, la historia de la ciencia del aire, es decir, la historia de la Mecánica de Fluidos de los gases, es mucho más reciente. Su origen acostumbra a fijarse en las últimas décadas del siglo XIX. En concreto en el año 1876 cuando Riemann publica su primer artículo sobre las ondas de choque, ondas que serán observadas por vez primera en 1887 por Mach, sólo unos años después, en las trayectorias de proyectiles supersónicos. Finalmente, ya en los albores del siglo XX, la aparición en escena de la aviación, le otorgará el espaldarazo definitivo de manera que todas las cuestiones relacionadas con la dinámica de los gases en general y de la aerodinámica en particular pasa a ser el principal foco de atención de

quienes trabajan en el campo de la Mecánica de Fluidos. Conviene recordar que son años en los que se sucederán dos guerras mundiales en las que la aviación desempeña un papel crucial.

En resumen sí, como más adelante se verá, un fluido (líquido o gas) es un medio continuo fácilmente deformable, la Mecánica de Fluidos es la parte de la Física que estudia su comportamiento, tanto en reposo como en movimiento. Conjuntamente con la rama de la Física encargada de estudiar el comportamiento de los medios continuos rígidos, compone un cuerpo de doctrina más amplio y general denominado Mecánica de los Medios Continuos. El análisis tensorial que en este campo relaciona causas (esfuerzos) y efectos (deformaciones) es propio de los medios continuos, sean sólidos rígidos o fluidos. Una modelación tensorial que las limitaciones de tiempo dejan fuera del alcance de esta asignatura porque las simplificaciones que se introducen en los flujos que en este curso se estudian permiten obviarla. Pero es no este el caso de los complejos flujos tridimensionales que sí la exigen, un campo que, en paralelo con el desarrollo de los ordenadores, está viviendo un extraordinario esplendor. Se habla de los códigos CFD (Computer Fluid Dynamics) que tanto han contribuido al desarrollo de la aerodinámica y a los que se hará referencia, bien que muy brevemente, al contar la historia de la Mecánica de Fluidos.

## Alcance de esta asignatura

En los nuevo grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales (GITI), en Ingeniería Mecánica (GIM) y en Ingeniería de Organización Industrial (GIOI) diseñados en el marco del proceso de Bolonia, esta asignatura ha quedado enmarcada en el segundo semestre del segundo curso del Grado. Con 4,5 créditos, equivalentes a 45 horas lectivas entre clases teóricas y prácticas (tanto las informáticas como las de laboratorio). Teniendo en cuenta las prácticamente infinitas aplicaciones de la Mecánica de Fluidos, estas restricciones temporales obligan a hacer una cuidada selección del temario a impartir, tanto por lo que respecta a los asuntos a tratar como a la profundidad con que cada uno de ellos se aborda. Por otra parte todas las decisiones que al respecto se han tomado no han ignorado el marco en que la asignatura se va a impartir, los nuevos grados de Ingeniería (GITI, GIOI y GIM) resultado del pro-

ceso de Bolonia. Porque aún cuando los fundamentos de la Mecánica de Fluidos son independientes de la titulación en que se imparta, ésta sí condiciona la orientación y el énfasis de cada uno de los temas que se abordan.

Pues bien, teniendo en cuenta las consideraciones precedentes, se ha dividido la asignatura en ocho bloques temáticos diferentes. Son:

- Introducción a la Mecánica de Fluidos. Propiedades que caracterizan su comportamiento.
- Estática de fluidos.
- Cinemática de fluidos.
- Introducción a la dinámica de los fluidos.
- Dinámica integral de los fluidos.
- Flujo alrededor de cuerpos inmersos en una corriente fluida.
- Flujo natural en régimen de lámina libre.
- Flujo artificial a presión.

Obviamente no se presta la misma atención a todos estos temas. Se priman las partes del temario con mayor aplicabilidad en los campos de trabajo en los que previsiblemente desarrollará su actividad profesional el futuro graduado en Tecnologías Industriales. En particular la dinámica integral de los fluidos y el flujo artificial a presión. Este último tema se enfoca sobre todo desde una perspectiva práctica. Para ello, y con el concurso de una excelente herramienta, el programa de dominio público EPANET se abordan algunos de los numerosos problemas prácticos propios del flujo a presión. De hecho esta visión ingenieril y marcadamente aplicada es la que, sin descuidar los aspectos formales, debe presidir la impartición de esta asignatura.

Y ya centrándonos en este primer capítulo de introducción, los conocimientos que con su estudio el alumno debe adquirir son: el concepto de fluido como medio continuo, las propiedades que permiten modelar su comportamiento, fundamentalmente las dos que más importan para las aplicaciones que en este curso se abordan. En particular la viscosidad y el módulo elástico. Al tiempo se aprovecha para repasar propiedades que el alumno ya habrá estudiado en otras asignaturas. Entre otras la densidad, el peso específico, el calor específico, la tensión superficial y, en fin, la tensión de vapor. En cualquier caso a esta última propiedad se le dedicará atención especial pues permite introducir el

concepto de cavitación de un líquido, un fenómeno de notable importancia en el flujo a presión. Pero conviene decir que no es exclusivo de estos flujos. También, y es sólo un ejemplo, puede presentarse en los vertederos de presa, movimiento característico en régimen de lámina libre.

## Breve introducción histórica

De acuerdo con lo expuesto la Mecánica de Fluidos que se subdivide en dos grandes bloques. El primero la Mecánica de Fluidos de los líquidos que, aplicada al movimiento del fluido más relevante, el agua, se le denomina hidráulica (alternativamente, Ingeniería del Agua). Si el líquido es aceite, el término que acostumbra a utilizarse es Oleohidráulica. El segundo la Mecánica de Fluidos de los gases que, con un recorrido en el tiempo mucho menor, no tiene un nombre sintético. Se la llama, simplemente, Dinámica de los Gases que, entre otros cuerpos de doctrina relevantes, incluye la aerodinámica, cuya relevancia se la otorga tanto el transporte aéreo como el terrestre, trascendentales ambos a partir del pasado siglo XX. Porque tanto los coches como los aviones se mueven inmersos en el seno del aire de la atmósfera. Pero claro, hablar de la historia de la Mecánica de Fluidos anterior al siglo XX es hablar de manera exclusiva de la historia de la hidráulica. Ya se ha dicho que la dinámica de gases nace, prácticamente, con Riemann, allá por 1876.

De la historia de la Mecánica de Fluidos de los líquidos, es decir con la Ingeniería del Agua de la que, como no podía ser de otro modo, se han escrito numerosas y excelentes crónicas. Sin ánimo de ser exhaustivos en lo que sigue, y por orden cronológico se citan cuatro de las más relevantes. La Historia de la Hidráulica (Rouse e Ince, 1963), El agua en la antigüedad (Bonnin, 1984), La hidráulica en las civilizaciones antiguas (Viollet, 2000) y, más recientemente, La Ingeniería del Agua a través de los tiempos (Cabrera y Arregui, 2010). Una historia impulsada porque el hombre, pero también la agricultura necesita el agua. No extraña, pues, que las más remotas prácticas de riego hayan cumplido 30000 años ni que las primeras obras destinadas a facilitar el consumo humano (como las cisternas familiares de almacenamiento de agua de lluvia) están bien documentadas desde varios milenios antes de nuestra era. Unas cisternas individuales que se fueron suprimiendo, a medida

que las posibilidades de la ingeniería iban en aumento. Y así, hace ya dos mil años, en la antigua Roma se llegó a disponer de un sistema de acueductos con una capacidad de transporte de  $600000 \text{ m}^3$  al día, cantidad que contemplada hoy es, ciertamente, impresionante. De hecho sería suficiente para abastecer de agua a la Comunidad Valenciana (cinco millones de habitantes a día de hoy).

Pero estando el hombre más preocupado en resolver sus problemas de suministro de agua, el establecimiento de los fundamentos básicos que gobiernan su movimiento se hará esperar. Tanto que los primeros avances realmente significativos tienen lugar en el siglo XVIII. Un conocimiento que también retrasa la extrema complejidad del movimiento de los fluidos en el medio natural. Piénsese, por ejemplo, en las corrientes de los ríos o en el movimiento de las olas. No puede, pues, extrañar que los primeros análisis tengan un carácter eminentemente experimental. Una frase del gran Leonardo da Vinci (que dedicó notable atención a la hidráulica) enunciada en los albores del siglo XVI resume un proceder que presidirá todos los avances en este campo hasta los albores del siglo XX. *"Al estudiar el movimiento del agua recuerda: primero la experimentación, luego la razón"*. En efecto, la historia cuenta que hasta hace unos cien años todos los conocimientos que en este campo se adquirieron hasta entonces lo fueron a partir de la experimentación.

Un poco antes, y coincidiendo con los grandes avances de las matemáticas del siglo XVIII, se inicia el estudio analítico del movimiento de los fluidos, lo que propiciará el nacimiento de la hidrodinámica. Sus principales impulsores son los cuatro grandes matemáticos de la época. Euler, Clairaut, d'Alambert y, por encima de todos ellos, Daniel Bernoulli cuya obra *Hydrodynamica* publicada en 1738 da nombre a una escuela a la que se irán incorporando nombre ilustres. Entre ellos Laplace y Lagrange. Ya en el siglo XIX, Navier y Stokes plantearán con rigor las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos. En cualquier caso conviene subrayar que sólo preocupa el movimiento del agua. El nombre de la escuela, hidrodinámico, tomado del título del libro de Bernoulli así lo evidencia. Riemann aún no ha entrado en escena.

Durante los siglos XVIII y XIX las dos aproximaciones al estudio de los fluidos (los hidráulicos que optan por

la vía experimental y los hidrodinámicos por la vía físico matemática) avanzan de manera independiente. Antes que colaborar se ignoran. Y hasta llegan a despreciarse porque unos, los hidrodinámicos, ven en los otros, los hidráulicos, personas carentes de todo rigor científico, mientras éstos piensan que los primeros ignoran la realidad del fenómeno físico. Que son unos teóricos que no contemplan la realidad de los hechos. Una de las anécdotas más ilustrativas del divorcio que entre ambas corrientes de investigadores existió es la paradoja de d'Alambert, el físico que demostró por vía matemática que una corriente de aire no arrastra a una esfera en reposo inmersa en ella. Los hidráulicos constatan por vía experimental que este resultado no es real. Que el aire arrastra a cualquier objeto que encuentre a su paso. D'Alambert formuló desde el punto de vista teórico bien el problema pero al ignorar la viscosidad del aire, pequeña pero no despreciable, el resultado que obtuvo no se correspondía con la realidad.

Hay que esperar a 1904 para que la hidráulica y la hidrodinámica se unifiquen dando lugar a lo que hoy se conoce como Mecánica de Fluidos. Lo consigue, al formular la teoría de la capa límite, Ludwig Prandtl, un joven alemán de 29 años. Consiste en admitir que los fluidos, como el aire, poco viscosos se comportan de manera ideal en casi todo el espacio (lo que en la práctica equivale a ignorar el rozamiento) excepto en una pequeña lámina de fluido, la capa límite, pegada al contorno del cuerpo inmerso en el mismo, en la que nunca se podrán ignorar los efectos viscosos. Con la teoría de la capa límite los dos enfoques convergen y los avances de hidráulicos e hidrodinámicos se superponen, quedando establecidos a partir de ese momento los fundamentos de esta rama fundamental de la Física. Esta es la razón por la que Prandtl es considerado el padre de la Mecánica de Fluidos.

Previamente (en 1827) Navier había formulado de manera completa y rigurosa los movimientos de los fluidos reales introduciendo, bien que con una función molecular que no acabó de concretar, los términos viscosos en unas ecuaciones ideales conocidas desde hacía casi un siglo (Bernoulli en 1738 había establecido en el movimiento de los fluidos ideales la proporcionalidad entre el gradiente de presiones y la aceleración del flujo. Muy poco después será Stokes quien en 1845 relacionará tensiones y deformaciones introduciendo en esta expresión, de modo absolutamente experimen-

tal, la viscosidad como parámetro más significativo. Tan decisivas aportaciones justifican que la ecuación general vectorial del movimiento de los fluidos se denomine de Navier-Stokes. Y también que el stoke sea una unidad de medida de la viscosidad, en particular de la viscosidad cinemática en el sistema CGS.

Pero el impulso definitivo le llegará a la Mecánica de Fluidos, ya en la segunda mitad del siglo XX, de la mano de los ordenadores digitales. Ello propicia un desarrollo formidable del cálculo numérico lo que a la postre supondrá un antes y un después en la resolución de problemas reales de la Mecánica de Fluidos, una de las ramas de la ciencia que más provecho ha sacado de tan trascendental desarrollo. No extraña, por la importante componente matemática que requiere la modelación de los fenómenos de esta rama de la Física. Un cambio de época que alcanza su madurez ya en las dos últimas décadas del siglo pasado. Los métodos numéricos permiten abordar la resolución de las ecuaciones completas que modelan el movimiento de los fluidos por complejas que sean. La era del CFD ha comenzado.

Un cambio de época que, sobre todo, evidencia el declive de la modelación física en beneficio de la matemática. Porque hasta bien entrada la segunda mitad del siglo XX la complejidad que comportaba resolver analíticamente muchos problemas reales de la Mecánica de Fluidos obligaba a recurrir a la modelación física. Los grandes laboratorios en los que se ensayaban modelos de cauces de río, puertos, vertederos, bombas, turbinas, automóviles, perfiles aerodinámicos de ala de avión, estructuras mecánicas inmersas en una corriente de aire, etcétera, verán su ocaso. De los modelos se obtenían valiosos resultados experimentales que, posteriormente, se extrapolaban a los prototipos reales. Pero, al compás de los avances de la modelación numérica, los elevados costes irán propiciando su declive. Tanto que hoy se recurre mucho menos a los modelos físicos y cuando ello se hace es para ajustes muy finos que permiten validar los resultados numéricos.

En definitiva hoy la Mecánica de Fluidos está perfectamente cimentada pudiéndose abordar cualquier problema por complejo que sea. En este curso, sin embargo, sólo se abrirá una pequeña rendija que, aunque permite asomarse a este vasto y apasionante mundo, no es más que una gota de agua en el seno de un océa-

no. Aunque puede y debe bastar para que el alumno se haga una primera idea del alcance global de esta materia. Y por supuesto debe servir para que los futuros ingenieros que cursen estos grados adquieran unos conocimientos de notable utilidad.

## Definición de fluido

Un fluido es un medio continuo (entendiendo por tal la materia sin discontinuidades y, por tanto, con propiedades físicas uniformes) fácilmente deformable. Al respecto no conviene olvidar que la materia tiene una estructura molecular con muchos espacios vacíos y que, por tanto, estrictamente hablando es discontinua. Pero como la inmensa mayoría de las longitudes representativas de los problemas ingenieriles que aborda la Mecánica de Fluidos tienen un orden de magnitud muy superior al de las distancias intermoleculares, la hipótesis del continuo es más que aceptable. Para evidenciarlo se dan dos cifras. En el supuesto de un espacio ocupado por un fluido tan común como el aire, el elemento de volumen diferencial más pequeño que se considera es un cubo de  $0,01 \text{ mm}$  de lado, para un volumen total de  $10^{-6} \text{ mm}^3$ , volumen de otra parte muy inferior al de una mota de polvo. Pues bien, en su interior caben  $3 \cdot 10^9$  moléculas de aire en condiciones estándar. Por ello cualquier medida de una variable fluida en ese punto puede asociarse al mismo pues resulta imposible identificar las discontinuidades conocidas de la materia. Y si, además, se considera que la longitud del cubo escogida (una centésima de milímetro) es muy inferior a una longitud significativa del problema (por ejemplo el diámetro de una tubería que, por pequeña que sea, tendrá algunos milímetros), la hipótesis del continuo es más que razonable. De hecho, y ya para concluir esta reflexión previa, sólo al estudiar la dinámica de gases muy enrarecidos puede ser incorrecta la hipótesis que preside esta asignatura.

Pero volviendo a la definición de fluido como medio continuo fácilmente deformable, habrá que concretar lo que por ello se entiende. La respuesta es simple. Como contraposición a sólido (desde la óptica de la Mecánica de Fluidos, el otro estado posible de la materia) un fluido es una materia continua que no puede soportar ningún esfuerzo cortante por pequeño que sea. Cuantificar esta relación causa (tensión) - efecto (deformación), no es inmediato. Planteada en un con-

texto general es la expresión de carácter experimental que en su día introdujo Stokes y a la que ya se ha hecho referencia en el epígrafe precedente. Una relación tensorial integrada por nueve ecuaciones escalares que se simplifica mucho en el caso que se detalla a continuación y que corresponde al conocido flujo entre dos placas paralelas y horizontales en el que no existe un gradiente de presiones. Cual se verá en la introducción a la dinámica diferencial, da lugar a un campo de velocidades lineal particularmente sencillo.

Considérese la figura 1, una piscina llena de agua en reposo con un tablero de madera (placa plana superior) flotando en ella. La placa plana inferior es el fondo de la piscina. Si desde un borde se tira del tablero con una cuerda atada a él, la viscosidad del agua en contacto con el tablero hará que la lámina superior se mueva a su velocidad. Es lo que se conoce por condición de adherencia de un fluido viscoso. Una condición que también obligará a que el agua en contacto con el fondo de la piscina permanezca en reposo. La hipótesis de Stokes aplicada a este caso particular tan sencillo indica que el esfuerzo cortante aplicado sobre la lámina superior del agua es proporcional al gradiente lineal de velocidades generado y donde en esta relación la viscosidad es el coeficiente de proporcionalidad.

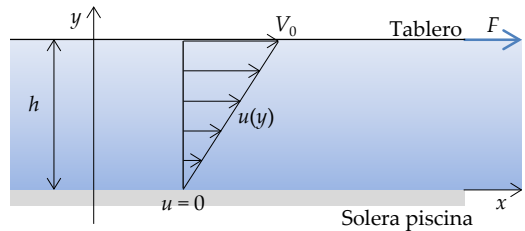


Figura 1 Relación entre tensión y deformación en el movimiento más elemental de un fluido

La hipótesis de Stokes caracteriza, pues, el comportamiento de un fluido. Cual se ha dicho es experimental y su validez se la otorga la constatación de que los resultados que al utilizarla se obtienen se corresponden bien con la realidad física experimental. La ecuación (1.1) detalla la relación lineal que corresponde a este caso. El esfuerzo cortante  $\tau$  (cociente entre la fuerza  $F$  con que se tira de la cuerda y la superficie  $S$  del tablero), su velocidad  $V_0$ , la viscosidad del agua  $\mu$  y la pro-

fundidad del agua en la piscina  $h$ . Siendo el gradiente de velocidades,  $dV/dy$ , lineal, expresar la relación original de Stokes (aplicada a este caso particular) en función de los parámetros característicos del problema  $V_0$  y  $h$  es inmediato.

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} = \mu \frac{V_0}{h} \quad (1.1)$$

Si el fluido es muy viscoso opone mayor resistencia a la deformación de manera que un mismo esfuerzo cortante genera diferentes gradientes de velocidades en líquidos de distintas viscosidades. O, dicho de otro modo, si en la figura 1 en lugar de agua hubiese aceite (bastante más viscoso que el agua), para desplazar el tablero a la misma velocidad habría que aplicar un esfuerzo cortante (y por tanto una fuerza) mucho mayor. El caso opuesto es el de un fluido ideal (viscosidad muy pequeña y, por tanto, se deprecia). Desplazar en las mismas condiciones el tablero no exigiría ningún esfuerzo del mismo modo que cuando no existe fricción entre dos superficies rígidas, una se desliza sobre la otra sin pérdida alguna de energía.

## Viscosidad

Cual se ha visto en el epígrafe precedente, la viscosidad de un fluido es la propiedad que relaciona causa (esfuerzo) y efecto (deformación). Si en la relación (1.1) se despeja  $\mu$  y después se sustituye en cada variable las dimensiones correspondientes, se obtienen las de la viscosidad:

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{\left[\frac{V_0}{h}\right]} = \frac{MLT^{-2}L^{-2}}{LT^{-1}L^{-1}} = ML^{-1}T^{-1} \quad (1.2)$$

En consecuencia, en el sistema internacional se expresará en  $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ , una unidad denominada poiseuille (en honor al médico francés Jean Louis Marie Poiseuille que en 1838 por vez primera cuantificó el valor de la fricción de un fluido circulando por una tubería en régimen laminar). Se podría definir como la resistencia a la deformación de un fluido que sometido a un

esfuerzo cortante puro de  $1 N/m^2$  responde con un gradiente de velocidades de  $1 m/s$  por metro. No habiendo sido incluida en el Real Decreto 2032/2009 (BOE de 30 de diciembre de 2009) por el que se establecen las unidades legales de medida y se concretan sus simbologías, en lo que sigue se hará referencia a ella utilizando la  $P$  (es decir  $1 \text{ poiseuille} = 1 P$ ).

Sin embargo los fluidos habituales en ingeniería presentan viscosidades muy inferiores. Es, pues, desde un punto de vista práctico, una unidad muy grande. De hecho los fluidos más viscosos (los aceites pesados) tienen una viscosidad del orden de  $0,05 P$ . El agua, unas cincuenta veces menos viscosa que los aceites tiene una viscosidad de  $0,001 P$ . Esta es la razón por la que acostumbra a utilizarse el poise (una abreviación terminológica de poiseuille) y que es la unidad en el sistema CGS ( $g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1}$ ). En su forma abreviada se denotará como una  $p$  ( $1 \text{ poise} = 1 p$ ). Pero como es sólo diez veces inferior al poiseuille (fácilmente se comprueba), se usa mucho más el centipoise ( $cp$ ). Entre otras razones porque a temperaturas normales ( $20^\circ C$ ) la viscosidad del agua es igual a  $1 cp$  (ver la gráfica A3 del anexo), equivalente a  $0,001 P$ .

Esta viscosidad,  $\mu$ , tiene el claro significado físico, resultado de interpretar la relación (1.1). Se la denomina viscosidad dinámica (también absoluta) para diferenciarla de la que seguidamente se define. Porque al cociente entre la viscosidad  $\mu$  y la densidad  $\rho$  de un fluido se le llama viscosidad cinemática ( $\nu = \mu/\rho$ ). La razón es clara. Entre sus dimensiones no figura la magnitud característica de la dinámica, la masa. Sólo incluye las dos específicas de la cinemática, es decir longitud y tiempo. En efecto,

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = L^2T^{-1} \quad (1.3)$$

Al ser muy frecuente la aparición del cociente  $\mu/\rho$ , en muchas de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos resulta cómodo utilizar la viscosidad cinemática  $\nu$ , que en el sistema internacional (SI) presenta la misma singularidad que la viscosidad absoluta. Su unidad, el  $m^2/s$ , es muy grande y, tal vez por ello, no tiene un nombre específico. Sí se le ha dado a la unidad de viscosidad cinemática en el sistema CGS ( $cm^2/s$ ). En honor



al investigador británico Stokes, cuya principal aportación ya ha sido comentada, se le conoce por stoke ( $St$ ). Pero pese a ser diez mil veces inferior a la unidad del SI, sigue siendo muy grande, por lo que se recurre a su centésima parte, el centistoke ( $cSt$ ) que, a su vez, es la millonésima parte de la unidad de viscosidad dinámica en el SI. Y de nuevo (no es casualidad) la viscosidad cinemática del agua a  $20\text{ }^{\circ}C$  coincide con esta unidad ( $= 1\text{ }cSt$ ) es decir  $10^{-6}\text{ }m^2/s$  (ver la gráfica A4 del anexo). La densidad del agua  $1000\text{ }kg/m^3$  permite verificar esta equivalencia. Que la viscosidad dinámica del agua es  $1\text{ }cp$  y la cinemática  $1\text{ }cSt$ .

La viscosidad es una propiedad que caracteriza la capacidad de transporte de cantidad de movimiento de un fluido (en su desplazamiento un filete fluido arrastra al vecino). A mayor valor, más rozamiento y más cuesta trasegar ese fluido. Un rozamiento que acaba transformándose en calor (el fluido se calienta) por lo que es una propiedad eminentemente termodinámica. Y además es muy sensible a la temperatura. En el caso de los líquidos decrece con ella (piénsese en el comportamiento del aceite, tanto el vegetal utilizado para cocinar como el mineral empleado como lubricante). Sin embargo los gases siguen una tendencia opuesta (su viscosidad aumenta con la temperatura), porque en ellos la agitación molecular es el efecto predominante. Las figuras 3 y 4 del anexo muestran la variación con la temperatura de las viscosidades cinemática y dinámica de los fluidos que presentan un mayor interés ingenieril.

La variación  $\mu = \mu(T)$  es sencilla de modelar analíticamente. En el caso de los gases se puede aproximar muy bien con relaciones potenciales (ecuación 1.4) de tal manera que a partir de un valor de la viscosidad  $\mu_0$  (correspondiente a una temperatura  $T_0$ ) su evolución sigue una sencilla variación potencial. En consecuencia conocidas la viscosidad de un gas a dos temperaturas diferentes (lo que permite calcular el valor del exponente  $n$  que, en el caso del aire, es 0,7), su evolución queda determinada. Subrayar también que al ser la expresión adimensional, no importa las unidades que se utilicen. Sin embargo las temperaturas sí deben expresarse en  $K$ , pues su relación cambia con la escala de temperaturas (absoluta o centígrada) que se utilice. En el caso de los líquidos su variación la proporciona el inverso de un polinomio de segundo grado (ecuación 1.5) que, en el caso del agua, resulta la ecuación

(1.6). No siendo en este caso la relación adimensional, hay que explicitar la unidad de medida (poises para la viscosidad y grados centígrados para la temperatura, en esta escala  $t$ -minúscula-). Obviamente, a la presión atmosférica, la ecuación sólo es válida en el intervalo  $100 > t > 0$ . Fuera de ese rango se tendría o bien hielo, o bien vapor de agua.

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^n \quad (1.4)$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{A + Bt + Ct^2} \quad (1.5)$$

$$\mu = \frac{0,0178}{1 + 0,0337t + 0,0002t^2} \quad (1.6)$$

con  $\mu$  en poises y  $t$  en  $^{\circ}C$

La gran sensibilidad de la viscosidad con la temperatura no encuentra un paralelismo con la otra variable termodinámica por excelencia, la presión. De hecho apenas varía con ella. Como tampoco depende, en el caso de los fluidos newtonianos, del grado de deformación es decir, de cuánto se haya distorsionado previamente. Así lo muestra la figura 2 que relaciona el esfuerzo cortante con el gradiente de velocidades que cuantifica la deformación del fluido. De hecho es la representación gráfica de la ecuación (1.1) y que para los fluidos newtonianos es una recta.

El comportamiento de un fluido desde la óptica de la viscosidad es el que permite establecer, cual se verá con la ayuda de la figura 2, una de las clasificaciones con mayor sentido físico. Ya se ha dicho que un fluido es ideal si su viscosidad se aproxima a cero (la línea horizontal de la figura 2). La otra clasificación relevante (incompresible y compresible) vendrá de la mano de la segunda propiedad por excelencia de los fluidos, su módulo elástico, el cual se verá en el siguiente epígrafe.

Conviene aclarar por qué, en un flujo tan sencillo como el que detalla la figura 1, se asimila la deformación de un fluido en el punto del espacio que se considere (un concepto muy importante que en el caso más general

lo modela el valor del tensor deformación) al gradiente de velocidades en ese punto. La explicación es sencilla. Si dos láminas contiguas de fluido se mueven a diferente velocidad (imagínese que está formado por un conjunto de capas), las distancias entre dos puntos contiguos de esas capas se modifica, lo que evidencia que el fluido se está deformando. Por ello en la figura 2, y a medida que se avanza positivamente sobre el eje de abscisas el fluido se está deformando a mayor velocidad. Si la relación  $\tau - dV/dy$  es lineal, con independencia del grado de deformación del fluido, la viscosidad es constante.

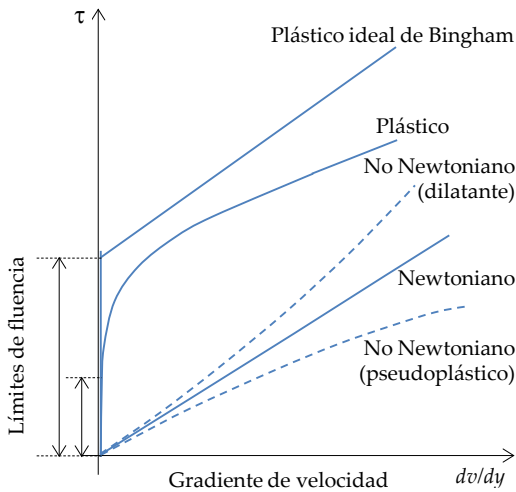


Figura 2 Clases de fluidos atendiendo al comportamiento de la viscosidad

En un fluido la representación de la expresión simplificada de Stokes (ecuación 1.1) siempre pasará por el origen de coordenadas. Recuérdese que, por definición, no puede soportar ningún esfuerzo cortante por pequeño que sea. Por ello cuatro de las líneas representadas (todas las que pasan por el origen) corresponden a fluidos. Ya se ha dicho que el eje de abscisas modela el comportamiento del fluido ideal ( $\mu = 0$ ). En segundo lugar, la recta que pasa por el origen de pendiente constante corresponde al fluido newtoniano que deja de serlo cuando la relación no es lineal (los dos casos restantes). Si la curva, vista desde el eje de abscisas, es convexa este fluido no newtoniano se "dilata" porque a medida que se va deformando ofrece más resistencia a

seguir haciéndolo. Es el caso de las arenas movedizas. Y, al contrario, si cada vez es más fácil deformar se tiene un fluido pseudoplástico porque como tal se comporta (a medida que se le deforma, el plástico ofrece menos resistencia). Pero claro, como la gráfica pasa por el origen de coordenadas, sigue siendo un fluido. La pulpa de papel en agua o el plasma sanguíneo muestran este comportamiento. La ciencia que se ocupa de los fluidos no newtonianos (algunos de ellos tienen, ya se ha visto, notable importancia) se llama reología.

Por último la gráfica también muestra la relación  $\tau - dV/dy$  para los plásticos. La diferencia con los fluidos es clara. Se necesita un esfuerzo cortante mínimo para que comiencen a deformarse. Después, ya se ha dicho, cada vez es más fácil seguir haciéndolo (la curva muestra su concavidad). Por último los plásticos cuyo comportamiento, una vez superado el esfuerzo cortante de inicio de la fluencia, es análogo al de un fluido, se denominan de Bingham. El chocolate, por ejemplo, tiene este singular comportamiento.

Ya para concluir conviene referirse a otras medidas de la viscosidad que con frecuencia aparecen en tratados técnicos. Como los segundos universales Saybolt (*SUS*) o los grados Engler ( $^{\circ}E$ ). Al representar la viscosidad la resistencia de un fluido a deformarse (se le llama fluidez al inverso de la viscosidad), las primeras medidas de la viscosidad se hicieron midiendo el tiempo que tardaba en vaciarse una determinada vasija "estándar" llena del fluido en cuestión. El resultado es una medida obviamente expresada en segundos (*SUS*). En ocasiones (es el caso de los grados Engler) se establece el cociente entre los tiempos de vaciado del fluido en cuestión y el del agua ( $^{\circ}E$ ). Finalmente cuando se habla de grados *SAE* de un aceite lubricante no se está dando su viscosidad sino refiriéndose a unas prestaciones preestablecidas por la *SAE* (Society of Automotive Engineers) de los USA. No es, pues, una medida de viscosidad. Es, sencillamente, una clase de lubricante.

## Módulo de elasticidad volumétrico

Algunas propiedades de la materia (la densidad, el calor específico o la conductividad térmica) son propias tanto de los sólidos como fluidos. Otras son **exclusivas** de los fluidos. Como la viscosidad descrita en el precedente epígrafe o el módulo elástico como ya se ha

visto. Por último hay un tercer grupo de propiedades (la tensión superficial y la presión de vapor) que son específicas de una parte de los fluidos, de los líquidos. Y, como acostumbra a suceder, **exclusividad** comporta relevancia. Dicho de otro modo, las dos propiedades que mejor caracterizan el comportamiento de un fluido son la viscosidad y el módulo elástico. Tan es así que, cual se ha dicho, permiten clasificarlos.

El módulo de compresibilidad volumétrico cuantifica la cualidad de estos medios continuos de almacenar energía elástica. Y así, al comprimir un fluido, éste almacena una energía elástica que al dejar de estar presionado devolverá. Gracias esta propiedad, y sólo debido a ella, se pueden transportar tan fácilmente. Porque una bomba (en el caso de un líquido) o un compresor (en el caso de un gas) comprimen el fluido que pasa a almacenar una energía elástica que se irá empleando tanto en vencer el rozamiento que las tuberías de transporte ofrecen a su avance como el desnivel entre dos puntos, más bajo el de partida, más alto el de llegada. Y si el desnivel está a favor del movimiento, esta energía potencial puede convertirse perfectamente en energía elástica. Tal sucede en las tuberías que suministran el agua a las centrales hidroeléctricas.

La compresión del fluido le permite acumular, pues, una energía elástica que, cuando se propicie, irá poco a poco devolviendo cuando la compresión disminuya. Como es bien sabido, un sólido elástico se comporta de manera muy distinta. De entrada también admite la compresión, pero, al contrario que el fluido, admite una tracción que, por pequeña que sea, éste no puede soportar. Y también devuelve la energía cuando el esfuerzo (sea tracción o compresión, que igual da en el sólido elástico) al que ha sido sometido desaparece. Con todo, en el distinto comportamiento entre sólidos y fluidos hay una segunda diferencia que aún marca más la distancia entre estos dos tipos de materia. Mientras el sólido tiene un límite elástico (si se alcanza pierde esta propiedad), el fluido se puede comprimir tanto cuanto se desee. No tiene límite elástico. Su comportamiento no se verá modificado por la magnitud de la presión a la que es sometido (aunque la modificación de la presión si puede cambiar, cual la figura 3 evidencia, su estado).

Pues bien, es el módulo elástico quien mide la mayor o menor elasticidad (siempre a compresión) de un flu-

do. Por ello es la relación entre la causa (el aumento de presión  $\Delta p$ ) y el efecto, la variación de volumen relativa, es decir, la variación unitaria porcentual (y, por tanto, sin dimensiones) de volumen. Y todo ello precedido por el signo menos para que el módulo elástico  $K$  sea un valor positivo toda vez que a un aumento de presión (al comprimir, es siempre positivo) le corresponde una disminución de volumen (siempre negativa). En definitiva:

$$K = - \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \quad (1.7)$$

Las unidades de  $K$ , siendo el denominador adimensional, coinciden con las del numerador. Son, pues, unidades de presión (por ejemplo  $N/m^2$  o *bares*).

Obviamente si el módulo  $K$  no es constante (es el caso de los gases, cuya resistencia a la compresión crece a medida que están más comprimidos) la expresión en forma incremental (1.7) no es correcta (el valor de  $K$  depende de la presión) y la relación debe formularse en forma diferencial. Es decir:

$$K = - \frac{dp}{\frac{dV}{V}} \quad (1.8)$$

De tal manera que la expresión (1.8) puede utilizarse tanto para líquidos como para gases, pero no así la (1.7), sólo válida para líquidos. Y no es que en este caso la  $K$  no dependa también de la presión. Es, sencillamente, porque las mayores presiones a las que se somete un líquido (generalmente en las prensas hidráulicas) pueden ser, como mucho, unos cientos de bares, un valor pequeño comparado con el del módulo elástico típico de un aceite mineral, unos 15000 *bares*. Es decir, como mucho, un 3% de su valor, una cantidad con relación al valor de partida muy poco significativa.

El inverso del modulo elástico  $K$ , es el coeficiente de compresibilidad,  $\alpha$ . Cuanto mayor es el primero menor es la compresibilidad del fluido. En el caso del

agua ( $K \approx 20000 \text{ bares}$ ),  $\alpha$  es, lógicamente, casi cero. En otras palabras, el agua no es compresible, lo que permite establecer la más conocida clasificación de los fluidos (líquidos y gases). Son líquidos aquellos que, para las presiones que en el mundo ingenieril se manejan, apenas se pueden comprimir ( $\alpha \approx 0$ ) y gases los que sí lo son, pues el valor de  $K$  es muy discreto con relación a las variaciones de presión a las que son sometidos. Por lo tanto, su inverso, es bien distinto de cero. Y aún hay más. En el caso de los gases,  $K$  no es sólo pequeño y varía con la presión. También su valor depende de cómo se efectúe la compresión. Es menor si ésta es isoterma. Y se entiende. Al permitir evacuar el calor generado durante el proceso de compresión (sólo así se puede mantener la temperatura del gas que evoluciona constante), se disminuye la agitación molecular y, por tanto, la resistencia que ofrece si se sigue comprimiendo es menor.

En efecto, el módulo elástico  $K$  de cualquier gas "perfecto" coincide con la presión,  $p$ , que soporta, siempre que se comprima de manera isoterma. Cuando la compresión es adiabática es, sin embargo, igual a  $\gamma p$ , con  $\gamma$  la relación de calores específicos ( $c_p/c_v$ ). Para el aire, gas biatómico,  $\gamma = 1,4$ . En definitiva, si la compresión es isoterma el aire a  $8 \text{ bares}$  de presión absoluta (el del interior de una rueda de bicicleta bien hinchada) es 2500 veces más compresible que el agua para la que,  $K \approx 20000 \text{ bares}$ . Pero en el de una rueda apenas hinchada ( $p = 1 \text{ bar}$ ) la relación es 20000, una relación que disminuye rápidamente a medida que aumenta la presión, hecho que se constata al hinchar la rueda de la bicicleta con un bombín. El esfuerzo que requieren las emboladas finales es muy superior al de las iniciales, una diferencia amplificada si el proceso de hinchado es el habitual, mucho más próximo a una evolución adiabática que isoterma (se lleva a cabo en un corto espacio de tiempo).

La justificación de estos valores de  $K$  es muy sencilla. Recordando que la masa, la propiedad que relaciona volumen y densidad, es un invariante, la relación (1.8) se puede reescribir en función de la densidad, resultando,

$$K = \frac{dp}{d\rho} \rho \quad (1.9)$$

Diferenciando en la ecuación de los gases perfectos la presión (supuesta la evolución isoterma y, por tanto, la temperatura  $T = T_0 = \text{constante}$ ), se tiene:

$$dp = d\rho RT_0 \quad (1.10)$$

Combinando estas dos últimas expresiones de inmediato se obtiene  $K = p$ . Obviamente si la evolución es adiabática la expresión (1.10) no es válida. En este caso hay que utilizar la ecuación correspondiente, que es:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C \quad (1.11)$$

y proceder como antes. El resultado que se obtiene ( $K = \gamma p$ ) ya ha sido anticipado.

El módulo elástico juega un papel mucho más relevante en dinámica de gases (flujo compresible) que en el caso de líquidos. Por ello no puede extrañar que muchos tratados clásicos de la Mecánica de Fluidos (entre otros el libro de White, a nuestro parecer el mejor texto básico de este cuerpo de doctrina de la Física, razón por la cual se referencia y recomienda) posponen su definición hasta llegar a esta parte de la materia. Pero tampoco conviene olvidar que el módulo elástico juega un papel muy relevante en determinados análisis de flujos líquidos. En concreto en los transitorios hidráulicos rápidos, es decir, en el cálculo del golpe de ariete. Y así la máxima sobrepresión generada por el cierre brusco de una válvula en una tubería de agua es proporcional a la raíz cuadrada del módulo elástico  $K$ . No extraña, pues, que en tuberías de gas (por ejemplo, en una red de aire comprimido) los cierres rápidos de válvulas para nada preocupen. El valor de  $K$  es muy pequeño. Y con él, también el del pulso de presión.

## Otras propiedades específicas de los fluidos

Al contrario de las dos propiedades anteriores (propias de todos los fluidos) hay otras que son específicas de los líquidos pero no de los gases. En cualquier caso, en dos de ellas (la constante de solubilidad de Henry y

la presión de vapor) intervienen de manera indirecta. La tercera, la tensión superficial a la que seguidamente se hace referencia, nada tiene que ver con los gases.

La tensión superficial de un líquido  $\sigma$ , es la energía requerida, porque en los líquidos las fuerzas intermoleculares así lo exigen, para aumentar su superficie una unidad de área. En consecuencia sus unidades son las de una energía por unidad de superficie ( $N \cdot m / m^2$ ) equivalente a fuerza por unidad de longitud ( $N/m$ ). Es una propiedad extremadamente importante en determinadas aplicaciones. Condiciona la mayor o menor facilidad de atomización del combustible en un motor diesel. También el estudio de puentes líquidos (masa de agua entre dos superficies, como la de una gota entre dos dedos que la tensión superficial del agua impide se parta en dos) de interés para medir aceleraciones en ingeniería aeroespacial (condiciones de micro gravedad). Pero desde óptica de las aplicaciones que aquí nos ocupan, es una propiedad de escaso interés práctico. De hecho no vuelve a aparecer en todo el curso.

La segunda propiedad que se comenta evalúa la capacidad (mayor o menor) de los líquidos de disolver un gas en su seno. La enunció a principios del siglo XIX Henry, estableciendo que a una determinada temperatura la masa de gas que un líquido tiene capacidad de disolver (la solubilidad  $S$  del gas en el líquido) es proporcional a la presión parcial  $p$  que el gas ejerce sobre el líquido. La propiedad es la constante de proporcionalidad  $C_H$  de la Ley de Henry.

$$S = C_H p \quad (1.12)$$

Desde la óptica de esta asignatura, la solubilidad de aire-agua tiene interés en el análisis del flujo de agua a presión. Y lo tiene porque la presencia del aire en el agua puede generar problemas si al final se llega a acumular en puntos específicos de la tubería (obviamente, por ser el aire más ligero que el agua, en los puntos altos) formando una bolsa de aire atrapado. Una caída de presión notable en el sistema puede propiciar la liberación de aire previamente disuelto porque, al disminuir la presión, el agua pierde parte de su capacidad para almacenarlo. Para prevenir este fenómeno lo mejor es evitar que entre aire en la fase de aspiración

de agua por el sistema. Si ni hay aire disuelto, no habrá posibilidad de liberarlo.

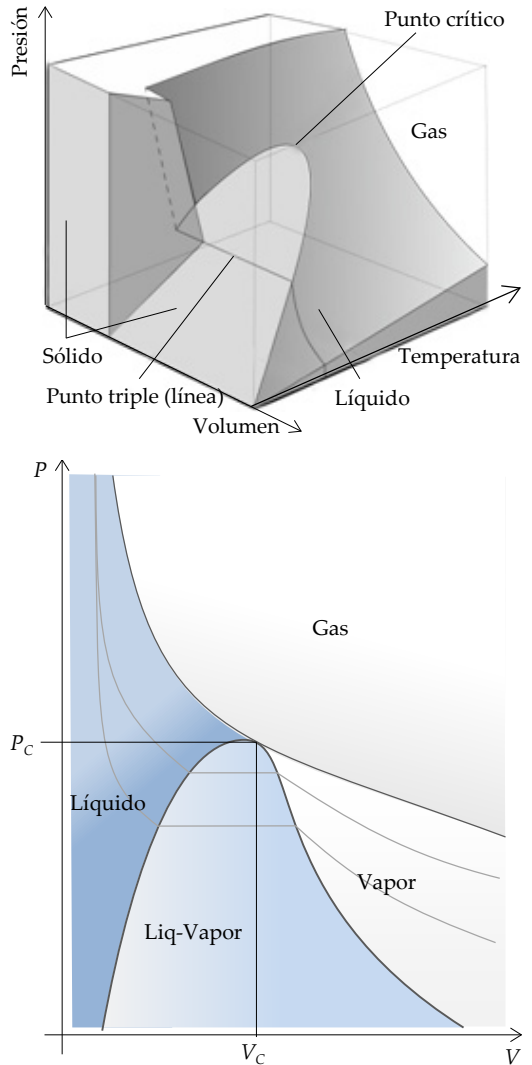


Figura 3 El diagrama  $p$ - $V$ - $T$  (tridimensional, arriba; bidimensional, debajo)

Ya por último nos se referenciará la presión de vapor, una propiedad que tiene notable interés porque explica el fenómeno de la cavitación, tan frecuente como perjudicial en la hidráulica a presión (aunque también se presenta, ya se ha dicho, en flujos muy rápidos

en lámina libre). Para explicarlo hay que recordar el diagrama  $p$ - $V$ - $T$  (figura 3) de un compuesto químico en general y del agua en particular. El agua, dependiendo de las condiciones en que se encuentre, puede ser hielo (sólido) o fluido. Este, a su vez, puede ser un líquido (el agua por excelencia) o un gas (vapor de agua). Fácil es imaginar que a bajas temperaturas siempre será un sólido mientras que para valores elevados sucederá lo contrario. La figura 3 (abajo) es un simple corte oblicuo de la representación tridimensional de la izquierda. Representando en los ejes de la figura bidimensional la presión y el volumen, la temperatura es un parámetro que permanece constante sobre las líneas que atraviesan los tres estados del agua. Cual se ve, dentro de la campana en la que conviven dos fases (vapor y líquido) las isothermas son líneas horizontales. Con relación a este diagrama conviene subrayar:

- Que a partir de un valor de la temperatura (en el caso del agua  $374\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) es imposible licuar el vapor. Corresponde a la isoterma tangente a la campana en su vértice superior, llamado punto crítico. La presión en este punto, denominada crítica, es  $225\text{ bares}$ . Son, sobre todo por lo que a la presión respecta, unas condiciones en la práctica difíciles de alcanzar.
- Observar en la grafica bidimensional que la campana no llega hasta el eje de abscisas. La figura de la izquierda (y también el sentido común) lo aclaran. A partir de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  el agua es hielo. La base de la campana se corresponde prácticamente con la isoterma  $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$  aunque la presión puede modificar ligeramente el paso de líquido a sólido del agua. La figura tridimensional de la izquierda así lo evidencia.

Con todo no es el objeto de esta lección centrarnos en asuntos más propios de la Físicoquímica que de la Mecánica de Fluidos (aunque en ingeniería tener una visión transversal siempre es muy positivo). Porque ahora nos ocupa definir correctamente la presión de vapor del agua que, cual muestra la figura 4, tiene un valor que depende de la temperatura. Así lo explica la figura 3. Porque presión de vapor ( $p_v$ ) es aquella a la que, por estar en equilibrio el líquido con su propio vapor, aquel hierve ( $T_v$ ). De este modo cada punto de la curva de la figura 4 queda definido por cada par de valores ( $T_v$ - $p_v$ ) que corresponden a cada una de las horizontales de la figura 3. Y ello porque en la figura 3 las

isothermas devienen horizontales en cuanto los dos estados (líquido y vapor) coexisten. Dicho de otro modo, las dos formas posibles de agregación de la materia (líquidos y gases) bajo el paraguas "fluido" entran equilibrio al ingresar en la campana la isoterma que seguirá siendo horizontal mientras permanezca dentro de ella.

Cual se verá, el agua en el interior de una tubería a presión puede soportar presiones altas. Pero también puede estar sometida a presiones muy bajas (por debajo de la presión atmosférica). Casi siempre sucede por una transformación de energía de presión en cinética. Un caso típico es el de las válvulas reductoras de presión. Si la presión baja tanto que se iguala a la presión de vapor del agua a la temperatura en que se encuentra, comienza la vaporización o, dicho con un término más hidráulico, cavita. Un efecto que, cual se verá, es muy inconveniente sobre todo por el daño que genera en las partes metálicas del sistema. La cavitación aparece no sólo en las válvulas que reducen la presión. También en la aspiración las bombas, en las hélices de un barco o de una turbina hidráulica, en un estrangulamiento de una tubería (tipo venturi), etcétera.

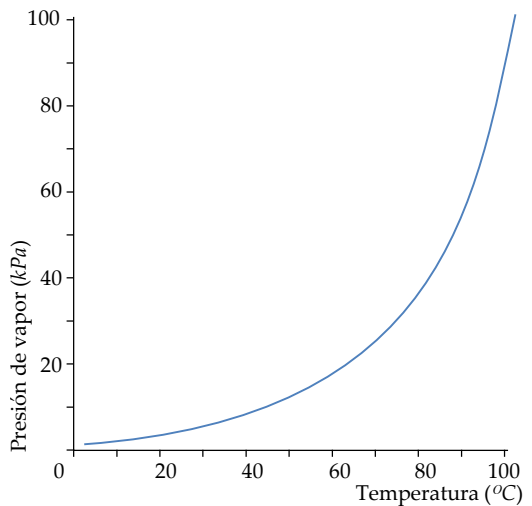


Figura 4 Presión de vapor del agua en función de la temperatura

El fenómeno es idéntico al de una olla exprés en la que el agua comienza a hervir, obviamente, a los  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , pero muy pronto esta ebullición se pospone. Porque

estando atrapado el vapor de agua que se genera al comenzar a hervir el agua (al principio, ya se ha dicho, a la temperatura prevista), ese mismo vapor atrapado por la tapadera de la olla, aumenta la presión que soporta el agua. Y para seguir hirviendo va tener que igualarse la presión de vapor a la nueva (y superior) presión, lo que exige un aumento de la temperatura. Un proceso que, de no purgarse el vapor generado, provocaría la explosión de la olla. Y los alimentos, lógicamente, a temperaturas superiores a los 100 °C se cocen más rápidamente. Pues bien, la cavitación es justamente el fenómeno inverso. El punto de ebullición se anticipa tanto más cuanto menor sea la presión que el agua soporta.

## Conceptos y propiedades a recordar

Hay otras propiedades que caracterizan el comportamiento de la materia en general y de los fluidos en particular. En el estudio de los fluidos las más importantes son, la velocidad  $V$ , la presión  $p$ , la densidad  $\rho$  (o, alternativamente, el peso específico  $\gamma$ ) y, en la Mecánica de Fluidos térmica (cuando hay importantes flujos de calor) la temperatura  $T$ . Si el fluido es incompresible (es decir, si  $\rho$  es constante) el problema se puede resolver sin la participación de las variables térmicas y se dice que el problema mecánico y el térmico están desacoplados. Porque en la mecánica de los fluidos de los fluidos viscosos (o reales) siempre hay una componente térmica. Porque con el fluido en movimiento, la viscosidad genera fricción que se disipa en calor y que, en definitiva, lo calienta. Pero se puede resolver primero el problema mecánico y después, ya de manera más sencilla, hacer lo propio con el térmico. Así se hará cuando, en la dinámica integral, se comparen la ecuación de Bernoulli con la de la energía. Pero claro, en un problema térmico clásico, las ecuaciones no se desacoplan.

Se verá que la ecuación de Bernoulli es sólo válida en los flujos incompresibles de los líquidos (módulo elástico  $K$  muy grande). Pero también hay flujos de gases que se pueden resolver utilizando la ecuación de Bernoulli. De hecho siempre que evolucionen de manera que las variaciones de presión y temperatura (recordar la ecuación de los gases perfectos que, de cualquier modo, se repasa en el epígrafe que sigue) sean muy pequeñas y, consecuentemente, el valor de  $\rho$  apenas

cambie. Es el caso de un circuito de aire comprimido, tan habitual en la industria.

Limitaciones de tiempo obligan a abordar fundamentalmente problemas de flujos incompresibles. De hecho, los únicos flujos de gases no compresibles que se consideran son isotermos, por lo que conocida las temperaturas el problema térmico se simplifica extraordinariamente de modo que apenas hay diferencia con el flujo genuinamente mecánico (incompresible). De ahí que las propiedades que en este curso más veces aparecen son las mecánicas. Sus unidades, sobre todo en los dos sistemas más utilizados, el SI y el CGS, deben manejarse a la perfección. Y pese a que escribir esta frase en un texto cuya misión es apoyar a alumnos que están cursando estudios de ingeniería genera sonrojo, la experiencia dice que en este caso es mejor pasarse que quedarse corto. Hay demasiado en juego.

Además de la temperatura, otras propiedades térmicas intervienen en los flujos mecánicos desacoplados que a lo largo de esta asignatura se estudian. Son los calores específicos, a presión y volumen constante, una diferencia inexistente en el caso de líquidos cuyo calor específico (en singular) es prácticamente constante, así como la energía interna  $u$  y la entalpía  $h$ , combinación de variables mecánicas y térmicas ( $h = u + p/\rho$ ). Y obviamente la viscosidad  $\mu$ , el parámetro que vincula lo mecánico (genera la fricción) con lo térmico (el rozamiento genera calor que se traduce en un aumento de temperatura del líquido bien que, cual se verá, inapreciable).

Las restantes propiedades térmicas (entropía y conductividad térmica), no intervienen en ninguno de los problemas de Mecánica de Fluidos que este curso aborda. Pero juegan un papel clave en la Mecánica de Fluidos Térmica. Conviene insistir en ello. Tampoco está de más (se han estudiado en termodinámica) que se conozca perfectamente su significado físico. Propicia la transversalidad del conocimiento algo muy importante, ya se ha dicho, en un buen profesional de la ingeniería.

## Ecuaciones de estado de los fluidos

La ecuación de estado de los gases perfectos relaciona de manera muy sencilla las variables fundamentales



con las que se modela su comportamiento. Cuando la masa del gas que evoluciona se refiere al número de moles,  $n$ , su constante  $R$  es universal, por lo que se denominará  $R_u$ , razón por la que acostumbra a utilizarse de este modo (ecuación 1.13) en los tratados de química.

$$p\forall = nR_u T \quad \text{con} \quad R_u = 0,082 \frac{\text{at} \times \text{l}}{\text{mol}^\circ\text{K}} \quad (1.13)$$

Sin embargo en Mecánica de Fluidos es más cómodo expresar la masa del gas directamente en  $Kg$  en vez de referirla al número de moles, lo que tiene dos consecuencias. De una parte, la constante  $R_u$  pierde su carácter universal y pasa a depender de la masa molecular del gas que evoluciona, por lo que se denominará  $R_g$ . De otra la ecuación (1.13) se convierte en la ecuación (1.14).

$$p = \rho R_g T \quad (1.14)$$

En el caso del aire el peso molecular equivalente se obtiene ponderando el de los dos gases que lo componen. Aproximadamente el 22% de oxígeno (peso molecular de 32  $g/mol$ ) mientras el restante 78% es nitrógeno (peso molecular de 28  $g/mol$ ). Por tanto:

$$M_{\text{aire}} = 0,78 \cdot 28 + 0,22 \cdot 32 = 28,88 \text{ g/mol} \quad (1.15)$$

Pero un ajuste más fino de la composición del aire (el aire no sólo es oxígeno y nitrógeno) lleva a una masa molecular ligeramente superior ( $M = 28.96 \text{ g/mol}$ ). Si además se tiene en cuenta que una atmósfera es 1,013 bares y, por tanto 101300  $N/m^2$ , el cambio de unidades de la constante  $R_u$  al sistema internacional proporciona un valor de  $R_g = 287 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{Kg} \cdot \text{K}$ , que es el que se utiliza en todos los flujos de aire. Pero es un valor que corresponde al aire. Porque al analizar la evolución de gas natural (metano con un peso molecular de 16  $g/mol$ ) por una tubería, la constante  $R_g$  de este gas será casi el doble que la del aire, toda vez que su masa molecular es casi la mitad.

Por lo general el transporte de gases por tuberías (gaseoductos, redes urbanas de gas, etcétera) es isoterma y, cual se ha dicho, se estudiará más adelante. Ello supone que el calor que la fricción genera no se traduce en un aumento de temperatura del fluido. Bien porque no es suficiente para generar un calentamiento significativo o bien porque ese calor va escapando por las paredes de la tubería. En el extremo opuesto se encuentran los adiabáticos en los que no hay flujos térmicos a través de las superficies que limitan el movimiento del fluido. Todo sucede tan rápidamente que no hay tiempo para el intercambio de calor. Con diferencia, el caso más notable es el flujo a través de las toberas propulsoras de un avión a reacción. Los tramos por los que la mezcla de gases evoluciona son muy cortos pero, pese a ello, la mezcla de combustible y oxidante tras la combustión va adquiriendo gran velocidad y con ella capacidad de propulsión cual se verá en la lección de dinámica integral. Y cuando la evolución no es tan rápida como para ser adiabática, pero tampoco tan lenta como para tener un flujo isoterma, se tiene el caso intermedio, el del flujo politrópico.

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C \quad (1.16)$$

Todas estas evoluciones las modela la ecuación (1.16), complementaria de la ecuación de estado. En ella  $\gamma$  es variable y dependiente de la mayor o menor rapidez del proceso. Igual a la unidad en el flujo isoterma y a 1,4 en la evolución adiabática ( $\gamma = c_p/c_v = 1,4$  es el resultado de dividir los valores de los calores específicos, a presión y volumen constante, de gases biatómicos como los que integran el aire). Así lo enseña la termodinámica clásica.

El flujo politrópico, del que un ejemplo típico es la evolución de aire confinado en el interior de un calderín antiariete, se modela con la misma ecuación (1.16) si bien con valores del exponente  $\gamma$  comprendidos entre los dos evoluciones extremas (isoterma y adiabática), con ( $1 < \gamma < 1,4$ ) porque aunque al evolucionar el gas no conserva la temperatura (el flujo no es isoterma), la transmisión de calor con las paredes tampoco es nula (la característica de los flujos adiabáticos).



Significar que mientras los gases tienen una ecuación de estado bien establecida, tal no ocurre con los líquidos. Supuestos incompresibles dos relaciones

$$\rho = C \quad dh = c_e dT \quad (1.17)$$

expresan y, en su caso, relacionan las variables significativas del flujo. De hecho la primera impone la supuesta incompresibilidad del líquido mientras la segunda permite ligar las variables térmicas. Estas ecuaciones de "estado" de los líquidos no deben confundirse con la hipótesis de Stokes que relaciona causa (tensiones) y efectos (deformaciones) en los flujos fluidos y de los que la versión más simplificada es la ecuación (1.1) que ha permitido definir la viscosidad.

## Conclusión

Tras el estudio de esta lección el alumno debe saber qué es la Mecánica de Fluidos, la importancia que su estudio tiene en el marco de la titulación que está cursando, la amplitud del campo cubierto por este apasionante cuerpo de doctrina de la Física y, sin perder esa visión general, conocer sus numerosas aplicaciones y tener clara la orientación que a lo largo de este curso se va a seguir. Un enfoque condicionado tanto por el tiempo disponible como, sobre todo, por el marco que le confiere la titulación en que la asignatura se cursa. En cualquier caso, una visión completa de esta materia la proporciona el libro de Mecánica de Fluidos que se recomienda. El de F.M. White.

En cualquier caso, y ya de manera más concreta, deberá:

- Conocer las características de los fluidos y lo que les distingue de los sólidos.
- Recordar las variables y conceptos tanto mecánicos y termodinámicos que caracterizan su comportamiento y que permiten seguir su evolución ya estudiadas en cursos precedentes (densidad, peso específico, velocidad, aceleración, presión, temperatura, fuerza, trabajo, potencia, calores específicos, energía interna, entalpía y entropía) así como las unidades físicas en las que se expresan, particularmente

en los sistemas más utilizados (SI y CGS). Este es un requisito imprescindible para avanzar con pie firme en la asignatura.

- Comprender las dos propiedades específicas de los fluidos, a saber la viscosidad (mecánica y cinemática) y módulo elástico. También recordar propiedades ya vistas como la tensión superficial, la capacidad que tiene los líquidos de disolver gases y, sobre todo, la presión de vapor y el concepto de cavitación intrínsecamente ligado a él. Y obviamente conocer a la perfección tanto sus dimensiones como las unidades en cada uno de los sistemas.
- Recordar las ecuaciones de estado de los fluidos tanto en líquidos como en gases.
- En definitiva, haber comprendido a la perfección todos los conceptos expuestos en esta lección y haber refrescado todos los que de manera directa o indirecta aquí se mencionan y que no se han descrito por haber sido ya estudiados en cursos precedentes.

## Bibliografía

Bonnin, J., 1984

*L'eau dans l'antiquité. L'hydraulique avant notre ère*

Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricite de France. Eyrolles. Paris.

Cabrera E., Arregui, F., 2010

*La Ingeniería y la gestión del agua a través de los tiempos.*

*Aprendiendo de la historia*

ITA. Universidad Politécnica de Valencia.

Rouse H., Ince S., 1963

*History of Hydraulics.*

Editorial Dover. Nueva York.

Viollet P.L., 2000

*Hydraulique dans les civilisations anciennes.*

Presses de l'Ecole National des Ponts et Chaussés. Paris.

White F.M., 2008

*Mecánica de Fluidos, 6ª edición*

Mc Graw Hill Interamericana. Madrid.

## Anexos

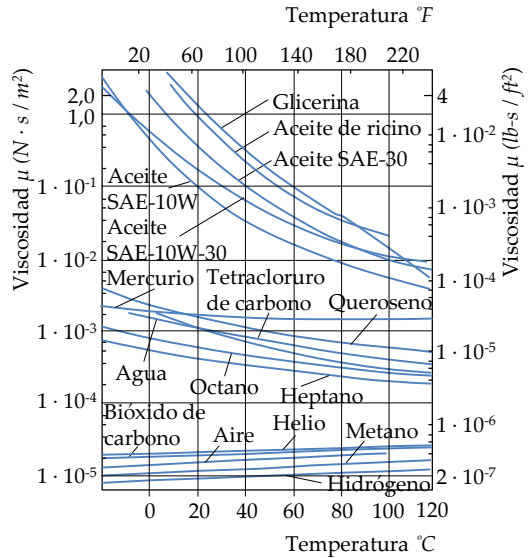


Figura 5 Viscosidades dinámicas de los fluidos en función de la temperatura

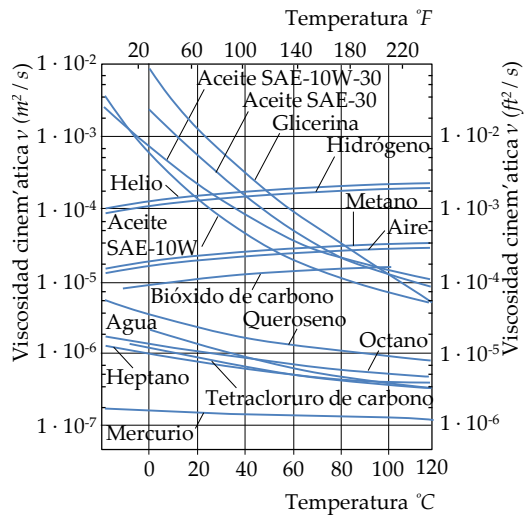


Figura 6 Viscosidades cinemáticas de los fluidos en función de la temperatura

**Tabla 1.** Unidades de las principales variables mecánicas y factores de conversión entre el sistema inglés y el internacional (SI)

Cantidad	Unidades inglesas	Sistema internacional (SI)	Factor de conversión
Longitud	<i>pulgada</i>	<i>milímetro</i>	$1\text{ in} = 25,4\text{ mm}$
	<i>pie</i>	<i>metro</i>	$1\text{ ft} = 0,3048\text{ m}$
	<i>milla</i>	<i>kilómetro</i>	$1\text{ milla} = 1,609\text{ km}$
	<i>yarda</i>		$1\text{ milla} = 5280\text{ ft}$ $1\text{ milla} = 1760\text{ yd}$
Área	<i>Pulgada cuadrada</i>	<i>Centímetro cuadrado</i>	$1\text{ in}^2 = 6,452\text{ cm}^2$
	<i>Pie cuadrado</i>	<i>metro cuadrado</i>	$1\text{ ft}^2 = 0,09290\text{ m}^2$
Volumen	<i>pulgada cúbica</i>	<i>centímetro cúbico</i>	$1\text{ in}^3 = 16,39\text{ cm}^3$
	<i>pie cúbico</i>	<i>metro cúbico</i>	$1\text{ ft}^3 = 0,02832\text{ m}^3$
	<i>Galón( US o Brit)</i>		$1\text{ gal(US)} = 231\text{ in}^3 = 0,003789\text{ m}^3$ $1\text{ gal (Brit)} = 1,2\text{ gal (US)}$
Masa	<i>libra-masa</i>	<i>kilogramo</i>	$1\text{ lbm} = 0,4536\text{ kg}$
	<i>slug</i>		$1\text{ slug} = 14,59\text{ kg}$
	<i>onza</i>		$1\text{ oz} = 28,35 \times 10^{-3}\text{ kg}$
Densidad	<i>slug/pie cúbico</i>	<i>kilogramo/metro cúbico</i>	$1\text{ slug/ft}^3 = 515,4\text{ kg/m}^3$
Fuerza	<i>libra-fuerza</i>	<i>newton</i>	$1\text{ lb} = 4,448\text{ N}$
Trabajo	<i>pie-libra</i>	<i>newton-metro</i>	$1\text{ ft-lb} = 1,356\text{ N-m}$
Presión	<i>libra/pulgada cuadrada</i>	<i>newton/metro cuadrado (pascal)</i>	$1\text{ psi} = 6895\text{ Pa}$
	<i>libra/pie cuadrado</i>		$1\text{ psf} = 47,88\text{ Pa}$
		<i>Bar</i>	$1\text{ bar} = 105\text{ Pa} = 14,7\text{ psi}$
	<i>Pulgada de mercurio</i>		$1\text{ psi} = 2,036\text{ in Hg}$
	<i>Pulgada de agua</i>		$1\text{ psi} = 27,7\text{ in H}_2\text{O}$
Temperatura	<i>grado Fahrenheit</i>	<i>grado Celsius</i>	$^{\circ}\text{F} = 9/5\text{ }^{\circ}\text{C} + 32$
	<i>grado Rankine</i>	<i>kelvin</i>	$^{\circ}\text{R} = 9/5\text{ }^{\circ}\text{K}$
Energía	<i>unidad térmica británica (BTU)</i>	<i>joule</i>	$1\text{ Btu} = 1055\text{ J}$
	<i>caloría</i>		$1\text{ cal} = 4,186\text{ J}$
	<i>pie-libra</i>		$1\text{ ft-lb} = 1,356\text{ J}$ $1\text{ BTU} = 778,2\text{ ft-lb}$
Potencia	<i>caballo de fuerza</i>	<i>watt</i>	$1\text{ hp} = 745,7\text{ W}$
	<i>pie-libra/segundo</i>		$1\text{ ft-lb/s} = 1,356\text{ W}$
Velocidad	<i>pie/segundo</i>	<i>metro/segundo</i>	$1\text{ ft/s} = 0,3048\text{ m/s}$
	<i>Milla/hora</i>		$1\text{ mph} = 1,467\text{ ft/s}$
Aceleración	<i>pie/segundo al cuadrado</i>	<i>metro/segundo al cuadrado</i>	$1\text{ ft/s}^2 = 0,3048\text{ m/s}^2$
Frecuencia	<i>ciclo/segundo</i>	<i>hertz</i>	$1\text{ cps} = 1,000\text{ Hz}$
Viscosidad	<i>libra-segundo/pie cuadrado</i>	<i>newton-segundo/metro al cuadrado</i>	$1\text{ lb-s/ft}^2 = 47,88\text{ N.s/m}^2$
		<i>Stoke</i>	$1\text{ stoke} = 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$
		<i>Poise</i>	$1\text{ poise} = 0,1\text{ N-s/m}^2$



Capítulo 2

# Estática de fluidos

## Índice

### **Introducción**

Unidades

Referencias de presión

### **Ecuación general de la estática de fluidos**

Ecuación fundamental de la hidrostática aplicada al campo gravitatorio y fluidos incompresibles

Ecuación fundamental de la hidrostática aplicada al campo gravitatorio y fluidos compresibles

### **Fuerzas provocadas por la presión hidrostática**

Fuerzas sobre superficies planas

Prisma de presiones

Fuerzas sobre superficies curvas

**Flotación y estabilidad de los flotadores**

## Introducción

La estática de los fluidos estudia el comportamiento de los mismos en reposo. Como quiera que el movimiento, por definición, no existe, los esfuerzos cortantes jamás pueden estar presentes en fluidos en reposo, toda vez que de haberlos crearían un gradiente de velocidades (recordar la definición de fluido en la lección precedente) que destruirían el reposo del fluido.

En consecuencia los esfuerzos superficiales que pueden actuar sobre un elemento de superficie que rodea un punto del medio físico deben ser siempre normales y necesariamente de compresión al no tener los fluidos capacidad alguna para resistir la tracción. Ahora se verá como estos esfuerzos de compresión son los mismos para un mismo punto, cualquiera sea la orientación del elemento de superficie.

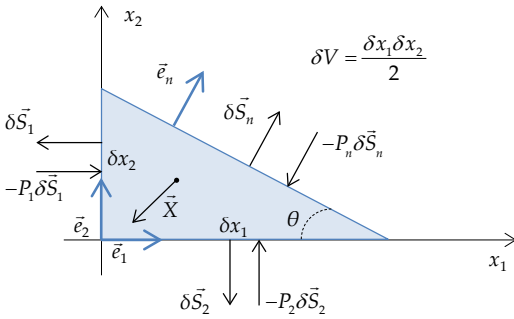


Figura 1 Balance de fuerzas sobre un elemento diferencial

Para justificarlo se toma en torno a un punto un elemento de volumen con caras planas y orientadas según dos planos del triedro y con un cierre de orientación genérica dado por el ángulo  $\theta$ . Sobre dicho elemento de volumen actúan como únicas fuerzas de superficie las presiones, así como un campo  $X$  que proporciona la fuerza unitaria de volumen. La condición de equilibrio en reposo del elemento de volumen, que se toma bi-dimensional, pero cuya generalización tridimensional sería inmediata con solo tomar un tetraedro sencillo:

$$\sum \bar{F} = 0 \rightarrow -P_1 \delta \bar{S}_1 - P_2 \delta \bar{S}_2 - P_n \delta \bar{S}_n + \bar{X} \delta V = 0 \quad (2.1)$$

y proyectando en las dos direcciones significativas, queda:

$$P_1 \delta x_2 - P_n \delta x_2 + X_1 \frac{\delta x_1 \cdot \delta x_2}{2} = 0 \quad (2.2a)$$

$$P_2 \delta x_1 - P_n \delta x_1 + X_2 \frac{\delta x_1 \cdot \delta x_2}{2} = 0 \quad (2.2b)$$

Donde se ha tenido en cuenta,

$$\delta \bar{S}_1 = -\delta x_2 \cdot \bar{e}_1 \quad (2.3a)$$

$$\delta \bar{S}_2 = -\delta x_1 \cdot \bar{e}_2 \quad (2.3b)$$

$$\delta \bar{S}_n = \delta l \cdot \bar{e}_n \quad (2.3c)$$

teniendo en cuenta que,

$$\delta V = \frac{\delta x_1 \cdot \delta x_2}{2} \quad (2.4)$$

$$\delta x_1 = \delta l \cdot \cos \theta \quad (2.5a)$$

$$\delta x_2 = \delta l \cdot \cos \theta \quad (2.5b)$$

y que el elemento de superficie puede ser tan pequeño como se desee, entonces  $\delta x_1$  y  $\delta x_2$  tienden a cero, resultando:

$$P_1 = P_2 = P_n = P \quad (2.6)$$

que es lo que se quería demostrar. En consecuencia el estado de sollicitación de un punto en estática viene dado por el escalar  $P$ . Por el contrario, en dinámica, es un tensor quien lo expresa integrado por su total de seis escalares.

## Unidades

Las unidades de presión, fuerza por unidad de superficie, en los diversos sistemas son:

Tabla 1 Unidades frecuentes

Sistema	Denominación	Unidades
CGS	<i>baria</i>	<i>dina/cm<sup>2</sup></i>
Sistema internacional	<i>Pascal</i>	<i>N/m<sup>2</sup></i>
Técnico		<i>kp/m<sup>2</sup></i>
-	<i>Bar</i>	<i>10<sup>5</sup> Pa</i>
Inglés	<i>psi</i> (libra por pulgada cuadrada)	<i>lb/in<sup>2</sup></i>
-	Torricelli	<i>mmHg</i>

Todas ellas salvo el psi son muy pequeñas por lo que se utilizan múltiplos:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2 = 1,02 \text{ kp/cm}^2 = 10^4 \text{ kp/m}^2 = 14,5 \text{ psi} \quad (2.7)$$

O múltiplos respecto a la presión atmosférica estándar:

$$1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar} = 1013 \text{ milibares} = 1,033 \text{ kp/cm}^2 \quad (2.8)$$

También es común expresar la presión en múltiplos de una columna de fluido, como pueda ser el mercurio o el agua. Las presiones referidas a las columnas de agua se utilizan habitualmente en hidráulica. No obstante, en estos caso sería más propio hablar de "altura de columna de agua" que de presión y referirse a ella como " $P/\gamma$ " siendo  $\gamma$  el peso específico del fluido utilizado como referencia o alternativamente con la letra " $H$ ".

Las equivalencias entre la presión de una atmósfera estándar y la presión expresada en columna de mercurio son las siguientes:

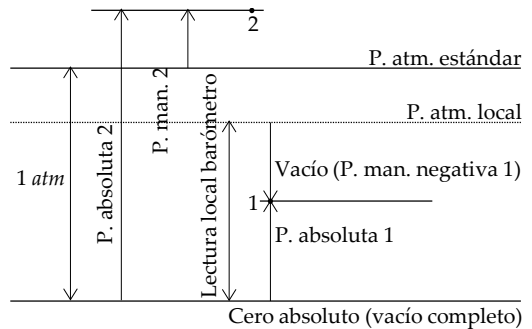
$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} \quad (2.9)$$

(al *mmHg* frecuentemente se denomina *Torricelli*)

## Referencias de presión

Se utilizan dos escalas (referencias) diferentes para la medida de la presión. Por un lado la presión absoluta, que está referida a la presión medida con respecto al vacío absoluto. En ocasiones, para aclarar que un determinado valor de presión se mide con respecto al vacío absoluto, se añade un asterisco como superíndice.

Alternativamente, se utiliza frecuentemente la medida de presión relativa (también denominada presión manométrica), que es la presión medida con respecto a la presión atmosférica local.



$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 10,34 \text{ mca}$$

Figura 2 Referencias de presión

La presión absoluta solamente puede ser positiva, mientras que la presión manométrica puede ser negativa (lo que implica una presión menor que la atmosférica). La presión atmosférica local se mide con barómetros. Puesto que la presión atmosférica local es variable, otro concepto que se utiliza frecuentemente es el de presión atmosférica estándar, como una medida del valor "típico" de la presión atmosférica. Se suele adoptar un valor de  $101325 \text{ Pa}$ .

## Ecuación general de la estática de fluidos

Para obtener dicha ecuación se considera un elemento de volumen  $\delta V = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$  y estableciéndose un balance integral de fuerzas:



$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_s + \sum \vec{F}_v = 0 \quad (2.10)$$

Las fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen considerado se clasifican en fuerzas de volumen y de superficie. Las fuerzas de superficie,  $F_s$ , por estar abordando un problema de estática únicamente están constituidas por las fuerzas de presión. Las fuerzas de volumen,  $F_v$ , están condicionadas por el campo de fuerzas (por unidad de volumen) resultante sobre el elemento de volumen.

$$P\delta x_2\delta x_3 - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x_1} \delta x_1 \right) \delta x_2\delta x_3 + X_{1v}\delta x_1\delta x_2\delta x_3 = 0 \quad (2.11)$$

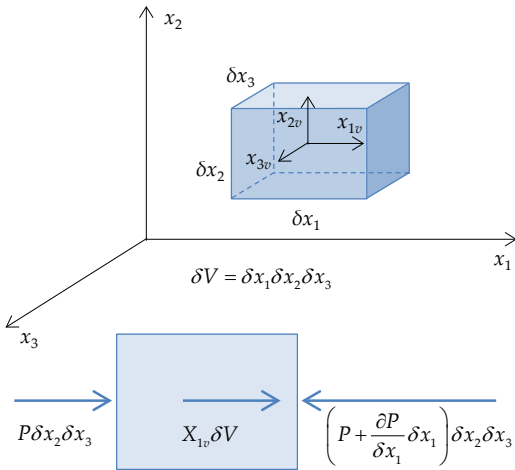


Figura 3 Balance de fuerzas en un volumen diferencial

Es decir, si se expresa el campo fuerzas en términos de fuerza por unidad de volumen.

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = X_{1v} \quad (2.12)$$

No obstante, si el campo de fuerzas hubiese estado referido a la unidad de masa, el resultado del anterior balance en un elemento de volumen hubiera resultado:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \rho X_1 \quad (2.13)$$

Ecuaciones que vectorialmente se expresan

$$\nabla P = \vec{X}_v \quad \nabla P = \rho \vec{X} \quad (2.14)$$

Representando cualquiera de las dos el principio fundamental de la hidrostática. Una referida a un campo de fuerzas por unidad de volumen,  $\vec{X}_v$ , y otra a un campo de fuerza por unidad de masa,  $\vec{X}$ .

Una superficie isóbara es el lugar geométrico de los puntos donde el escalar,

$$P(\vec{r}) = P(x, y, z) = P_0 \quad (2.15)$$

es constante. Puede demostrarse que el campo de fuerzas,  $\vec{X}_v$  o  $\vec{X}$ , es perpendicular a las superficies isóbaras si se tiene en cuenta que el gradiente de un campo escalar al que se añade una constante no varía:

$$\nabla(P(x, y, z) - P_0) = \nabla P(x, y, z) \quad (2.16)$$

Por tanto el vector gradiente del campo de presiones es perpendicular a las superficies isóbaras y, por la ecuación fundamental de la hidrostática, paralelo a las líneas del campo de fuerzas,  $\vec{X}_v$  o  $\vec{X}$ . En otras palabras, el campo de fuerzas intersecta a las superficies isóbaras ortogonalmente.

En el caso del campo (por unidad de masa) gravitatorio, el más frecuente en problemas de estática de fluidos, se tiene:

$$\vec{X} = -g\vec{k} \quad (2.17)$$

Sustituyendo el valor de este campo de fuerzas en la expresión de la ecuación fundamental de la hidrostática se tiene:

$$dP + \rho \cdot g \cdot z = 0 \quad (2.18)$$

## Ecuación fundamental de la hidrostática aplicada al campo gravitatorio y fluidos incompresibles

A la hora de resolver la anterior ecuación debe tenerse en cuenta las posibles variaciones de la densidad con la presión o con la coordenada  $z$ . No obstante, en el caso de fluidos incompresibles, la densidad es invariante independientemente de las anteriores variables por lo que la resolución de la ecuación es inmediata.

$$\int_{P_0}^P dP + \rho_0 \int_{z_0}^z g \cdot dz = 0 \rightarrow P - P_0 = -\rho_0 g(z - z_0) = -\gamma(z - z_0) \quad (2.19)$$

En el caso de la hidráulica se trabaja con presiones manométricas (referidas a la presión atmosférica local). Por ello, tomando como origen de cotas la superficie libre del fluido, donde la presión coincide con la presión atmosférica y se tendría una presión manométrica igual a cero, resulta sencillo obtener la presión en cualquier punto del fluido:

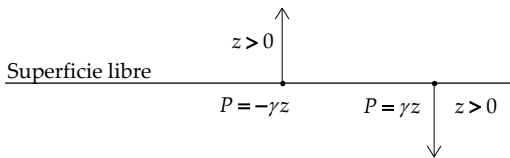


Figura 4 Criterio de signos

En el caso de la figura anterior se toma como valores positivos del eje  $z$  los que coinciden con el sentido de la fuerza de la gravedad.

## Ecuación fundamental de la hidrostática aplicada al campo gravitatorio y fluidos compresibles

En el caso de fluidos compresibles se debe tener en cuenta que la densidad puede variar tanto en función de la presión del fluido en cada punto como de su posición en el espacio. Si se trata de un fluido ideal, cuyas evoluciones se rigen por la ecuación de los gases perfectos se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Ec. estática:} & \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \\ \text{Ec. gases perfectos:} & \quad P = \rho R_g T \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\frac{P}{R_g T} g \end{aligned} \right. \quad (2.20)$$

Para realizar la integración es necesario conocer una relación adicional, como por ejemplo, la variación de la temperatura  $T$  en función de la altura  $z$ , para lo cual se puede utilizar una expresión como la siguiente (perfil térmico lineal):

$$T = T_0 - B \cdot z \quad (2.21)$$

Siendo  $B$  una constante,  $T$  la temperatura absoluta a una cota  $z$  y  $T_0$  la temperatura absoluta a cota cero. De las anteriores expresiones se llegaría a:

$$\int_{P_0}^{P_1} \frac{dP}{P} = -\frac{g}{R_g} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T} = -\frac{g}{R_g} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T_0 - Bz} \quad (2.22)$$

Sustituyendo las condiciones de contorno anteriormente comentadas ( $P_0 = P_{atm} = 0$ ;  $z_0 = 0$ ; además  $T_0$  y  $B$  son conocidas) se llega a:

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_{atm}}\right) = -\frac{g}{R_g B} \ln\left(\frac{T_0 - Bz_1}{T_0}\right) \rightarrow P_1 = P_{atm} \left(\frac{T_0 - Bz_1}{T_0}\right)^{\frac{g}{R_g B}} \quad (2.23)$$

## Fuerzas provocadas por la presión hidrostática

A continuación se estudiará las acciones que un fluido incompresible (líquido) ejerce sobre las superficies inmersas en el mismo, ya sean planas o curvas.

### Fuerzas sobre superficies planas

Se pretende evaluar la fuerza sobre la superficie plana de la siguiente figura:

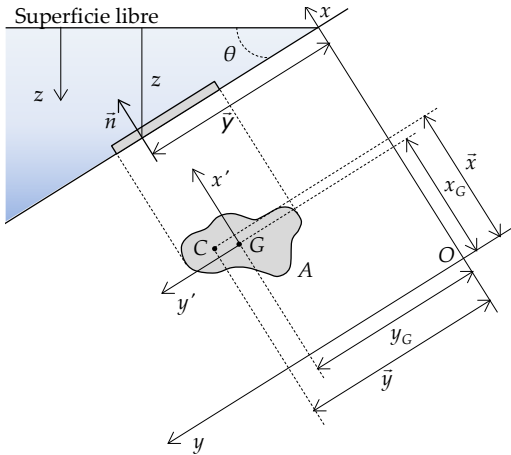


Figura 5 Fuerzas sobre una superficie plana

La fuerza resultante vendrá dada por el sumatorio de un conjunto de fuerzas elementales (todas ellas actuando perpendicularmente a la superficie estudiada). Por este motivo y teniendo en cuenta que se trata de una superficie plana se ha obviado el carácter vectorial de la fuerza.

$$F_T = \int dF = \int P \cdot dA = \int \gamma z \cdot dA \quad \vec{F}_T = F_T (-\vec{n}) \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta la relación entre z y el eje y se tiene:

$$F_T = \gamma \int y \sin \theta \cdot dA = \gamma \sin \theta \int y \cdot dA = \gamma \cdot \sin \theta \cdot Y_G \cdot A$$

$$F_T = \gamma z_G A = P_G A \quad (2.25)$$

Esto es, la magnitud de la fuerza vertical sobre una superficie plana se puede calcular multiplicando la presión en el centro de gravedad de dicha superficie por el valor de su área.

Para responder a la pregunta de cuál es el punto de aplicación de dicha fuerza resultante,  $F_T$ , se tendría que igualar los momentos que producen las fuerzas elementales sobre un punto (por ejemplo el origen de coordenadas donde  $y = 0$ ) con el momento que produce dicha fuerza resultante aplicada a una distancia  $\bar{y}$  del origen de coordenadas.

$$\int y \cdot dF = F_T \cdot \bar{y}$$

$$\gamma \int y \sin \theta \cdot dA = \gamma \sin \theta \int y^2 \cdot dA = P_G \cdot A \cdot \bar{y} \quad (2.26)$$

Despejando,

$$\bar{y} = \frac{\gamma \cdot \sin \theta \cdot I_{xx}}{P_G \cdot A} = \frac{I_{xx}}{y_G A} \quad (2.27)$$

Análogamente tomando momentos con respecto al eje Y, resulta:

$$\int x \cdot dF = F_T \cdot \bar{x} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x} = \frac{I_{xy}}{y_G A} \quad (2.28)$$

siendo  $I_{xx}$  e  $I_{xy}$  el momento inercia con respecto al eje X, así como el producto de inercia respecto a los ejes X e Y.

Recordando el teorema de Steiner:

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= I_{x'x'} + Ay_G^2 \\ I_{xy} &= I_{x'y'} + Ay_G x_G \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

De este modo se llega a las siguientes expresiones que permiten calcular, simplemente conociendo las características geométricas de la superficie plana, el punto de aplicación de las fuerzas:

$$\bar{y} = y_G + \frac{I_{x'x'}}{y_G A} \quad (2.30a)$$

$$\bar{x} = x_G + \frac{I_{x'y'}}{y_G A} \quad (2.30b)$$

Siendo:

- $y_G$  la coordenada y del centro geométrico de la superficie plana.

- $x_G$  la coordenada  $x$  del centro geométrico de la superficie plana.
- $I_{xx}$  momento de inercia sobre un eje paralelo al eje  $x$  y que pasa por el centro geométrico de la superficie plana.
- $I_{xy}$  producto de inercia sobre unos ejes paralelos a los ejes  $x$  e  $y$  que pasan por el centro geométrico de la superficie plana.

No obstante, comentar que en muchas ocasiones resulta más fácil calcular el momento resultante de las fuerzas hidrostáticas sobre una superficie plana sobre un eje, integrando en toda la superficie los momentos que producen las fuerzas elementales.

En cualquier caso, antes de continuar se deben realizar las siguientes consideraciones:

- El centro de presiones de coordenadas  $(x, y)$  se encuentra siempre por debajo del centro de gravedad  $(x_G, y_G)$  debido al carácter estrictamente positivo del momento de inercia  $I_{xx}$ . Solo en el caso de una superficie plana horizontal (el fondo de una piscina, por ejemplo), el eje de intersección de la superficie libre con el plano que contiene el área en cuestión se desplaza hasta el infinito y con él el origen de coordenadas. En consecuencia, no tiene sentido la coordenada  $\bar{y}$ , aunque lógicamente coincida en las coordenadas  $z_G$  y  $z$ .
- Por otra parte como el producto de inercia  $I_{xy}$  puede ser positivo o negativo, la coordenada  $\bar{x}$ , puede estar a la derecha o a la izquierda de  $x_G$ .

### Prisma de presiones

En el caso particular de superficies planas la distribución de presiones sobre el área  $A$  es lineal con la profundidad. Ello da lugar, cuando el área tiene una anchura constante, al denominado prisma de presiones, aunque mejor sería denominarlo de fuerzas, que es finalmente lo que interesa y al que se llega por la proporcionalidad entre presiones y fuerzas que supone el tener el área una anchura constante. En este caso, es posible calcular el punto de aplicación como si del centro de gravedad del triángulo o trapecio se tratara.

Por ejemplo, en la siguiente figura se puede observar la distribución de presiones sobre una pared rectangular vertical de altura  $h$  y anchura  $b$ . Dicha distribución de presiones es lineal, de modo que en la arista superior del rectángulo, la presión es nula (presión atmosférica), mientras que en la arista inferior, la presión es igual a  $P = \gamma \cdot h$ .

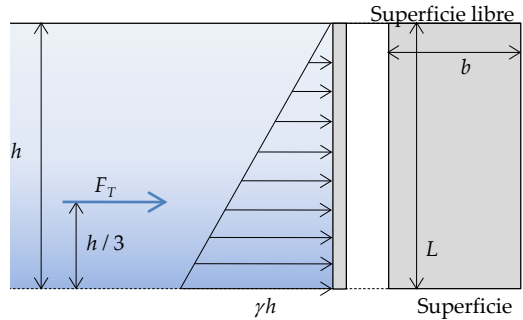


Figura 6 Prisma de presiones sobre una pared rectangular

La fuerza hidrostática sobre la pared será pues:

$$F_T = P_G \cdot A = \left( \gamma \cdot \frac{h}{2} \right) \cdot (h \cdot b) = \frac{1}{2} \gamma h^2 b \quad (2.31)$$

y como se puede observar, la fuerza hidrostática total  $F_T$  coincide con el volumen del prisma de presiones. En este caso, haciendo uso de las expresiones para el cálculo del apartado anterior, o integrando directamente los momentos de las fuerzas elementales, es posible obtener que el punto de aplicación de  $F_T$  se sitúa en el eje central vertical de la cara rectangular y a una altura  $h/3$ .

La figura siguiente representa la distribución uniforme de presiones sobre una superficie horizontal en este caso de forma irregular, por hacerlo más general) sumergida a una profundidad  $z$ . En este caso, la acción hidrostática total resulta:

$$F_T = P_G \cdot A = \gamma \cdot z_G \cdot A \quad (2.32)$$

y su punto de aplicación coincide con el centro geométrico de la figura.

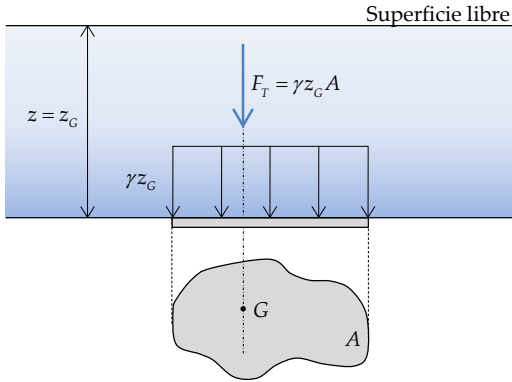


Figura 7 Fuerzas sobre una superficie plana horizontal

El caso representado en la figura 8 es similar al de la figura 6, solamente que la distribución de presiones es trapezoidal debido a que la arista superior de la superficie rectangular vertical se encuentra a una profundidad  $h_1$  y consecuentemente, la presión en los puntos de dicha arista es igual a  $\gamma \cdot h_1$ , mientras que en la arista inferior se encuentra una presión  $\gamma \cdot h_2$ .

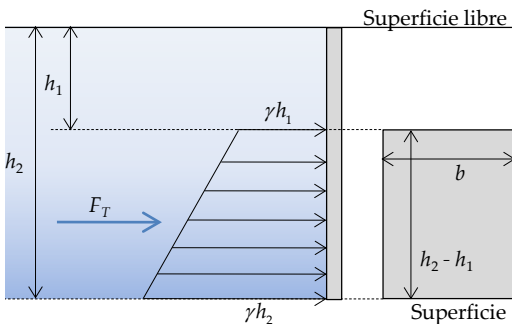


Figura 8 Prisma de presiones sobre una superficie plana sumergida

De nuevo se puede obtener que la fuerza hidrostática total sobre esta superficie es igual al volumen del prisma de presiones:

$$F_T = P_G \cdot A = \left( \gamma \frac{h_1 + h_2}{2} \right) \cdot [(h_2 - h_1) \cdot b] = \frac{1}{2} \gamma (h_2^2 - h_1^2) b \quad (2.33)$$

En el caso de una distribución trapezoidal de presiones puede obtenerse el punto de aplicación de  $F_T$  bien sea utilizando las expresiones (2.32) y (2.33), o por integración directa de los momentos que producen las fuerzas elementales, o finalmente, se pueden descomponer la distribución trapezoidal como superposición de una distribución triangular y una uniforme, como muestran las figuras siguientes.

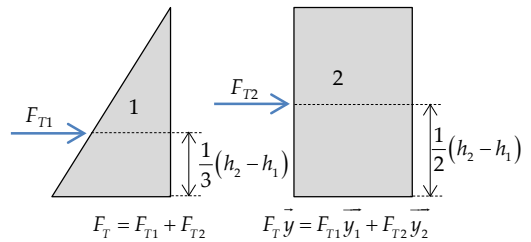
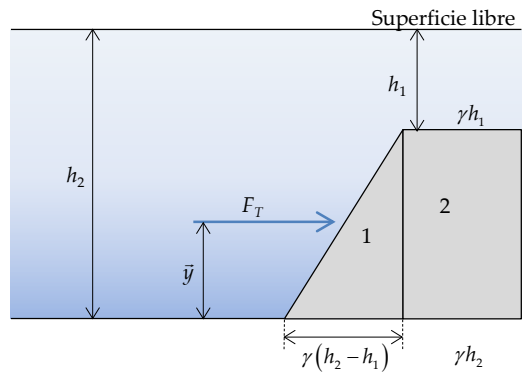


Figura 9 Descomposición del prisma de presiones

Las fuerzas hidrostáticas asociadas a cada una de las distribuciones son:

$$\left. \begin{aligned} F_{T1} &= \frac{1}{2} \gamma (h_2 - h_1)^2 b \\ F_{T2} &= \gamma h_1 (h_2 - h_1) b \end{aligned} \right\} F_T = F_{T1} + F_{T2} \quad (2.34)$$

mientras que la altura de aplicación desde la base de la figura de cada una de las distribuciones es:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{3}(h_2 - h_1) \quad (2.35a)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2}(h_2 - h_1) \quad (2.35b)$$

de modo que la altura de aplicación y de la fuerza total  $F_T$  puede obtenerse ponderando los momentos de  $F_{T1}$  y  $F_{T2}$ , esto es:

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 \cdot F_{T1} + \bar{y}_2 \cdot F_{T2}}{F_T} = \frac{\frac{1}{3}\gamma(h_2 - h_1)^3 b + \frac{1}{2}\gamma h_1(h_2 - h_1)^2 b}{\frac{1}{2}\gamma(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)b} = \dots$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{3}(h_2 - h_1)^2 + h_1(h_2 - h_1)}{h_2 + h_1} \quad (2.36)$$

Finalmente, es posible contemplar como caso más general el de una distribución trapezoidal sobre una superficie rectangular inclinada, como muestra la siguiente figura.

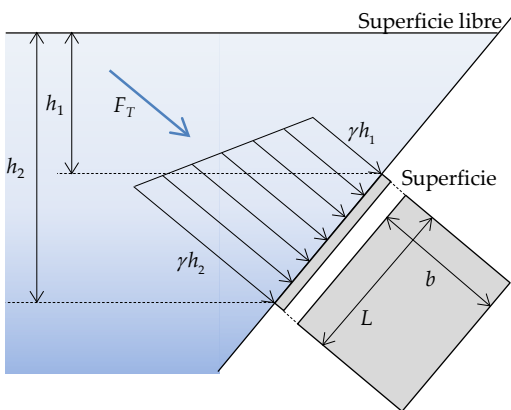


Figura 10 Prisma de presiones sobre una superficie plana inclinada

En tal caso, la fuerza hidrostática total  $F_T$  sobre la superficie rectangular será:

$$F_T = P_G A = \gamma \frac{h_1 + h_2}{2} L \cdot b \quad (2.37)$$

mientras que su punto de aplicación podría obtenerse de modo similar al caso anterior descomponiendo en dos distribuciones de presión (una triangular y otra uniforme).

### Fuerzas sobre superficies curvas

A continuación se plantea el mismo problema pero sobre una superficie curva inmersa en un líquido. La diferencia básica, estriba en que ahora no se puede prescindir del tratamiento vectorial al tener ahora cada una determinada orientación. El planteamiento será:

$$\vec{F} = \int_A d\vec{F} = \int_A -P \cdot d\vec{A} \quad (2.38)$$

y ahora debe proyectarse en las tres direcciones, descomponiendo la fuerza elemental en sus tres componentes, se obtiene:

$$d\vec{F} = -p \cdot d\vec{A} \begin{cases} d\vec{F} = dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k} \\ d\vec{A} = dA_x \vec{i} + dA_y \vec{j} + dA_z \vec{k} \end{cases} \quad (2.39)$$

$$dF_x = d\vec{F} \cdot \vec{i} = -p \cdot d\vec{A} \cdot \vec{i} = -p \cdot dA_x \quad (2.40a)$$

$$dF_y = d\vec{F} \cdot \vec{j} = -p \cdot d\vec{A} \cdot \vec{j} = -p \cdot dA_y \quad (2.40b)$$

$$dF_z = d\vec{F} \cdot \vec{k} = -p \cdot d\vec{A} \cdot \vec{k} = -p \cdot dA_z \quad (2.40c)$$

En las expresiones anteriores  $P = +\gamma \cdot h$ , siendo  $h$  la profundidad a la que se encuentra el diferencial de superficie  $d\vec{A}$  en cuestión. Si se observa también que el vector diferencial de superficie  $d\vec{A}$  se orienta dirigido

hacia el fluido mientras que la fuerza elemental  $d\vec{F}$  actúa dirigida hacia la superficie, lo que justifica la expresión  $d\vec{F} = -P d\vec{A}$  (con signo negativo por llevar sentido contrario  $d\vec{F}$  y  $d\vec{A}$ ).

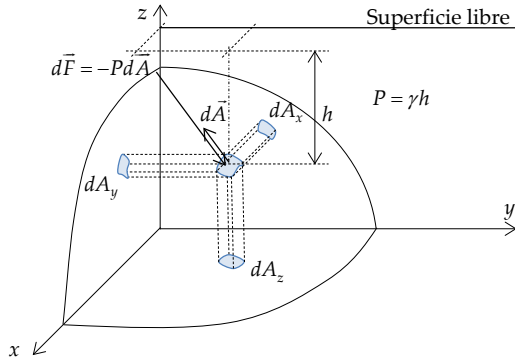


Figura 11 Fuerzas debido a la presión sobre una superficie curva

En las proyecciones horizontales, las áreas  $dA_x$  y  $dA_y$  están a la misma profundidad  $h$  que el área elemental. Ello equivale a decir que las resultantes parciales  $F_x$  y  $F_y$  se determinan cual si de fuerzas sobre áreas planas se tratara y en particular sobre las superficies  $A_x$  y  $A_y$  (proyecciones de la superficie  $A$  sobre los planos  $Y-Z$  y  $X-Z$  respectivamente).

$$F_x = \int_{\text{sup}} dF_x = \int_{\text{sup}} -p \cdot dA_x \equiv \text{Fuerza sobre } A_x \quad (2.41a)$$

$$F_y = \int_{\text{sup}} dF_y = \int_{\text{sup}} -p \cdot dA_y \equiv \text{Fuerza sobre } A_y \quad (2.41b)$$

La componente en el eje  $z$  precisa sin embargo un tratamiento distinto pero no menos sencillo. En efecto:

$$\begin{aligned} dF_z &= d\vec{F} \cdot \vec{k} = -P \cdot dA_z = -\gamma \cdot h \cdot dA_z \\ dF_z &= -\gamma \cdot dV \rightarrow f_c = \int -\gamma dV \\ F_z &= -\gamma V \end{aligned} \quad (2.42)$$

en donde se ha tenido presente el valor del elemento de volumen limitado por el área curva en cuestión y la superficie libre. En la expresión anterior hay que tener en cuenta que el signo negativo es debido a que las fuerzas elementales poseen un sentido contrario al de las superficies elementales, sin que ello tenga mayor implicación sobre el sentido de la fuerza  $F_z$ .

Como muestra la figura 11, la componente  $dF_z$  de la fuerza hidrostática elemental es proporcional a la profundidad a la que se encuentra la superficie sumergida, de modo que se puede imaginar que el punto de aplicación de dicha fuerza vertical estará ubicado en el centro de gravedad del volumen de agua confinado entre la superficie curva y la superficie libre del fluido. En efecto, tomando por ejemplo la coordenada  $x$  del punto de aplicación de la fuerza vertical  $F_z$  se deduce:

$$\bar{x} \cdot F_z = \gamma \int_{\text{sup}} xh \cdot dA_z = \gamma \int_{\text{sup}} x \cdot dV = \gamma \cdot x_G \cdot V \rightarrow \bar{x} = x_G \quad (2.43)$$

resultando similar al que se obtendría con las coordenadas  $x$  e  $y$  de dicho punto de aplicación.

El esfuerzo vertical total  $F_z$  viene dado pues por el volumen del fluido limitado por ambas superficies; dicho volumen puede ser real o ficticio, dependiendo de la orientación de la superficie sumergida. En la figura 12 puede observarse el caso de una superficie curva sobre la cual, todos los posibles elementos de superficie estarían orientados hacia arriba, de modo que en este caso, la componente  $F_z$  está orientada hacia abajo y es igual al peso del fluido que se encuentra sobre la superficie curva. Por el contrario, la figura 12 con orientación contraria a la anterior; en este caso la componente  $F_z$  está orientada hacia arriba y es igual al peso del fluido que hipotéticamente se encontraría encima de la superficie curva, entre ella y la superficie libre del fluido.

Los puntos de aplicación para las componentes horizontales  $F_x$  y  $F_y$  pueden obtenerse por aplicación de las expresiones del apartado anterior (fuerzas sobre superficies planas) considerando el área plana proyectada correspondiente a la superficie curva.

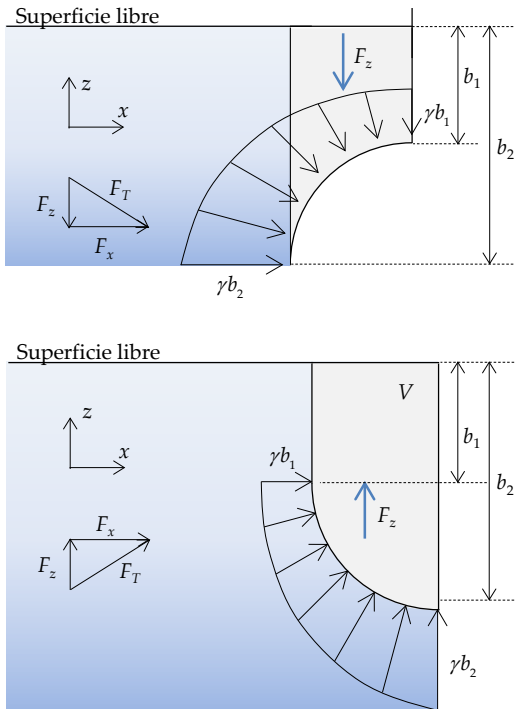


Figura 12 Fuerzas verticales sobre una superficie curva

Resumiendo, en este caso el sistema equivalente más sencillo está configurado por tres fuerzas con direcciones correspondientes a los ejes principales con sus correspondientes puntos de aplicación.

Por último hay que resaltar que el caso de las fuerzas hidrostáticas sobre superficies curvas es el más general e incluye por supuesto la consideración de las superficies planas sumergidas, en cuyo caso también serían de aplicación las expresiones obtenidas en este apartado.

## Flotación y estabilidad de los flotadores

La primera aportación relevante en el campo de la hidrostática es el principio de Arquímedes: "Todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido experimenta un empuje vertical hacia arriba de magnitud igual al peso del fluido que desaloja".

En la figura 13 se presenta un sólido inmerso totalmente en un fluido de densidad  $\rho$  (peso específico  $\gamma$ ). Como ya se comentó en apartados anteriores, al tratarse de una superficie cerrada totalmente sumergida, la resultante de las fuerzas de presión que actúa en cualquier dirección horizontal es nula, ya que son iguales en magnitud y de signo contrario aquellas que actúan sobre la superficie proyectada en un plano vertical de un lado y otro. Lo mismo ocurre en lo que a las componentes horizontales de las fuerzas se refiere en el caso de que el cuerpo esté parcialmente sumergido.

En cuanto a la resultante vertical (según el eje  $z$ ), se puede hallar por superposición de la que actúa sobre el hemisferio superior (vertical hacia abajo) y la que actúa sobre el hemisferio inferior (vertical hacia arriba).

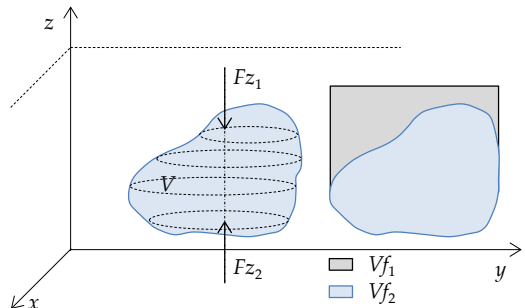


Figura 13 Balance de fuerzas sobre un cuerpo sumergido

La magnitud de  $F_{z1}$  (fuerza de superficie que actúa sobre el hemisferio superior) es igual al peso del fluido que tiene encima de sí dicho hemisferio ( $\gamma \cdot V_{f1}$ ) mientras que para el hemisferio inferior, la fuerza vertical hacia arriba que actúa es igual al peso del fluido que hipotéticamente tendría encima, si se tratase de una superficie abierta ( $\gamma \cdot V_{f2}$ ). En cualquier caso, la resultante, fuerza vertical hacia arriba (ya que  $\gamma \cdot V_{f2} > \gamma \cdot V_{f1}$ ), es el empuje que experimenta el cuerpo sumergido:

$$E = F_{z2} - F_{z1} = \gamma(V_{f2} - V_{f1}) = \gamma V \quad (2.44)$$

siendo  $V$  el volumen sumergido del citado cuerpo (igual al volumen del cuerpo por encontrarse este totalmente sumergido).



El punto de aplicación del empuje puede obtenerse por composición de los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas. De ello resulta que el centro de empuje se encuentra situado en el centro geométrico del volumen sumergido (realmente se sitúa en el centro de gravedad del volumen, supuesto este lleno de fluido). En nuestro caso, por tratarse de un cuerpo totalmente sumergido, el centro de empuje coincidirá con el centro geométrico del cuerpo. Tan solo en el caso de que el cuerpo totalmente sumergido sea perfectamente homogéneo coincidirá el centro de empuje con el centro de gravedad.

En la figura 14 se observa otra forma de llegar a este resultado.

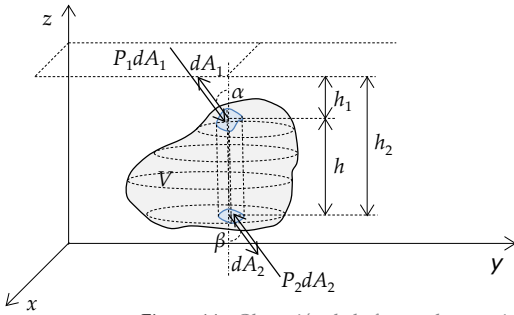


Figura 14 Obtención de la fuerza de empuje sobre un cuerpo sumergido

$$\begin{aligned}
 dE &= p_2 dA_2 \cos \beta - p_1 dA_1 \cos \alpha = p_2 dA_{2z} - p_1 dA_{1z} = \\
 &= \gamma (h_2 - h_1) dA_z = \gamma h dA_z \\
 E &= \int_S \gamma h \cdot dA_z = \gamma V \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

Las condiciones que se deben cumplir para que el sólido se encuentre en equilibrio estático son que tanto la resultante de las fuerzas que actúan sobre él como la de los momentos sean nulas.

La primera implica que el peso del cuerpo sea igual al empuje, mientras que la segunda se verificará cuando la línea de acción del empuje sea coincidente con la del peso.

Si un cuerpo de volumen total  $V_c$  y peso  $P$  se encuentra totalmente sumergido, para que se verifique la igual-

dad entre la fuerza de empuje y el peso, el peso específico medio del cuerpo  $\gamma_c$ :

$$\gamma_c = \frac{P}{V_c} \quad (2.46)$$

debe ser igual al peso específico del fluido en el que está inmerso  $\gamma$ . Ello es así, porque en tal caso, al estar totalmente sumergido, se verifica que  $V = V_c$  por lo que:

$$E = \gamma V = \gamma_c V_c = P \quad (2.47)$$

Si  $\gamma_c > \gamma$ , inevitablemente el cuerpo se hundirá, ya que al ser  $V = V_c$ , el peso  $\gamma_c \cdot V_c$  mayor que el empuje  $\gamma \cdot V$ .

En el caso de un submarino, este puede permanecer en cualquier posición totalmente sumergido modificando su peso. Para sumergirse más "toma" agua, incrementándose su peso que superará al empuje. Por el contrario, para ascender "bombea" agua hacia el exterior, con lo que su peso disminuye por debajo del valor del empuje, lo que hace que la resultante del sistema de fuerzas sea positiva.

Evidentemente, se está considerando en todo este desarrollo que el peso específico del fluido  $\gamma$  es constante. En caso de que fuera variable con la posición del sólido (por ejemplo con la profundidad a la que se encuentra) habría que considerar esta variación.

El empuje en el seno de un líquido es mucho mayor que en un gas, debido a que el peso específico del líquido es muy superior al de un gas.

Si se compara agua ( $\gamma = 9810 \text{ N/m}^3$ ) y aire en condiciones estándar ( $\gamma' = 9,81 \cdot 1,22 = 11,97 \text{ N/m}^3$ ), se tiene que para un mismo volumen  $V$  sumergido, el empuje en el agua es 819,7 veces superior al empuje en el aire. Por ello, para levantar un peso relativamente pequeño mediante un globo es necesario que este tenga un volumen apreciablemente grande.

Analizando la segunda de las condiciones (coincidencia de las líneas de acción del peso y del empuje), es fácil darse cuenta de que se trata de que no exista ningún par de rotación. La condición se verificará siempre

en el caso de un cuerpo perfectamente homogéneo que esté totalmente sumergido (el c. d. g. coincidirá con el centro geométrico).

Si partiendo de una posición de equilibrio estático se desplaza el cuerpo horizontal o verticalmente manteniéndolo siempre totalmente sumergido, no se modifica ni el sistema de fuerzas ni los puntos de aplicación (a menos que la densidad del fluido sea variable con las correspondientes coordenadas). Así pues, la posición de equilibrio es "estable" respecto de cualquier traslación.

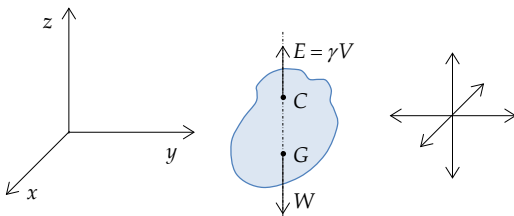


Figura 15 Equilibrio de un cuerpo totalmente sumergido

A partir de una posición de equilibrio si se gira ligeramente el cuerpo, este volverá a la posición de equilibrio anterior en el caso de que el par que se origine sea restaurador.

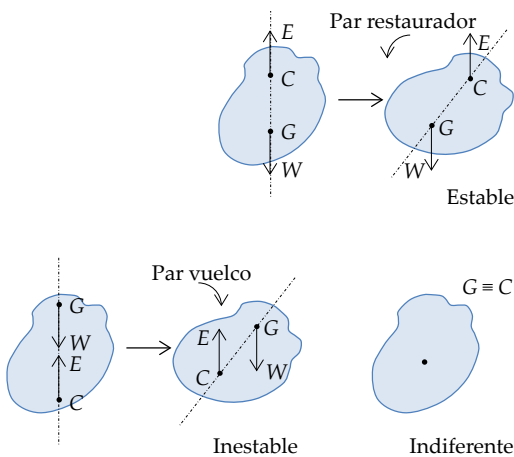


Figura 16 Estabilidad de un cuerpo totalmente sumergido frente a la rotación

Ello ocurre si el centro de empuje C se encuentra por encima del centro de gravedad G para la posición de equilibrio de partida. En tal caso a la citada posición de equilibrio se la denomina estable.

En el caso de que se encuentre en una posición de equilibrio en la que C esté por debajo de G, esta será inestable, ya que al girar el cuerpo ligeramente, el par que se origina es de vuelco, buscando el cuerpo una nueva posición de equilibrio.

Cuando C y G coinciden, la posición de equilibrio se denomina indiferente, ya que el cuerpo se quedará siempre en la posición en la que se deje.

Se ha visto que si  $\gamma_c = \gamma$ , el cuerpo permanece hundido a la profundidad a la que se deje ( $E = P$ ), y si  $\gamma_c > \gamma$  el cuerpo se hunde hasta el fondo ( $E < P$ ). Aún cabe otra posibilidad ( $\gamma_c < \gamma$ ) en la que el cuerpo quedará parcialmente sumergido. En este caso solo se sumerge el volumen necesario para crear un empuje que equilibre el peso.

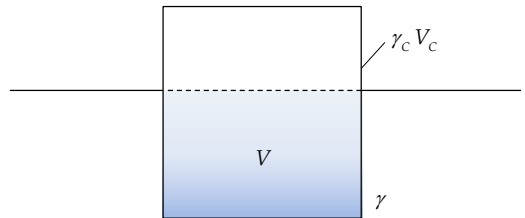


Figura 17 Cuerpo parcialmente sumergido

En equilibrio, el empuje  $E = \gamma \cdot V$  será igual al peso  $P = \gamma_c \cdot V_c$  y como  $\gamma > \gamma_c$ , el volumen sumergido  $V$  será menor que el volumen total del cuerpo  $V_c$ .

Al igual que en el caso anterior, cuando las líneas de acción del peso y del empuje sean coincidentes, la posición será de equilibrio.

En este caso, de no variar la distribución de las masas en el cuerpo, el c. d. g. del mismo permanecerá siempre en la misma posición, pero no así el centro geométrico del volumen sumergido (donde está aplicado el empuje). En la figura 18 puede observarse un mismo flotador en dos posiciones de equilibrio di-

ferentes. Los volúmenes sumergidos son iguales, ya que en ambos casos los empujes deben coincidir con el peso del cuerpo  $P$  ( $P = \gamma \cdot V_1$  y  $P = \gamma \cdot V_2$ ). Sin embargo, los centros de empuje  $C_1$  y  $C_2$  ocuparán posiciones diferentes.

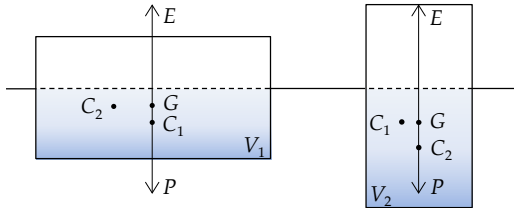


Figura 18 Cuerpo parcialmente sumergido. Diferentes centros de empuje

Para el caso de una rotación, partiendo de una posición de equilibrio, es condición suficiente para que ésta sea estable que el centro de empuje  $C$  se encuentre por encima de  $G$ . En tal caso siempre existirá par restaurador que llevará al cuerpo a la posición de equilibrio anterior. No obstante no es condición necesaria. Puede darse el caso de que para una posición de equilibrio  $E$  se encuentre por debajo de  $G$  y esta sea estable. Para analizar esta condición habría que acudir al concepto de metacentro. En el caso de que el metacentro  $M$  se encuentre por encima de  $G$ , la posición de equilibrio será estable, y si se encuentra por debajo, será inestable. Este último caso es el que corresponde a la figura 18. Las dos posiciones de equilibrio representadas corresponden al caso en que  $C$  está por debajo de  $G$ . Además, si se saca al cuerpo de la posición de equilibrio mediante una rotación, éste buscará una nueva posición de equilibrio, ya que se originará un par de vuelco.

Para obtener la distancia metacentrica  $MG$  en una posición determinada del flotador, se tiene que:

$$\overline{MG} = z_M - z_C = (z_M - z_C) - (z_C - z_C) \quad (2.48)$$

siendo  $z_M$  la altura del metacentro  $M$ ,  $z_C$  la altura del centro de gravedad del flotador y  $z_C$  la altura del centro de empuje del mismo. Para la referencia de altura  $z$  se considera que es creciente en el sentido vertical hacia arriba.

La distancia (radio metacéntrico), siempre positiva entre el centro de empuje y el metacentro ( $z_M - z_C$ ) vale:

$$(z_M - z_C) = \frac{I}{V} \quad (2.49)$$

siendo  $I$  el momento de inercia de la superficie de flotación con respecto al eje de giro, y  $V$  el volumen sumergido del móvil. Obteniéndose finalmente la distancia metacéntrica  $MG$ :

$$\overline{MG} = \frac{I}{V} - (z_C - z_C) \quad (2.50)$$

Si el valor de  $MG$  resulta positivo, la posición del flotador será estable frente al giro respecto de un eje situado en el plano de flotación, e inestable en el caso contrario. Para el caso particular en que  $C$  se encuentra por encima de  $G$ , entonces la resta entre  $z_C$  y  $z_C$  resulta negativa siendo, por tanto, el valor  $MG$  positivo. Esto demuestra que la condición de que el centro de empuje se encuentre por encima de  $G$  es condición suficiente para generar un equilibrio estable.

Frente a una traslación horizontal partiendo de una posición de equilibrio, un cuerpo en flotación siempre es estable, ya que no se modifican ni las fuerzas ni sus puntos de aplicación.

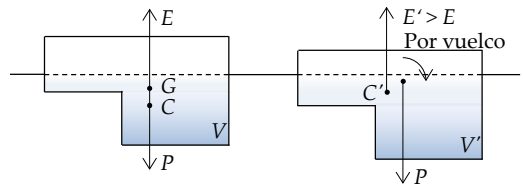


Figura 19 Cuerpo parcialmente sumergido. Posición de equilibrio inestable frente a la traslación vertical

Si la traslación es vertical, no se puede asegurar que el equilibrio siempre sea estable ya que al verse modificada la posición del centro de empuje puede originarse un par de vuelco que lleve al cuerpo a otra posición de equilibrio estable diferente de la de partida (ver figura 19).

En el caso de que la translación del cuerpo en flotación sea vertical y tal que la línea de acción del peso y del empuje no cambian (por ejemplo, en el caso de un cuerpo simétrico) se puede asegurar que la posición de equilibrio es estable.

Considérese el caso en el que se traslada verticalmente un cuerpo en equilibrio (por ejemplo, hundiéndolo más de lo que estaba), el volumen sumergido aumenta por encima del necesario (el que se encontraba sumergido en las condiciones iniciales, en equilibrio) para equilibrar el peso. De esta forma, se genera un desequilibrio entre el empuje (que ha aumentado) y el peso  $P$ . Seguirá sin existir par alguno, ya que las líneas de acción del peso y del empuje continúan siendo coincidentes.

La resultante será una fuerza vertical hacia arriba, de magnitud igual a la diferencia entre el nuevo empuje y el peso. Como consecuencia de ello, el cuerpo tenderá a "subir", a la vez que el empuje irá disminuyendo ya que el volumen sumergido será cada vez menor.

En el caso de no considerar el rozamiento del fluido con el cuerpo esta acción dará lugar a una oscilación no amortiguada alrededor de la posición de equilibrio estable. Si se considera el rozamiento (caso real), esta oscilación será amortiguada, llegándose finalmente a la posición original.

Capítulo 3

# Descripción del movimiento de los fluidos

## Introducción

Trayectoria de una partícula de fluido. Enfoque Lagrangiano

Campo de velocidades. Enfoque Euleriano. Otros campos de variables relacionadas con la Mecánica de Fluidos

Diferentes sistemas de referencia

Sistemas inerciales

Sistemas no inerciales

Conceptos de trayectoria, línea de corriente, tubo de corriente y línea de traza

Clasificación de flujos de fluidos. Algunas condiciones de contorno

Clasificación atendiendo al campo de velocidades

Clasificación atendiendo a la variable tiempo

Clasificación atendiendo al régimen del flujo

Condiciones de contorno a considerar

Otras clasificaciones

Concepto de caudal

Derivación en mecánica de fluidos: derivada total, local y convectiva. Aceleración del fluido

Teorema de arrastre de Reynolds

Técnicas a emplear para el análisis de flujos

Bibliografía

## Introducción

Dado que la mayoría de las aplicaciones relacionadas con la Mecánica de Fluidos se refieren al fluido en movimiento, es preciso saber describir el movimiento de los fluidos. En este capítulo se aborda el estudio de flujos pero sin tener en cuenta las causas que los provocan, esto es, se puede decir que se trata de introducir al alumno en la Cinemática de Fluidos.

El movimiento de los fluidos se puede describir desde un enfoque lagrangiano, al igual que se hace en el caso de una partícula o de un sólido rígido, si bien en la mayoría de las aplicaciones se plantea un nuevo enfoque, el euleriano, en el que no interesa una partícula en concreto, sino lo que ocurre en un punto determinado y en un instante dado, independientemente de la partícula que ocupe ese lugar en ese instante. Para ello se introduce el concepto de campo de velocidades, y por extensión, el de campo de temperaturas, presiones o el de cualquier otra variable que tenga relación con los fluidos.

Describir el movimiento de un fluido no es sencillo, sobre todo si se compara con un sólido rígido. Existen millones de partículas en una corriente fluida, estando su movimiento regido por las leyes de la física, de manera que a partir de éstas deducir las variables cinemáticas no resulta sencillo.

Pensando en algunos tipos de flujo que cualquiera ha podido observar alguna vez. Por ejemplo, el flujo de agua en el interior de una tubería o a través de una válvula o una bomba. Se trata de flujo **interno**, ya que el fluido se encuentra **confinado** por las paredes de la conducción o del elemento (válvula o bomba) en cuestión. También el flujo en un canal o acequia puede considerarse de tipo interno, si bien en este caso no está totalmente confinado, pues el nivel de agua en el canal puede subir o bajar.

La aplicación de las leyes de la física:

- Conservación de la masa.
- Conservación de la cantidad de movimiento (ley de Newton) o del momento de la cantidad de movimiento.
- Conservación de la energía.
- Segundo principio de la termodinámica.
- Ecuación de estado.

Sobre el fluido nos permitirán deducir cómo es el movimiento de éste, al igual que la aplicación de las leyes de la física sobre un sólido rígido que puede deslizar sobre un plano inclinado nos permiten determinar la trayectoria, velocidad y aceleración de la citada masa. Pero en Mecánica de Fluidos, la aplicación de estas leyes fundamentales resulta mucho más compleja, dado el carácter deformable que intrínsecamente tiene el fluido.



Canal



Bombeo y filtrado



Conductos de aire acondicionado



Instalación de tuberías en vivienda

Figura 1 Ejemplos de flujos confinado o internos

En el caso de la figura 1 interesará conocer las velocidades del flujo, así como el caudal y las presiones existentes en la tubería o los niveles de agua sobre el fondo del canal. En el caso de una tubería, el fluido puede ser un líquido (la instalación de agua en una vivienda) o un gas (los conductos de aire acondicionado a través de los cuales circula aire frío). El flujo puede no variar con el tiempo, como en el caso del caudal de agua que sale del grifo mientras se está bajo la ducha, o ser dependiente del tiempo, como es el caso de una masa de agua que va acelerándose al arrancar una bomba en una instalación de llenado de un depósito. En este último caso (flujo transitorio) la complejidad del estudio se incrementa respecto al caso estacionario (no varía con el tiempo).

Los flujos externos son aquellos en los que el fluido no está confinado (**flujo externo**), o por lo menos no en

su totalidad, aunque pueden existir contornos que no pueden atravesar. Por ejemplo, es el caso del flujo del viento, que evidentemente no puede atravesar el suelo ni un edificio, pero que se ve perturbado por éstos. El flujo puede considerarse "infinito", pero nos interesará saber solo lo que ocurre cerca de los contornos, ya que éstos modifican el flujo, y cuáles son las fuerzas que el flujo ejerce sobre el edificio. Es decir, interesa conocer cuál es la interacción entre el flujo de aire y los objetos con los que se encuentra (suelo, edificio, etc.). Evidentemente, a una distancia suficientemente grande de los contornos, el flujo no estará perturbado por éstos.

Otro caso típico es el de un avión en vuelo, que se sustenta por las fuerzas que se generan sobre sus alas como consecuencia de la interacción con el viento. La modificación de la velocidad del viento alrededor de las alas genera unos valores de la presión en la parte inferior de las mismas superior a las presiones en la parte superior, con lo que se crea una fuerza sustentadora. En el caso de un velero, es la interacción entre el viento y las velas la que genera que éste se mueva, pero también habrá que tener en cuenta la acción del agua sobre el casco.

Un ciclista circulando por una carretera es otro caso típico de flujo externo en el que interesa analizar la interacción entre el viento y el ciclista, que se manifiesta como fuerzas que actúan sobre el ciclista. En este caso, también las fuerzas de rozamiento de las ruedas con el suelo y las fuerza de la gravedad (favorable o desfavorable) en función de la pendiente de la carretera, deben ser tenidas en cuenta para analizar el movimiento del ciclista. Si el observador se aleja del ciclista, el flujo no estará perturbado por éste, pero si se piensa en un ciclista que circula a rueda de otro que va delante, el flujo perturbado por el primer ciclista interacciona de manera diferente con el segundo ciclista.

Algunos flujos son una mezcla de ambos tipos (externos e internos). Por ejemplo, en la interacción entre el viento y un coche. El flujo del viento alrededor del coche puede considerarse como externo, y el del viento por la parte inferior de él como interno, ya que está confinado por el suelo del coche y el asfalto de la carretera.

En este caso, cuando se prueba un coche o un avión a escala en un túnel de viento, éste debe de ser lo suficientemente grande como para que lejos del vehículo

el flujo no se vea perturbado (se reproducen las condiciones reales en las que lejos del objeto el flujo no se modifica). El análisis de la interacción coche-viento se puede medir en las cercanías del coche. De esta manera se reproduce en el túnel de viento las condiciones reales, si bien a escala, pudiendo extraer conclusiones de la experimentación que probablemente no se conseguiría obtener de un estudio analítico, dada la complejidad del problema.

También en el caso de flujos externos el flujo puede ser transitorio o permanente, tomando en consideración si la velocidad del aire con relación al cuerpo es variable o no con el tiempo. Por ejemplo, aún con viento en calma, cuando un ciclista empieza a pedalear, la velocidad del aire con respecto al mismo varía con el tiempo. Cuando circula a velocidad constante, se está ante un régimen permanente, dado que la velocidad del viento respecto al móvil será constante.

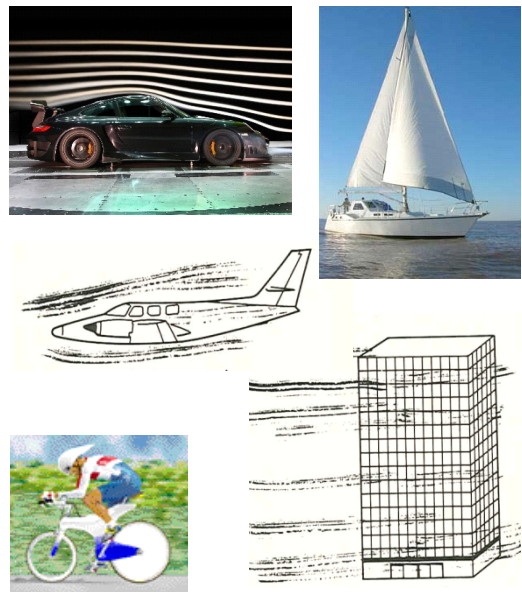


Figura 2 Ejemplos de flujos externos

## Trayectoria de una partícula de fluido. Enfoque Lagrangiano

Se tiene conocimiento (cursos anteriores) de la cinemática y dinámica del punto y del sólido rígido, en la



que normalmente se utiliza el enfoque lagrangiano para describir el movimiento de las partículas o del sólido rígido que, sometido a ciertas acciones (fuerzas y momentos), se acelera o decelera, sigue una trayectoria u otra, etc.

En una masa de fluido existen una gran cantidad de partículas. El enfoque lagrangiano para describir el movimiento del fluido exige conocer la trayectoria de la partícula (posición que ocupa en el espacio en cada instante de tiempo  $t$ ), así como la velocidad y aceleración de la misma para cada  $t$ .

En el caso de un sólido rígido se analiza "el sólido", pero en el caso de un fluido, cada una de las partículas seguirá una trayectoria diferente pues en un mismo punto y un mismo instante no pueden coexistir dos partículas a la vez. Por lo tanto se tendrá que "elegir" qué partícula se quiere estudiar. La forma de "identificar" la partícula consiste en elegir un punto del espacio de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  y escoger la partícula que en un instante de tiempo dado  $t_0$  se encuentre en ese punto. Evidentemente se habrá "seleccionado" la partícula, pues en un determinado instante solo puede haber en un punto una partícula. El vector posición del punto será:

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \quad (3.1)$$

La trayectoria de la partícula es el lugar geométrico de los puntos del espacio que la partícula va recorriendo a lo largo del tiempo. Si se hace referencia al vector posición de la partícula respecto a un sistema de ejes, la trayectoria vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t) = \\ &= x(x_0, y_0, z_0, t) \vec{i} + y(x_0, y_0, z_0, t) \vec{j} + z(x_0, y_0, z_0, t) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.2)$$

En esta expresión las variables  $x, y, z$  son función del tiempo (la partícula va ocupando diferentes lugares a lo largo de su ocurrir en el tiempo), y mediante las coordenadas de "anclaje" o de "identificación" se pretende determinar de qué partícula se trata (la que en  $t_0$  estaba en el punto de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ ). Estas últimas son valores conocidos.

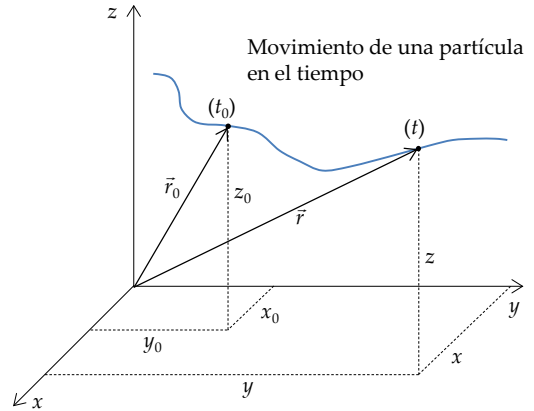


Figura 3 Movimiento de una partícula. Trayectoria

La velocidad de la partícula  $\vec{V}_p$  se obtiene derivando la anterior expresión respecto al tiempo (recuérdese que las variables  $x, y, z$  son funciones exclusivas del tiempo para la partícula objeto de seguimiento):

$$\begin{aligned} \vec{V}_p = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \frac{d[x(x_0, y_0, z_0, t)]}{dt} \vec{i} + \\ &+ \frac{d[y(x_0, y_0, z_0, t)]}{dt} \vec{j} + \frac{d[z(x_0, y_0, z_0, t)]}{dt} \vec{k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se denominarán  $u_p, v_p$  y  $w_p$  a las tres componentes del vector velocidad de la partícula, de manera que quedará:

$$\vec{V}_p = u_p \vec{i} + v_p \vec{j} + w_p \vec{k} \quad (3.4)$$

Con:

$$u_p = u_p(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d[x(x_0, y_0, z_0, t)]}{dt} \quad (3.5a)$$

$$v_p = v_p(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d[y(x_0, y_0, z_0, t)]}{dt} \quad (3.5b)$$

$$w_p = u_p(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{dz}{dt} = \frac{d[z(x_0, y_0, z_0, t)]}{dt} \quad (3.5c)$$

La aceleración de la partícula  $\vec{a}_p$  vendrá dada por:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{du_p}{dt} \vec{i} + \frac{dv_p}{dt} \vec{j} + \frac{dw_p}{dt} \vec{k} \quad (3.6)$$

o bien por:

$$\begin{aligned} \vec{a}_p &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} = \\ &= \frac{d^2(x_0, y_0, z_0, t)}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2(x_0, y_0, z_0, t)}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2(x_0, y_0, z_0, t)}{dt^2} \vec{k} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Hasta ahora se ha empleado coordenadas cartesianas para describir el movimiento de una partícula, pero en muchos casos resulta más sencillo usar coordenadas cilíndricas (por ejemplo en el caso de tuberías).

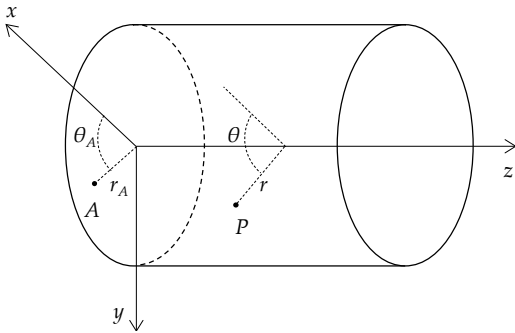


Figura 4 Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son la axial,  $z$ , la radial,  $r$ , y la circunferencial,  $\theta$ . Un punto del espacio puede ser identificado conociendo estas tres coordenadas. Asimismo, hay tres vectores unitarios en cada una de las direcciones axial  $\vec{e}_z$ , radial  $\vec{e}_r$  y circunferencial  $\vec{e}_\theta$  (tangente a una circunferencias centradas en el eje  $z$ ). Por lo tanto, el vector posición de punto vendrá dado por:

$$\vec{r} = z \vec{e}_z + r \vec{e}_r + \theta \vec{e}_\theta \quad (3.8)$$

No hay que confundir el vector posición  $\vec{r}$  con la coordenada radial  $r$ . La velocidad también tendrá tres componentes según los tres ejes axial, radial y circunferencial ( $\vec{u}_z, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ ), así como la aceleración ( $\vec{a}_z, \vec{a}_r, \vec{a}_\theta$ ). De esta manera quedará:

$$\vec{V}_p = u_z \vec{e}_z + u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta \quad (3.9)$$

$$\vec{a}_p = a_z \vec{e}_z + a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta \quad (3.10)$$

Evidentemente se cumplirá que:

$$u_z = u_z(z_0, r_0, \theta_0, t) = \frac{dz}{dt} = \frac{d[z(z_0, r_0, \theta_0, t)]}{dt} \quad (3.11a)$$

$$u_r = u_r(z_0, r_0, \theta_0, t) = \frac{dr}{dt} = \frac{d[r(z_0, r_0, \theta_0, t)]}{dt} \quad (3.11b)$$

$$u_\theta = u_\theta(z_0, r_0, \theta_0, t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d[\theta(z_0, r_0, \theta_0, t)]}{dt} \quad (3.11c)$$

## Campo de velocidades. Enfoque Euleriano. Otros campos de variables relacionadas con la mecánica de fluidos

Si bien las coordenadas de Lagrange permiten conocer la posición espacial y el estado cinemático de cada partícula de fluido, en Mecánica de Fluidos casi siempre resulta más interesante conocer lo que ocurre en una región determinada del espacio y en un instante de tiempo, independientemente de la partícula que ocupe la posición fijada en cada instante. Este tipo de referencia espacial es lo que se denomina coordenadas de Euler o enfoque euleriano.

Cualquiera ha podido observar como el flujo en una acequia o canal se acelera al estrecharse la sección de paso. Si se observa la parte más estrecha del canal se verá como las partículas que llegan a una velocidad

moderada adquieren en esa sección una mayor velocidad. Si nos interesa conocer las velocidades en el estrechamiento, no nos importará qué partícula concreta está pasando en un instante dado por el estrechamiento, sino lo que, en general, ocurre en esa región. De alguna manera, las partículas que lo atraviesan "sufren" esa aceleración y adquieren las propiedades cinemáticas del punto del espacio en el que están en el instante en que están en ese punto del espacio. Estas características del punto del espacio que se transfieren a la partícula se ven reflejadas, lógicamente, en la velocidad y aceleración de la partícula y también en la ecuación de su trayectoria.

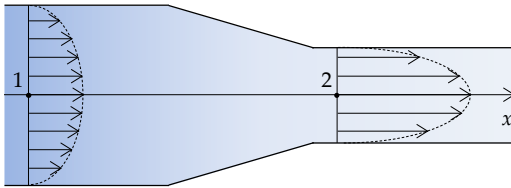


Figura 5 Estrechamiento en un canal

Con esta concepción, lo que interesará será conocer las características cinemáticas de cada punto del espacio en cada instante de tiempo. La velocidad en cada punto del espacio de coordenadas  $(x, y, z)$ , y por lo tanto vector posición  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , y en cada instante de tiempo  $t$ , será:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}(x, y, z, t) = \\ &= u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Es lo que denomina Ecuación del **campo de velocidades**. Esta velocidad será la que tendrá la partícula que en el instante  $t$  ocupe la posición del espacio  $(x, y, z)$ . También puede escribirse esta expresión en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}(z, r, \theta, t) = \\ &= u_z(z, r, \theta, t)\vec{e}_z + u_r(z, r, \theta, t)\vec{e}_r + u_\theta(z, r, \theta, t)\vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

Así, en el canal antes comentado existirá un campo de velocidades con una magnitud diferente en los puntos de mayor anchura del canal que en los puntos donde éste se estrecha (aumentará la velocidad). Si el flujo del canal es estacionario de manera que no varían sus características con el tiempo, la variable  $t$  desaparece de la expresión del campo de velocidades y la velocidad solo dependerá del punto en el que se encuentra. Si por el contrario están variando las condiciones en el canal (por ejemplo éste se está llenando o se está manipulando una compuerta situada aguas abajo que genera cambios en el flujo (más o menos caudal), además de con la posición, se verá como el campo de velocidades varía a lo largo del tiempo. En la figura siguiente puede verse la evolución de la velocidad (componente según  $x$ ) en dos puntos situados en el centro del canal en dos secciones 1 y 2.

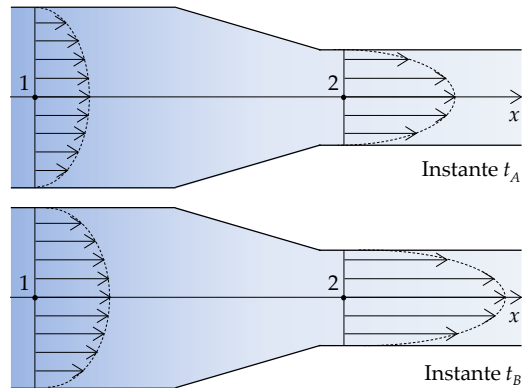
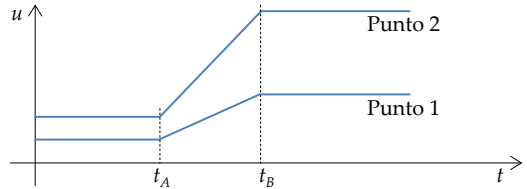


Figura 6 Evolución de la velocidad en dos puntos del canal

Puede verse como para cada instante la velocidad varía dependiendo del punto en el que se encuentra, y que para el mismo punto de medición, se produce una variación de la velocidad a lo largo del tiempo cuando se efectúa una maniobra en la compuerta. Finalmente, el flujo se estabiliza tras la maniobra en otra posición de régimen estacionario.

Puede que en lugar de la velocidad nos interese conocer otras variables, como presión, temperatura, densidad, etc. De la misma manera que se ha hecho con la velocidad puede definirse un campo de presiones  $p(\vec{r}, t)$ , de temperaturas  $T(\vec{r}, t)$  o de densidades  $\rho(\vec{r}, t)$ , todos ellos escalares al contrario que el campo de velocidades que es un campo vectorial al ser la velocidad un vector.

Por ejemplo, puede interesarnos conocer la evolución de la temperatura en un local, para lo cual se sitúa un termostato en un lugar determinado (por ejemplo al lado de la puerta de entrada) y se registran los valores de la temperatura a lo largo del tiempo. Si además se instala otro termostato en otra ubicación del local (al lado de una ventana), el registro de temperaturas puede variar respecto al anterior, de manera que en un mismo instante de tiempo las temperaturas sean diferentes.

Lo mismo puede decirse del registro de presiones en la instalación de suministro de agua a un edificio. A la entrada del edificio, a nivel de calle, el registro de presiones será diferente al que se obtendrá de la lectura de la presión a la entrada de una vivienda situada en un sexto piso, punto en el que la presión siempre será menor al encontrarse a una cota superior.

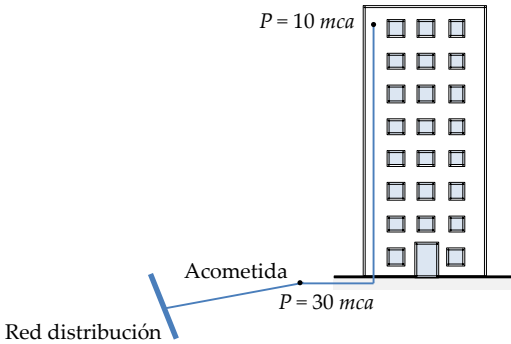


Figura 7 Evolución de la presión en dos puntos de una instalación de suministro de agua a un edificio

Siempre es posible, conocido el campo de velocidades, determinar la velocidad de cualquier partícula, así como la ecuación de la trayectoria y de la aceleración (paso de coordenadas de Euler a coordenadas de Lagrange), así como a partir de la ecuación de la tra-

yectoria de una partícula cualquiera, conocer cuál es el campo de velocidades en el que está inmersa (paso de coordenadas de Lagrange a coordenadas de Euler).

Otro ejemplo, está relacionado con el tráfico en una autopista, puede ayudarnos a entender la diferencia entre coordenadas de Euler y Lagrange. La visión del conductor es claramente Lagrangiana (siente en cada momento la velocidad del vehículo, la aceleración a la que lo somete y conoce el punto de la trayectoria en el que está, por ejemplo con un GPS). La visión del radar situado en la autopista, en un punto kilométrico determinado, es claramente euleriana, ya que solo registra los valores de la velocidad de los vehículos que pasan junto a él.

## Diferentes sistemas de referencia

En muchas ocasiones se estudia el movimiento de los fluidos, o de cualquier otro elemento material, con respecto a uno u otro sistema de referencia. El sistema de referencia puede ser **inercial** o **no inercial** en función del movimiento de su origen de coordenadas respecto de un sistema fijo en reposo (absoluto).

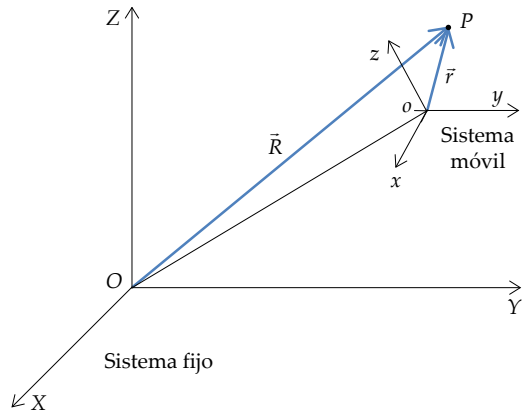


Figura 8 Sistemas de referencia

## Sistemas Inerciales

Se trata, bien de un sistema de referencia fijo (absoluto) o de un sistema móvil cuyo origen se traslada respecto a uno fijo con una velocidad rectilínea y uniforme ( $\vec{V}_{sist} = cte$ ).

La posición de una partícula respecto del sistema fijo  $\vec{R}$  y la móvil  $\vec{r}$  será:

$$\vec{R} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k} \quad (3.13a)$$

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (3.13b)$$

Evidentemente, ambos vectores estarán relacionados a través del vector que nos da la posición en cada instante del origen del sistema móvil respecto al fijo  $\vec{OO}'$ :

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{OO}' \quad (3.14)$$

La velocidad de la partícula respecto al sistema móvil (velocidad relativa) será:

$$\vec{V}_r = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \quad (3.15)$$

La velocidad del origen del sistema móvil respecto al fijo (velocidad del sistema o velocidad de arrastre):

$$\vec{V}_{sistema} = \frac{d\vec{OO}'}{dt} \quad (3.16)$$

Por lo que la velocidad de la partícula respecto al sistema fijo será:

$$\vec{V}_p = \vec{V}_r + \vec{V}_{sistema} \quad (3.17)$$

La aceleración de la partícula respecto al sistema fijo será igual que la aceleración respecto al sistema móvil, ya que se desliza respecto al fijo a velocidad rectilínea constante:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_r = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z \quad (3.18)$$

## Sistemas No Inerciales

Se trata de un sistema de referencia que experimenta una aceleración respecto del sistema fijo, independientemente de que esta sea lineal, angular o centrífuga (caso de giro con velocidad angular constante). En este caso la expresión de la velocidad relativa es la misma que para el caso anterior, pero la velocidad de la partícula respecto al sistema fijo será:

$$\vec{V}_p = \vec{V}_r + \vec{V}_{sistema} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (3.19)$$

donde  $\vec{\omega}$  es la velocidad de rotación del sistema móvil. La aceleración de la partícula respecto al sistema móvil,  $\vec{a}_r$ , se determina como en el caso anterior, pero la aceleración de la partícula respecto al sistema fijo será:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_{sistema} + \vec{a}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + 2(\vec{\omega} \times \vec{V}_r) \quad (3.20)$$

En la anterior expresión:

- $\vec{a}_{sistema} = d\vec{V}_{sistema}/dt = d^2\vec{OO}'/dt^2$  es la aceleración lineal del origen del sistema móvil.
- $\dot{\vec{\omega}} = d\vec{\omega}/dt$  es la aceleración angular.
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  es la aceleración normal o centrípeta.
- $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$  es la aceleración tangencial.
- $2(\vec{\omega} \times \vec{V}_r)$  es la aceleración de Coriolis.

## Conceptos de trayectoria, línea de corriente, tubo de corriente y línea de traza

El concepto de **trayectoria** de una partícula de fluido ya ha sido presentado al comienzo de este capítulo. Se trata de un concepto Lagrangiano que puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del espacio que va ocupando sucesivamente la partícula en su desplazamiento. Sustituyendo los sucesivos valores de  $t$  en la ecuación:

$$\vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t) = x(x_0, y_0, z_0, t) \vec{i} + y(x_0, y_0, z_0, t) \vec{j} + z(x_0, y_0, z_0, t) \vec{k} \quad (3.21)$$

se obtienen los puntos de paso de la partícula que en  $t = t_0$  está en el punto de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ . Uniendo estos puntos puede grafarse la trayectoria. Como se puede ver en la figura 3, se ha señalado al lado de cada punto el instante en el que la partícula ocupa dicho punto. En el instante genérico  $t$ , la partícula ocupará un punto de coordenadas genéricas  $(x, y, z)$ .

Cada una de las partículas del fluido tiene su propia línea de trayectoria, por lo que en un campo fluido existen infinitas trayectorias. En el laboratorio puede visualizarse una línea de trayectoria, marcando una determinada partícula (por ejemplo con una gota de tinta) y tomando una fotografía de larga exposición durante su movimiento. El efecto sería semejante al que se obtiene al fotografiar el recorrido nocturno de un coche con una fotografía de larga exposición. La visualización en laboratorio puede ayudar a estudiar patrones de flujo complicados de analizar analíticamente.

Se define **línea de corriente (LDC)** como la envolvente de los vectores velocidad para un instante dado  $t_{LCD}$ . Esto es, se trata del lugar geométrico de los puntos pertenecientes a una línea que es tangente en todos ellos al vector velocidad, para un instante dado,  $t_{LCD}$ .

Por propia definición, dos líneas de corriente no pueden cruzarse en un instante dado, pues ello implicaría que en un mismo punto del espacio y en un mismo instante de tiempo, el punto en cuestión tendría dos velocidades diferentes.

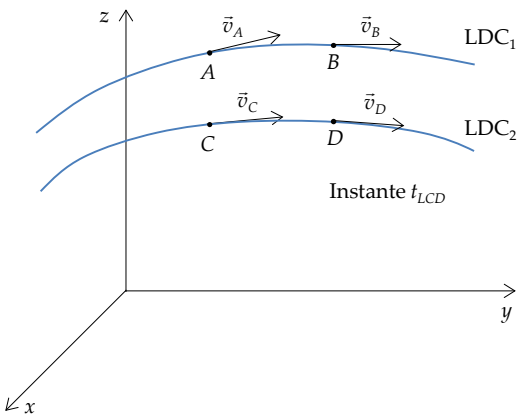


Figura 9 Línea de corriente

Evidentemente, en un mismo instante hay infinitas líneas de corriente, que no tienen por qué coincidir con trayectorias, dado que las velocidades de los diferentes puntos del campo de flujo pueden ser variables con el tiempo. Por ejemplo, en la figura 10 se representan algunas LDC para dos instantes de tiempo diferentes, en el caso de un flujo en una superficie plana de poca pendiente. En el primer caso, instante  $t_{LDC,0}$  las LDC son rectas paralelas. Si se abre un sumidero en un instante dado y se espera que se establezca el flujo, las líneas de corriente cambian de forma, pasando a ser las que se representan en la figura para el instante  $t_{LDC,1}$ . Se están tomando dos "fotografías" de las LDC en dos instantes diferentes y como consecuencia de que el campo de velocidades cambia con el tiempo por efecto de la apertura del sumidero, las LDC no son iguales en uno y otro instante.

Es importante hacer constar que las LDC no pueden visualizarse en el laboratorio (de hecho no pueden visualizarse los vectores velocidad). No obstante, si el campo de velocidades no depende del tiempo, las trayectorias y las LDC coincidirán, en cuyo caso sí que se podrán visualizar al poder hacerlo con la trayectoria. Esta coincidencia entre LDC y trayectorias se da en este caso porque cualquier partícula siempre viaja en la dirección de su propia velocidad, por lo que cualquier otra partícula que pase por el mismo punto que ha pasado la anterior tendrá la misma trayectoria que la anterior, al no cambiar en ese punto la velocidad con el tiempo, tangente siempre al vector velocidad de la partícula. Por lo tanto, si la velocidad no es función del tiempo, cualquier partícula siempre viaja a lo largo de una LDC única, que coincide con su trayectoria.

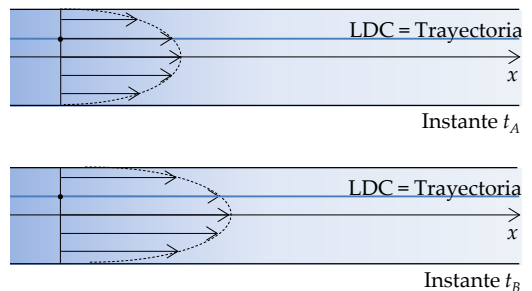


Figura 10 Líneas de corriente y trayectorias coincidentes en un campo de velocidades dependiente de  $t$

Existen casos en los que el campo de velocidades es función del tiempo pero las LDC y las trayectorias coinciden. Esto puede ocurrir en el caso de una tubería por la que circula un fluido en régimen laminar y donde la velocidad siempre tiene una sola componente. En la figura siguiente puede verse como las LDC y las trayectorias coinciden, siendo ambas líneas paralelas al eje  $z$  (coordenadas cilíndricas), a pesar de ser las velocidades diferentes en un mismo punto en dos instantes distintos.

Se define como **tubo de corriente (TDC)** al volumen encerrado por las líneas de corriente que se "apoyan" sobre una línea cerrada. Es decir, si se traza una línea cerrada en el espacio y se tienen en cuenta solo las LDC que pasan por los puntos de esa línea, se obtiene un tubo de corriente. Para una línea cerrada de "apoyo" dada, el TDC siempre será el mismo si no cambian las LDC con el tiempo, es decir, si el campo de velocidades no es función del tiempo. Si las LDC cambian con el tiempo, también lo harán los TDC.

Un TDC no puede ser atravesado por el flujo. Esto es así porque el TDC está delimitado por líneas de corriente en su periferia (Superficie de corriente), y las LDC no pueden ser atravesadas por el flujo al ser el vector velocidad en cualquier punto de la LDC tangente a la misma (en un punto no puede coexistir dos velocidades diferentes y por lo tanto dos LDC diferentes no pueden pasar por el mismo punto).

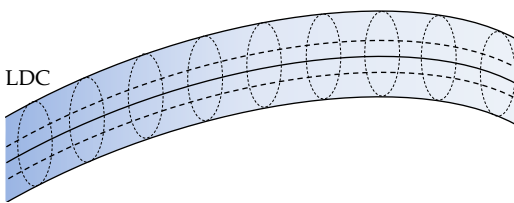


Figura 11 Tubo de corriente

La **línea de traza (LDT)** es el lugar geométrico de los puntos del espacio ocupados, en un instante dado, por partículas de fluido que en algún momento anterior han pasado por un punto del espacio denominado punto de anclaje. Evidentemente, el punto de anclaje pertenece a la línea de traza.

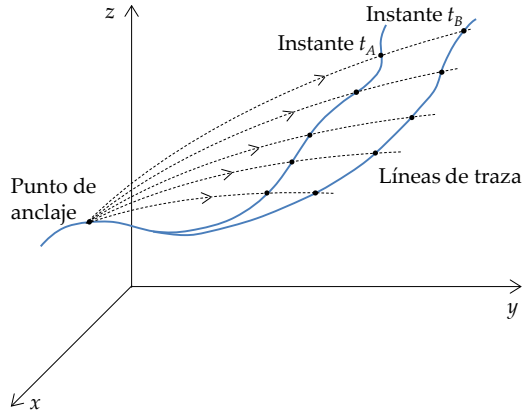


Figura 12 Línea de traza

Es posible visualizar en el laboratorio LDT sin más que marcar todas las partículas que pasan por un determinado punto con, por ejemplo, un chorro continuo de tinta inyecta mediante una aguja hipodérmica. En el caso de que el campo de velocidades no varíe con el tiempo, las trayectorias y LDT coincidirán, dado que todas las partículas que pasan por un determinado punto tienen la misma trayectoria. Asimismo, también coincidirán con las LDC, al ser iguales LDC y trayectorias.

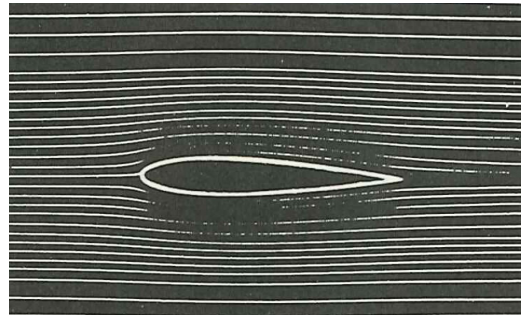


Figura 13 Líneas de traza coincidentes con trayectorias y LDC en un campo de velocidades que no depende del tiempo, para el flujo que rodea un perfil aerodinámico

## Clasificación de flujos de fluidos. Algunas condiciones de contorno

Los flujos de fluidos pueden clasificarse atendiendo a diversas cuestiones, como las variables de las que

depende el campo de velocidades y el número de componentes de la velocidad, el régimen de circulación, la consideración o no de la viscosidad o de la variación de densidad, etc. A continuación, en los diferentes subapartados de este epígrafe, se desarrollarán estos aspectos.

### Clasificación atendiendo al campo de velocidades

En general, el campo de velocidades consta de tres componentes  $(u, v, w)$ , cada una de las cuales depende a su vez de las tres coordenadas del sistema de referencia  $(x, y, z)$  y del tiempo  $t$ . Tal como se ha visto en epígrafes anteriores, en coordenadas cartesianas será:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}(x, y, z, t) = \\ &= u(x, y, z, t) \vec{i} + v(x, y, z, t) \vec{j} + w(x, y, z, t) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.22)$$

También puede escribirse esta expresión en coordenadas cilíndricas, en cuyo caso a las componentes se las denomina  $(u_r, u_\theta, u_z)$  y a las coordenadas de referencia  $(z, r, \theta)$ , apareciendo también el tiempo  $t$ .

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}(z, r, \theta, t) = \\ &= u_z(z, r, \theta, t) \vec{e}_z + u_r(z, r, \theta, t) \vec{e}_r + u_\theta(z, r, \theta, t) \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (3.23)$$

La **direccionalidad** de un flujo viene dada por el número de componentes de la velocidad no nulas. De uno a tres.

La **dimensionalidad** es el número de coordenadas espaciales de las que depende el campo de velocidades. Puede variar de 0 a 3. En el caso en que la dimensionalidad sea 0, al flujo se le denomina **uniforme**, lo que implica que la velocidad es la misma en todo punto del campo de flujo. Dimensionalidad 3, implica que la velocidad depende de las tres variables espaciales  $(x, y, z)$ , pudiendo también variar o no con el tiempo  $t$ . Si el flujo no varía según alguna dimensión, se le denomina uniforme en la dimensión en cuestión.

Cuando el flujo tiene solo dos componentes de la velocidad se denomina **bidireccional (o plano)**. Ello impli-

ca que el desplazamiento de las partículas se realiza en un plano. Por ejemplo, si lo hace en el plano XY:

$$\vec{V} = u(x, y, z, t) \vec{i} + v(x, y, z, t) \vec{j} \quad (3.24)$$

En este caso las partículas no pueden "saltar" de uno a otro plano, aunque las velocidades serán diferentes según el plano en que estén al depender de la variable  $z$ .

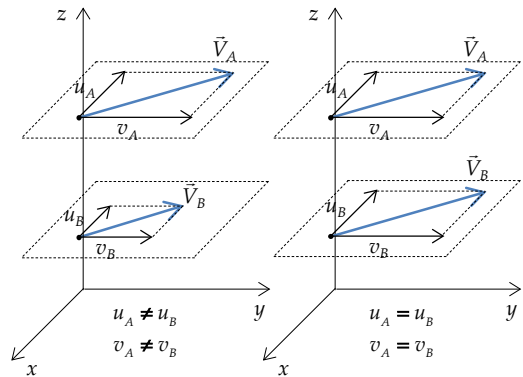


Figura 14 Flujo bidireccional. Tridimensional (izq.) Bidimensional (der.)

Si la distribución de velocidades en un flujo bidireccional es la misma en todos los planos paralelos en los que se mueve el flujo, se dice que el flujo es bidireccional y **bidimensional** (dependiente de las componentes  $x$  e  $y$ ), también denominado **bidimensional plano**. Por ejemplo,

$$\vec{V} = u(x, y, t) \vec{i} + v(x, y, t) \vec{j} \quad (3.25)$$

También podría darse el caso de un flujo bidireccional y bidimensional pero dependiente de otras variables como " $x$ " y " $z$ ", o " $z$ " e " $y$ ".

El flujo unidireccional implica que la velocidad solo tiene una componente, por lo que el flujo solo se mueve en una dirección. En general, si la dirección es la  $x$ , será:

$$\vec{V} = u(x, y, z, t) \vec{i} \quad (3.26)$$



En este caso las líneas de corriente y las trayectorias son coincidentes, y siempre son rectas paralelas a la dirección del movimiento. No obstante puede ser tridimensional, bidimensional o unidimensional. En la figura siguiente se observa un caso de flujo unidireccional y **unidimensional**. Se trata del flujo entre dos placas planas paralelas muy anchas (perpendiculares al papel) separadas por una pequeña distancia  $h$ . En este caso el flujo es unidireccional en  $x$  (solo existe al componente  $u$  de la velocidad) y unidimensional en  $y$  (la componente  $u$  solo depende de la variable  $y$ ). Se representa el **perfil de velocidades** en diferentes secciones entre las dos placas.

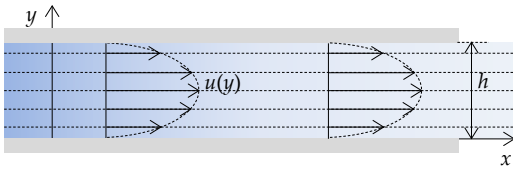


Figura 15 Flujo unidimensional y unidireccional

Hay flujos que dependiendo del sistema de coordenadas elegido tienen un grado de direccionalidad u otro. Por ejemplo, el flujo circular que se genera alrededor de un punto de desagüe. Lejos del mismo, las líneas de corriente son prácticamente circulares (no exactamente porque existirá una pequeña componente de la velocidad hacia el drenaje). Evidentemente, la velocidad de giro aumenta cuando la LDC está cerca del punto de desagüe. En este caso, en coordenadas cartesianas el flujo es bidireccional ( $u, v$ ) y bidimensional ( $x, y$ ), pero en coordenadas cilíndricas es unidireccional ( $u_\theta$ ) y unidimensional (la velocidad solo depende de la distancia al desagüe,  $r$ ).

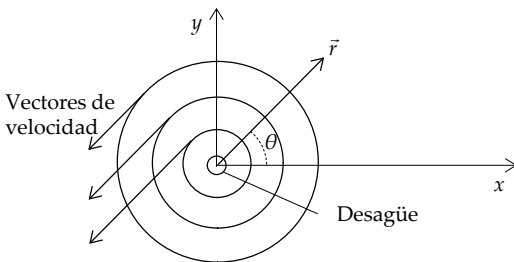
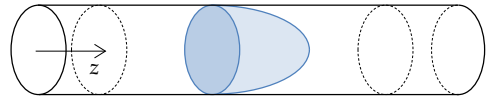


Figura 16 Flujo circular

En el caso de una tubería de sección constante por la que fluya un líquido en régimen laminar (se verá más adelante), el flujo se analiza en coordenadas cilíndricas (flujo de Hagen-Poiseuille). La única componente de la velocidad es  $u_z$  por lo que el flujo es unidireccional. Si el flujo no depende del tiempo, a la entrada de la tubería se puede considerar que el flujo es uniforme, existiendo una cierta longitud (denominada longitud de entrada), en la que el flujo está en desarrollo (el perfil de velocidades de entrada se va adaptando a las condiciones que le impone la tubería), con lo que es bidimensional (depende de  $r$  y de  $z$ ). Con el flujo completamente desarrollado, el perfil de velocidades ya no depende de  $z$ , sino tan solo de  $r$  (unidimensional), adquiriendo la forma de un paraboloides de revolución. Se representan en la figura los perfiles de velocidad en diferentes secciones de la tubería y en un corte longitudinal de la misma, por lo que en la zona de flujo totalmente desarrollado se observa un perfil de velocidades parabólico (el corte por un plano del paraboloides de revolución). La capa límite, se verá más adelante, ocupa todo el espacio de la tubería cuando el flujo está completamente desarrollado.



Zona de perfil de velocidad desarrollado completamente (paraboloides de revolución)

Entrada

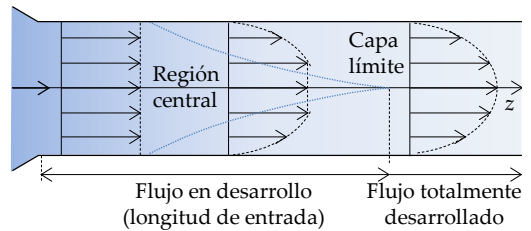


Figura 17 Flujo de Hagen-Poiseuille

En el análisis de flujos, en muchas ocasiones se acude a simplificaciones despreciando algunas componentes de la velocidad de poca entidad y utilizando el concepto de velocidad media. Por ejemplo, en la figura siguiente aparece el perfil de velocidades aproximado de un flujo laminar no dependiente del tiempo en

un conducto de sección variable (sería bidireccional con  $u_z$  y  $u_r$ , y bidimensional según  $z$  y  $r$ ). La primera aproximación consiste en despreciar la componente menor de la velocidad  $u_r$  (se supone que el ángulo de apertura del cono es muy pequeño). También se puede determinar la velocidad promedio en una sección (este concepto se tratará más adelante al hablar de velocidades medias). Se trata del valor de la velocidad que multiplicada por el área transversal del conducto en cualquier sección da el mismo caudal que el real que atraviesa la sección. Si se simplifica el perfil de velocidades suponiendo que la velocidad en cualquier sección es constante e igual a la velocidad promedio en la sección se obtendrá un perfil como el que aparece en la figura derecha.

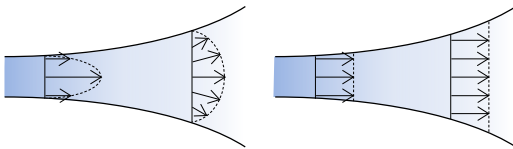


Figura 18 Flujo en un conducto de sección variable. Sin simplificaciones (izq.) Simplificado con velocidad promedio (der.)

### Clasificación atendiendo a la variable tiempo

Cuando el campo de velocidades no depende de la variable tiempo se dice que es **estacionario o permanente**. En general:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}(x, y, z) = \\ &= u(x, y, z) \vec{i} + v(x, y, z) \vec{j} + w(x, y, z) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Cuando aparece la variable tiempo, se denomina **no estacionario o transitorio**.

Pensando por ejemplo en el flujo a través de una tubería de la instalación de suministro de agua a una vivienda. Antes de abrir el grifo del lavabo, el agua está parada, por lo que el flujo no existe. Conforme se va abriendo el grifo, el agua se va acelerando en el interior de la tubería hasta alcanzar la velocidad de régimen permanente (flujo transitorio ya que las velocidades dependen del instante de tiempo en las que

se midan). A partir de ese momento se ve un caudal de salida constante y las velocidades en el interior de la tubería no variarán con el tiempo (régimen permanente). Cuando se comience a cerrar el grifo las velocidades disminuirán hasta anularse, por lo que existirá otra variación con el tiempo (régimen transitorio). En la figura siguiente puede verse un registro con el tiempo de la velocidad en el centro de la tubería, apreciándose claramente las zonas de régimen transitorio y de régimen permanente.

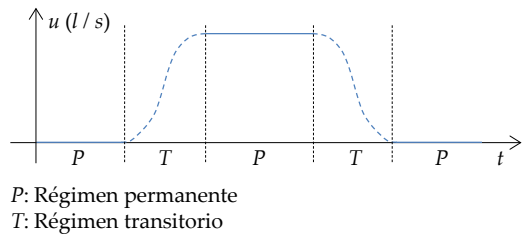


Figura 19 Evolución de la velocidad en el centro de una tubería en función de  $t$

El estudio de flujos no estacionarios es más sencillo que el de flujos transitorios al no intervenir en los primeros la variable tiempo. Por ello, en el análisis de flujo se diferencia normalmente el análisis en régimen permanente y transitorio, existiendo herramientas de cálculo diferenciadas para abordar ambos problemas. En ocasiones solo interesa analizar el permanente, y en otras es necesario analizar también el transitorio por los problemas que pueden presentarse en el mismo, por ejemplo, al cerrar de manera brusca una válvula en una instalación en la que está circulando agua a elevada velocidad (el ruido que se genera en las conducciones al cerrar bruscamente el grifo monomando del lavabo se produce por el movimiento de las tuberías inducido por las ondas generadas como consecuencia del "frenado" brusco del agua).

### Clasificación atendiendo al régimen del flujo

Además de clasificarse según las direcciones del campo de velocidades, de las variables espaciales de las que depende (dimensiones) y de su dependencia o no con el tiempo, los flujos pueden clasificarse atendiendo al régimen que se establece en su movimiento en:

- Flujo ideal (irrotacional no viscoso).
- Flujo no ideal.
  - Flujo laminar.
  - Flujo turbulento.

En el **flujo ideal** se desprecia el efecto de la viscosidad (se supone viscosidad nula  $\mu = 0$ ), por lo que no existirán esfuerzos cortantes. En el flujo no ideal, sea **laminar** o **turbulento**, aparecen los esfuerzos cortantes y las tensiones tangenciales, por lo que la viscosidad no se puede anular. La diferencia entre ellos estriba en el mayor orden de las líneas de corriente y trayectorias del flujo laminar frente al desorden del turbulento, lo que se manifiesta en este último en pulsaciones aleatorias de las componentes del vector velocidad.

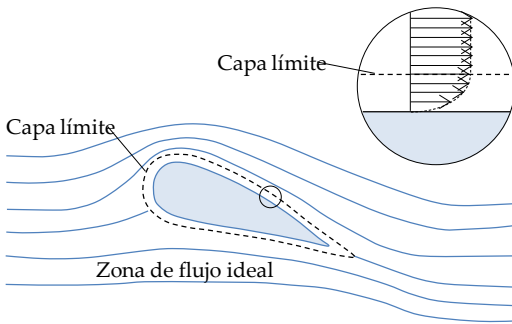


Figura 20 Flujo alrededor de un cuerpo

El régimen de flujo de un mismo fluido puede ser ideal, laminar o turbulento según las circunstancias. En muchas ocasiones los flujos externos pueden analizarse como un flujo ideal en la mayor parte del campo fluido pero deben de considerarse los efectos viscosos y las tensiones tangenciales en las cercanías de los objetos que lo perturban. Por ejemplo, en el caso del flujo que se ve perturbado por un perfil aerodinámico (figura 20) hay dos zonas perfectamente diferenciadas. En la zona más alejada el perfil de velocidades es uniforme, por lo que el flujo puede considerarse ideal y no existen esfuerzos cortantes. Conforme el flujo se acerca al cuerpo y entra en su "zona de influencia", las líneas de corriente y las trayectorias se ven modificadas por la existencia del perfil, pero se puede seguir considerando al flujo como ideal. Alrededor del cuerpo se deben de considerar los efectos viscosos, por lo que el perfil de velocidades no es uniforme, apareciendo los

esfuerzos cortantes. En el borde de ataque (entrada al perfil) el flujo puede ser laminar, mientras que en la salida puede pasar a ser turbulento. La zona más bien delgada en la que estos esfuerzos viscosos se manifiestan es lo que se denomina **capa límite**, y será objeto de estudio en temas posteriores.

En la mayoría de flujos internos o confinados los esfuerzos cortantes se manifiestan en todo el campo de flujo, por lo que debe de considerarse el efecto de la viscosidad. Podría decirse que la capa límite ya no es una región delgada cerca de las paredes, sino que se extiende a todo el flujo. En la figura 17 se representa un caso de flujo confinado, en el que pueden apreciarse los perfiles de velocidades asociados. El régimen que se establecerá será viscoso, siendo laminar o turbulento según las condiciones del flujo.

Una característica importante en el flujo no ideal es que debido a los esfuerzos cortantes, las partículas de fluido pueden deformarse e incluso girar, mientras que en el flujo ideal este hecho no ocurre.

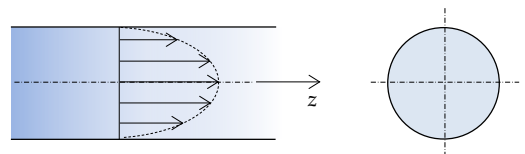
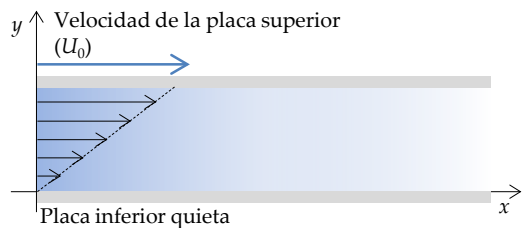


Figura 21 a) Flujo laminar entre placas  
b) Flujo laminar en un conducto circular

La visualización de estos flujos nos permiten entender mejor sus características. En el caso de flujo laminar las líneas de corriente son líneas prácticamente rectas ya que el fluido se desplaza en láminas que deslizan unas sobre otras, si bien con diferentes velocidades como consecuencia de los esfuerzos cortantes (las láminas que van más rápido aceleran a las que van más lento

y estas últimas frenan a las primeras). En la figura anterior puede verse unas láminas de fluido desplazándose frente a otras. En el caso (a) se trata de láminas planas entre dos placas, la superior en movimiento y la inferior fija, mientras que en el (b) se trata de prismas de sección corona circular, si bien en este caso se ha dibujado un corte de la tubería por lo que la corona circular está seccionada.

La visualización del flujo turbulento es mucho más compleja dado que aunque el flujo neto tenga una componente principal, existen componentes pulsátiles en otras direcciones que complican la visualización.

Para entender mejor la diferencia entre el flujo laminar y turbulento puede realizarse el experimento de Osborne Reynolds. Se trata de inyectar con una aguja hipodérmica un delgado hilo de tinta en una corriente de agua que circula por un tubo transparente. Si la velocidad del flujo es baja, puede observarse nítidamente el hilo de tinta, que no fluctúa ni se deforma, lo que da a entender que **el régimen es laminar** (si se inyecta en otros puntos de la sección hilos de tinta de otros colores, no se mezclarían entre ellos). Ello demuestra que la única componente de la velocidad no nula está en la dirección de la tubería (dirección principal). Si existieran componentes en otras direcciones, las partículas de tinta se dirigirían a otros puntos de la sección del conducto y no se vería nítidamente la línea.

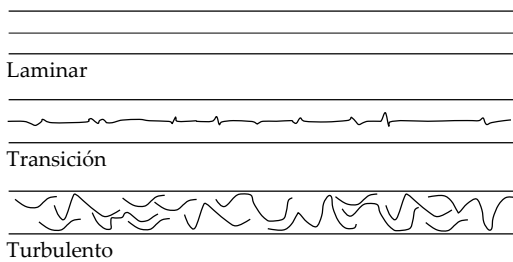


Figura 22 Experimento de Osborne Reynolds

Cuando se incrementa la velocidad del flujo comienzan a aparecer fluctuaciones en el hilo de tinta, de manera que algunas partículas escapan de la línea y van a parar a otros puntos. Ello implica que la velocidad tiene otras componentes perpendiculares al flujo que hacen que algunas de las partículas se desplacen

de la línea. Esto las sitúa en la **zona de transición de régimen laminar a turbulento**. Si la velocidad sigue aumentando, las inestabilidades son más frecuentes y de mayor intensidad, por lo que un gran número de partículas se desplazan a otras "capas", tiñendo toda al agua circulante de manera que resulta casi imposible ver la línea de tinta. Toda la tinta se ha "difuminado" por el conducto. Este desorden que hace que las partículas se "cambien de carril" es debido a que existen valores instantáneos de la velocidad no nulos que fluctúan alrededor de 0 en las direcciones radial y circumferencial (son valores positivos y negativos con media temporal nula, ya que no hay flujo neto a través de las paredes de la tubería y, más o menos, al final el mismo número de partículas viaja del carril 1 al 2 y viceversa).

También en la componente de la velocidad en la dirección principal del flujo existen fluctuaciones, que hacen que el valor de la velocidad instantánea en un punto no se mantenga constante, a pesar de estar en régimen permanente. En la figura siguiente puede observarse una gráfica de la evolución con el tiempo de las tres componentes de la velocidad en un punto del conducto tanto en régimen laminar como en turbulento. Se observa que en régimen laminar no hay fluctuaciones y solo existe una componente. En turbulento, el valor medio temporal de la componente de la velocidad en la dirección principal es no nulo (de hecho, el agua fluye hacia el final de la tubería) pero se aprecian fluctuaciones, y en las otras dos direcciones, si bien los valores instantáneos no son nulos, la media temporal sí lo es. De alguna manera puede decirse que estas fluctuaciones no aportan "caudal" pero generan un gasto energético que es un peaje que debe de pagar el flujo para poder circular. Normalmente se aborda el problema descomponiendo la componente de la velocidad instantánea en cualquier dirección en la suma de dos términos. Uno de ellos es la media temporal de la velocidad instantánea en un intervalo de tiempo  $T$ , y el otro es una **componente pulsátil** que recoge la información sobre las fluctuaciones alrededor de la media temporal.

$$u_z(t) = \overline{u_z(t)} + u_z'(t) \quad (3.28a)$$

$$u_r(t) = \overline{u_r(t)} + u_r'(t) \quad (3.28b)$$

$$u_\theta(t) = \overline{u_\theta(t)} + u_\theta'(t) \quad (3.28c)$$

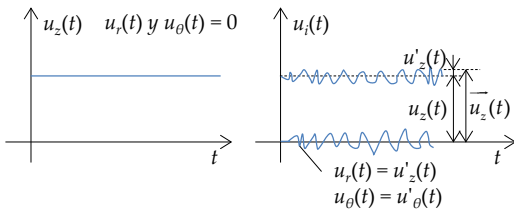
En la anterior expresión:

- $u_i(t)$ : Valor instantáneo de la componente de la velocidad en la dirección  $i$ .
- $\bar{u}_i(t)$ : Media temporal de la componente de la velocidad en la dirección  $i$ .
- $u_i'(t)$ : Componente pulsátil de la componente de la velocidad en la dirección  $i$ .

La media temporal se obtiene de:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T u_i(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u}_i(t) + u_i'(t)) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u}_i(t)) \cdot dt + \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T (u_i'(t)) \cdot dt}_{=0} = \bar{u}_i(t) + 0 = \bar{u}_i(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Como puede verse, la media temporal para cualquier componente del vector velocidad de la componente pulsátil es nula. Para las componente en la dirección principal, la media temporal es no nula ( $\bar{u}_z(t) \neq 0$ ), pero para las otras dos direcciones se verifica que ( $u_r(t) = 0$  y  $u_\theta(t) = 0$ ), por lo que  $u_r(t) = u_r'(t)$  y  $u_\theta(t) = u_\theta'(t)$ .



Media temporal nula

Figura 23 Evolución de las componentes de la velocidad. Régimen laminar (izq.) Régimen turbulento (der.)

El paso de régimen laminar a turbulento puede ser determinado a través del número de Reynolds. Se trata de un número adimensional, cociente entre las fuerzas de inercia (predominante en el flujo turbulento) y viscosas (predominante en el flujo laminar):

$$Re = \frac{V \cdot L}{\nu} \quad (3.30)$$

Con:

- $V$ : velocidad.
- $L$ : Longitud característica.
- $\nu$ : Viscosidad cinemática.

En el caso de conductos de sección circular,  $V$  es la velocidad media en la tubería y la longitud característica  $L$  es el Diámetro interior del conducto,  $D$ . Para este tipo de flujos el régimen es laminar hasta  $Re < 2000$ , de transición para  $2000 < Re < 4000$ , y turbulento para  $Re > 4000$ . Mayores velocidades implican mayores posibilidades de régimen turbulento, mientras que fluidos más viscosos, aún con velocidades no bajas, pueden circular en régimen laminar.

En el caso del agua ( $\nu = 1 \text{ csk} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) para velocidades normales de circulación (entre 0,5 y 2 m/s) el flujo es casi siempre turbulento para los diámetros normales. Por ejemplo, para un diámetro usual en una instalación de una vivienda ( $D = 15 \text{ mm}$ ), y una velocidad de circulación de 0,5 m/s se tiene un  $Re = 7500$  (turbulento). Para diámetros mayores el  $Re$  en el rango de velocidades especificado será mayor.

Tan solo en el caso de diámetros muy pequeños (por ejemplo goteros) y velocidades muy bajas se tiene régimen laminar o de transición. Por ejemplo, en una tubería de 4 mm con velocidad de 0,2 m/s,  $Re = 800$ .

En el caso de aceite hidráulico ( $\nu = 20 \text{ csk} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) es más frecuente encontrar flujo laminar en condiciones usuales de circulación. Así por ejemplo, para una tubería de diámetro 50 mm, con velocidad 0,5 m/s se tendrá  $Re = 1250$  (laminar) y para una velocidad de 1 m/s,  $Re = 2500$  (transición).

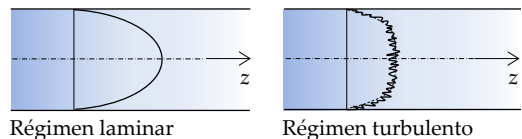


Figura 24 Perfiles de velocidad en una tubería circular. Régimen laminar (izq.) Régimen turbulento (der.)

Los perfiles de velocidad en una tubería correspondientes a régimen laminar y turbulento se representan

en la figura siguiente. En el caso de régimen turbulento, no se han dibujado las componentes de la velocidad radial y tangencial, sino tan solo la componente principal. Puede apreciarse la forma que tiene el perfil de velocidad promedio en la dirección principal, al que se ha superpuesto la fluctuación de velocidad en un instante dado.

### Condiciones de contorno a considerar

Si se considera el flujo como no ideal, en la zona de contacto con un contorno sólido las interacciones moleculares hacen que las partículas de fluido tengan la misma velocidad que el contorno. Es lo que se conoce como **condición de adherencia** o **de no deslizamiento** ( $\overline{V}_{\text{fluido}} = \overline{V}_{\text{pared}}$ ). En el caso de un contorno estático, la condición de no deslizamiento será  $\overline{V}_{\text{fluido}} = 0$ . En varias de las figuras anteriores (por ejemplo 17 y 21) puede observarse la condición de adherencia. Por ejemplo, en la 21 la velocidad del fluido en contacto con la placa inferior es 0 (la placa está quieta), y con la placa superior es  $U_0$  (que es la velocidad de la placa), verificándose la condición de adherencia.

Cuando se considera el flujo como ideal, la condición de no deslizamiento puede suprimirse para facilitar el análisis del flujo. En tal caso se sustituye por otra condición que considera que el flujo puede deslizarse por la superficie si bien no penetrar en ella. Para un contorno estático, ello implica que la velocidad del flujo en los puntos en contacto con la pared tiene una dirección perpendicular al vector superficie del contorno en ese punto (dicho de otro modo, la velocidad es tangente a la superficie en ese punto). Evidentemente, como el flujo no puede penetrar en el contorno y este está quieto, la componente de la velocidad normal (perpendicular) a la superficie es nula.

Si el contorno está en movimiento, la componente normal de la velocidad del flujo será igual a la velocidad del sólido (velocidad relativa nula para que el fluido no penetre en el sólido) pudiendo existir una componente tangencial del flujo.

Existe otra condición que se manifiesta en el punto de contacto entre el fluido y la pared, denominada **condición de continuidad de temperatura** y que nos dice que la temperatura del fluido será la misma que

la temperatura de la pared del sólido en contacto con él ( $T_{\text{fluido}} = T_{\text{pared}}$ ).

## Otras clasificaciones

### 1. Flujo Compresible/Incompresible

Cuando las variaciones de densidad en el campo de flujo son despreciables, se considera al flujo como **incompresible**, es decir, con una densidad  $\rho = \text{constante}$ . Las variaciones de densidad están muy ligadas a las variaciones de presión y temperatura. En el caso de líquidos, estas variaciones deben de ser muy grandes para que la densidad sufra variaciones apreciables, por lo que en general se admite la hipótesis de Incompresibilidad.

Para el caso de gases, es más fácil encontrar situaciones en las que la variación de la densidad es apreciable, en cuyo caso el flujo se debe de tratar como **compresible**, lo que complica su estudio. No obstante, hay muchos casos en la práctica en los que el flujo de un gas puede considerarse como incompresible. Por ejemplo, el flujo en conductos de ventilación o de aire acondicionado puede considerarse como incompresible, dado que las variaciones de presión y temperatura son bajas en ese tipo de instalaciones. En esos casos se considera una densidad constante e igual a la del aire en condiciones de temperatura ambiente (20 °C) y presión atmosférica. Esta densidad se puede obtener de la expresión vista en el tema 1:

$$P^* = \rho \cdot R_g \cdot T \rightarrow \rho = \frac{P^*}{R_g \cdot T} \quad (3.31)$$

En la que  $P^*$  es la presión absoluta, en este caso igual a la presión atmosférica estándar (101325 Pa) dado que la presión relativa es 0, y  $R_g$  la constante del gas, que para el aire es  $R_g = 287 \text{ (N} \cdot \text{m)} / (\text{Kg} \cdot \text{K})$ . Por lo tanto se obtiene:

$$\rho = \frac{101325}{287 \cdot (20 + 273,15)} = 1,2 \text{ Kg/m}^3 \quad (3.32)$$

También en instalaciones de suministro de Gas natural en baja presión (redes interiores de las viviendas) en las que las presiones son inferiores a 50 mbar se con-

sidera al flujo incompresible. Incluso en parte de las instalaciones de aire comprimido se puede analizar el flujo como incompresible si las caídas de presión no son importantes (evidentemente, el flujo entre la entrada del compresor y la salida del mismo es claramente compresible, pero desde la salida del compresor a los puntos de consumo, dependiendo del diámetro de las conducciones y de las velocidades de circulación, las caídas de presión pueden ser pequeñas, pudiendo considerarse la densidad aproximadamente constante). El valor de la densidad a considerar depende de las presiones y temperaturas a las que se distribuye el aire. Por ejemplo, a una presión manométrica de trabajo de 6 bar y una temperatura de 20 °C se obtendrá una densidad para el aire de:

$$\rho = \frac{6 \cdot 10^5 + 101325}{287 \cdot (20 + 273,15)} = 8,3 \text{ Kg/m}^3 \quad (3.33)$$

## 2. Flujo Isotermo

En este caso la temperatura se mantendrá constante en todo el flujo. En la práctica, existen muchas ocasiones, tanto en líquidos como en gases, en las que se podrá adoptar esta hipótesis porque las variaciones de temperatura son tales que su influencia en otras variables (densidad, viscosidad, etc.) es despreciable.

En el estudio de redes de suministro de agua, por ejemplo, no se tienen en consideración las variaciones de temperatura del agua en el sistema. Asimismo, incluso conducciones de gas natural en alta presión no se consideran estos cambios de temperatura cuando se analiza el régimen permanente, a pesar de que las variaciones de presión son importantes. Esto es así porque las conducciones intercambian continuamente calor con el medio que las rodea manteniendo la temperatura del gas prácticamente constante.

Evidentemente, no se puede adoptar esta hipótesis en casos de, por ejemplo, expansiones bruscas de gases, en los que estos sufren un enfriamiento importante. Es el caso, por ejemplo, de un purgador de aire o la expansión brusca del aire contenido en un recipiente a presión como consecuencia de un rápido vaciado del mismo. Si esta expansión es mucho más lenta, de manera que a través de las paredes del recipiente puede

haber suficiente intercambio de calor con el ambiente, puede considerarse que la temperatura se mantendrá más o menos constante durante el proceso, que se podrá admitir como isotermo.

## 3. Flujo Adiabático

Se admite, en este caso, que no hay transferencia de calor. Generalmente se asume esta hipótesis para expansiones bruscas de gases a través de válvulas y toberas. En ocasiones, se asume que el flujo es politrópico, es decir, un paso intermedio entre isotermo, y adiabático.

## Concepto de caudal

Se define **caudal volumétrico** al volumen de fluido que atraviesa una sección (superficie) durante una unidad de tiempo. Conceptualmente implica que el caudal volumétrico se puede determinar midiendo el volumen de fluido que ha atravesado la superficie y dividiéndolo por el tiempo que ha tardado en atravesarla. Ello nos dará idea del caudal medio que ha atravesado la superficie durante el tiempo de medición. Fácilmente puede determinarse el caudal medio de agua que sale por el grifo de la bañera. Solo se tiene que coger un recipiente cuyo volumen se conozca y llenarlo con el citado grifo, midiendo a la vez el tiempo que tarda en llenarse. El cociente  $\nabla/t$  será el caudal medio  $Q$ .

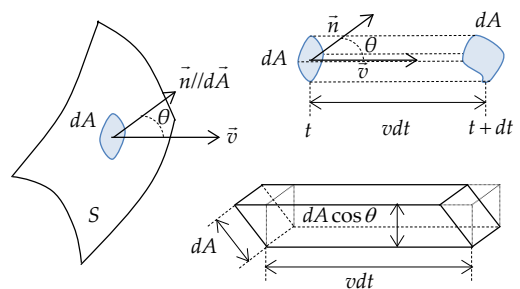


Figura 25 Concepto de caudal

Las partículas de fluido en contacto con el área elemental  $dA$  llevan una velocidad  $\vec{V}$  en el instante  $t$ . En el instante  $t + dt$  dichas partículas ocuparán una superficie elemental  $dA$ , habiéndose desplazado en el sentido



de la velocidad  $\vec{V}$  una distancia  $V \cdot dt$ . En definitiva, el volumen elemental de partículas que ha atravesado  $dA$  en el tiempo  $dt$ ,  $d\forall$  será:

$$d\forall = d\vec{A} \cdot \vec{V} \cdot dt = dA \cdot V \cdot \cos\theta \cdot dt \quad (3.34)$$

y el caudal volumétrico elemental  $dQ$  será, por lo tanto:

$$dQ = \frac{d\forall}{dt} = d\vec{A} \cdot \vec{V} = dA \cdot V \cdot \cos\theta \quad (3.35)$$

Para toda la superficie  $S$ , el caudal volumétrico que la atraviesa será:

$$Q = \int_S dQ = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.36)$$

Dado que la velocidad es la del instante  $t$  que se ha escogido, el caudal así calculado es un valor instantáneo, correspondiente al instante  $t$ . No confundir con el caudal medio a lo largo de un periodo de tiempo, comentado al comienzo de este epígrafe. Evidentemente si el caudal instantáneo es el mismo a lo largo de todo el periodo de tiempo, coincidirá con el caudal medio.

Dimensionalmente hablando el caudal tiene unidades de volumen divididas por unidad de tiempo. En el S.I. la unidad de medida del caudal volumétrico es el metro cúbico por segundo ( $m^3/s$ ), aunque también son muy habituales las siguientes: *litros/segundo* ( $l/s$ ), *litros/minuto* (*l.p.m.* o *l/min*), *litros/hora* ( $l/h$ ), *m<sup>3</sup>/minuto* ( $m^3/min$ ) y el *m<sup>3</sup>/hora* ( $m^3/h$ ).

Por otra parte, el **caudal o gasto másico** elemental  $dG$  será la masa de partículas de fluido que atraviesa  $dA$  durante un tiempo  $dt$ . Teniendo en cuenta que  $\rho = m/\forall$ :

$$dG = \frac{dm}{dt} = \rho \frac{d\forall}{dt} = \rho \cdot dQ = \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.37)$$

El gasto o caudal másico que atravesará toda la superficie  $S$  será:

$$G = \int_S \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.38)$$

En el caso en que la densidad sea la misma a lo largo de toda la superficie  $S$ , es posible sacar  $\rho$  fuera de la integral, con lo que quedará:

$$G = \rho \int_S \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho \cdot Q \quad (3.39)$$

En el S.I. la unidad de medida del caudal másico es el  $Kg/s$ , aunque también son muy habituales el  $Kg/minuto$  ( $Kg/min$ ) y el  $Kg/hora$  ( $Kg/h$ ).

La velocidad media es un valor escalar igual al cociente entre el caudal volumétrico a través de una superficie y el valor de dicha superficie. Corresponde al valor medio de las velocidades del fluido, proyectadas en dirección perpendicular a la superficie considerada:

$$V_{media} = \frac{Q}{S} = \frac{1}{S} \int_S \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.40)$$

En el caso de conducciones, la sección de paso es perpendicular a las velocidades de circulación. En ese caso, si se conoce el valor de la velocidad media, el caudal se determina aplicando simplemente la expresión  $Q = V_{media} \cdot S$ .

En el caso de una tubería de sección circular de diámetro interior  $D$ , el caudal vendrá dado por:

$$Q = V_{media} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \quad (3.41)$$

Cuando se usa esta expresión o la anterior no se suele explicitar que es la velocidad media, si bien queda claro que no se puede tratar de otra velocidad.

En el caso de líquidos se suele hablar en términos de caudal volumétrico. Dado que la densidad apenas varía, es inmediato determinar el caudal másico ( $G = Q \cdot \rho$ ).



Para flujo de gases, en los que la densidad puede variar con mayor facilidad, es mejor usar el caudal másico o el caudal volumétrico pero referido a unas determinadas condiciones que nos permiten definir la densidad. Estas son bien las condiciones normales (presión atmosférica  $P^* = 101325 \text{ Pa}$  y  $0^\circ\text{C}$ ) bien las condiciones estándar (presión atmosférica  $P^* = 101325 \text{ Pa}$  y  $15^\circ\text{C}$ ). Las condiciones normales se designan con una "N" al lado del volumen y las estándar con una "S". Así por ejemplo, un caudal volumétrico de  $10 \text{ m}^3/\text{h}$  en condiciones normales se escribe como  $10 \text{ Nm}^3/\text{h}$ .

Para obtener el caudal másico de gas es necesario multiplicar por la densidad. Esta se obtendrá, tal y como se vio en el capítulo 1 o en este conociendo la constante del gas, la presión y la temperatura.

En redes de gas natural a baja presión, como la presión es muy semejante a la atmosférica, el caudal volumétrico en condiciones normales es realmente el caudal volumétrico que atraviesa las conducciones, por lo que dividiendo este valor por la sección del conducto se obtendría la velocidad media. Pero en ocasiones se habla de caudal en condiciones normales pero el flujo está circulando a media o alta presión, con densidades muy diferentes a la que se tiene en condiciones normales. Para tener una idea clara de la masa de gas por unidad de tiempo que está circulando y saber el caudal volumétrico real de circulación, es necesario realizar unas sencillas operaciones matemáticas de conversión.

## Derivación en mecánica de fluidos: derivada total, local y convectiva. Aceleración del fluido. Aceleración tangencial y aceleración normal

### Concepto de derivada material o total y derivada local

La distinción entre estos conceptos nace precisamente de la consideración de las variables de Lagrange (que hacen referencia a la partícula material) y de las variables de Euler (referidas en este caso a una posición del espacio) Sea  $\bar{\tau}$  una propiedad intensiva del fluido (sea velocidad, presión, temperatura, densidad, etc...), a la que se da un carácter vectorial por mayor generalidad, si bien en el caso de la presión, densidad o temperatu-

ra su carácter es escalar. Dicha propiedad adopta, para una partícula concreta de fluido  $A$ , el valor  $\bar{\tau}_A$ . Bajo esta consideración (que corresponde a las coordenadas de Lagrange), la propiedad de la partícula tan solo depende del tiempo:

$$\bar{\tau}_A = \bar{\tau}_A(t) \quad (3.42)$$

La derivada de la propiedad  $\bar{\tau}_A$  con respecto del tiempo será precisamente lo que se conoce como **Derivada Material** de  $\bar{\tau}$ :

$$\left. \frac{D\bar{\tau}(t)}{Dt} \right|_A = \text{Derivada material de } \bar{\tau} \quad (3.43)$$

y se califica de "material" precisamente porque hace referencia a la propiedad de la partícula material.

Para una partícula concreta, al variar la propiedad tan solo con el tiempo, se verifica que:

$$\left. \frac{D\bar{\tau}(t)}{Dt} \right|_A = \left. \frac{\partial \bar{\tau}(t)}{\partial t} \right|_A \quad (3.44)$$

Sin embargo, cuando la propiedad  $\bar{\tau}$  está definida en coordenadas de Euler (lo que se denomina un **campo de la propiedad**  $\bar{\tau}$ .)

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(\vec{r}, t) \quad (3.45)$$

realmente se está haciendo referencia a la propiedad de la partícula de fluido que en el instante  $t$  ocupa la posición del espacio definida por el vector posición  $\vec{r}$ .

Ahora, la propiedad  $\bar{\tau}$  depende tanto del tiempo, como de la posición del espacio considerada. La derivada con respecto del tiempo de la propiedad  $\bar{\tau}(\vec{r}, t)$  ya no coincide con la derivada material de dicha propiedad, y se denomina **derivada local**, puesto que describe

cómo varía tal propiedad en una posición del espacio  $\vec{r}$ :

$$\text{Derivada local de } \bar{\tau} = \frac{\partial \bar{\tau}(\vec{r}, t)}{\partial t} \neq \frac{D\bar{\tau}(t)}{Dt} \Big|_A \quad (3.46)$$

y no coincide con la derivada material o Total, porque depende de la posición espacial (coordenadas  $x, y, z$ ) además del tiempo.

Si se desea calcular la derivada total para una propiedad definida en coordenadas de Euler (el caso habitual en Mecánica de Fluidos), debe tenerse en cuenta que el diferencial total de la propiedad, al depender de  $x, y, z, t$  es:

$$D\bar{\tau} = \frac{\partial \bar{\tau}(x, y, z, t)}{\partial t} Dt + \frac{\partial \bar{\tau}(x, y, z, t)}{\partial x} Dx + \frac{\partial \bar{\tau}(x, y, z, t)}{\partial y} Dy + \frac{\partial \bar{\tau}(x, y, z, t)}{\partial z} Dz \quad (3.47)$$

De manera que la derivada **material** o **total** con respecto al tiempo puede escribirse, dividiendo la anterior expresión por  $dt$ , como

$$\frac{D\bar{\tau}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\tau}(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\tau}(x, y, z, t)}{\partial x} \frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial \bar{\tau}(x, y, z, t)}{\partial y} \frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial \bar{\tau}(x, y, z, t)}{\partial z} \frac{Dz}{Dt} \quad (3.48)$$

Pero si se tiene en cuenta que:

- $Dx/Dt = u(x, y, z, t)$ , primera componente del vector velocidad  $\vec{V}(\vec{r}, t)$ .
- $Dy/Dt = v(x, y, z, t)$ , segunda componente del vector velocidad  $\vec{V}(\vec{r}, t)$ .
- $Dz/Dt = w(x, y, z, t)$ , tercera componente del vector velocidad  $\vec{V}(\vec{r}, t)$ .

Se llega, finalmente, a la siguiente expresión de la derivada total de la propiedad  $\bar{\tau}(\vec{r}, t)$  en la que para simplificar se escribe  $\tau$  en lugar de  $\bar{\tau}(\vec{r}, t)$ :

$$\frac{D\bar{\tau}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x} u + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} v + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial z} w \quad (3.49)$$

Los términos implicados en la expresión anterior son los siguientes:

- Derivada **material** o **total** de la propiedad  $\bar{\tau}$  para la partícula de fluido que ocupa la posición  $\vec{r}$  en el instante  $t$ .

$$\frac{D\bar{\tau}(\vec{r}, t)}{Dt} \quad (3.50)$$

- Derivada **local** de la propiedad  $\bar{\tau}$ : Expresa cómo varía la propiedad con respecto al tiempo para una posición del espacio determinada  $\vec{r}$ .

$$\frac{\partial \bar{\tau}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (3.51)$$

- Derivada **convectiva** de la propiedad  $\bar{\tau}$ : Expresa cómo varía la propiedad con respecto de la posición espacial  $\vec{r}$  para un instante determinado  $t$ .

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x} u + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} v + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial z} w \quad (3.52)$$

Puede aplicarse la anterior expresión a cualquier propiedad intensiva, como se ha comentado previamente. Por ejemplo, en el caso de la Temperatura de una habitación, esta puede ser, para un instante dado, diferente en cada uno de los puntos  $\vec{r}$  de la misma. Es evidente que  $T$  varía en el espacio, por lo que la derivada convectiva será distinta de cero. Si se observa un punto concreto y la temperatura varía con el tiempo, se obtendrá una derivada local no nula. Si para un instante concreto, la temperatura es la misma en cualquier punto del local, y para otro instante es diferente a la anterior, pero la misma para todos los puntos del local, se obtendrá una derivada convectiva nula. El caso de derivada local nula sucede cuando la temperatura no varía con el

tiempo para ningún punto del local, si bien la temperatura en uno u otro punto puede ser diferente.

### Concepto de aceleración material, local y convectiva

La aplicación de lo expuesto en el apartado anterior a la propiedad velocidad nos proporcionan de modo natural los conceptos de **aceleración material** o **total**, **aceleración local** y **aceleración convectiva**. Para simplificar la escritura de las ecuaciones se usará  $\vec{V}$  en lugar de  $\vec{V}(\vec{r}, t)$ :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}w \quad (3.53)$$

siendo:

- Aceleración **material** o **total**, la correspondiente a la partícula de fluido que ocupa la posición  $\vec{r}$  en el instante  $t$ .

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \quad (3.54)$$

- Aceleración **local**: Expresa cómo varía la velocidad con respecto al tiempo para una posición del espacio determinada  $\vec{r}$ .

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} \quad (3.55)$$

- Aceleración **convectiva**: Expresa cómo varía la velocidad con respecto de la posición espacial  $\vec{r}$  para un instante determinado  $t$ .

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}w \quad (3.56)$$

En coordenadas cartesianas, las tres componentes del vector aceleración material o total,  $\vec{a}$  serán, con

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = a_x(\vec{r}, t) \cdot \vec{i} + a_y(\vec{r}, t) \cdot \vec{j} + a_z(\vec{r}, t) \cdot \vec{k},$$

$$a_x(\vec{r}, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w \quad (3.57a)$$

$$a_y(\vec{r}, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w \quad (3.57b)$$

$$a_z(\vec{r}, t) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w \quad (3.57c)$$

La aceleración material o total existe siempre que la partícula se acelera; ello puede ser provocado por dos causas fundamentales:

- Porque la velocidad en un punto del espacio cambia con el tiempo (Flujo transitorio); ello implica que existe aceleración local.
- Porque la partícula se acelera al cambiar de posición en el espacio, aún tratándose de un flujo permanente. Por ejemplo, en una tubería que se estrecha, en la que la velocidad aumenta. En tal caso, existe aceleración convectiva.

Evidentemente se puede dar el caso de que ambas causas coexistan, como sería la situación en un flujo transitorio en una conducción que sufre un estrechamiento.

### Teorema de arrastre de Reynolds

Puede decirse que el Teorema de Arrastre de Reynolds (abreviadamente TAR) representa los conceptos de derivación material o total, local y convectiva, pero en este caso aplicados a propiedades extensivas de un conjunto de partículas de fluido, tales como la masa, la energía, la cantidad de movimiento o el momento de la cantidad de movimiento. Es posiblemente uno de los teoremas más potentes de la Mecánica de Fluidos, por cuanto que de él se obtienen los teoremas de conservación más habituales (conservación de masa, de cantidad de movimiento, de energía, etc.).

## Concepto de Sistema, volumen y superficie de control

**Sistema de control (Sist):** Conjunto de partículas de fluido que en un instante dado ocupan una región del espacio, denominado Volumen de control. Por su propia definición, la masa del sistema de control es un invariante (puesto que no cambian las partículas que forman parte del mismo, cada una de ellas con una masa  $m_i$ ). La masa del sistema será el sumatorio de las  $m_i$  del sistema. Si lo pueden hacer otras propiedades como la cantidad de movimiento, ya que las partículas pueden variar su velocidad, por lo que lo hará su cantidad de movimiento (sumatorio de  $m_i \cdot \vec{V}_i$  del sistema).

Se puede expresar esto analizando el sistema de forma discreta, como se ha hecho, o de manera continua. En este caso cada partícula tiene un diferencial de masa ( $dm$ ) y una cantidad de propiedad (en este ejemplo cantidad de movimiento) definida por  $\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot dm$ . La masa del sistema será:

$$\int_{Sist} dm \quad (3.58)$$

Y la cantidad de propiedad del sistema (en este ejemplo cantidad de movimiento) será:

$$\int_{Sist} \vec{V}(\vec{r}, t) dm \quad (3.59)$$

**Volumen de control (VC):** Región arbitraria del espacio, que es de interés para conocer las transformaciones que sufre un sistema de partículas cuando la atraviesa. Puede ser fija y de volumen y forma constante (no deformable), puede estar en movimiento y no ser deformable, o bien puede estar en movimiento y cambiar ser deformable. El volumen de control es una región del espacio en la que nos interesa estudiar la acción del fluido, normalmente en contacto con un contorno (por ejemplo, en un tramo de tubería, en el rodete de una bomba centrífuga, etc.). Por lo general se trabaja con un sistema de ejes situados sobre el volumen de control que, en caso de que este sea móvil,

se moverán con él. En la figura siguiente se presentan diversos casos de VC.

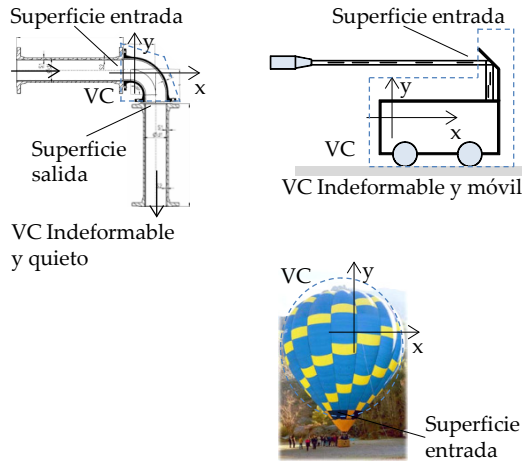


Figura 26 Ejemplos de Volumen de control VC

En un instante dado,  $t$ , las partículas que hay dentro del VC, que pueden ser las definidas en el sistema u otras, tienen una masa total (masa del VC) y una cantidad de propiedad del VC.

La masa del VC será, sabiendo que  $dm = \rho(\vec{r}, t) d\forall$ :

$$\int_{VC} dm = \int_{VC} \rho(\vec{r}, t) d\forall \quad (3.60)$$

Y la cantidad de propiedad contenida en el VC (en este caso la cantidad de movimiento) será:

$$\int_{VC} \vec{V}(\vec{r}, t) dm = \int_{VC} \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \rho(\vec{r}, t) d\forall \quad (3.62)$$

**Superficie de control (SC):** Frontera o contorno del volumen de control. A través de la superficie de control el VC se relaciona con el "resto del campo fluido" produciéndose flujos de entrada y salida al mismo, así como transmitiéndose fuerzas, energía, pares, etc. al VC.

## Teorema de Arrastre de Reynolds

Sea  $\bar{H}$  una propiedad extensiva del campo fluido (por ejemplo, cantidad de movimiento, energía, momento de la cantidad de movimiento, etc). Se denominará:

- $\bar{H}_{sist}(t)$ : Propiedad de las partículas del sistema en el instante  $t$ . La propiedad masa, por ejemplo, es constante, pero otras pueden ser variables (cantidad de movimiento, energía, momento de la cantidad de movimiento, etc).
- $\bar{h}(t)$ : Propiedad específica, por unidad de masa, en el instante  $t$ :  $\bar{h}(t) = d\bar{H}(t)/dm$ .
- Si la cantidad de propiedad de un  $dm$  en un instante  $t$ ,  $d\bar{H}(t)$ , es, por ejemplo, la cantidad de movimiento  $dm\bar{V}(t)$ , la propiedad específica será:

$$\bar{h}(t) = \frac{d\bar{H}(t)}{dm} = \frac{dm\bar{V}(t)}{dm} = \bar{V}(t) \quad (3.63)$$

Para todo el sistema:

$$\bar{H}_{Sist}(t) = \int_{Sist} \bar{h}(t) dm \quad (3.64)$$

- $\bar{H}_{VC}(t)$ : Propiedad extensiva (masa, energía, etc) de las partículas contenidas en el volumen de control en el instante  $t$ .
- $\bar{h}(\vec{r}, t)$ : Propiedad específica, por unidad de masa, en el punto de coordenadas  $\vec{r}$  y en el instante  $t$ .

Para el VC:

$$\bar{H}_{VC}(t) = \int_{VC(t)} \bar{h}(\vec{r}, t) dm = \int_{VC(t)} \bar{h}(\vec{r}, t) \cdot \rho(\vec{r}, t) dV \quad (3.65)$$

Se ha escrito  $VC(t)$  porque el VC puede ser móvil o deformable, por lo que puede cambiar con el tiempo.

Suponiendo que el sistema de partículas (sistema) se encuentra en el instante  $t$  ocupando el volumen representado en la figura siguiente (regiones I + II). Transcurrido un tiempo lo suficientemente pequeño  $\Delta t$ , dicho sistema, en el instante  $t + \Delta t$  se encontrará ocupando una región del espacio diferente (regiones II + III).

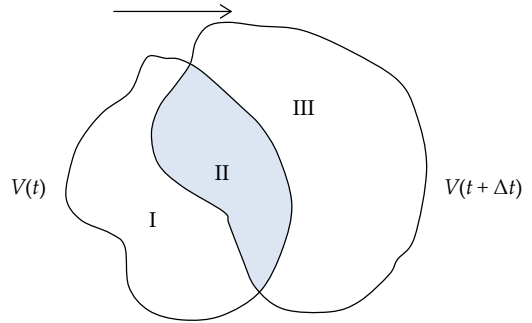


Figura 27 Sistema de Control en los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$

Lo que se pretende es evaluar la variación en el tiempo de la propiedad extensiva para el sistema de partículas  $\bar{H}_{sist}(t)$  en un instante  $t$ , esto es:

$$\frac{d\bar{H}_{Sist}(t)}{dt} \quad (3.66)$$

Acudiendo a la definición de derivada se observa que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\bar{H}_{Sist}(t)}{dt} \right|_t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{H}_{Sist}(t + \Delta t) - \bar{H}_{Sist}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{V(t+\Delta t)} \bar{h}(\vec{r}, t + \Delta t) dm - \int_{V(t)} \bar{h}(\vec{r}, t) dm \right] \quad (3.67) \end{aligned}$$

Puede utilizarse las regiones del espacio **I**, **II** y **III** para distinguir las integrales anteriores, de modo que:

$$\frac{d\bar{H}_{Sist}(t)}{dt} \Big|_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\int_{II} \bar{h}(\vec{r}, t + \Delta t) dm - \int_{II} \bar{h}(\vec{r}, t) dm}{\Delta t} + \frac{\int_{III} \bar{h}(\vec{r}, t + \Delta t) dm - \int_I \bar{h}(\vec{r}, t) dm}{\Delta t} \right] \quad (3.68)$$

puesto que  $\forall(t + \Delta t) = II + III$  y  $\forall(t) = I + II$ , se tiene que  $\forall(t + \Delta t) \cap \forall(t) = II$ .

Los términos del límite que afectan a la región **II** representan, teniendo en cuenta que  $dm = \rho(\vec{r}, t) d\forall$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\int_{II} \bar{h}(\vec{r}, t + \Delta t) dm - \int_{II} \bar{h}(\vec{r}, t) dm}{\Delta t} \right] = \frac{d}{dt} \int_{VC(t)} \bar{h}(\vec{r}, t) dm = \frac{d}{dt} \int_{VC(t)} \bar{h}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) d\forall \quad (3.69)$$

El **término local**, esto es, la variación temporal de la propiedad extensiva encerrada en el volumen de control VC en el instante  $t$ .

Los términos del límite que afectan a **I** y **III** representan:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\int_{III} \bar{h}(\vec{r}, t + \Delta t) dm - \int_I \bar{h}(\vec{r}, t) dm}{\Delta t} \right] = \int_{SC(t)} \bar{h}(\vec{r}, t) d\dot{m} = \int_{SC(t)} \bar{h}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) (\bar{V}_{r,SC}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}) \quad (3.70)$$

el **término convectivo**, concretamente, el flujo de la propiedad  $\bar{H}$  a través de las paredes de la superficie de control SC en el instante  $t$ .

Para deducir la anterior expresión se ha tenido en cuenta que el caudal másico  $d\dot{m}$  es, como se ha visto anteriormente:

$$d\dot{m} = dG = \rho \frac{d\forall}{dt} = \rho \cdot dQ = \rho(\vec{r}, t) (\bar{V}_{r,SC}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}) \quad (3.71)$$

siendo  $dQ$  el caudal volumétrico que atraviesa  $d\vec{A}$  un de la superficie de control y  $\bar{V}_{r,SC}(\vec{r}, t)$  la velocidad, en el instante  $t$ , del punto de coordenadas  $\vec{r}$ , situado en la SC, pero estando referida a la SC, esto es, la velocidad relativa del flujo respecto a la SC, la cual podría ser móvil. Si la velocidad respecto a una referencia absoluta en el punto dado es  $\bar{V}(\vec{r}, t)$  y la velocidad de la SC respecto a la misma referencia absoluta es  $\bar{V}_{SC}(t)$ , la velocidad a tomar en consideración en la expresión anterior será:  $\bar{V}_{r,SC}(\vec{r}, t) = \bar{V}(\vec{r}, t) - \bar{V}_{SC}(t)$ .

Finalmente, el **Teorema de Arrastre de Reynolds (TAR)**:

$$\frac{d\bar{H}_{Sist}(t)}{dt} \Big|_t = \frac{d}{dt} \int_{VC(t)} \bar{h}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) d\forall + \int_{SC(t)} \bar{h}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) (\bar{V}_{r,SC}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}) \quad (3.72)$$

Donde sus términos son.

- $\bar{h}(\vec{r}, t)$ : Propiedad específica por unidad de masa en el punto de coordenadas  $\vec{r}$  y en el instante  $t$ . En el caso de la primera integral se refiere a la propiedad específica  $\bar{h}$  del elemento de volumen  $d\forall$  situado en la posición  $\vec{r}$  en el instante  $t$ , mientras que en la segunda integral, representa la propiedad específica  $\bar{h}$  referida al elemento de superficie  $d\vec{A}$  situado en la superficie de control SC en la posición  $\vec{r}$  y en el instante  $t$ .
- $\rho(\vec{r}, t)$ : Densidad del fluido en el punto de coordenadas  $\vec{r}$  y en el instante  $t$ .
- $\bar{V}_{r,SC}(\vec{r}, t)$ : Velocidad en el elemento de superficie  $d\vec{A}$  situado en la superficie de control SC en la posición

$\vec{r}$  y en el instante  $t$ , relativa a la propia superficie de control  $SC$ .

En la expresión del teorema de arrastre de Reynolds se emplea la notación general,  $VC(t)$  y  $SC(t)$  ya que tanto el  $VC$  como la  $SC$  pueden moverse y/o deformarse. Por ejemplo, en el caso del  $VC$ , caso de deformarse sin moverse, sus límites de integración serán función del tiempo. Asimismo, si se mueve sin deformarse, y lo hace a velocidad variable con el tiempo, si se ha adoptado como sistema de referencia un Sistema fijo, también cambiarán con el tiempo los límites del  $VC$ , y por lo tanto, los límites de integración serán función del tiempo.

En muchas ocasiones se escribe de forma simplificada la expresión del TAR, no explicitando en la misma la variación espacial y temporal de la densidad  $\rho$ , la velocidad  $\vec{V}_{r,SC}(\vec{r}, t)$  y la densidad de propiedad  $\bar{h}$ . En tal caso queda:

$$\left. \frac{d\bar{H}_{Sist}(t)}{dt} \right|_t = \frac{d}{dt} \int_{VC(t)} \bar{h} \cdot \rho \cdot d\forall + \int_{SC(t)} \bar{h} \rho (\vec{V}_{r,SC} \cdot d\vec{A}) \quad (3.73)$$

## Técnicas a emplear para el análisis de flujos

Analizada la forma de describir el flujo, procede en este punto revisar brevemente la forma de plantear los problemas de análisis de flujo para proceder a su resolución. Hay dos enfoques bien diferenciados, aquellos que modelizan mediante ecuaciones el fenómeno físico (por aplicación de las leyes fundamentales de la física, que se podría denominar métodos físico-matemáticos, y los métodos experimentales.

En los primeros, enfoque diferencial y enfoque integral o de volumen de control, se establecen las ecuaciones que modelizan el flujo (en muchas ocasiones ecuaciones diferenciales) y se procede a su resolución, más o menos compleja en función de las hipótesis simplificadoras realizadas previamente y de la forma matemática de dichas ecuaciones.

Esta forma de plantear las ecuaciones puede darse desde un **Enfoque Diferencial**, que es la forma más gene-

ral, lo que permite determinar todos los detalles del flujo. Sin embargo, es la más complicada. De hecho, en muchos casos se debe recurrir a simplificaciones y a métodos numéricos de resolución (por ejemplo en el caso de flujos turbulentos y geometrías complicadas), pues analíticamente no es posible resolver las ecuaciones que modelizan el flujo. No obstante, hoy en día, existen modelos numéricos de gran potencia y una disciplina dentro de la Mecánica de Fluidos denominada CFD (Computational Fluid Dynamics) que se basa en el uso de métodos numéricos y algoritmos para analizar problemas relacionados con el flujo de fluidos. No solo en temas de automoción y aeronáutica, sino en otros campos de estudio de la Mecánica de Fluidos se utilizan cada vez más estos métodos que permiten resolver con suficiente aproximación flujos complejos, si bien en cualquier caso es necesario proceder a la comprobación y calibrado de los modelos para asegurar la fiabilidad de los resultados obtenidos.

El **Enfoque Integral**, o **Método del Volumen de control**, no genera tanta información acerca de los detalles del flujo, pero para muchas aplicaciones resulta suficientemente aproximado. Se basa en analizar, con unas simplificaciones previas razonables, puede ser el considerar que el campo de velocidades es uniforme en cualquier sección, lo que le ocurre al fluido (Sistema) que en un instante determinado  $t$  ocupa una región del espacio (Volumen de control) que se relaciona con el resto del campo fluido a través de una Superficie de control ( $SC$ ) por la que entra y sale flujo y por la que el  $VC$  se ve sometido a las condiciones de contorno que le impone el campo de flujo que le rodea. Tal y como en dinámica del sólido rígido se aísla el sólido imponiéndole unas condiciones de contorno (por ejemplo reacciones), en Mecánica de Fluidos se aísla una región del espacio. Si se pretendiera aislar a las partículas, como en el caso de un sólido, se estaría enfocando el problema desde un punto de vista Lagrangiano. Como las partículas ocupan un espacio diferente en cada instante, se aplica un enfoque euleriano, centrándonos en el análisis de lo que sucede en el instante  $t$  en el  $VC$ .

Por último, puede aplicarse un enfoque experimental (de laboratorio) para intentar resolver los problemas relacionados con el flujo. Para ello se recurre en ocasiones a modelos a escala que intentan reproducir la realidad de la manera más fiel posible. Tras aplicar las condiciones reales de la manera más aproximada, se

realizan mediciones y se determinan los valores de las variables de interés a escala, para posteriormente, y tras un tratamiento de estos valores, llegar a conocer los valores reales que se producirían en las mismas condiciones pero a escala 1/1.

Antes del desarrollo de la CFD, la técnica experimental era la única que permitía resolver muchos problemas complejos de Mecánica de Fluidos, pero resultaba muy costosa económicamente. Hoy en día es posible utilizar métodos de CFD para resolver muchos problemas, o combinarlos con la experimentación, de manera que se reduzcan de manera importante los ensayos a realizar. Por ejemplo, antes de elaborar un prototipo a escala 1/1 de un automóvil, se trabaja con CFD para "afinar" su diseño. Posteriormente, se realiza un modelo a escala que puede ser probado en un túnel de viento pequeño, calibrándose el modelo matemático usado por la CFD para analizar mejor el flujo. Finalmente, si es posible, se realiza un modelo a escala 1/1 para confirmar los resultados. Este proceso abarata considerablemente los costes porque puede ser que con un solo modelo a escala 1/1 sea suficiente y que el número de pruebas a realizar en un túnel de viento grande y costoso sea reducido.

## Bibliografía

*Apuntes de mecánica de Fluidos*. Tema 3  
Cinemática. ETSII. Universidad Politécnica de Valencia.

Gerhart, P., Gross, R., Hochstein, J. Ed. Addison-Wesley, 1995.

*Fundamentos de Mecánica de Fluidos*  
Iberoamericana.

Frank M. White. 5ª Edición, 2004.  
*Mecánica de Fluidos*  
Ed. McGraw-Hill.

Potter, M.C., Wiggert, D.C., 2002.  
*Mecánica de Fluidos*  
Ed. Thomson.



Capítulo 4

# Dinámica de fluidos

## Índice

Introducción

Ecuaciones fundamentales de la dinámica diferencial

Balance de masa o ecuación de continuidad

Balance de fuerzas: Ecuación de Navier Stokes y de Euler

Balance de energía: Ecuación diferencial de la energía

Conclusión

Modelación matemática del régimen turbulento. La ecuación de Reynolds

Los códigos CFD

Aplicación de la dinámica diferencial: flujo de Couette

Conclusión

## Introducción

Desde el punto de vista práctico, en sí mismo el estudio de la cinemática de los fluidos (como el de cualquier otra cinemática) no tiene el menor interés. Al fin y al cabo es el análisis del movimiento prescindiendo de las causas que lo generan, lo que impide alcanzar conclusiones sólidas. Sí tiene, sin embargo, un notable interés pedagógico pues, tal cual ahora se verá, permite introducir de manera progresiva una serie de conceptos de gran utilidad práctica. La dinámica de los fluidos que este capítulo y el próximo abordan recurre constantemente a ellos, facilitando de este modo el aprendizaje del bloque más importante de la asignatura.

Y así, cuando en la dinámica de fluidos se relaciona la causa (la acción de un flujo de aire sobre un sólido) con el efecto (el arrastre que genera dicha corriente), el alumno ya se ha familiarizado con muchos de los conceptos que requiere el estudio de este fenómeno. De algún modo, pues, la cinemática facilita el avance en la comprensión de esta materia que, cual se ha dicho, es la más importante de la asignatura. Porque al fin y al cabo establece los fundamentos y plantea las leyes a partir de las cuales estudiar cualquier tipo de flujo fluido. Al fin y a la postre los cuatro temas que siguen al presente:

- Dinámica integral.
- Flujo externo alrededor de cuerpos.
- Flujos abiertos.
- Flujo a presión.

son aplicaciones específicas de la dinámica de fluidos cuyos fundamentos se presentan y que, como no puede ser de otro modo, se apoyan en los principios básicos. A saber la conservación de la masa y de energía y la ecuación fundamental de la dinámica de Newton (balance de fuerzas). Siendo las dos primeras propiedades escalares, cada una de ellas da lugar a una ecuación escalar. Pero al ser las fuerzas vectores, su balance proporciona una ecuación vectorial y, por tanto, tres escalares. Se tienen, pues, cinco ecuaciones para determinar las siete variables que caracterizan completamente cualquier flujo fluido. El campo de velocidades (vector, con tres componentes escalares), la densidad  $\rho$ , la presión  $p$  y dos variables termodinámicas, que normalmente son la temperatura  $T$  y la energía interna,  $u$ . Y aún cuando hay otras variables termodinámicas

(como la entalpía  $h$ ) pueden determinarse a partir de las otras dos ( $T$  y  $u$ ).

En definitiva siete incógnitas, tres estrictamente mecánicas (las componentes del vector), dos variables que pueden considerarse puente entre lo mecánico y lo térmico (densidad  $\rho$  y presión  $p$ ) toda vez que están siempre presentes cualquiera sea el problema (mecánico o térmico) que se resuelva. Finalmente las dos restantes ( $T$  y  $u$ ) genuinamente termodinámicas, completan el conjunto de siete incógnitas. Para calcularlas sólo se cuenta, ya se ha visto, con cinco ecuaciones de modo que el balance incógnitas (7) - ecuaciones (5) no está equilibrado. En consecuencia para cerrar el sistema y, por tanto, el problema, hacen falta otras dos ecuaciones adicionales. Son las de estado que ligan las propiedades termodinámicas y que, con carácter general, se escriben:

$$\rho = \rho(p, T) \quad (4.1a)$$

$$u = u(p, T) \quad (4.1b)$$

La ecuación de estado de los gases perfectos ya estudiada (tema 1), es la versión más sencilla del flujo de gases, mientras que si el fluido que evoluciona puede considerarse incompresible y la ecuación de estado adquiere la forma más simple posible ( $\rho = C$ ).

Por último conviene subrayar que en los flujos incompresibles el problema mecánico y el térmico se desacoplan. En efecto, siendo la densidad conocida (y constante), se tienen cuatro ecuaciones (tres escalares resultado de aplicar el balance de fuerzas más la ecuación escalar de continuidad que proporciona el balance de materia) en las que sólo intervienen cuatro incógnitas (tres del campo de velocidades más la presión). En consecuencia se puede resolver este problema sin necesidad de recurrir al balance de energía. El problema mecánico es, pues, independiente del térmico. Y una vez resuelto el problema mecánico, la ecuación de la energía aporta información sobre las cuestiones térmicas siempre presentes en cualquier flujo real, pues la viscosidad genera fricción que, a la postre se convierte en calor. El fluido se calienta aunque, en general, muy poco tal cual se comprobará más adelante al comparar la ecuación de Bernoulli y la de la energía.

Y ya para concluir este primer apartado, subrayar que los problemas mecánicos y térmicos están desacoplados en todos los problemas que en este curso se abordan. Bien porque se supone la densidad constante, bien porque cuando no se admite tal hipótesis, se supone que la evolución del gas es isoterma. En este caso la ecuación de estado es  $p = \rho \cdot R_g \cdot T_0$  (o sea,  $p = C\rho$ , por lo que no se introduce ninguna variable térmica y bastan las cuatro ecuaciones mecánicas para resolver el problema). Después, conocidas las variables mecánicas, se recurre a la ecuación de la energía para valorar aspectos termodinámicos. El escaso tiempo disponible impide plantear problemas en que los aspectos térmicos y mecánicos están acoplados tal cual ocurre, con la excepción ya hecha de los flujos isoterms, en todos los problemas ligados a la dinámica de gases.

La relación causa efecto se establece planteando los tres balances ya referidos (masa, fuerza y energía). Cual se ha expuesto en el tema precedente, dependiendo del volumen sobre el que se apliquen se obtendrán las ecuaciones que caracterizan la dinámica diferencial o la integral. Ya se han discutido ventajas e inconvenientes de cada enfoque por lo que no es menester abundar en este asunto. En cualquier caso si se quiere enfatizar que son enfoques que no compiten entre sí. Antes son complementarios pues resuelven problemas muy distintos. Por lo general la dinámica diferencial exige mucha menos información de partida pero suele requerir un enorme esfuerzo para obtener resultados concretos (las características del flujo en cualquier punto del espacio fluido) en flujos medianamente complejos. Sin embargo la dinámica integral proporciona una visión de conjunto, con una información globalizada referida al volumen de control finito.

Puesto que a la dinámica integral se le dedica el próximo capítulo, el más extenso del curso, en lo que sigue se hace una primera aproximación a la dinámica diferencial. Tan sólo se presentan los resultados de los tres balances globales diferenciales, se interpretan los términos que incluyen las ecuaciones, se discuten las dificultades que supone integrarlas y se explica el enorme salto de calidad que para la dinámica diferencial de fluidos ha supuesto tanto el desarrollo del cálculo numérico como la aparición de los ordenadores. Conjuntamente son los responsables de la explosión de un nuevo mundo, el CFD, con su infinidad de aplicaciones.

Como contrapunto a los flujos complejos, generalmente turbulentos, que resuelven los códigos CFD, el capítulo concluye resolviendo el ejemplo más sencillo de la dinámica diferencial de los fluidos, el flujo laminar entre dos placas planas y paralelas o flujo de Couette.

## Ecuaciones fundamentales de la dinámica diferencial

### Balance de masa o ecuación de continuidad

El primer y más sencillo de los balances es el de masa. Como quiera que en la mecánica clásica la masa existente en el interior del elemento de volumen seleccionado es un invariante, aunque no lo es en la mecánica relativista, de la que dista un abismo dadas las bajas velocidades, comparadas con las de la luz, de los campos fluidos propios de la ingeniería. Pues bien, la ecuación de continuidad (el nombre habitual del balance de materia en Mecánica de Fluidos) se establece imponiendo esta condición. Que la materia es un invariante, lo que se impone igualando a cero la suma de la variación de masa en el interior del volumen seleccionado más el flujo de masa neto (el saliente menos el entrante a través de la superficie que limita el volumen en cuestión). Cuando el flujo de masa saliente supera al entrante la variación de masa en el interior del elemento de volumen disminuye, ocurriendo lo contrario cuando la entrante supere a la saliente. Una suma que en forma diferencial se expresa tal cual la ecuación (4.2) expresa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \quad (4.2)$$

donde el primer sumando (variación local de la densidad en un punto genérico del espacio fluido) representa la variación de masa por unidad de volumen en el interior del volumen de control diferencial (centrado en el punto genérico al que están referidas las variables fluidas). De otra parte el vector  $\rho \vec{V}$  (cuyas unidades son  $ML^{-2}$  y, por tanto, en el Sistema Internacional, SI, se mide en  $kg/m^2$ ) es el flujo unitario de masa que atraviesa una superficie elemental (es una función de punto). Por tanto, el segundo término de la ecuación (4.2), la divergencia del vector, es:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \quad (4.3)$$

y representa el balance del flujo másico a través de la superficie elemental que encierra el volumen diferencial. O, dicho más coloquialmente, el flujo másico saliente menos el flujo entrante a través de esta superficie.

Recordando cómo se derivan las variables fluidas la ecuación (4.2) admite una manera alternativa también muy clarificadora. En efecto, recordando que  $\nabla$  es un operador diferencial y que la suma de la derivada local de la densidad (primer sumando) y de la convectiva, en este caso  $\frac{D\rho}{Dt}$ , es la derivada total, el desarrollo de (4.2) proporciona:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\nabla \rho) + \rho \nabla \cdot (\vec{V}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot (\vec{V}) = 0 \quad (4.4)$$

O bien,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot (\vec{V}) = 0 \quad (4.5)$$

Esta segunda forma de la ecuación de la continuidad (4.5) no permite, como la precedente, una interpretación del balance de materia efectuado sobre un espacio euleriano (el elemento de volumen), toda vez que el primer sumando es la derivada total (o material) de la densidad, concepto lagrangiano ligado a la partícula cuya variación de densidad se estima. Cuando el fluido es incompresible, esa variación es necesariamente nula y, por lo tanto, también lo es el segundo sumando de la ecuación (4.5). Pero al no poder serlo la densidad (no hay ningún fluido de densidad cero), necesariamente también lo debe ser la divergencia del vector velocidad  $\nabla \cdot \vec{V}$ . En consecuencia, cuando la divergencia del campo de velocidades es nula, el flujo que ese campo de velocidades representa es incompresible.

La divergencia de la velocidad es igual a la dilatación unitaria de una partícula fluida (asimilada a un cubo elemental), pues cada uno de sus tres sumandos proporciona la dilatación unitaria longitudinal de cada

uno de los tres lados del cubo. Por ejemplo en la dirección  $x$ , es  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . La dilatación unitaria volumétrica se nota  $\theta$  ( $\nabla \cdot \vec{V} = \theta$ ). Obviamente en un fluido incompresible, la densidad no cambia, lo que implica que una masa concreta ocupa siempre el mismo volumen.

## Balance de fuerzas. Ecuación de Navier Stokes y de Euler

Sobre un conjunto de partículas de fluido encerradas en un volumen elemental  $\delta V$ , actúan un conjunto de fuerzas elementales. Algunas, el ejemplo más sencillo es el de las fuerzas de presión, a través de la superficie que limita el elemento de volumen (de ahí el nombre de fuerzas de superficie) otras, como el campo gravitatorio, son fuerzas que se aplican directamente sobre el volumen y por tanto se llaman fuerzas de volumen. Al plantear la ecuación fundamental de la dinámica (la suma de todas las fuerzas que actúan sobre una masa diferencial, tanto las de superficie como las de volumen, es el producto de esa masa por su aceleración), se llega a la ecuación de Navier Stokes. Para obtener la forma final (ver la ec. 4.6) se ha introducido la hipótesis de Stokes que relaciona la viscosidad del fluido, las causas (fuerzas de superficie representadas por las componentes del tensor de tensiones) y los efectos (deformación de la partícula elemental de fluido). Conviene recordar que la ecuación (1.1) es la expresión más simple de la hipótesis de Stokes. Y lo es porque el flujo que allí se contempla es el más sencillo de todos, el que discurre entre dos placas planas paralelas que se estudia al final de este capítulo.

Pues bien, la ecuación de Navier Stokes, la que preside toda la Mecánica de Fluidos y, por tanto la más importante de este cuerpo de doctrina de la física, es:

$$\rho(\vec{A} - \vec{X}) = -\nabla p + \frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla \cdot \vec{V}) + \mu\Delta\vec{V} \quad (4.6)$$

El significado físico de cada uno de sus términos es el que sigue:

- $\vec{A}$ : es la aceleración del fluido.
- $\rho\vec{X}$ : es la resultante de las fuerzas exteriores por unidad de volumen. Con el fluido evolucionando en

el seno de un campo derivado de una función potencial  $U$ , se tiene  $\vec{X} = -\nabla U$ . En el caso de un campo gravitatorio la función potencial es  $U = gh$ . Alternativamente (ver figura 5,  $U = gh$ ).

- $\nabla p$ : el gradiente de presiones. Cuando en una determinada dirección disminuye se le denomina gradiente favorable, pues propicia el movimiento en tal dirección.
- $1/3 \mu \nabla(\nabla \cdot \vec{V})$ : son las pérdidas por disipación viscosa derivadas de la dilatación (si  $\nabla \cdot \vec{V} > 0$ ) o de la contracción si el signo es negativo. En flujos incompresibles las partículas de fluido no cambian de volumen y este término es nulo  $\nabla \cdot \vec{V} = \theta = 0$ . El término completo  $\nabla(\nabla \cdot \vec{V}) = \nabla \theta$ , es el gradiente de la divergencia del vector velocidad y proporciona la dirección de máxima dilatación. Si  $\nabla \cdot \vec{V} = C$ , la dilatación de la partícula es constante (la dilatación en una determinada dirección no se altera) y al no haber desplazamiento relativo entre filetes fluidos la disipación viscosa por este concepto, también es nula.
- $\mu \Delta \vec{V}$ : es la disipación viscosa por excelencia, presente siempre en cualquier fluido real.

Si el fluido es ideal ( $\mu = 0$ ), la ecuación de Navier Stokes se simplifica notablemente porque los dos términos más complejos, que son los ligados a la viscosidad) se anulan, quedando:

$$\rho(\vec{A} - \vec{X}) = -\nabla p \tag{4.7}$$

o, de manera más compacta,

$$\vec{A} + \nabla \left( U + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \tag{4.8}$$

Como se ha supuesto  $\mu = 0$  (no hay disipación viscosa, es decir no hay pérdidas), la expresión (4.8) expresa con claridad meridiana la relación causa (gradientes de los campos gravitatorio y de presión) efecto (aceleración del movimiento). Cuando el fluido se mueve a lo largo de una línea de corriente estacionaria en el tiem-

po y curvilínea (figura 1), y el movimiento se refiere a las coordenadas naturales  $(\vec{s}, \vec{n}, \vec{b})$  que representan las direcciones tangencial, normal y binormal, los campos de velocidad y de presión sólo dependen de la variable espacial,  $s$ , y se simplifican por lo que se puede escribir  $\vec{V} = \vec{V}(s, t)$  y  $p = p(s, t)$ .

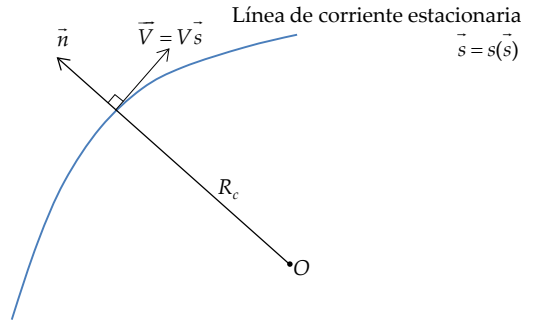


Figura 1 Movimiento de un fluido ideal sobre una línea de corriente (coordenadas naturales)

En estas condiciones la aceleración total de una partícula elemental (recuérdese la derivada total como suma de la local y la convectiva así como la fórmula de Frenet  $\partial \vec{s} / \partial s = \vec{n} / R_c$  con  $R_c$  radio de curvatura de la trayectoria curvilínea) viene dada por la ecuación (4.8), válida en la dirección tangencial ( $\vec{s}$ ):

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{D\vec{V}}{Dt} = V \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = V \left( \frac{\partial V}{\partial s} \vec{s} + V \frac{\partial \vec{s}}{\partial s} \right) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} \vec{s} + \frac{V^2}{R_c} \vec{n} \end{aligned} \tag{4.9}$$

En consecuencia la componente tangencial de la ecuación (4.8) puede escribirse:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( gz + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \tag{4.10}$$

O, de manera más compacta,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial s} = 0 \quad (4.11)$$

Una relación que se obtendrá directamente en la próxima lección con un simple balance de fuerzas. Si a las hipótesis precedentes (flujo a lo largo de una trayectoria curvilínea estacionaria  $\vec{s} = \vec{s}(s)$ , y fluido ideal), se añade la de régimen permanente ( $\partial V/\partial t = 0$ ) y la de incompresible  $\rho = C$ , la ecuación de Bernouilli expresada en energía por unidad de volumen, queda:

$$\frac{\partial B}{\partial s} = 0 \rightarrow B = \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C \quad (4.12)$$

O, de manera más compacta (manteniendo el término local, si el régimen no es estacionario), en función del trinomio de Bernouilli:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( V^2 + gz + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial s} = 0 \quad (4.13)$$

una relación que se utilizará con mucha frecuencia en las lecciones posteriores, sobre todo en flujos incompresibles a través de tuberías de presión.

### Balance de energía. Ecuación diferencial de la energía

Este curso presta poca atención, ya se ha dicho, a los flujos de fluidos en los que el intercambio de calor es un fenómeno relevante. En ellos, al igual que en aquellos en que las variaciones de densidad del fluido son importantes (es decir, en la dinámica de gases) la ecuación de la energía juega un papel esencial. En cualquier caso también en los flujos mecánicos de los líquidos incompresibles en los que, cual se ha dicho, la ecuación de la energía está desacoplada, también aporta una información relevante. Permite identificar, ya se ha dicho, el destino final de las pérdidas por fricción generadas por la viscosidad y que no es otro que el calentamiento del fluido.

La ecuación resultante de aplicar un balance de energía a un elemento de volumen diferencial es:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p\theta + \Phi + \nabla \cdot (k\nabla T) \quad (4.14)$$

Donde el primer término representa la variación de la energía total por unidad de volumen. En cuanto a la significación de los términos que integran el segundo miembro es la que sigue:

- $p\theta$ : es el trabajo elástico ( $\theta$ , recuérdese, es el valor de la dilatación unitaria de una partícula elemental). Nulo en los fluidos incompresibles.
- $\Phi$ : la función de disipación. Proporciona la pérdida de energía, asimismo por unidad de volumen y por unidad de tiempo (potencia disipada por unidad de volumen), inherente al movimiento de cualquier fluido real ( $\mu \neq 0$ ). Su valor lo detalla la relación (4.9).

Desde la óptica de los problemas que en ese curso nos preocupan es, con diferencia, la función de disipación cuya expresión, en coordenadas cartesianas, en el caso más general es:

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (4.15)$$

una relación que se utilizará, bien que muy simplificada, al estudiar el flujo laminar entre dos placas planas y paralelas. Sólo sobrevive un término, en concreto  $\Phi = \mu(\partial u/\partial y)^2$ .

- $\nabla \cdot (k\nabla T)$ : representa el flujo térmico por unidad de volumen a través de la superficie elemental que lo limita, siendo  $k$  el coeficiente de conductividad térmica del fluido.

### Conclusión

Las ecuaciones de continuidad (4.2), Navier Stokes (4.6) y energía (4.14), gobiernan cualquier flujo fluido,

abierto o cerrado, laminar o turbulento. Cual se ha dicho, para que el problema quede completamente determinado hacen falta dos ecuaciones adicionales (las de estado). El conjunto (en el caso más general, siete ecuaciones con otras tantas incógnitas) es un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, no lineal y extremadamente complejo que sólo se pueden resolver de manera exacta en casos muy sencillos. El que se presenta al final de este capítulo, el flujo de Couette, es el más sencillo de cuantos se pueden plantear. En cualquier caso, en el epígrafe que sigue, se completan los conceptos sobre turbulencia expuestos en el capítulo precedente para que el alumno tenga una visión lo más general posible de la compleja modelación de los flujos fluidos.

## Modelación matemática del régimen turbulento. La ecuación de Reynolds

Al describir en la lección precedente los tipos de flujo se han establecido las diferencias existentes entre los dos regímenes de circulación posibles con que puede evolucionar los fluidos reales, el laminar y el turbulento. Y al tiempo se ha introducido el número de Reynolds, relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas, como parámetro adimensional que nos indica cuando se presenta un tipo de movimiento u otro. Los valores que se allí se daban para determinar el tipo de régimen no son concluyentes (hay un intervalo,  $2000 < Re < 4000$ , en los que el flujo puede ser de uno u otro tipo) porque, además del número de Reynolds, hay otros factores que, aún cuando influyen mucho menos, también intervienen. Entre otros la rugosidad de la tubería (un mayor valor propicia que la turbulencia aparezca antes) y el gradiente de presiones a lo largo de la dirección principal del movimiento. Cuando es favorable (la presión disminuye en la dirección de avance del fluido) el flujo es más estable y la transición a la turbulencia se pospone. Y, claro está, un gradiente adverso propicia la turbulencia.

El análisis del movimiento turbulento es uno de los capítulos más complejos de la física. En lo que sigue se describen muy sucintamente las directrices a seguir para modelarlo. Y lo primero que conviene decir es que son plenamente válidas las ecuaciones precedentes (energía, Navier Stokes y continuidad) para efectuar su análisis. Pero efectuar un seguimiento detalla-

do del movimiento real, con un campo de velocidades tridimensional tan complejo como el que caracteriza todo régimen turbulento (recordar la descripción realizada en el capítulo anterior) es, sencillamente, imposible. Por ello seguir esta vía de resolución del problema no es razonable y hay que limitarse a estudiar el movimiento del fluido a partir de sus componentes medias, tanto las del vector velocidad tridimensional, como del resto de variables del flujo (densidad, presión o temperatura). Y a tal efecto, se sustituye en todas las ecuaciones que modelan el movimiento las diferentes variables por la suma de su valor medio más el pulsátil y, a renglón seguido, promediarlas en el tiempo.

En el caso de un fluido incompresible (y, por tanto, con la divergencia del vector velocidad del flujo,  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ ) la ecuación de la energía (recordémoslo) se desacopla del conjunto del sistema y sólo es necesario resolver de manera simultánea las ecuaciones de continuidad y Navier Stokes. Pues bien, mientras que en función de los valores medios del flujo, la ecuación de continuidad es idéntica a la que corresponde a la velocidad instantánea (media más pulsátil), la de Navier Stokes sólo cambia en la aparición de un término adicional, una fuerza de turbulencia, que caracteriza estos flujos. De tal manera que, para los valores medios de las variables que caracterizan el flujo principal, estas dos ecuaciones quedan:

$$\nabla \cdot \bar{\vec{V}} = 0 \quad (4.16)$$

que corresponde a la de continuidad de un flujo incompresible,

$$\rho \left( \frac{D\bar{\vec{V}}}{Dt} - \bar{\vec{X}} \right) = -\nabla \bar{p} + \mu \Delta \bar{\vec{V}} + \bar{\vec{R}} \quad (4.17)$$

Y que tras haber tenido en cuenta la ecuación (4.16), anulando la divergencia del vector velocidad media, sumando del segundo miembro de la ecuación (4.17), es la misma ecuación de Navier Stokes (con  $\rho = C$ ), pero con dos únicas diferencias:

- Las variables están referidas a los valores medios del flujo.



- Las componentes de la fuerza de turbulencia  $\vec{R}$  dependen de los valores pulsátiles del vector velocidad, que aparecen como resultado de descomponer la velocidad instantánea en media y pulsátil. Los términos que lo integran son del tipo  $\overline{\rho u^2}$ ,  $\overline{\rho u v}$ , etcétera.

La ecuación (4.17), con el vector característico de la turbulencia, se le denomina ecuación de Reynolds y es, ya se ha dicho, la de Navier Stokes, adaptada a la resolución del régimen turbulento. Pero, y es muy importante subrayarlo, hay que observar que este modo de proceder rompe el equilibrio número de ecuaciones - número de incógnitas. El primero no ha cambiado (las tres correspondientes al balance de fuerzas más la de continuidad en el caso de flujos incompresibles), pero sí lo ha hecho el número de incógnitas porque ahora el vector velocidad incluye seis (las tres medias y las tres pulsátiles) y no tres como antes. Las correspondientes al flujo medio aparecen en los términos habituales de Navier Stokes mientras las propias del movimiento pulsátil están integradas en la fuerza de turbulencia  $\vec{R}$ . Es menester, pues, restituir el equilibrio (hay que "aportar otras tres nuevas ecuaciones") para cerrar de nuevo el sistema, razón por la que este asunto es conocido como "El problema del Cierre", una de las cuestiones que más interés ha suscitado entre los investigadores.

En síntesis, el cierre de las ecuaciones propio del movimiento turbulento consiste en encontrar tres nuevas ecuaciones que relacionen las componentes medias con las pulsátiles, pues no se puede introducir ninguna nueva variable. De hacerlo se rompería de nuevo el equilibrio. Y ello se puede hacer con mayor o menor complejidad dando lugar a cierres de primer orden, de segundo, etcétera. Evidentemente todas las relaciones que se plantean tienen un carácter semiempírico y la validez de las hipótesis que se realizan la deben confirmar la comparación entre los resultados teóricos que se obtienen a partir de la resolución de las ecuaciones con los experimentales. Tan sólo comentar que la mayoría de códigos CFD que se utilizan para resolver estas ecuaciones, y a los que seguidamente se hará referencia, recurren al modelo de cierre de segundo orden denominado  $\kappa - \epsilon$ . Sus detalles se detallan en cualquiera de la infinidad de trabajos dedicados al estudio de la turbulencia.

## Los códigos CFD

La complejidad que comporta la resolución de las cuatro ecuaciones (4.16) y (4.17), más las relaciones complementarias correspondientes al cierre del modelo de turbulencia es enorme. Piénsese, además en la compleja geometría de los contornos sobre los que puede evolucionar un flujo fluido (figura 2). Pero las ecuaciones son las que se acaban de presentar. No hay nada más detrás que su compleja resolución. Con todo, la aparición de los ordenadores y el enorme desarrollo del cálculo numérico posibilita, pese a su extremada complejidad (no se olvide que son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, no lineales, en el marco de contornos sumamente irregulares) resolverlas numéricamente.

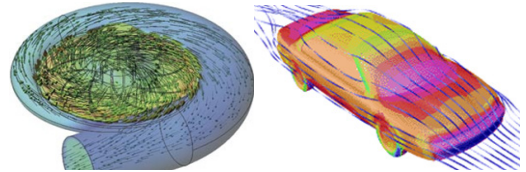


Figura 2 Análisis de flujos fluidos mecánicos (incompresibles) mediante códigos CFD

Se lleva a cabo con los códigos CFD (*Computational Fluid Dynamics*) cuyo desarrollo, además de unos sólidos conocimientos en Mecánica de Fluidos y en Métodos Numéricos, supone una enorme inversión en tiempo sólo al alcance de empresas tan potentes como especializadas. En España probablemente el paquete CFD con mayor cota de mercado sea el FLUENT. Quienes estén interesados en este fascinante mundo pueden visitar la web de la NASA y en particular la página que detalla toda esta información. Está presidida por el título CFD Resources at NASA Langley (<http://aaac.larc.nasa.gov/tsab7CFDlarc/index.html>). Obviamente, como la dinámica de fluidos interviene, de manera más o menos directa, en una infinidad de problemas ingenieriles, el número de aplicaciones es, prácticamente, ilimitado.

En esencia un código CFD "es una conjunción de técnicas que permiten resolver por vía numérica, tanto en el espacio como en el tiempo, las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos para, de este modo, obtener una des-

cripción suficientemente detallada de cualquier campo fluido que presente un interés ingenieril". En función de que sean sólo flujos mecánicos, en los que la ecuación de la energía se ha desacoplado de las cuatro ecuaciones más "mecánicas" (es el caso del flujo a través de una máquina hidráulica o de la aerodinámica de un coche, ambos casos detallados en la precedente figura 2) o se estudien procesos en los que el intercambio de calor juegue un papel relevante (como en la modelación de los procesos de combustión en calderas, ver figura 3) en los que la ecuación de la energía debe resolverse con las mecánicas (e incluso, si hay reacciones químicas como en el ejemplo de la caldera que se propone, añadir las ecuaciones de toda la cinética química) la complejidad del sistema aumenta.

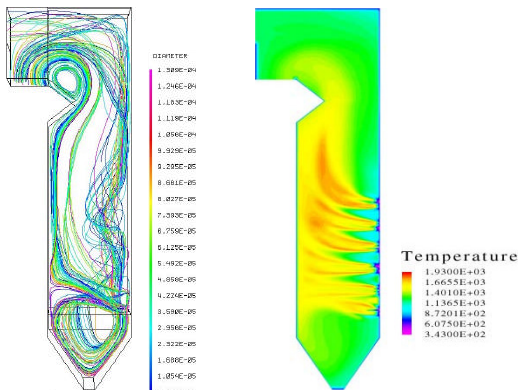


Figura 3 Análisis de flujos fluidos térmicos mediante códigos CFD

Trayectoria de partículas (izq.) Campo de temperaturas (der.)

En esencia el análisis de un flujo mediante un código CFD requiere cubrir tres etapas bien diferenciadas. Análisis físico, análisis espacial y resolución del problema. Cada una de estas tres etapas incluye una serie de pasos intermedios. La primera de ellas, el análisis físico, exige concretar qué términos de las ecuaciones hay que retener para alcanzar resultados satisfactorios y qué modelo de cierre de la turbulencia conviene utilizar. Obviamente mejor, cuanto más sencillo sea, pero sin que ello suponga pérdida de precisión en el análisis. En definitiva en esta primera fase hay que:

- Establecer las hipótesis de partida y justificarlas adecuadamente.

- Concretar de las ecuaciones a resolver y modelos de turbulencia a utilizar.

Concretados los aspectos relacionados con la modelación física se aborda la segunda etapa, el análisis espacial del problema que en esencia consiste en concretar la discretización inherente a todo método numérico. Y se hace estableciendo un mallado cuyo detalle depende del interés de la zona a analizar (obviamente, mallas más tupidas en las áreas de mayor interés). Este es asunto, también de extrema, importancia se estructura en tres pasos:

- Introducción de la geometría de estudio.
- Generación de una malla para discretizar las superficies y volúmenes.
- Establecimiento de las condiciones de contorno.

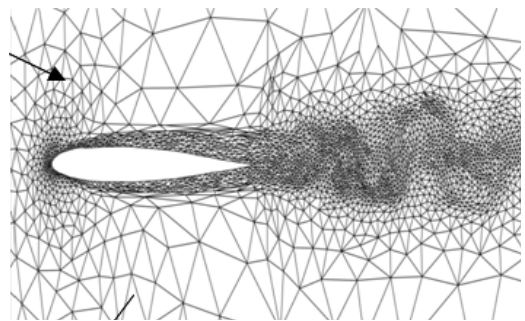


Figura 4 Análisis del comportamiento aerodinámico de un perfil. Discretización típica

de un perfil. Discretización típica

La figura 4 detalla una discretización típica para el análisis de la aerodinámica de un perfil inmerso en una corriente de aire. Claramente se aprecia cómo la malla es más tupida en las zonas de mayor interés, en particular la cola del perfil dadas las turbulencias que en esta zona suelen aparecer y que, para aumentar la eficiencia del perfil, conviene evitar a toda costa. De ahí el mayor detalle del análisis.

Concluidas las dos fases de preparación, se aborda la resolución del problema propiamente dicha. Son tres fases:

- Se discretizan todas las ecuaciones de la dinámica de fluidos expuestas en esta lección y, cuando el

caso lo requiera, se hace lo propio con las que gobiernan los procesos complementarios (transportes de masa y de calor). No conviene olvidar que las ecuaciones fundamentales aquí expuestas (continuidad, Navier Stokes o Reynolds, según proceda, y energía) sólo modelan el movimiento en sí.

- Resolución simultánea utilizando métodos numéricos de las ecuaciones discretizadas, tanto en el tiempo como en el espacio.
- Por último analizar los resultados obtenidos, para distintos escenarios posibles. De hecho es el reducido coste de la repetición de cálculos, correspondientes a situaciones distintas, la gran ventaja de la modelación numérica sobre la física que, a día de hoy, en modo alguno compiten. Antes bien se complementan pues sólo la comprobación experimental de los resultados permite validar estas sofisticadas técnicas numéricas.

### Aplicación de la dinámica diferencial: flujo de Couette

Cuando el flujo es laminar la modelación se simplifica notablemente, pero no tanto como para resolver cualquier problema analíticamente. De hecho sólo se conocen unas pocas decenas de soluciones exactas de la ecuación de Navier Stokes. Por ello para resolver complejos problemas de flujo laminar también se utilizan los códigos CFD. Con todo conviene recordar que son muy pocos los problemas reales en los que un fluido circula en régimen laminar. En general sólo los flujos de aceites muy viscosos, con bajos números de Reynolds, en los que las fuerzas viscosas predominan sobre las de inercia.

De todos ellos el más sencillo es el flujo de Couette. Es el movimiento de un fluido viscoso entre dos placas planas y paralelas que, de algún modo, reproduce el comportamiento de un aceite lubricante dispuesto entre dos superficies metálicas planas y deslizantes. Para simplificar el problema se supone que las placas tienen una superficie infinita pues, de este modo, el flujo puede considerarse bidimensional. La figura 5 detalla el problema que se estudia en el cual se supone que una placa (en este caso la superior) se mueve a una velocidad  $U_0$  (el caso particular de las placas estáticas corresponde a una velocidad  $U_0 = 0$ ). Para generalizar

el problema se suponen las placas inclinadas y un gradiente de presiones no nulo ( $dp/dx \neq 0$ ). Las hipótesis de partida son:

- El régimen es laminar con un Reynolds ( $Re = Ve/\nu$ ) muy bajo.
- El flujo es bidimensional (superficies de las placas infinitas) y estacionario.
  - a) El campo de velocidades sólo depende de  $y$ , es decir,  $\vec{V} = u(y)\vec{i}$ .
  - b) El campo de presiones sólo depende de  $x$ , o sea,  $p = p(x)$ .
- El flujo es incompresible ( $\nabla \cdot \vec{V} = \theta = 0$ ). El campo de velocidades así lo cumple.
- Las únicas fuerzas exteriores de volumen son las gravitatorias ( $U = gh, \vec{X} = -\nabla U$ ).

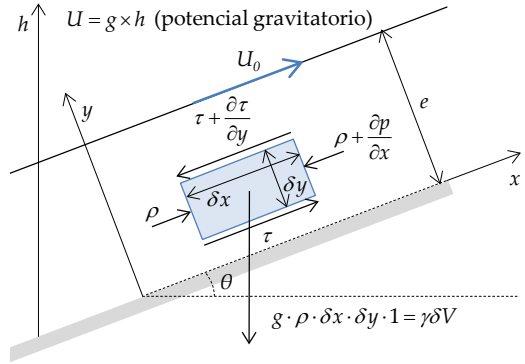


Figura 5 Flujo entre placas planas y paralelas (Flujo de Couette)

Como el flujo es incompresible, la ecuación (4.5) se simplifica, resultando:

$$\rho(\vec{A} - \vec{X}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \tag{4.18}$$

La dirección que presenta un mayor interés es la que corresponde al eje  $x$ . Siendo nula la aceleración, el régimen es estacionario, la precedente ecuación (4.18) en la dirección del eje  $x$ , se simplifica resultando:

$$\rho \frac{\partial(gz)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4.19}$$

Y que, recordando la incompresibilidad del fluido, también se puede escribir, según

$$\frac{\partial(p + \gamma z)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.20)$$

que es la ecuación diferencial, en este caso, particularmente sencilla, que hay que integrar para las condiciones de contorno que sean del caso. Una ecuación que también puede obtenerse fácilmente de manera directa, aplicando un balance de fuerzas al elemento de volumen  $\delta x \cdot \delta y \cdot 1$  de la figura 5 y después, claro está, proyectar el vector peso en la dirección del movimiento  $x$ . En efecto, como la aceleración del flujo es nula, la suma de las tres fuerzas (dos de superficie, las de presión y las viscosas más una tercera de volumen, la gravitatoria) en la dirección del movimiento también debe ser cero. Se tiene:

$$\begin{aligned} \sum(\vec{F})_x = 0 = & \left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \right] 1 \cdot \delta y + \\ & + \left[ -\tau + \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \delta y \right) \right] 1 \cdot \delta x - \gamma \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot 1 \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (4.21)$$

y tras tener en cuenta la hipótesis de Stokes,  $\tau = \mu(du/dy)$ , (la cual también se contempló, obviamente, al establecer la ecuación de Navier) nos conduce de nuevo a (4.20). Asimismo se ha tenido en cuenta que la variación de altura en la dirección del movimiento coincide con el seno del ángulo de las placas ( $dh/dx = \sin \theta$ ).

Su integración completa exige concretar las condiciones de contorno (que no iniciales, pues el régimen es estacionario). Con la placa inferior en reposo el campo de velocidades debe ser nulo (en  $y = 0$ ,  $u = 0$ ) y con la superior ( $y = h$ ) en movimiento, la condición de adherencia exige  $u(h) = U_0$ . En estas condiciones el campo de velocidades resultante es:

$$u(y) = U_0 \frac{y}{h} - \frac{d}{dx} (p + \gamma h) \frac{ey}{2\mu} \left( 1 - \frac{y}{e} \right) \quad (4.22)$$

El gradiente de presiones ( $dp/dx$ ) puede ser negativo (la presión decrece en la dirección de movimiento), en cuyo caso se dice que es favorable puesto que lo facilita. En el supuesto de que sea negativo, se denominará adverso. Y lo mismo sucede con la pendiente. Si  $dh/dx$  es negativo, el flujo avanza en sentido de cota decreciente, y la fuerza gravitatoria contribuye a su avance, siendo la pendiente favorable. Cuando es positivo significa que el flujo debe remontar y, por lo tanto, la pendiente es adversa. En definitiva signos negativos en los gradientes de presión y altura propician el movimiento, lo que explica el signo negativo en la ecuación (4.22).

Evidentemente un flujo de Couette admite infinidad de combinaciones. La más sencilla es la que se presentó para definir la viscosidad en la primera lección. El gradiente de presiones es nulo ( $dp/dx = 0$ ) y al ser las placas horizontales planas tampoco hay gradiente geométrico ( $dh/dx = 0$ ). En este caso, el campo de velocidades es lineal e igual:

$$u(y) = U_0 \frac{y}{e} \quad (4.23)$$

La potencia que se aporta al flujo corresponde al arrastre de la placa y es igual al producto de la fuerza que a aplicar por la velocidad de la propia placa. Referida la fuerza a la unidad de superficie, el cálculo coincide con el valor de la tensión cortante  $d\tau/dy = \mu \cdot U_0/e$ . En definitiva la potencia de arrastre aportada por metro cuadrado de placa  $P_a$  es:

$$P_a = \mu U_0 \frac{U_0}{e} \quad (4.24)$$

una energía que debe compensar la que disipa la viscosidad cuyo cálculo en este caso es, a partir de la función de disipación (ec. 4.15), particularmente sencillo. No puede ser de otro modo, dado el campo de velocidades tan elemental (ec. 4.23) que se tiene. En efecto:

$$\Phi = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)^2 = \mu \left( \frac{U_0}{e} \right)^2 \quad (4.25)$$

Y que es la potencia disipada por unidad de volumen, por lo que la potencia disipada  $P_d$  será:

$$P_d = \int \Phi dV = \int_{y=0}^{y=c} \mu \left( \frac{U_0}{e} \right)^2 1 \cdot dy = \mu \frac{U_0^2}{e} \quad (4.26)$$

Que, como no podía ser de otro modo, coincide con la aportada.

El balance de energía (por unidad de tiempo) es más complejo cuando, además de la potencia de arrastre y la de disipación presentes en este caso tan sencillo, participan los otros dos términos que pueden intervenir en la ecuación más general, los gradientes geométrico y de presión. De los cuatro posibles términos, sólo uno, el correspondiente a la disipación consume siempre energía y actúa en todo flujo frenando el movimiento. Los otros tres términos pueden, según el caso, aportar o detraer energía del movimiento del fluido. Y así un gradiente de presión adverso, al igual que una pendiente adversa, detraen energía cinética al flujo (a costa, claro está, de ganar cota y vencer una presión adversa). Del mismo modo la placa puede arrastrar al fluido cuando el gradiente de velocidades en la ordenada de la placa es positivo ( $[du/dy]_{y=0} > 0$ ) tal cual sucede en el caso analizado, contribuyendo así al movimiento. En definitiva, en un balance energético global la suma de los términos de la primera columna deben igualar los de la segunda.

En cuanto al cálculo de los términos de cada fila procede lo que sigue. De una parte las potencias disipada y de arrastre de la placa ya se han explicado por lo que no conviene insistir en ello. En cuanto a las dos últimas filas que intervienen en el balance energético, y que representan los dos gradientes se calculan del mismo modo: multiplicando el caudal (del flujo, igual en ambos supuestos, por el salto de presión ( $\Delta p$ ) correspondiente a cada caso habido en la unidad de longitud. Para el gradiente gravitatorio es la ganancia de altura (cuando el gradiente geométrico es adverso,  $dh/dx > 0$ , pues en caso contrario hay una pérdida) convertida en salto hidrostático de presión ( $\Delta p = \gamma \cdot \Delta h = \gamma \cdot 1 \cdot \sin\theta$ ). En el caso del gradiente de presiones es el salto de presión por metro de longitud o sea,  $\Delta p = p_2 - p_1$ , supuestos los puntos 1 y 2 distantes una unidad de longitud (con  $p_1 > p_2$  cuando el gradiente es favorable y, por tanto  $\Delta p/\Delta x < 0$ ).

## Conclusión

Esta lección es una primera aproximación al vasto mundo de la dinámica diferencial de los fluidos, tanto en régimen laminar (del que sólo se ha resuelto el caso más sencillo) como en turbulento. Un mundo apasionante al que sólo nos hemos asomado fugazmente.

Tabla 1 Balance energético

Término (energía por unidad de tiempo)	Contribuye al movimiento	Frena el movimiento
Potencia viscosa disipada ( $\Phi$ )		Siempre
Potencia aportada (o absorbida) por la placa	Si en la placa $du/dy > 0$	Si en la placa $du/dy < 0$
Potencia aportada (o restada) de presión	Cuando $dp/dx < 0$	Cuando $dp/dx > 0$
Potencia aportada (o restada) gravitatoria	Cuando $dh/dx < 0$	Cuando $dh/dx > 0$



Capítulo 5

# Dinámica integral de fluidos

## Índice

### Introducción

#### Ecuación de conservación de la masa

Planteamiento de la ecuación

Aplicaciones

#### Ecuaciones de conservación de la energía

La ecuación de Euler

La ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli generalizada

La ecuación del flujo compresible isoterma

La ecuación integral de la energía

Comparación entre la ecuación de Bernoulli y la ecuación de Bernoulli

#### Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento

Formas de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para sistemas inerciales

Formas de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para sistemas no inerciales

#### Ecuaciones de conservación del momento cinético



## Introducción

En el tema 3, dedicado a la cinemática de fluidos, ya se establecieron las definiciones de sistema, VC y SC. Igualmente, se presentó y desarrolló el fundamental teorema del arrastre de Reynolds.

En el tema 4 se ha explicado la importancia de toda la dinámica de fluidos como la parte principal de la mecánica que ya permite la resolución de problemas prácticos. También se ha apuntado la existencia de dos enfoques característicos para el desarrollo de dicha dinámica: el diferencial y el integral, y se han expuesto los fundamentos, complejidad y una aplicación básica del primero de ellos.

El terreno está pues preparado para poder dedicar con rigor y detalle este tema 5, que aquí comienza, al segundo de dichos enfoques: la dinámica integral. El objetivo general es llegar a obtener las ecuaciones de conservación de cuatro propiedades extensivas características de un flujo de fluido, para un volumen de control finito, base de todo análisis integral, y a continuación presentar algunas aplicaciones prácticas de cada una de ellas.

Las cuatro propiedades en cuestión son:

- Masa.
- Energía.
- Cantidad de movimiento.
- Momento cinético.

Las cuatro ecuaciones mencionadas reciben el nombre de conservación de cada propiedad por el hecho de que plantean el balance de esa propiedad para un flujo de fluido concreto que atraviesa un volumen de control concreto bajo unas condiciones concretas del entorno. Cada una de ellas mostrará cómo se relaciona la influencia de las condiciones exteriores al VC (las del entorno) con la variación de la propiedad del flujo a su paso por el VC.

Tan sólo en el caso de la conservación de la energía, y para las condiciones específicas de las ecuaciones de Euler y Bernoulli, se procederá a realizar un balance diferencial de fuerzas específico para la obtención de ambas ecuaciones. Por el contrario, para la obtención de las ecuaciones de conservación de las otras tres propiedades (incluyendo también la ecuación integral de la energía) el procedimiento seguido es perfectamente paralelo entre ellas. Consiste tan sólo en aplicar el teo-

rema del arrastre de Reynolds a la propiedad a estudiar en cada caso, y tener en cuenta cómo son, también en cada caso, las particularidades de la acción del entorno.

## Ecuación de conservación de la masa

### Planteamiento de la ecuación

En este caso se aplicará el Teorema de Arrastre de Reynolds a la propiedad masa. Se trata de una propiedad escalar, por lo que se elimina el símbolo vector de ésta.

$$\bar{H}(t) = m \quad (5.1)$$

$$\bar{h}(\vec{r}, t) = \frac{dm(\vec{r}, t)}{dm} = 1 \quad (5.2)$$

Por definición de sistema, la masa del mismo no varía, por lo que:

$$\frac{dm_{Sist}(t)}{dt} = 0 \quad (5.3)$$

El TAR queda:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{VC(t)} 1 \cdot \rho(\vec{r}, t) dV + \int_{SC(t)} 1 \cdot \rho(\vec{r}, t) \vec{v}_{r,sc}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (5.4)$$

es decir:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) dV + \int_{SC(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}_{r,sc}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (5.5)$$

donde la primera integral es la masa encerrada en el volumen de control en un determinado instante  $t$ :

$$m_{VC}(t) = \int_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) dV \quad (5.6)$$

mientras que la segunda integral corresponde al flujo de masa que atraviesa la superficie de control en el mismo instante  $t$ .

Recordando el concepto de caudal másico:

$$G_{SC}(t) = \int_{SC(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}_{r,sc}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (5.7)$$

la ecuación de continuidad en forma integral podría escribirse, de manera simplificada, como:

$$0 = \frac{dm_{VC}(t)}{dt} + G_{SC}(t) \quad (5.8)$$

El caudal másico  $G_{SC}(t)$  es neto, debiendo contabilizarse como positivo el que abandona el VC y como negativo el que entra al mismo a través de la superficie de control.

Entrada:  $\vec{v}_{r,sc}(\vec{r}, t) d\vec{A} < 0 \quad (5.9a)$

Salida:  $\vec{v}_{r,sc}(\vec{r}, t) d\vec{A} > 0 \quad (5.9b)$

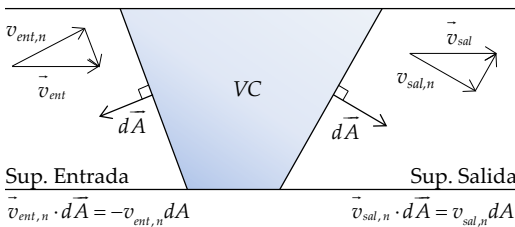


Figura 1 Producto escalar de las velocidades por el diferencial de área

Esto es así dado que el producto escalar de la velocidad por el diferencial de área es positivo para el flujo saliente y negativo para el entrante. Y esto, a su vez, queda reflejado en la figura 1, en la que, como siempre, el diferencial de área  $dA$ , como vector, va siempre hacia fuera de la SC.

Si se tienen varias entradas y salidas al VC, el caudal másico puede escribirse como:

$$G_{SC}(t) = \sum_{Salidas i} G_i(t) - \sum_{Entradas j} G_j(t) \quad (5.10)$$

Como puede observarse aparece explícito el signo negativo delante del caudal másico de entrada, por lo que:

$$G_{Entj}(t) = \left| \int_{Ent.j(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}_{r,Entj}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \right| \quad (5.11a)$$

Mientras que:

$$G_{Sal i}(t) = \int_{Sal i(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}_{r,Sali}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (5.11b)$$

Por lo tanto, la ecuación de continuidad puede escribirse como:

$$0 = \frac{dm_{VC}(t)}{dt} + \sum_{Salidas i} G_i(t) - \sum_{Entradas j} G_j(t)$$

$$\frac{dm_{VC}(t)}{dt} = \sum_{Entradas j} G_j(t) - \sum_{Salidas i} G_i(t) \quad (5.12)$$

Esta expresión es más intuitiva: "La variación con el tiempo de la masa encerrada en el VC es igual al flujo neto de masa que por unidad de tiempo atraviesa la SC". Es decir:

Si  $\sum_{Entradas j} G_j(t) > \sum_{Salidas i} G_i(t) \rightarrow \frac{dm_{VC}(t)}{dt} > 0$   
 luego  $m_{VC}(t)$  aumenta (5.13a)

Si  $\sum_{Entradas j} G_j(t) < \sum_{Salidas i} G_i(t) \rightarrow \frac{dm_{VC}(t)}{dt} < 0$   
 luego  $m_{VC}(t)$  disminuye (5.13b)

## Aplicaciones

### 1. Conducciones

En este caso tanto el VC como la SC son no deformables y fijas.

En el caso de un **fluido incompresible** ( $\rho = cte$ ), la masa encerrada dentro del VC es siempre la misma, ya que el VC es fijo e indeformable:

$$m_{VC}(t) = \int_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) dV = cte \quad (5.14)$$

por lo que:

$$\frac{dm_{VC}(t)}{dt} = 0 \quad (5.15)$$

Ello implica que,

$$\sum_{Entradas\ j} G_j(t) = \sum_{Salidas\ i} G_i(t) \quad (5.16)$$

Dado que la densidad es constante, se puede sacar de la integral que evalúa el caudal másico:

$$G_{Entj}(t) = \left| \int_{Entj(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}_{r, Entj}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \right| \quad (5.17a)$$

$$G_{Sal i}(t) = \int_{Sal i(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}_{r, Sal i}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (5.17b)$$

Recordando la expresión del caudal volumétrico, tanto para las secciones de entrada como de salida (para las secciones de entrada se ha calculado el módulo):

$$Q_{Entj}(t) = \left| \int_{Entj(t)} \vec{v}_{r, Entj}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \right| \quad (5.18a)$$

quedará:

$$Q_{Sal i}(t) = \int_{Sal i(t)} \vec{v}_{r, Sal i}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (5.18b)$$

$$G_{Entj}(t) = \rho Q_{Entj}(t) \quad (5.19a)$$

$$G_{Sal i}(t) = \rho Q_{Sal i}(t) \quad (5.19b)$$

quedando para este caso la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned} \rho \sum_{Entradas\ j} Q_j(t) &= \rho \sum_{Salidas\ i} Q_i(t) \\ \sum_{Entradas\ j} Q_j(t) &= \sum_{Salidas\ i} Q_i(t) \end{aligned} \quad (5.20)$$

es decir, el caudal volumétrico de entrada es igual al de salida.

En los productos escalares de las ecuaciones (5.18a) y (5.18b) tan solo se consideran las componentes de la velocidad perpendiculares a las superficies de entrada y salida, por lo que puede escribirse, considerando la dirección  $n$  perpendicular a la superficie:

$$\vec{v}_{r, Entj}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = v_{r, Entj, normal}(\vec{r}, t) dA \quad (5.21a)$$

$$\vec{v}_{r, Sal i}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = v_{r, Sal i, normal}(\vec{r}, t) dA \quad (5.21b)$$

Además, si se tiene en cuenta el concepto de velocidad media:  $v_{media} = Q/A$ , se tiene:

$$Q_{Entj}(t) = v_{Entj, media, normal}(t) A_{Entj} \quad (5.22a)$$

$$Q_{Sal i}(t) = v_{Sal i, media, normal}(t) A_{Sal i} \quad (5.22b)$$

El valor de  $v_{Entj, media, normal}(t)$  se considera como positivo en esta ecuación. Para simplificar la escritura, se hará:

$$v_{Entj, media, normal}(t) = v_{Entj}(t) \quad (5.23a)$$

$$v_{Sal i, media, normal}(t) = v_{Sal i}(t) \quad (5.23b)$$

Por lo tanto, se puede escribir:

$$\sum_{Entradasj} v_j(t)A_j = \sum_{Salidas i} v_i(t)A_i \quad (5.24)$$

Para el caso de una conducción con una sola entrada y una sola salida se tiene:

$$v_{Ent}(t)A_{Ent} = v_{Sal}(t)A_{Sal} \quad (5.25)$$

y si la conducción es de sección constante, con  $A_{Ent} = A_{Sal}$  se tiene la igualdad de velocidades:

$$v_{Ent}(t) = v_{Sal}(t) \quad (5.26)$$

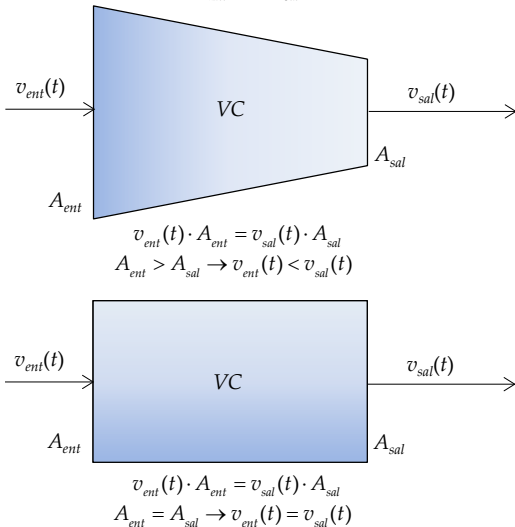


Figura 2 Ecuación de continuidad en conducciones para flujo incompresible

Para fluido **compresible** en régimen permanente, la densidad solo varía en el espacio, no en el tiempo ( $\rho = \rho(\vec{r})$ ). Si el VC es fijo e indeformable, al no variar la densidad con el tiempo la masa encerrada en el mismo se mantiene invariante ( $m_{VC}(t) = cte$ ). Por lo tanto, se cumple que:

$$\frac{dm_{VC}(t)}{dt} = 0 \quad (5.27)$$

Ello implica, al igual que en el caso anterior, que:

$$\sum_{Entradasj} G_j = \sum_{Salidas i} G_i \quad (5.28)$$

En este caso se ha eliminado la variable tiempo ( $t$ ) al tratarse de régimen permanente.

Para cada superficie de entrada o salida la densidad se mantiene constante, por lo que el caudal másico se puede escribir como:

$$G_{Entj}(t) = \rho_{Entj} \left| \int_{Entj(t)} \vec{v}_{r,Entj}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \right| \quad (5.29a)$$

$$G_{Sal i}(t) = \rho_{Sal i} \int_{Sal i(t)} \vec{v}_{r,Sal i}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (5.29b)$$

Recordando la expresión del caudal volumétrico, tanto para las secciones de entrada como de salida (para las secciones de entrada se ha calculado el módulo):

$$Q_{Entj}(t) = \left| \int_{Entj(t)} \vec{v}_{r,Entj}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \right| \quad (5.30a)$$

$$Q_{Sal i}(t) = \int_{Sal i(t)} \vec{v}_{r,Sal i}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (5.30b)$$

quedará:

$$G_{Entj} = \rho_{Entj} Q_{Entj} \quad (5.31a)$$

$$G_{Sal i} = \rho_{Sal i} Q_{Sal i} \quad (5.31b)$$

quedando para este caso la ecuación de continuidad:

$$\sum_{Entradasj} \rho_j Q_j = \sum_{Salidasi} \rho_i Q_i \quad (5.32)$$

Recordando que en el caso de una conducción:

$$Q_{Entj} = v_{Entj} A_{Entj} \quad (5.33a)$$

$$Q_{Sal i} = v_{Sal i} A_{Sal i} \quad (5.33b)$$

siendo  $v_{Entj}$  y  $v_{Sal i}$  velocidades medias en la dirección del flujo, se puede escribir:

$$\sum_{Entradasj} v_j(t) A_j = \sum_{Salidasi} v_i(t) A_i \quad (5.34)$$

Para el caso de una conducción con una sola entrada y una sola salida se tiene:

$$\rho_{Ent} v_{Ent} A_{Ent} = \rho_{Sal} v_{Sal} A_{Sal} \quad (5.35)$$

y si la conducción es de sección constante, con  $A_{Ent} = A_{Sal}$ , se tiene la igualdad:

$$\rho_{Ent} v_{Ent} = \rho_{Sal} v_{Sal} \quad (5.36)$$

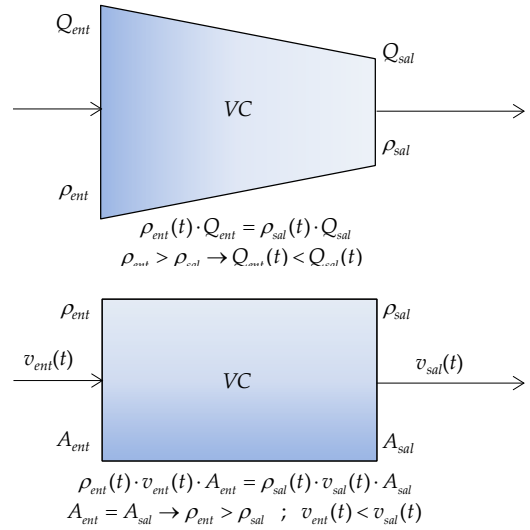


Figura 3 Ecuación de continuidad en conducciones para flujo compresible en régimen permanente

Por ejemplo, en una conducción de transporte de gas natural a alta presión en régimen permanente en la que la densidad del mismo va disminuyendo progresivamente a lo largo de la conducción al hacerlo la presión, la velocidad del gas irá aumentando en la misma medida. Esto es así ya que para mantener el caudal másico, al disminuir la densidad debe incrementarse la velocidad para poder transportar la misma masa de gas por unidad de tiempo.

## 2. Depósitos

Un depósito es un dispositivo que permite almacenar fluidos, sea en estado líquido, gaseoso o en ambos estados. Debe existir un flujo de entrada, a través de una o varias secciones, o un flujo de salida del depósito o ambos. En definitiva, un depósito es un VC en el que es posible almacenar masa, es decir, la masa del VC será variable con el tiempo en función del balance entre las entradas y salidas. Si el depósito está en contacto con la atmósfera, la presión en la parte superior del mismo será la atmosférica, lo que ocurre en muchos casos de almacenamiento de líquidos, como por ejemplo en los depósitos de las redes de distribución de agua. En el caso de almacenamiento de gases o combinación de líquidos y gases, los depósitos deben estar aislados

de la atmósfera, siendo estancos. Se distinguen así los depósitos atmosféricos y los depósitos presurizados.

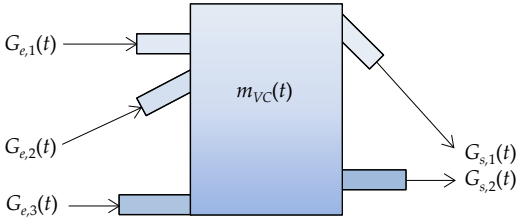


Figura 4 Esquema depósito

Se partirá de la misma ecuación:

$$\frac{dm_{VC}(t)}{dt} = \sum_{\text{Entradas } j} G_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} G_i(t) \quad (5.37)$$

con:

$$G_{\text{Ent } j}(t) = \rho_{\text{Ent } j}(t) Q_{\text{Ent } j}(t) \quad (5.38a)$$

$$G_{\text{Sal } i}(t) = \rho_{\text{Sal } i}(t) Q_{\text{Sal } i}(t) \quad (5.38b)$$

$$Q_{\text{Ent } j}(t) = v_{\text{Ent } j}(t) A_{\text{Ent } j} \quad (5.39a)$$

$$Q_{\text{Sal } i}(t) = v_{\text{Sal } i}(t) A_{\text{Sal } i} \quad (5.39b)$$

En el caso más general, la ecuación quedaría:

$$\frac{dm_{VC}(t)}{dt} = \sum_{\text{Entradas } j} \rho_j(t) Q_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} \rho_i(t) Q_i(t) \quad (5.40)$$

Si la densidad en el interior del recipiente (VC) es uniforme aunque variable con el tiempo ( $\rho_{VC}(t)$ ), puede escribirse:

$$m_{VC}(t) = \forall(t) \cdot \rho_{VC}(t) \quad (5.41)$$

por lo que:

$$\frac{m_{VC}(t)}{dt} = \forall(t) \cdot \frac{d\rho_{VC}(t)}{dt} + \rho_{VC}(t) \cdot \frac{d\forall(t)}{dt} \quad (5.42)$$

quedando finalmente:

$$\begin{aligned} \forall(t) \cdot \frac{d\rho_{VC}(t)}{dt} + \rho_{VC}(t) \cdot \frac{d\forall(t)}{dt} &= \\ &= \sum_{\text{Entradas } j} \rho_j(t) Q_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} \rho_i(t) Q_i(t) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Si el volumen del depósito fuera constante ( $\forall(t) = \forall$ ), la variación con el tiempo del mismo sería nula ( $d\forall(t)/dt = 0$ ), por lo que quedaría:

$$\forall(t) \cdot \frac{d\rho_{VC}(t)}{dt} = \sum_{\text{Entradas } j} \rho_j(t) Q_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} \rho_i(t) Q_i(t) \quad (5.44)$$

## - Depósitos atmosféricos

En el caso de un depósito abierto a la atmósfera (depósito atmosférico), solo se pueden almacenar líquidos. Si se considera como VC no todo el depósito, sino la porción del mismo ocupada en cada momento por el fluido, el volumen del VC será variable con el tiempo (VC deformable). Asimismo, al considerar solo el volumen del líquido, la densidad será constante ( $\rho_{VC}(t) = \rho$ ). Así pues, en este caso se tendrá:

$$\rho \cdot \frac{d\forall(t)}{dt} = \sum_{\text{Entradas } j} \rho Q_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} \rho Q_i(t) \quad (5.45)$$

y eliminando la densidad  $\rho$  de ambos lados de la ecuación:

$$\frac{d\forall(t)}{dt} = \sum_{\text{Entradas } j} Q_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} Q_i(t) \quad (5.46)$$

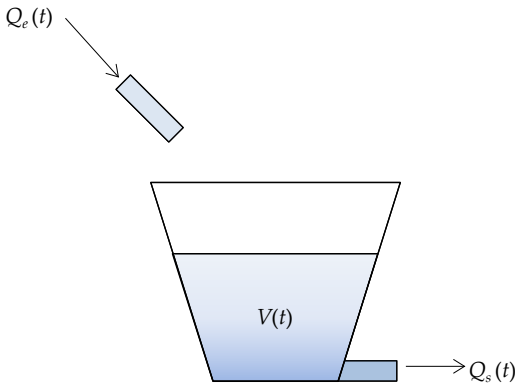
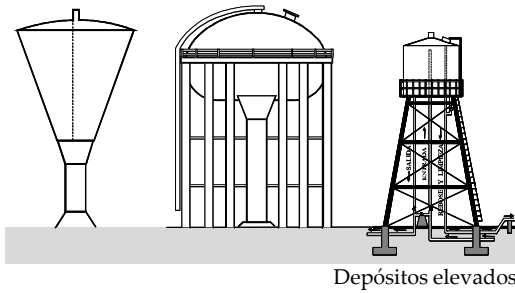
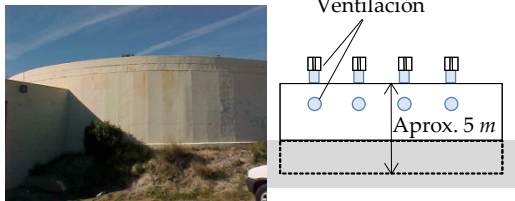


Figura 5 Esquema depósito atmosférico



Depósitos elevados



Depósitos semienterrados

Figura 6 Depósitos atmosféricos

Pasando  $dt$  al segundo miembro de la ecuación es posible integrar la misma para obtener el volumen del depósito en un determinado instante  $t$ ,  $V(t)$ , conociendo el volumen del mismo  $V_0$  en un instante inicial  $t_0$  ( $V(t_0) = V_0$ ):

$$\int_{V_0}^{V(t)} dV(t) = \int_{t_0}^t \left( \sum_{\text{Entradas } j} Q_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} Q_i(t) \right) dt \quad (5.47)$$

quedando:

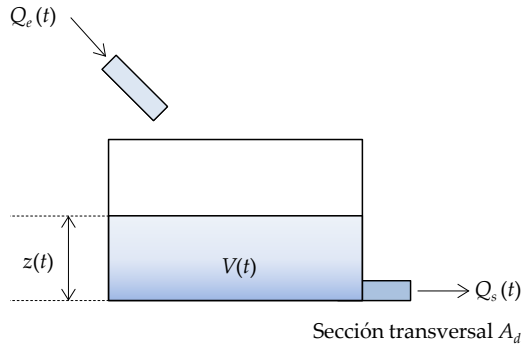
$$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^t \left( \sum_{\text{Entradas } j} Q_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} Q_i(t) \right) dt \quad (5.48)$$

Si el depósito es de sección recta constante, la ecuación se simplifica aún más. Para una sección recta  $A_d$  y llamando  $z(t)$  al nivel de agua en el depósito desde la solera (suelo del depósito), se tiene:  $V(t) = A_d \cdot z(t)$ , con lo que:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A_d \cdot \frac{dz(t)}{dt} \quad (5.49)$$

quedando:

$$A_d \frac{dz(t)}{dt} = \sum_{\text{Entradas } j} Q_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} Q_i(t) \quad (5.50)$$



Sección transversal  $A_d$

Figura 7 Depósitos atmosféricos de sección transversal constante  $A_d$

E integrando entre  $t_0$  y  $t$ , siendo el valor inicial de la cota  $z_0$ , se tiene:

$$z(t) = z_0 + \frac{1}{A_d} \int_{t_0}^t \left( \sum_{\text{Entradas } j} Q_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} Q_i(t) \right) dt \quad (5.51)$$

- **Depósitos que almacenan gases**

En estos casos el volumen del depósito es constante, por lo que la ecuación diferencial será:

$$\forall \cdot \frac{d\rho_{VC}(t)}{dt} = \sum_{\text{Entradas } j} G_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} G_i(t) \quad (5.52)$$

En el caso de que el gas que llena el depósito siga la ley de los gases perfectos, siendo la constante del gas  $R$ , y evolucione isotérmicamente a una temperatura  $T$ , la densidad puede expresarse como:

$$\rho_{VC}(t) = \frac{P^*_{VC}(t)}{RT} \quad (5.53)$$

con lo que la ecuación diferencial quedaría:

$$\frac{V}{RT} \cdot \frac{dP^*_{VC}(t)}{dt} = \sum_{\text{Entradas } j} G_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} G_i(t) \quad (5.54)$$

Conocidos los caudales máscicos de entrada y salida, así como las condiciones iniciales, se estaría en disposición de determinar la ley de variación de la presión absoluta en el interior del recipiente con el tiempo  $P^*_{VC}(t)$ .

Evidentemente, en este caso, cuando el caudal de entrada es mayor que el de salida se acumula masa en el recipiente, por lo que tanto la densidad del gas como la presión se incrementan. Si el caudal de salida es mayor que el de entrada, disminuye con el tiempo tanto la densidad como la presión.

- **Depósitos presurizados líquido/gas**

En ocasiones se utilizan depósitos presurizados para almacenar líquidos, en contacto con un gas a presión que permite mantener presurizado el líquido. Es el caso de los extintores o de los calderines de los grupos hidropresores.

En el caso de los grupos hidropresores, una bomba de agua llena el calderín, comprimiendo el gas (normalmente aire) que existe en su interior. Cuando el aire ha alcanzado una determinada presión como consecuencia de la compresión a que se ha visto sometido al llenarse de agua el recipiente, la bomba para. A partir de ese momento el agua saldrá del calderín hacia los puntos de consumo impulsada por el gas presurizado. Este se expandirá, disminuyendo su presión hasta un valor mínimo que activará de nuevo el presostato para arrancar la bomba y reiniciar el ciclo.

En estos casos se pretende que la masa de aire contenida en el interior del recipiente sea constante, si bien este se comprimirá y expandirá. Por el contrario, la masa de agua en el interior del recipiente será variable.

En la ecuación (5.55):

$$\frac{dm_{VC}(t)}{dt} = \sum_{\text{Entradas } j} \rho_j(t)Q_j(t) - \sum_{\text{Salidas } i} \rho_i(t)Q_i(t) \quad (5.55)$$

la densidad será constante en el segundo miembro de la ecuación por tratarse de agua ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ). Generalmente solo existirá una entrada y una salida. La masa encerrada en el volumen de control será, en cada instante, la suma de la masa del agua y la masa del aire, está última no dependiente del tiempo:

$$m_{VC}(t) = m_{\text{aire}} + m_{\text{agua}}(t)$$

$$\frac{dm_{VC}(t)}{dt} = \frac{dm_{\text{agua}}(t)}{dt} = \rho_{\text{agua}} \frac{\rho \forall_{VC}(t)}{dt} \quad (5.56)$$

Como el volumen del acumulador es fijo, la suma de los volúmenes de agua y aire en cada instante se mantiene constante:  $\forall_{\text{calderin}} = \forall_{\text{agua}}(t) + \forall_{\text{aire}}(t) = cte$ , lo que implica que:

$$\begin{aligned} \frac{dm_{VC}(t)}{dt} &= \rho_{\text{agua}} \frac{d\forall_{\text{agua}}(t)}{dt} = \\ &= \rho_{\text{agua}} \frac{d(\forall_{\text{calderin}} - \forall_{\text{aire}}(t))}{dt} = -\rho_{\text{agua}} \frac{d\forall_{\text{aire}}(t)}{dt} \quad (5.57) \end{aligned}$$



Por lo tanto, la ecuación diferencial puede escribirse como:

$$-\rho_{\text{agua}} \frac{d\mathcal{V}_{\text{aire}}(t)}{dt} = \rho_{\text{agua}} Q_{\text{ent}}(t) - \rho_{\text{agua}} Q_{\text{sal}}(t)$$

$$\frac{d\mathcal{V}_{\text{aire}}(t)}{dt} = Q_{\text{sal}}(t) - Q_{\text{ent}}(t) \quad (5.58)$$

## Ecuaciones de conservación de la energía

### La ecuación de Euler

La deducción de la ecuación de Euler comienza con un balance diferencial de fuerzas sobre una partícula de fluido, que se desplaza entre los puntos 1 y 2, a lo largo de una línea de corriente (coordenada  $s$ ), en un flujo ideal y unidimensional (figura 8).

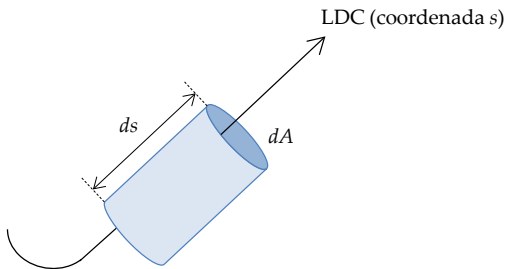


Figura 8 Partícula de fluido

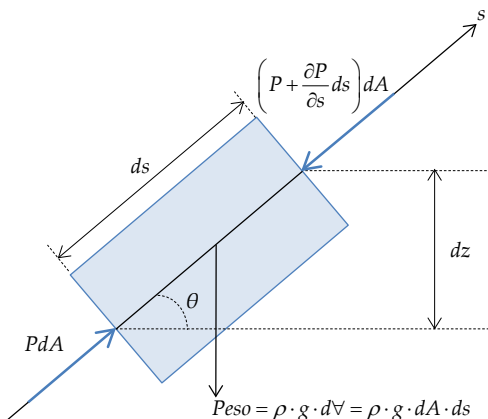


Figura 9 Balance de fuerzas sobre la partícula de fluido

La partícula diferencial objeto del balance se plantea con forma cilíndrica, de base  $dA$  y altura  $ds$ . Sobre la misma actúan (figura 9) las fuerzas de presión, aplicadas en cada una de sus bases, así como la fuerza del peso.

El planteamiento del balance comienza con la segunda ley de Newton aplicada en la dirección de la coordenada  $s$ :

$$\sum dF_s = dm \cdot a_s \quad (5.59)$$

Desarrollando el término izquierdo de la ecuación, y teniendo en cuenta el sentido positivo de la coordenada  $s$  mostrado en la figura 9, se tiene:

$$\sum dF = PdA - \left( P + \frac{\partial P}{\partial s} ds \right) dA - \text{Peso} \cdot \sin \theta =$$

$$= PdA - PdA - \frac{\partial P}{\partial s} ds \cdot dA - \rho \cdot g \cdot dA \cdot ds \cdot \sin \theta \quad (5.60)$$

Desarrollando el término derecho, se encuentran los términos local y convectivo de la aceleración total de la partícula (en la dirección  $s$ ):

$$dm \frac{Dv}{Dt} = dm (a_{\text{local}} + a_{\text{convect}}) = \rho \cdot ds \cdot dA \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad (5.61)$$

De este modo, sustituyendo en la ecuación original los términos izquierdo y derecho, se llega a la expresión concreta del balance diferencial de fuerzas:

$$PdA - PdA - \frac{\partial P}{\partial s} ds \cdot dA - \rho \cdot g \cdot ds \cdot dA \cdot \sin \theta =$$

$$= \rho \cdot ds \cdot dA \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad (5.62)$$

donde los dos términos  $PdA$  se anulan entre sí.

A partir de la ecuación anterior, la de Euler se obtiene tras:

- Dividirla por el diferencial de masa,  $dm = dA \cdot ds \cdot \rho$ . De este modo la ecuación de Euler dimensionalmente no representará fuerzas sino fuerzas por unidad de masa.
- Relacionar la dirección  $s$  con la dirección vertical  $z$ , es decir,  $dz = ds \cdot \sin\theta$ .
- Sustituir el término de aceleración convectiva por la forma:  $v(\partial v/\partial s) = (1/2)(\partial v^2/\partial s)$
- Reunir todos los términos en un lado de la igualdad.

A modo de conclusión, la ecuación de Euler representa el balance de fuerzas diferenciales por unidad de masa que actúa sobre una partícula de fluido que se mueve a lo largo de una línea de corriente, inmersa en un flujo ideal y unidimensional en  $s$ . Es aplicable por tanto al caso de flujos permanentes y transitorios, así como compresibles e incompresibles. Su forma definitiva es la siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} + g \frac{dz}{ds} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} = 0 \quad (5.63)$$

## La ecuación de Bernoulli

Como se ha visto en el capítulo de cinemática, uno de los tipos de flujo más sencillos es el que presenta una velocidad constante a lo largo del tiempo (permanente, término local de la aceleración nulo) y una densidad igualmente constante (incompresible).

La incorporación de estas dos condiciones a la ecuación de Euler da como resultado una de las ecuaciones más conocidas y utilizadas de toda la mecánica de fluidos: la ecuación de Bernoulli. Como se verá a continuación, durante el desarrollo para su obtención se producen dos cambios importantes:

- Dimensionalmente, se pasa de representar fuerza por unidad de masa (Euler) a energía por unidad de peso (Bernoulli).
- Al realizar una integración a lo largo de un trayecto concreto (desde un punto 1 hasta un punto 2) a lo largo de una línea de corriente, se pasa de una forma diferencial (Euler) a una forma integral (Bernoulli).

Por tanto, se puede adelantar ya, que la ecuación de Bernoulli representará un balance energético del recorrido que hace una partícula de fluido entre dos puntos concretos, a lo largo de una línea de corriente, e inmersa en un flujo ideal, unidimensional en  $s$ , permanente e incompresible.

La obtención de la ecuación de Bernoulli parte de la integración de la de Euler entre los puntos 1 y 2, se entiende, a lo largo de la línea de corriente por la que se está moviendo la partícula:

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} ds + \int_1^2 g \frac{\partial z}{\partial s} ds + \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} ds + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0 \quad (5.64)$$

En este momento, además de la condición de flujo ideal, se incorporan dos más:

- De flujo incompresible, con lo cual, la densidad puede entrar dentro de la derivada de la presión, de la misma forma que la gravedad puede entrar en la derivada de la cota.
- De flujo permanente, con lo cual el término correspondiente a la aceleración local se anula.

A continuación, las tres integrales separadas de los términos de presión, cota y velocidad pueden reunirse en una sola:

$$\int_1^2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} \right) ds = 0 \quad (5.65)$$

Debe subrayarse que ha sido en este paso fundamental de la integración, en el que la ecuación ha pasado de representar fuerzas de presión, gravitatorias e inerciales a energías elásticas de presión, potencial y cinética, respectivamente.

Procediendo con la integración propiamente dicha se llega a la forma:

$$\left[ \frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} \right]_1 = \left[ \frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} \right]_2 \quad (5.66)$$

que es la ecuación de Bernoulli expresada en energía por unidad de masa. Dividiendo esta ecuación por la aceleración de la gravedad se concluye en:

$$\left[ \frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \right]_1 = \left[ \frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \right]_2 \quad (5.67a)$$

o bien,

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (5.67b)$$

que es la versión más utilizada de la ecuación, y representa el mismo balance pero expresando la energía por unidad de peso.

### 1. El coeficiente corrector $\alpha$

Un inconveniente que presenta la aplicación práctica de la ecuación de Bernoulli tal como se ha presentado, es el hecho de que debe aplicarse a una partícula que se mueve a lo largo de una línea de corriente entre dos posiciones, desde 1 hasta 2. Esto supone un problema porque implicaría que el resultado de su aplicación dependería de las condiciones específicas de la partícula sobre la que se decida aplicar.

La figura 10 muestra un flujo ideal, permanente e incompresible, circulando entre dos secciones de una conducción, 1 y 2. Para facilitar la explicación se ha supuesto también laminar, de tal modo que los perfiles de velocidades son parabólicos en ambas secciones. En dicha figura se han mostrado igualmente tres líneas de corriente ('', '' y ''').

Como puede apreciarse directamente en la figura 10, considerando cualquiera de las dos secciones, por ejemplo la 1, tanto la cota ( $z$ ) como la velocidad ( $v$ ) son distintas según se considere la línea de corriente en 1', 1'' o 1'''. Igualmente puede razonarse que la presión no sería la misma para cualquiera de esas tres mismas líneas de corriente. Por otra parte lo mismo ocurre para las tres mismas variables de las líneas de corriente en la sección 2 (2', 2'' y 2''').

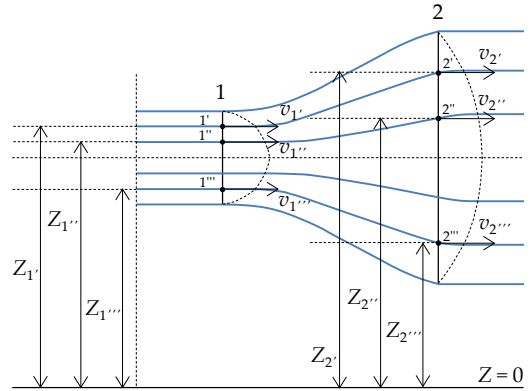


Figura 10 Líneas de corriente entre dos secciones, 1 y 2, en un flujo (laminar, permanente, ideal e incompresible)

Ante la resolución del balance energético del flujo entre las secciones 1 y 2, mediante la ecuación de Bernoulli presentada más arriba surgiría la duda práctica de qué línea de corriente ('', '' o ''') es la que debe elegirse para aplicar tal ecuación al recorrido de la misma entre ambas secciones. Y la respuesta práctica es simple, ninguna de las tres.

Desde un punto de vista práctico, no puede asumirse que la resolución de un balance energético (como puede ser el mostrado para un sistema como el de la figura 10, haya de depender de la selección de una u otra línea de corriente. La solución pasa por trabajar, efectivamente, con la ecuación de Bernoulli pero utilizando los valores promedio de cada una de las variables en cada sección. Es decir, no se trata de tomar la velocidad en 1', 1'' o 1''', sino de tomar el valor promedio de la velocidad para toda la sección 1. Tomar, a continuación, los valores promedios de cota y presión, y trasladar a la ecuación de Bernoulli dichos valores medios, tanto en la sección 1 como en la 2. El problema surge al cuestionarse si el trabajar con los valores promedio de las variables en las secciones es equivalente a hacerlo con valores individuales de línea de corriente. La respuesta para las variables de cota y presión es sencilla y afirmativa. Considerando el valor promedio de ambas como el que corresponde al punto medio de la sección (1'', eje de la conducción), se comprende fácilmente cómo la suma de ambas variables puede considerarse constante para líneas de corriente situadas, por ejemplo, por encima (1') o debajo (1''') de la misma.

Sin embargo, no ocurre lo mismo con la velocidad. Como ya se ha visto en el capítulo de cinemática, el cálculo de la velocidad media de una sección es sencillo, y más aún en el caso de un flujo laminar. Sin embargo utilizar directamente tal valor de velocidad media sobre la ecuación de Bernoulli sería incorrecto, pues la velocidad aparece elevada al cuadrado. La solución para poder hacerlo pasa por utilizar el denominado **coeficiente corrector de la energía cinética**,  $\alpha$ . De este modo, la forma estricta que adopta la ecuación de Bernoulli cuando se utilizan valores promedios en las secciones es la siguiente:

$$\frac{\bar{P}_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} = \frac{\bar{P}_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} \quad (5.68)$$

La definición del coeficiente  $\alpha$  surge del cálculo del flujo de energía cinética por unidad de tiempo que atraviesa una sección:

- Simplificando el perfil real de velocidades existente en la sección a un perfil uniforme igual a la velocidad media ( $\bar{v}$ ), el flujo de energía cinética que atravesaría la sección sería:

$$\left[ \frac{E.Cinética}{Tiempo} \right]_{Unif\ con\ \bar{v}} = \frac{\bar{v}^2}{2g} \frac{\gamma V}{t} = \frac{\bar{v}^2}{2} \rho Q = \frac{\bar{v}^3}{2} \rho A \quad (5.69)$$

- El flujo real de energía cinética que efectivamente está atravesando la sección se obtiene integrando la expresión anterior para la velocidad de cada punto de la sección.

$$\left[ \frac{E.Cinética}{Tiempo} \right]_{Real} = \int_A \frac{\bar{v}^3}{2} \rho dA \quad (5.70)$$

A partir de las dos expresiones anteriores, el coeficiente  $\alpha$  deberá tomar el valor necesario para que, multiplicando el mismo al cálculo con el perfil uniforme, se obtenga el mismo resultado que con el perfil real. Es decir:

$$\alpha \left[ \frac{E.Cinética}{Tiempo} \right]_{Unif\ con\ \bar{v}} = \left[ \frac{E.Cinética}{Tiempo} \right]_{Real} \quad (5.71)$$

Lo cual lleva a la definición:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{v}{\bar{v}} \right)^3 dA \quad (5.72)$$

Trabajando sobre la definición anterior puede llegarse a las siguientes conclusiones:

- El coeficiente  $\alpha$  siempre es mayor que la unidad.
- Para el caso de régimen laminar, el valor del coeficiente  $\alpha$  es, aproximadamente, 2.
- Para el caso de régimen turbulento, el valor del coeficiente  $\alpha$  es, aproximadamente, 1.

Como se verá más adelante en el tema de flujo en presión y en el que es habitual el trabajo con flujos (muy) turbulentos, dado que el coeficiente  $\alpha$  tiene un valor muy cercano a la unidad, éste ni siquiera se explicita en la ecuación.

## 2. El concepto de altura

Como ya se ha explicado, la forma más común de la ecuación de Bernoulli plantea el balance energético entre dos secciones de un flujo en forma de energía por unidad de peso. Aunque en un principio este tratamiento energético pueda resultar extraño la primera vez que se estudie, presenta ventajas indiscutibles de índole práctica, al tiempo que facilita la definición de nuevos conceptos en mecánica de fluidos.

En primer lugar cabe plantear un rápido análisis dimensional de esos términos de Bernoulli expresados como energía por unidad de peso:

$$\frac{[Energía]}{[Peso]} = \frac{[F][L]}{[F]} = [L] \quad (5.73)$$

Efectivamente, la energía expresada por unidad de peso, tiene sencillamente dimensiones de longitud, y por lo tanto, sus unidades de medida serán siempre unidades de longitud en cualquier sistema de unidades que se utilice. Lo mismo podría haberse razonado, tan sólo revisando la ecuación de Bernoulli y comprobando que el término de cota ( $z$ ) va simplemente sumado a los otros dos. Y puesto que las cotas se miden en unidades de longitud lo mismo debe hacerse con los otros términos para que la ecuación sea dimensionalmente coherente.

En el Sistema Internacional, por tanto, los términos de la ecuación de Bernoulli se expresarán en metros. En general, y para acentuar el hecho de que dichos metros corresponden a una energía por unidad de peso (de un determinado fluido) y no a una longitud estrictamente física, se denominan "metros de columna de fluido", *mcf*, y no "metros", *m*, a secas.

Otra forma de referirse a cada uno de los términos de la ecuación de Bernoulli es con la denominación de "altura". Esto, como se verá más adelante, se ve favorecido por la traducción directa de una determinada energía por unidad de peso a una longitud. Y así, atendiendo al origen energético de cada uno de los términos de la ecuación, se identifican:

- Altura de presión, debida a la energía de presión o elástica:  $P/\gamma$ .
- Altura geométrica o cota, debida a la energía potencial gravitatoria:  $z$ .
- Altura cinética, debida a la energía cinética:  $v^2/2g$ .

Además de los términos individuales en sí, también reciben una denominación específica agrupaciones de ellos:

- Altura total:  $(P/\gamma) + z + (v^2/2g)$ . Lógicamente, la suma de los tres términos representa la energía total por unidad de peso que tiene cada partícula de fluido en una sección concreta. Por ello, dicha suma se denomina altura total, y suele denotarse en muchas ocasiones con la letra  $B$ .
- Altura piezométrica:  $(P/\gamma) + z$ . La suma de, sólo, los términos de altura de presión y cota recibe el nombre de altura piezométrica, y suele denotarse con la letra  $H$ . El nombre es debido a que tal es la altura que alcanza el agua en el interior de un tubo piezométrico, como bien se explica en los ejemplos

anexos a este capítulo. Además, la utilización de la altura piezométrica, en lugar de la altura total, resulta muy práctica en aquellos sistemas en los que la altura cinética tiene un valor despreciable frente al de las otras dos. Esto es, por ejemplo, lo que ocurre en sistemas de distribución de agua, en los que velocidades (altas) de  $2 \text{ m/s}$  dan lugar a alturas cinéticas del orden de  $0,2 \text{ mca}$ , mientras que tanto la presión en la red como los desniveles del terreno pueden alcanzar las varias decenas de metros.

Un último aspecto que cabe destacar es la representación gráfica directa que tienen las distintas alturas a lo largo de una conducción. El ejemplo más sencillo posible sería el de una tubería horizontal de diámetro constante y atravesada por un flujo incompresible, permanente e ideal. a 11 muestra el perfil de una tubería así. Tomando un origen de cotas ( $z = 0$ ) determinado, el propio eje de la tubería (centro de cada una de las secciones de la misma) señala la línea de alturas geométricas o línea de cotas.

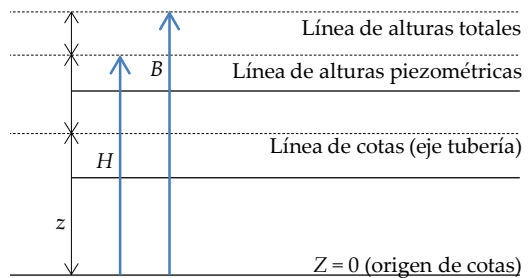


Figura 11 Representación de las distintas alturas (I)

Puesto que el flujo es incompresible y la sección constante, su velocidad también lo es, así como el término de altura cinética en todas las secciones. Por último, siendo constantes cotas y alturas cinéticas, y no existiendo pérdidas energéticas por fricción, se mantiene igualmente constante la presión en todas las secciones de la red. Como se aprecia en la figura 11, el orden habitual de representación es, sobre la línea de cotas, la disposición de las alturas de presión, dando lugar a la línea de alturas piezométricas. Y sobre ésta, las alturas cinéticas, dando lugar a la línea de alturas totales. En el caso de la figura 11 y por las razones explicadas todas las líneas de alturas son rectas horizontales.

Un ejemplo ilustrativo viene dado por la circulación de un flujo incompresible permanente, e ideal a través de un tubo venturi (conducción con un pronunciado estrechamiento en su parte central) horizontal (figura 12). El hecho de que el flujo se acelere en la zona estrecha del venturi da lugar a un aumento lógico de la altura cinética en esa región y, puesto que la altura total permanece constante (ausencia de pérdidas energéticas) y la altura geométrica también (tubería horizontal) es el término de presión el que se ve reducido en consecuencia. Y tan pronto como el diámetro vuelve a su valor inicial, se restablecerán los valores de altura cinética y de presión.

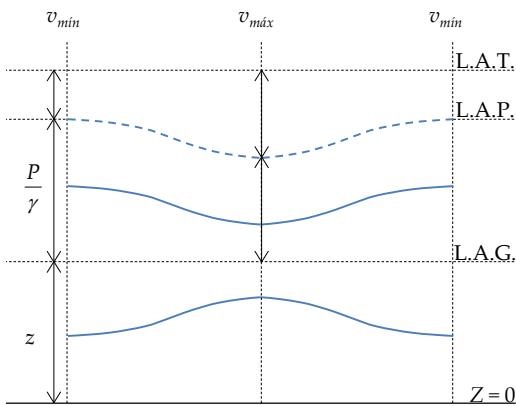


Figura 12 Representación de las distintas alturas (II)

La depresión que aparece en la región central de un tubo venturi tiene numerosas aplicaciones prácticas. Una de ellas es la inyección en la corriente que atraviesa el venturi de algún compuesto que se desee adicionar al agua (fertilizante en sistemas de riego, u ozono en sistemas de depuración). Otra aplicación es la combinación de dos tubos piezométricos sobre un tubo venturi y utilizar el dispositivo completo para la medición del caudal circulante a través del mismo. Este mismo caso es el que se desarrolla en otro de los ejemplos anexos a este capítulo.

### La ecuación de Bernoulli generalizada

Tal como se ha presentado hasta aquí, la ecuación de Bernoulli sólo es aplicable a sistemas en los que las

pérdidas energéticas sean despreciables, lo cual reduce enormemente sus posibilidades de aplicación en el campo de la hidráulica de presión, ya que tales sistemas se reducen a elementos de pequeña longitud y con pocas restricciones internas al paso del fluido. Tan pronto como se considerasen elementos de longitudes importantes frente a la sección de paso (tuberías de suministro), o con complicaciones en su configuración interna (válvulas), las pérdidas energéticas que se generarían en la corriente fluida dejarían de ser despreciables y la ecuación de Bernoulli dejaría de ser operativa. Y lo mismo ocurriría, en el caso contrario, cuando se pretendiese estudiar elementos que, en lugar de detraer energía del fluido, se la aportasen, como es el caso de las bombas. Por todo ello, el tratamiento específico de elementos resistivos o motrices, energéticamente hablando, o bien, de grandes instalaciones que puedan contar con ambos tipos de elementos instalados en las mismas, exige la modificación de la ecuación de Bernoulli para poder seguir empleándola con éxito.

De igual forma, la ecuación vista hasta ahora sólo es aplicable al caso de un flujo en régimen permanente. De nuevo, esta limitación puede también solventarse para regímenes transitorios sencillos (modelo rígido) configurando el denominado término de inercia.

Las modificaciones apuntadas se plantean ahora de forma diferente. Mientras que para determinar el término de inercia sí se partirá de nuevo de la ecuación de Euler original, para los términos de pérdidas y aportes energéticos se hará un planteamiento bastante más práctico. En resumen, se continúa buscando establecer el balance energético entre dos puntos, 1 y 2, de un flujo incompresible y, ahora, transitorio (modelo rígido) a lo largo de una instalación determinada. Tal instalación, ahora también, puede incluir un número importante de elementos montados en serie, tanto motrices (bombas) como resistentes (tuberías, válvulas...).

#### 1. Términos de inercia

El hecho de considerar un flujo transitorio, en el que la velocidad del flujo cambie con el tiempo, implica que el término de aceleración local de la ecuación de Euler ya no es nulo. Tal como se ha presentado más arriba, dicho término es  $\partial v / \partial t$  expresado como fuerza por uni-

dad de masa. Pasarlo a fuerza por unidad de peso es sencillo, resultando  $(1/g) \cdot (\partial v / \partial t)$ .

Otra cuestión distinta es integrarlo entre dos puntos, 1 y 2, a lo largo de una línea de corriente para poder calcular la energía empleada en acelerar el flujo en ese trayecto. La integral de la expresión anterior, sólo encuentra una solución sencilla si se añade la hipótesis de que la variación de la velocidad no depende de la coordenada  $s$  entre 1 y 2. En otras palabras, puede entenderse que todas las partículas ubicadas en esa línea de corriente se van a acelerar de la misma forma y al mismo tiempo, o más coloquialmente, que todas las partículas se aceleran "en bloque". La consecuencia analítica de esta hipótesis es que el término de aceleración es constante con respecto a la integral, saliendo fuera de la misma igual que la aceleración de la gravedad, y por tanto la solución es  $(1/g) \cdot (dv/dt) \cdot L_{1-2}$ . En esta expresión se entiende que  $dv/dt$  es la aceleración del flujo, la misma para cualquier posición entre 1 y 2, y que  $L_{1-2}$  es la longitud de línea de corriente entre ambos puntos. Esta hipótesis es la que la aceleración del flujo es la misma para todas las partículas del fluido en cada instante es la que define el denominado modelo rígido, dentro del campo de los transitorios hidráulicos.

La utilización de este término de inercia en la práctica de la hidráulica en presión presenta dos implicaciones adicionales:

- Sólo tiene sentido en tramos de tubería de diámetro constante y de longitud significativa. En el caso de diámetro no constante (ensanchamiento, por ejemplo) se invalida la hipótesis de que la variación de la velocidad es la misma para todas las partículas del tramo, mientras que en el caso de tuberías muy cortas, es poca la masa de fluido acelerándose por lo que la energía empleada para ello es despreciable. Este es el motivo por el cual se omite el cálculo de este término en los accesorios de una instalación, en los cuales el flujo evidentemente no se puede suponer uniforme.
- El obstáculo de haber resuelto el término de inercia analíticamente para una línea de corriente, tal como se ha visto, y haber de trabajar en la práctica con velocidades medias en las secciones de paso, exige la utilización de un segundo término corrector. Ahora

este segundo término corrector se denota como  $\beta$  y, estudiándose de forma similar a como ya se ha presentado para el anterior  $\alpha$ , puede llegarse a la conclusión de que para flujo laminar toma un valor aproximado de  $4/3$ , mientras que para flujo turbulento se aproxima a la unidad.

Con todo ello, la forma del término de inercia, considerando la existencia de  $n_b$  tramos rectos de diámetro constante, resulta ser:

$$\sum_{i=1}^{n_b} \left( \beta \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} L \right)_i \quad (5.74)$$

## 2. Términos de aportes energéticos

El principal aporte energético que un fluido puede recibir al circular por una instalación es el que le proporcione una bomba hidráulica (elemento motriz) montada en la misma. Para ser compatible con la ecuación de Bernoulli, y poder insertarse en la misma como un sumando más, tal aporte debe estar expresado como un sumando por unidad de peso, y así se denomina "altura de bombeo". Se suele denotar como  $h_b$ , o bien sumatorio de  $h_{b_i}$  si existen  $n_b$  bombas montadas en serie.

$$h_b = B_2 - B_1 = \left( \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left( \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right) \frac{P_2}{\gamma} - \frac{P_1}{\gamma} \quad (5.75)$$

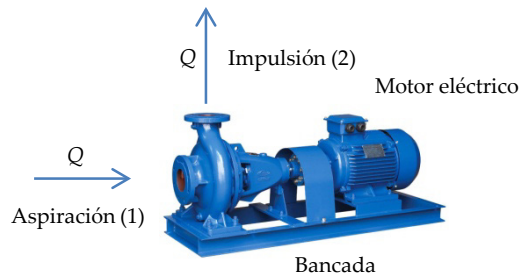


Figura 13 Ecuación de Bernoulli aplicada a un bombeo

### 3. Términos de pérdidas energéticas

Pérdidas energéticas, también llamadas pérdidas de carga, son aquéllas generadas por todos los elementos hidráulicamente resistentes de la instalación. En términos generales, las pérdidas de carga pueden clasificarse en tres grupos distintos:

- Pérdidas por fricción. Éstas son las pérdidas que típicamente se producen a lo largo de las tuberías debido al rozamiento mecánico de las partículas de fluido en su recorrido a través de la misma. Este rozamiento se da entre unas y otras partículas de fluido, pero especialmente entre las partículas de fluido y la superficie de las paredes de la conducción. Aunque se verá con más detalle en el capítulo de presión, sí cabe adelantar el cálculo de estas pérdidas por fricción. La forma más habitual de hacerlo es mediante la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (5.76)$$

donde  $f$  es el factor de fricción que representa la interacción física entre las partículas de fluido y las paredes de la tubería,  $L$  y  $D$  son, respectivamente, la longitud y el diámetro de la tubería y  $v$  es la velocidad media del fluido. Considerando, por último, que pueden ser varias las tuberías presentes en una instalación, estas pérdidas de carga por fricción se suelen representar como sumatorio de  $h_{fj}$ , donde  $n_{jt}$  es el número de tuberías en serie de la instalación.

$$h_f = B_1 - B_2 = \left( \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right) \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} \quad (5.77)$$

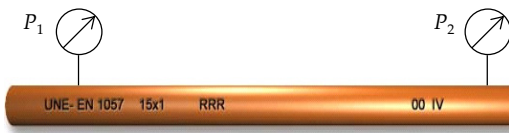


Figura 14 Ecuación de Bernoulli aplicada a una tubería

La figura 14 y su ecuación adjunta muestran cómo la pérdida energética en una tubería horizontal se traduce en una caída de presión del fluido al pasar a través de ella.

- Pérdidas menores. Estas pérdidas se producen cuando el fluido atraviesa el interior de elementos accesorios de la instalación tales como válvulas, acoplamientos, entradas a depósitos o salidas de los mismos, instrumentos de medición, etc. En este caso, el origen de las pérdidas no es tanto la fricción mecánica con la superficie de las cavidades internas, sino más bien las turbulencias que aparecen en el seno del flujo debido al recorrido más o menos intrincado que éste se ve obligado a seguir. Aunque en magnitud, estas pérdidas suelen ser mucho menores que las pérdidas por fricción, desde un punto de vista conceptual es importante su identificación y conocimiento adecuados. Suelen denotarse como sumatorio de  $h_{mi}$ , siendo  $n_e$  el número de elementos en serie que generan pérdidas menores.

La figura 15 y su ecuación adjunta muestran cómo la pérdida energética en una válvula (de retención en este ejemplo) se traduce en una caída de presión del fluido al pasar a través de la misma. Cabe destacar que en este caso la posición horizontal o no de la válvula no afecta, ya que su longitud es muy pequeña y las cotas de entrada y salida siempre se pueden considerar iguales.

$$h_m = B_1 - B_2 = \left( \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^ una tubería horizontal se traduce en una caída de presión del fluido al pasar a través de ella.$$

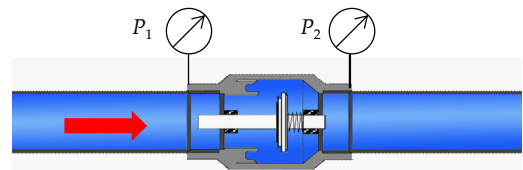


Figura 15 Ecuación de Bernoulli aplicada a una válvula de retención

- Pérdidas por turbinación. De forma inversa al funcionamiento de una bomba, puede ser una turbina



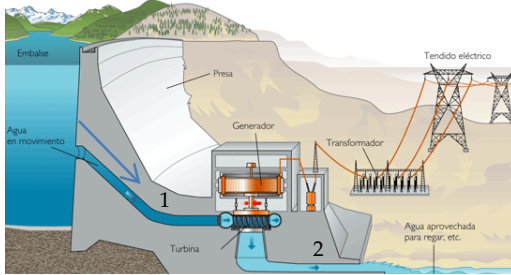
el elemento que esté montado en una instalación y el que, por tanto, detraiga energía mecánica del fluido para mover su eje. A diferencia de los dos puntos anteriores, la energía que una turbina extrae de la corriente fluida no es una pérdida en términos absolutos, ya que en su mayor parte sí se aprovecha posteriormente para mover los elementos accionados por la turbina. Sin embargo, desde la perspectiva del fluido, indudablemente, supone un decremento energético, y por eso debe contemplarse en esta clasificación. Generalizando al hipotético caso de varias turbinas montadas en serie, este término se denota como sumatorio de  $h_{T_i}$  donde  $n_T$  sería el hipotético número de turbinas dispuestas en serie.

$$\left[ \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right] \text{ y } \left[ \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right] \quad (5.79)$$

Y entre ambos, recibe aportes positivos y sufre detracciones negativas, por lo que la ecuación resulta ser:

$$\left[ \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \right] + \sum h_B - \sum h_f - \sum h_m - \sum h_T - \sum \beta \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} L = \left[ \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \right] \quad (5.80)$$

La figura 16 y su ecuación adjunta muestran la aplicación de la ecuación de Bernoulli sobre una turbina para estudiar la detracción energética que ésta realiza sobre el agua que la atraviesa.



$$h_T = B_1 - B_2 = \left( \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right)$$

Figura 16 Ecuación de Bernoulli aplicada a una turbina

#### 4. Configuración final de la ecuación

Revisados, bien que desde un punto de vista más empírico que teórico, los distintos aportes y pérdidas energéticas que puede tener un fluido (incompresible) en su recorrido (estacionario) entre dos puntos de una instalación, y asegurando también que todos ellos están correctamente expresados como alturas (energía por unidad de peso), su inclusión en la ecuación de Bernoulli es inmediata.

Así, la energía del fluido en los puntos inicial y final del recorrido viene dada por su altura total en cada uno de ellos. Es decir,

Aunque la ecuación anterior ya es una forma de representar la ecuación de Bernoulli generalizada, habitualmente se adoptan algunas simplificaciones muy comunes. De este modo, se asume que se trabaja directamente con valores promedio de las variables en todas las secciones, por lo que se omite el detalle de la barra horizontal, y también se asume régimen turbulento en el que los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales a la unidad. De hecho y como también se ha comentado ya, en numerosas ocasiones se puede despreciar el término cinético completo. Por otro lado, también se busca que todos los términos tengan signo positivo, por lo que los que corresponden a las pérdidas de carga se sitúan en el término de la derecha. Con todo esto, la forma más habitual de la ecuación de Bernoulli generalizada es la siguiente:

$$\left[ \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right] + \sum h_B = \left[ \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right] + \sum h_f + \sum h_m + \sum h_T + \sum \beta \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} L \quad (5.81)$$

#### 5. Representación gráfica

La ecuación de Bernoulli generalizada y aplicada sobre grandes instalaciones admite una representación gráfica igual que la ya vista para la forma más simplificada. En estos casos más complejos se representa únicamente la línea de alturas totales (que coincide con la de alturas piezométricas si se desprecia los térmi-

nos cinéticos) sobre el perfil de la conducción (alturas geométricas).

La presencia de pérdidas de carga se traduce en el hecho de que la línea de alturas totales pierde su horizontalidad y, en mayor o menor medida, va cayendo de forma continua a lo largo de toda la instalación. La figura 17 muestra una instalación característica de transporte de agua por gravedad entre dos depósitos abiertos a la atmósfera, mientras la figura 18 muestra una instalación de bombeo entre otros dos depósitos, también abiertos a la atmósfera.

Como puede comprobarse en las figuras siguientes, las pérdidas por fricción,  $h_f$ , se muestran como descensos progresivos de la línea de alturas totales, a lo largo de la longitud de las tuberías que las producen, mientras que las pérdidas menores,  $h_m$ , en accesorios aparecen como descensos bruscos de la misma línea de alturas. Esto último es debido a que la longitud de un accesorio es mínima comparado con la de una tubería, y lo mismo ocurre con el ascenso brusco que supone el aporte de la altura de bombeo,  $h_b$ .

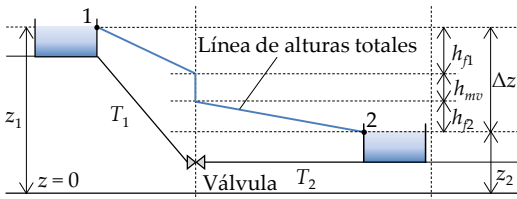


Figura 17 Línea de alturas totales sobre una instalación de transporte por gravedad

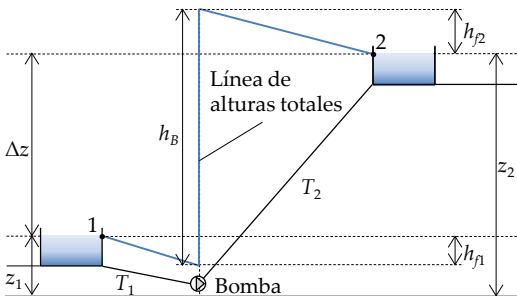


Figura 18 Línea de alturas totales sobre una instalación de bombeo

Puede notarse también en ambas figuras que siendo depósitos abiertos a la atmósfera los puntos iniciales y finales del recorrido, la línea de alturas totales arranca y termina en la superficie libre de los mismos. Esto es absolutamente lógico ya que en depósitos así se asume que tanto la velocidad del agua como la presión son nulas. En el primer caso porque la velocidad de descenso del agua es despreciable frente a las velocidades del flujo en la conducción y en el segundo porque se trabaja con presiones relativas. De este modo, la altura total del agua en un depósito abierto a la atmósfera queda reducida a la cota de la superficie libre en el mismo.

## 6. Relación entre alturas y potencias

Un último aspecto que cabe examinar en relación con la ecuación de Bernoulli es la relación analítica entre el concepto, ya visto, de altura y la propia definición de potencia. En resumen, se puede adelantar que altura y potencia son dos formas distintas de expresar una transferencia de energía. Así, si la altura representa energía por unidad de peso de fluido circulante, la potencia representa energía por unidad de tiempo transcurrido. Concretamente por ejemplo, para el caso de una bomba que impulsa un fluido, su aporte energético al mismo se puede expresar de dos maneras:

- Como altura de bombeo, medida en *metros de columna de fluido*, representa cuántos *julios* está transfiriendo la bomba a cada *newton* de peso del agua que impulsa (unos 100 g).
- Como potencia (útil) de bombeo, medida en *watios*, representa cuántos *julios* está transfiriendo la bomba al agua que impulsa durante cada segundo de funcionamiento.

Para establecer la relación entre una y otra, basta con aplicar las equivalencias pertinentes. Teniendo en cuenta que,  $Potencia = (E/t)$  y  $Altura = h_b = (E/mg)$ .

$$Altura \cdot \gamma \cdot Q = \frac{E}{mg} \cdot \frac{mg}{V} \cdot \frac{V}{t} = Potencia \quad (5.82)$$

Es decir:

$$Potencia = \gamma \cdot Q \cdot h_b \quad (5.83)$$

### La ecuación del flujo compresible isoterma

Los flujos compresibles no están por completo fuera del alcance de las ecuaciones de conservación de la energía planteadas hasta este punto. Partiendo de la ecuación diferencial de Euler, y asumiendo algunas hipótesis de trabajo de marcado carácter práctico, sí resulta posible resolver un tipo de flujo compresible sencillo, se trata del denominado flujo compresible isoterma.

Las condiciones de este flujo son las siguientes:

- El fluido circulante puede considerarse como gas perfecto.
- El flujo circula a través de una conducción de sección circular.
- El flujo circula en régimen permanente (aceleración local nula).
- Es un flujo real cuyas pérdidas de carga siguen la ecuación de Darcy-Weisbach.

La ecuación de Euler (como fuerzas por unidad de masa) para un régimen permanente es la siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} + g \frac{dz}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} = 0 \quad (5.84)$$

Multiplicando por un diferencial de  $s$ , se obtendría la misma ecuación como energía por unidad de masa:

$$\frac{1}{\rho} dP + g dz + v dv = 0 \quad (5.85)$$

Recordando la ecuación de Darcy-Weisbach (5.76) y teniendo en cuenta que ésta proporciona pérdidas de carga totales para una tubería completa en energía por unidad de peso, el planteamiento de este término en forma diferencial, supone su aplicación no sobre la longitud  $L$  de la tubería completa sino

sobre un diferencial de longitud  $ds$ . Expresándolo, además, por unidad de masa en lugar de por unidad de peso, e incluyéndolo ya en la ecuación de Euler, ésta queda:

$$\frac{1}{\rho} dP + g dz + v dv + f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2} ds = 0 \quad (5.86)$$

Tratándose de gases y teniendo en cuenta la circunstancia de que su densidad es baja, puede justificarse que el término de cota y el término cinético van a ser despreciables frente a los otros dos, presión y pérdidas por fricción. De este modo la versión simplificada de la ecuación diferencial para el flujo compresible isoterma queda:

$$\frac{1}{\rho} dP + f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2} ds = 0 \quad (5.87)$$

Para poder integrar entre los puntos 1 y 2 de un recorrido del flujo, se tiene en cuenta que:

- Para gases perfectos:  $\rho = (P^*/RT)$
- Para tubería de sección circular:  $G = \rho Q = \rho v(\pi D^2/4)$ . Y por lo tanto:  $v = (4G/\rho \pi D^2)$ . Además, no hay que olvidar que puesto que el flujo es permanente, el caudal másico es constante entre las dos secciones (no así el caudal volumétrico, ni la densidad, ni la velocidad).
- El factor de fricción puede considerarse constante. La razón es que su valor depende de la rugosidad relativa de la conducción, que es constante, y del número de Reynolds. El número de Reynolds, a su vez, depende de la viscosidad del fluido, cuya variación principal es con la temperatura (constante) y, de forma despreciable, con la presión.

Sustituyendo las expresiones anteriores sobre la forma simplificada de la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{RT} + \frac{1}{2D} \left( \frac{4G}{RT \pi D^2} \right)^2 ds = 0 \quad (5.88)$$

Reordenando y tomando límites para integrar entre 1 y 2:

$$\int_{P_1^*}^{P_2^*} P^* dP = -\frac{8fG^2RT}{\pi^2 D^5} \int_0^L ds \quad (5.89)$$

se obtiene la forma final de la ecuación para el flujo compresible isoterma:

$$P_1^{*2} = P_2^{*2} + \frac{16fG^2}{\pi^2 D^5} RTL \quad (5.90)$$

En caso de no haber despreciado el término potencial, el resultado de todo el proceso de cálculo habría conducido a la nueva versión de la ecuación:

$$P_1^{*2} = P_2^{*2} + \frac{16fG^2}{\pi^2 D^5} RTL + (P_1^{*2} + P_2^{*2}) \frac{g(z_2 - z_1)}{RT} \quad (5.91)$$

### La ecuación integral de la energía

Las sucesivas ecuaciones de Euler y Bernoulli presentadas más arriba plantean balances energéticos para distintos tipos de flujo (permanente o transitorio, ideal o real), atendiendo únicamente a las tres formas de energía mecánica presentes en el movimiento de un fluido (elástica, potencial y cinética). Sin embargo, cualquiera de ellas deja de ser de aplicación cuando en el movimiento del fluido intervienen otras formas de energía distintas. Aunque hay diversas formas de energía adicionales que también están presentes en cualquier flujo (por ejemplo, a nivel molecular, la energía química de los enlaces intermoleculares; o a nivel atómico, la de los enlaces de las partículas que forman el núcleo), de todas ellas, sólo una tiene una importancia práctica similar a la energía mecánica en el mover de esta asignatura. Se trata de la energía térmica.

Para incluir la energía térmica en la ecuación del balance energético, y concretamente, el intercambio de calor entre el fluido y el entorno, es necesario partir de la consideración de un sistema fluido en movimiento desde un punto 1 hasta otro punto 2. Las formas de

energía para dicho sistema que están intrínsecamente ligadas a la propiedad masa son las siguientes:

- Energía potencial:  $E_p = mgz$ .
- Energía cinética:  $E_c = (1/2)mv^2$ .
- Energía interna. Esta es la energía total de las partículas individuales del fluido (traslacional, vibracional y rotacional), y está representada por el nivel de temperatura que tiene en cada momento. Sin olvidar que esta energía interna se suele definir de modo incremental, aquí se tomará de modo absoluto para mantener la coherencia con el resto de expresiones, es decir:  $U = mu = mC_c T$ , donde  $C_c$  es el calor específico del fluido.

Por tanto la energía total que tiene el sistema es la suma de las anteriores  $E = E_p + E_c + U$ , y por unidad de masa resulta  $e = e_p + e_c + u = gz + (v^2/2) + C_c T$ . Una vez bien definida la propiedad extensiva a estudiar, plantear su variación total con el tiempo significa aplicar el teorema del arrastre de Reynolds a la misma (definidos previamente un volumen de control, VC, y superficie de control, SC). Identificando la propiedad genérica  $\overline{H}_{Sist}$  como  $E_{Sist'}$  la ecuación de conservación de la energía se plantea entonces como:

$$\frac{dE_{Sist}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u \right) \rho \cdot dV + \int_{SC} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u \right) \rho (\overline{v_{r,SC}} \cdot \overline{dA}) \quad (5.92)$$

De este modo, el teorema del arrastre de Reynolds permite el planteamiento de los términos local y convectivo de la variación de la energía del flujo que atraviesa el VC, o lo que es lo mismo, el término derecho de la ecuación anterior.

El planteamiento del término izquierdo es mucho más sencillo, ya que está determinado por el primer principio de la termodinámica.

$$\frac{dE_{Sist}}{dt} = \frac{dQ_{Sist}}{dt} + \frac{dW_{Sist}}{dt} \quad (5.93)$$

La ecuación anterior muestra cómo, para un sistema concreto, la variación de su energía total puede expresarse como la suma de los intercambios de calor ( $dQ/dt$ ) y trabajo ( $dW/dt$ ) entre la masa del sistema y

su entorno. En lo que sigue, el criterio de signos será el mismo para ambos términos, un flujo de calor o trabajo se considerará positivo si se transfiere desde el entorno hacia el fluido, y negativo si la transferencia del mismo es en el sentido inverso. Con todo ello, la primera forma de la ecuación integral de la energía es:

$$\frac{dQ_{Sist}}{dt} + \frac{dW_{Sist}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u \right) \rho dV + \int_{SC} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u \right) \rho \left( \vec{v}_{r,SC} \cdot \vec{dA} \right) \quad (5.94)$$

en la que no hay que olvidar que la variación de la energía está expresada en función del tiempo. Es decir, cada término es una potencia.

Pensando en la aplicación específica de la ecuación anterior, muy general, a sistemas de conducción de fluidos a presión por tuberías, es entonces posible examinar alguno de sus términos con más detalle con el fin de obtener una versión más simplificada.

Mientras que el término de potencia calorífica ( $dQ_{sist}/dt$ ) representa sin duda la cantidad neta de energía térmica, por unidad de tiempo, que atraviesa la SC en un sentido o en otro y se suele denotar directamente como ( $dQ/dt$ ), el término de potencia mecánica ( $dW_{sist}/dt$ ) sí permite un análisis más detallado. Así, dicha potencia mecánica puede transferirse al sistema de dos formas distintas:

$$\frac{dW_{Sist}}{dt} = \frac{dW_{VC}}{dt} + \frac{dW_{SC}}{dt} \quad (5.95)$$

- El primer componente  $dW_{VC}/dt$  es la potencia mecánica que se transfiere directamente al interior del VC mediante la acción de un eje, por ejemplo, de una bomba. Puede además visualizarse dicho eje como el medio por el que se inyecta potencia en el VC, y así este término suele recibir la denominación de "trabajo de eje" y se denota como  $dW_{Eje}/dt$ .
- El segundo componente  $dW_{SC}/dt$  representa la potencia mecánica transferida al VC a través de la SC. Más concretamente, es la potencia que comunican

al VC las fuerzas de superficie que están actuando sobre su frontera, la SC. Y tales fuerzas de superficie pueden ser tanto las debidas a la presión como las debidas a esfuerzos cortantes.

$$\frac{dW_{SC}}{dt} = \frac{dW_{SC}}{dt} \Big|_{Fuerzas\ Presión} + \frac{dW_{SC}}{dt} \Big|_{Fuerzas\ Esf.\ Cortantes} \quad (5.96)$$

La figura 19 muestra el caso de un flujo a través de una tubería de sección circular. En la misma se ha marcado un VC, y los distintos esfuerzos (entre paréntesis) que se transmiten al mismo desde el entorno a través de la SC.

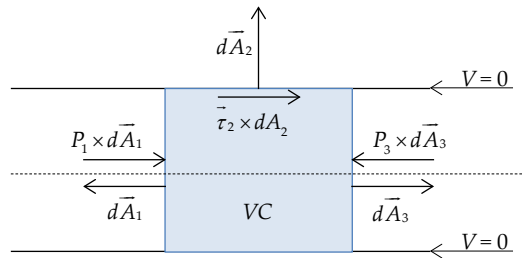


Figura 19 Fuerzas transmitidas a través de la SC en una conducción circular

- Los esfuerzos cortantes actúan sobre la superficie lateral del VC cilíndrico. Las partículas que se encuentran sobre la misma, en realidad están a velocidad cero por la condición de adherencia entre fluido y sólido. Por lo tanto, no hay potencia transmitida a las mismas por los esfuerzos cortantes, y puede concluirse que  $\frac{dW_{SC}}{dt} \Big|_{Fuerzas\ Esf.\ Cortantes} = 0$ .
- La potencia transmitida por las fuerzas de presión en las secciones frontales se plantea como:

$$\frac{dW_{SC}}{dt} \Big|_{Fuerzas\ Presión} = \int_{SC} \vec{dF}_p \cdot \vec{v}_{r,SC} \quad (5.97)$$

donde  $\overline{dF_p}$  es la fuerza de presión diferencial que actúa sobre cada diferencial de área,  $dA$ , de cada sección frontal, y  $\overline{v_{r,sc}}$  es la velocidad relativa respecto de la SC de cada partícula de fluido que atraviesa dicha SC.

Como se explicará con más detalle en la parte del capítulo dedicada a la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, la mencionada fuerza de presión es una fuerza externa ejercida desde el entorno sobre el VC. Por ello, se trata de un vector perpendicular a la SC y con su sentido dirigido hacia la misma SC. Lógicamente, como fuerza de presión su módulo es igual al producto de presión por área, es decir,  $dF = PdA$ . Sin embargo, cuando al diferencial de área se le da carácter vectorial,  $d\overline{A}$ , se trata de un vector perpendicular a la SC pero orientado desde la misma hacia el entorno (figura 19). Este detalle es importante porque entonces el vector fuerza de presión diferencial se puede expresar como  $\overline{dF_p} = - (P d\overline{A})$ . Sustituyendo en la expresión de la potencia transmitida por las fuerzas de presión y reordenando los términos, queda:

$$\left. \frac{dW_{sc}}{dt} \right|_{\substack{\text{Fuerzas} \\ \text{Presión}}} = - \int_{sc} P \cdot \overline{v_{r,sc}} \cdot \overline{dA} \quad (5.98)$$

Y sustituyendo finalmente en la ecuación inicial de conservación:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} + \frac{dW_{Eje}}{dt} - \int_{sc} P \overline{v_{r,sc}} \cdot \overline{dA} &= \\ = \frac{d}{dt} \int_{vc} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u \right) \rho dV + \int_{sc} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u \right) \rho \left( \overline{v_{r,sc}} \cdot \overline{dA} \right) & \quad (5.99) \end{aligned}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} + \frac{dW_{Eje}}{dt} &= \\ = \frac{d}{dt} \int_{vc} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u \right) \rho dV + \int_{sc} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} \right) \rho \left( \overline{v_{r,sc}} \cdot \overline{dA} \right) & \quad (5.100) \end{aligned}$$

En el caso, muy habitual, de flujo en régimen permanente el término local se anula, y la ecuación queda:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dW_{Eje}}{dt} = \int_{sc} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} \right) \rho \left( \overline{v_{r,sc}} \cdot \overline{dA} \right) \quad (5.101)$$

Si, además, se asume la condición de propiedades uniformes de todas las variables en cada sección de entrada o salida, de nuevo se llega a una expresión más simplificada. Distinguiendo los términos correspondientes a secciones de salida como positivos y de entrada como negativos, el paréntesis sale de la integral y el producto escalar multiplicado por la densidad se visibiliza como caudal másico directamente.

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} + \frac{dW_{Eje}}{dt} &= \\ = \sum_{\text{Salidas } i} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} \right)_i G_i - \sum_{\text{Entradas } j} \left( gz + \frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} \right)_j G_j & \quad (5.102) \end{aligned}$$

Para el caso, referido ya, de una única conducción, con una única entrada y una única salida, se llega a la versión más simplificada de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} + \frac{dW_{Eje}}{dt} &= \\ = \left[ \left( gz + \frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} \right)_{\text{Salida}} - \left( gz + \frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} \right)_{\text{Entrada}} \right] G & \quad (5.103) \end{aligned}$$

### Comparación entre la ecuación integral de la energía y la ecuación de Bernoulli

Resulta muy interesante comparar la ecuación integral de la energía con la ecuación de Bernoulli, ya que las conclusiones que pueden extraerse al respecto aclararán mejor los conceptos que hay detrás de los términos que componen ambas. Se partirá de la ecuación integral de la energía, particularizada al caso de una única conducción y en la que la sección 1 representa la entrada y la sección 2, la salida:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dW_{Eje}}{dt} = \left[ \left( gz + \frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} \right)_2 - \left( gz + \frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} \right)_1 \right] G \quad (5.104)$$

La intención es transformar la ecuación anterior hasta dejarla de una manera lo más parecida posible a la de la ecuación de Bernoulli. Dicha transformación contempla las siguientes acciones:

- Pasar los términos de la ecuación de expresar potencia (energía por unidad de tiempo) a expresar altura (energía por unidad de peso). Para ello bastará con dividir todos los términos por  $Gg$ , o lo que es lo mismo, multiplicarlos por el cociente:  $(1/Gg)$ .
- Pasar la altura total en la sección 1 (entrada) al término izquierdo de la ecuación.
- Pasar el término del intercambio de energía térmica al término derecho de la ecuación. El término del trabajo de eje, correspondiente a la energía aportada por una bomba, efectivamente se encuentra en el término izquierdo de la ecuación de Bernoulli.

La nueva versión de la ecuación integral de la energía es:

$$\left[ \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right] + \frac{1}{Gg} \frac{dW_{Eje}}{dt} = \left[ \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right] + \frac{u_2 - u_1}{g} - \frac{1}{Gg} \frac{dQ}{dt} \quad (5.105)$$

la ecuación anterior ya es formalmente equivalente a la de Bernoulli, según se ha presentado en este tema:

$$\left[ \frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \right] + h_B = \left[ \frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \right] + h_f \quad (5.106)$$

Comparando ambas ecuaciones se pueden establecer dos relaciones sucesivas entre los términos de las mismas:

- En primer lugar, se obtiene la identificación:  $h_b = (1/Gg) \cdot (dW_{Eje}/dt)$ . En realidad esta expresión no es

nueva, ya que  $(dW_{Eje}/dt)$  es la potencia útil transmitida por la bomba al fluido, y además,  $Gg = \rho \cdot Qg = \gamma \cdot Q$ . Así, esta primera identificación no es sino otra forma de mostrar la relación entre potencia y altura de bombeo ( $Potencia = \gamma \cdot Q \cdot h_b$ ).

- La segunda identidad que resulta de comparar ambas ecuaciones sí aporta algo nuevo al análisis:  $h_f = [(u_2 - u_1)/g] - (1/Gg) \cdot (dQ/dt)$ , que se puede reescribir alternativamente como:  $u_2 - u_1 = (1/Gg) \cdot (dQ/dt) + gh_f$ . Teniendo en cuenta que un incremento positivo en la energía interna, entre las secciones 1 y 2 como muestra la ecuación, se traduce en un aumento de la temperatura del fluido, la expresión anterior muestra las dos posibles causas de dicho aumento, una transferencia (positiva) desde el entorno hacia el fluido y/o la existencia de fricción mecánica en la circulación del fluido. Se pueden identificar los casos:
  - En un flujo adiabático real, esto es, sin intercambio de calor con el entorno, toda la energía mecánica perdida por fricción se transforma en calor que queda contenido en el fluido aumentando su temperatura:  $u_2 - u_1 = gh_f$ .
  - En un flujo isotermo real, la energía interna se mantiene constante y el calor generado por la fricción se transfiere íntegramente desde el fluido hacia el entorno -  $(1/G) (dQ/dt) = gh_f$ .
  - En un flujo ideal no se produciría ningún calor por fricción y la temperatura del fluido dependería únicamente de cómo fuese la transferencia térmica con el entorno. Se tendría que  $u_2 - u_1 = - (1/G) \cdot (dQ/dt)$ , que directamente la segunda ley de la termodinámica para procesos reversibles.

## Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento

La tercera propiedad de un flujo de fluido cuya conservación se va a estudiar es su cantidad de movimiento. Se presenta en tercer lugar por una razón sencilla, las dos primeras ya vistas (masa y energía) son propiedades escalares, mientras que las restantes, cantidad de movimiento y momento cinético, son propiedades vectoriales. Y de estas dos últimas, la formulación matemática de la primera es más breve que la de la segunda.

La variación de la cantidad de movimiento de un flujo, debida a las fuerzas externas que actúan sobre el mismo desde el entorno, presenta una gran importancia en la mecánica de fluidos aplicada ya que es el fenómeno que está detrás de accidentes como la rotura de un codo defectuosamente anclado, o también, el fenómeno que fundamenta toda la teoría de la propulsión a chorro.

Puesto que la cantidad de movimiento es una propiedad vectorial, para el análisis de la misma es necesario trabajar con un sistema de referencia (SR). Y como en el presente tema el análisis de cualquier propiedad debe partir de la definición de un VC, el procedimiento que se seguirá es el de ligar solidariamente el VC en estudio con un SR. Como también se explicó en el tema 3, según sea el problema concreto a estudiar, el VC más adecuado para hacerlo puede:

- Encontrarse en reposo.
- Moverse a velocidad lineal constante.
- Moverse con aceleración.

Lógicamente, el SR solidario con el VC se moverá de la misma manera que éste, y así, siguiendo todavía lo presentado en el tema 3, se distinguen dos situaciones distintas. Por una parte, tanto para el primer caso (reposo), como para el segundo (velocidad constante), se hablará de un SR inercial. Por otra, en el tercer caso (aceleración) se tendrá un SR no inercial.

En la práctica, puede resultar cómodo trabajar con dos formulaciones distintas para la conservación de la cantidad de movimiento:

- La primera formulación sería la adecuada para sistemas inerciales, es decir, aquéllos en los que el VC estuviese en reposo o bien se moviese a velocidad constante (primer y segundo caso de los tres que se acaban de indicar). En cualquiera de ellos, el SR solidario con el VC es el único que se utiliza para analizar el flujo. También podría trabajarse, de forma alternativa, con un SR único que, en lugar de moverse solidariamente con el VC, se encontrase fijo en algún punto del espacio.
- La segunda formulación sería la adecuada para sistemas no inerciales, es decir aquéllos en los que el VC se moviese con aceleración (tercer caso). Aunque este caso se explicará con detalle más adelante, sí cabe adelantar aquí que el SR solidario con

el VC sería no inercial, y no se puede utilizar para el estudio del flujo. De este modo, debe utilizarse además un segundo SR fijo, con respecto del cual se expresará el movimiento del SR móvil (movimiento de arrastre).

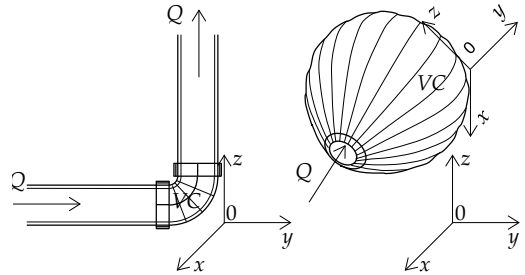


Figura 20 Ejemplos de SR inercial fijo (izquierda) y no inercial acelerado (derecha)

La figura 20 muestra un ejemplo de cada caso. A la izquierda, para estudiar el flujo a través del codo de una tubería, encerrado en su VC fijo, se representa el único SR ( $X, Y, Z$  - fijo, y por tanto, inercial) solidario con el mismo. A la derecha, para estudiar un caso básico de propulsión a chorro, como sería el de un globo que se deshinch, encerrado en su VC acelerado, se representan los dos SR, el acelerado junto con el globo ( $x, y, z$  - no inercial) y el fijo ( $X, Y, Z$  - inercial).

Por último, la obtención de cualquiera de las formas de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento parte de la 2ª ley de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Efectivamente, es la acción de las fuerzas exteriores la causa del cambio en la cantidad de movimiento de las partículas de fluido del sistema, en su paso a través del VC. Y es el teorema del arrastre de Reynolds el que marca el camino a seguir para su análisis. Según la formulación general de dicho teorema, presentada en el tema 3, la propiedad a estudiar, que entonces se definía genéricamente como,  $\vec{H}$  se identifica ahora con la cantidad de movimiento  $\vec{p}$ . Y la propiedad genérica unitaria,  $\vec{h} = \vec{H}/m$ , resulta ser, por tanto,  $\vec{p}/m = m\vec{v}/m = \vec{v}$ .

Según la citada ley de Newton, la variación de la cantidad de movimiento del sistema,  $\vec{p}_{Sist}$ , es debida a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el mismo:

$$\frac{d\vec{p}_{Sist}}{dt} = \sum \vec{F}_{Ext} \quad (5.107)$$



Y el teorema del arrastre muestra cómo plantear el estudio de dicha variación de  $\overline{p_{Sist}}$  a partir de sus componentes local y convectiva sobre un VC:

$$\frac{d\overline{p_{Sist}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \overline{v} \rho dV + \int_{SC} \overline{v} \rho (\overline{v_{r,SC}} \cdot \overline{dA}) \quad (5.108)$$

### Forma de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para sistemas inerciales

Un caso sencillo para el estudio de la conservación de la cantidad de movimiento de un flujo de fluido es aquél en el cual VC y SR son inerciales. Por la poca complejidad cinemática que presenta un caso así, para el mismo basta con la reunión simple de los dos términos de la ecuación del teorema del arrastre ya presentados más arriba. De hecho esta es la forma que se relaciona con los sistemas inerciales:

$$\sum \overline{F_{Ext}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \overline{v} \rho dV + \int_{SC} \overline{v} \rho (\overline{v_{r,SC}} \cdot \overline{dA}) \quad (5.109)$$

En la aplicación práctica de esta ecuación deben tenerse en cuenta los siguientes puntos importantes:

- Al igual que ocurría en la ecuación integral de la energía, en la ecuación anterior aparecen tres velocidades. Aunque para la tercera de ellas explícitamente se señala que es una velocidad relativa con respecto a la SC, hay que tener en cuenta que las tres son velocidades distintas entre sí:

  - a) La  $\overline{v}$  que aparece en la integral extendida al VC es la velocidad con respecto al SR (inercial) de cada una de las partículas que están dentro del VC.
  - b) La  $\overline{v}$  que aparece en la integral extendida a la SC es la velocidad con respecto al SR (inercial) de cada una de las partículas que atraviesan sobre la SC.
  - c) La  $\overline{v_{r,SC}}$  que aparece en la integral extendida a la SC es la velocidad con respecto a la SC de cada una de las partículas que atraviesan la misma.

Como resulta lógico, las dos velocidades que aparecen en la integral extendida a la SC serán iguales en el caso de que la SC no se mueva, es decir, cuando el VC sea fijo e indeformable.

- El término de fuerzas exteriores incluye cualquier fuerza exterior que se aplique desde el entorno sobre el VC (en realidad, sobre el fluido que llena en cada momento el VC). Así, desde la fricción entre un VC móvil que desliza sobre una superficie, hasta la tensión con que una cuerda tira del VC al que está atada, la variedad de fuerzas exteriores que se pueden encontrar es enorme. De entre todas ellas, cabe proponer aquí un apunte acerca de las más importantes:

- a) Fuerzas de presión. Estas fuerzas se aplican sobre las zonas de la SC a través de las cuales entra flujo al VC o sale del mismo. Son debidas al hecho de que, para hacer el análisis de fuerzas, se está separando imaginariamente el VC del entorno a través de esas zonas (figura 21). Puesto que esas zonas están a presión (la del fluido), al realizar la separación imaginaria debe considerarse la acción del entorno sobre el VC como una fuerza de presión. A la inversa, la acción del VC sobre el entorno sería una fuerza igual en módulo y dirección pero de sentido contrario.

Aunque las fuerzas de presión siempre deben considerarse aplicadas sobre cualquier sección de entrada o salida de flujo, se da la circunstancia muy habitual de que toman un valor numérico nulo para chorros de líquido directamente en contacto con la atmósfera, y trabajando con presiones relativas.

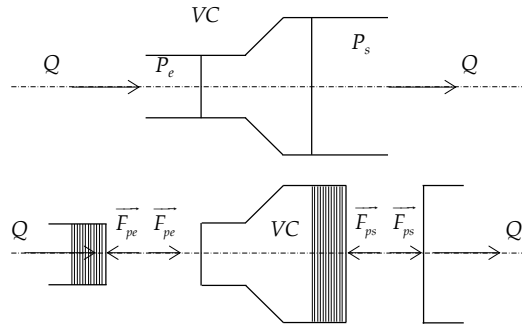


Figura 21 Fuerzas de presión sobre el VC

- b) Fuerza o reacción en el anclaje. En los casos en que haya que asegurar que VC no se mueva del sitio por la acción de fuerzas exteriores y cambios en el flujo, esto se logra mediante algún tipo de sujeción, normalmente mecánica, denominada anclaje. Se

denomina fuerza o reacción en el anclaje la fuerza de sujeción que ejerce sobre el VC. Lógicamente, en estos casos el VC sólo puede ser fijo.

- c) Peso. La gravedad es una fuerza de volumen que ejerce sistemáticamente sobre todo objeto situado en la superficie terrestre. Por lo tanto, tenga influencia o no en cada sistema estudiado, siempre está presente.

La expresión general de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para sistemas inerciales puede incluir las simplificaciones ya vistas en las ecuaciones de conservación previas para la masa y la energía. De este modo, si se asume que las propiedades son uniformes tanto en la SC como en el VC, las variables pueden salir de las integrales y la ecuación se queda en la forma:

$$\sum \overline{F}_{Ext} = \frac{d(m\vec{v})_{VC}}{dt} + \sum_{Salidas\ i} (\vec{v}\rho Q)_i - \sum_{Entradas\ j} (\vec{v}\rho Q)_j \quad (5.110)$$

Y para el caso de un régimen permanente, en el cual la variación local de cualquier propiedad es nula, la ecuación resulta ser:

$$\sum \overline{F}_{Ext} = \sum_{Salidas\ i} (\vec{v}\rho Q)_i - \sum_{Entradas\ j} (\vec{v}\rho Q)_j \quad (5.111)$$

### Forma de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para sistemas no inerciales

La 2ª ley de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$  sólo es aplicable cuando la aceleración de la partícula que aparece en la misma se expresa con respecto a un sistema de referencia inercial. Como se ha visto ya, cuando el VC está fijo o se mueve a velocidad constante, el SR solidario con el mismo es inercial, y así dicho SR se utiliza directamente para resolver el balance de cantidad de movimiento. Sin embargo, cuando el VC se mueve con algún tipo de aceleración, el SR solidario con el mismo es no inercial y por tanto no se puede utilizar para el estudio. Es necesario entonces utilizar un segundo SR fijo, y por tanto inercial. De este modo:

- El movimiento del SR móvil se expresa con respecto al SR fijo mediante su vector de posición  $\vec{R}$ , velocidad,  $d\vec{R}/dt$  aceleración lineal  $d^2\vec{R}/dt^2$  velocidad angular  $\vec{\omega}$  y aceleración angular  $d\vec{\omega}/dt$ .
- La aceleración de cada partícula que aparece en la 2ª ley de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$  debe expresarse con respecto al SR el inercial (el fijo) y no al SR no inercial (el móvil solidario). Pero en este caso no se podría aplicar el teorema del arrastre de Reynolds, ya que la cantidad de movimiento (propiedad del flujo que se desea estudiar) se está expresando con respecto a un SR ajeno al VC.

La forma de solventar este inconveniente es la misma que se adopta en otras circunstancias similares. Consiste en descomponer esa aceleración absoluta de las partículas de fluido en sus tres componentes, relativa, arrastre y Coriolis (también visto en el tema 3, que se recomienda revisar para entender completamente lo que se explica aquí). Y a continuación, pasar al término izquierdo de la 2ª ley de Newton las componentes de arrastre y Coriolis, a modo de ficticias fuerzas de inercia. Es decir, desde la ecuación:

$$\sum \overline{F}_{Ext} = m\vec{a} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_a + \vec{a}_{Coriolis}) \quad (5.112)$$

se pasa a:

$$\sum \overline{F}_{Ext} - m(\vec{a}_a + \vec{a}_{Coriolis}) = m\vec{a}_r \quad (5.113)$$

donde:

$$m(\vec{a}_a + \vec{a}_{Coriolis}) = \overline{F}_{Inercia} \quad (5.114)$$

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (5.115)$$

$$\vec{a}_{Coriolis} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \quad (5.116)$$

Haciendo las cosas de esta manera, el término  $m\vec{a}_r$  ya sí se refiere solamente a la variación de la cantidad de movimiento del flujo expresada con respecto al SR solidario con el VC, y por tanto pueden plantearse

a través del mismo las componentes local y convectiva del teorema del arrastre de Reynolds. Por otra parte, siendo conocido el movimiento del SR móvil con respecto al SR fijo, trabajar con las aceleraciones de arrastre y de Coriolis no supone un obstáculo.

$$= \frac{d}{dt} \int_{VC} \overline{v_r} \rho dV + \int_{SC} \overline{v_r} \rho (\overline{v_{r,SC}} \cdot \overline{dA}) \quad (5.120)$$

Por último, trasladar todo este planteamiento sobre la ecuación ya presentada para la conservación de la cantidad de movimiento, resulta sencillo si se hace con cuidado:

- El término de las fuerzas exteriores es el único que se mantiene inalterado  $\sum \overline{F_{Ext}}$ .
- El término a la derecha de la igualdad  $m \overline{a_r}$ , da lugar a las componentes local y convectiva. Ambas expresadas con respecto al SR móvil, es decir, utilizando la velocidad relativa de las partículas:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \overline{v_r} \rho dV + \int_{SC} \overline{v_r} \rho (\overline{v_{r,SC}} \cdot \overline{dA}) \quad (5.117)$$

- El término de las fuerzas de inercia debe calcularse integrando las magnitudes que lo componen sobre todas las partículas de fluido (de masa diferencial) que llenan el VC:

$$m(\overline{a_a} + \overline{a_{Coriolis}}) = \int_{M_{VC}} (\overline{a_a} + \overline{a_{Coriolis}}) dm = \int_{VC} (\overline{a_a} + \overline{a_{Coriolis}}) \rho dV \quad (5.118)$$

La ecuación completa queda, por lo tanto, como:

$$\sum \overline{F_{Ext}} - \int_{VC} (\overline{a_a} + \overline{a_{Coriolis}}) \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{VC} \overline{v_r} \rho dV + \int_{SC} \overline{v_r} \rho (\overline{v_{r,SC}} \cdot \overline{dA}) \quad (5.119)$$

Tras considerar la composición de las aceleraciones de arrastre y Coriolis, se llega a la que suele denominarse como ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para sistemas no inerciales:

$$\sum \overline{F_{Ext}} - \int_{VC} \left( \frac{d^2 \overline{R}}{dt^2} + \frac{d\overline{\omega}}{dt} \wedge \overline{r} + \overline{\omega} \wedge (\overline{\omega} \wedge \overline{r}) + 2\overline{\omega} \wedge \overline{v_r} \right) \rho dV =$$

donde:

- $\sum \overline{F_{Ext}}$  es la suma vectorial de todas las fuerzas ejercidas desde el entorno sobre el VC.
- $d^2 \overline{R}/dt^2$  es la aceleración del SR móvil con respecto al SR fijo.
- $\overline{\omega}$  es la velocidad angular del SR móvil.
- $d\overline{\omega}/dt$  es la aceleración angular del SR móvil.
- $\overline{r}$  es el vector de posición de cada partícula de fluido con respecto al SR móvil.
- $\overline{v_r}$  es la velocidad relativa con respecto al SR móvil de cada partícula de fluido que se encuentra dentro del VC o sobre la SC (según la integral esté extendida sobre VC o SC).
- $\overline{v_{r,SC}}$  es la velocidad de cada partícula que atraviesa la SC con respecto de la misma.

De la misma forma en que se ha visto más arriba pueden plantearse circunstancias que simplifican la ecuación anterior. Asumiendo propiedades uniformes tanto en las secciones como en el interior del volumen de control los términos local y convectivo toman la forma ya mostrada más arriba. En cuanto al término corrector de las fuerzas de inercia, queda simplificado en el caso, habitual, de que el movimiento del VC tenga sólo aceleración lineal.

La forma de la ecuación bajo todas estas condiciones sería:

$$\sum \overline{F_{Ext}} - m_{VC} \frac{d^2 \overline{R}}{dt^2} = \frac{d(m\overline{v})_{VC}}{dt} + \sum_{Salidas\ i} (\overline{v}\rho Q)_i - \sum_{Entradas\ j} (\overline{v}\rho Q)_j \quad (5.121)$$

Por último, para un ejemplo característico de propulsión a chorro donde pudiesen despreciarse tanto las fuerzas externas sobre el VC como el movimiento del fluido por el interior del mismo, la ecuación quedaría:

$$m_{VC} \frac{d\overline{v_{VC}}}{dt} = \sum_{\text{Entradas } j} (\overline{\tilde{v} \rho Q})_j - \sum_{\text{Salidas } i} (\overline{\tilde{v} \rho Q})_i \quad (5.122)$$

siendo  $\overline{v_{VC}}$  la velocidad lineal del VC.

## Ecuaciones de conservación del momento cinético

La última propiedad de un flujo fluido cuya conservación se va a estudiar en este tema es el momento cinético de un sistema que atraviesa un VC determinado. Este es el fenómeno físico que hay detrás de cualquier objeto que gire mientras es atravesado por un flujo de fluido, independientemente de que el agente motriz del movimiento sea el objeto (como en el caso de las bombas) o el fluido (como en el caso de los aspersores y las turbinas).

El momento cinético es, de nuevo, una propiedad vectorial cuya ecuación de conservación se va a obtener de forma paralela a la ya vista para la cantidad de movimiento. Aplicando el teorema del arrastre de Reynolds a dicha propiedad, se tiene que  $\overline{H_{Sist}} = (\overline{\tilde{r} \wedge m \tilde{v}})_{Sist}$ . La propiedad unitaria es  $\tilde{h} = (\tilde{r} \wedge \tilde{v})$ . Y la derivada con el tiempo del momento cinético del sistema encuentra su causa en la suma vectorial de todos los momentos exteriores aplicados desde el entorno sobre el VC. Es decir:

$$\frac{d(\overline{\tilde{r} \wedge m \tilde{v}})_{Sist}}{dt} = \sum \overline{M_{Ext}} \quad (5.123)$$

El desarrollo de la derivada del momento cinético mediante los términos local y convectivo es el marcado por el teorema del arrastre de Reynolds, llegando a la expresión:

$$\sum \overline{M_{Ext}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} (\tilde{r} \wedge \tilde{v}) \rho d\mathcal{V} + \int_{SC} (\tilde{r} \wedge \tilde{v}) \rho (\overline{v_{r,SC}} \cdot d\overline{A}) \quad (5.124)$$

que es la forma de la ecuación de conservación del momento cinético para sistemas inerciales. Todas las variables son las mismas que las ya presentadas en el caso de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, excepto  $\tilde{r}$ , que aparece ahora por primera vez y representa el vector de posición de cualquier partícula

de fluido que se encuentre en el interior del VC o atravesando la SC (según la integral en la que se encuentre).

Adoptando la simplificación de propiedades uniformes en las secciones y en el VC, resulta la forma:

$$\begin{aligned} \sum \overline{M_{Ext}} &= \\ &= \frac{d(\overline{\tilde{r} \wedge m \tilde{v}})_{VC}}{dt} + \sum_{\text{Salidas } i} [(\overline{\tilde{r} \wedge \tilde{v}}) \rho Q]_i - \sum_{\text{Entradas } j} [(\overline{\tilde{r} \wedge \tilde{v}}) \rho Q]_j \end{aligned} \quad (5.125)$$

Y añadiendo la condición de régimen permanente:

$$\sum \overline{M_{Ext}} = \sum_{\text{Salidas } i} [(\overline{\tilde{r} \wedge \tilde{v}}) \rho Q]_i - \sum_{\text{Entradas } j} [(\overline{\tilde{r} \wedge \tilde{v}}) \rho Q]_j \quad (5.126)$$

En el caso de sistemas no inerciales, el planteamiento también es el mismo que el ya visto para la ecuación de la cantidad de movimiento, mediante la incorporación del término corrector que ahora representará pares de inercia del sistema.

$$\begin{aligned} \sum \overline{M_{Ext}} - \int_{VC} \left[ \tilde{r} \wedge \left( \frac{d^2 \overline{R}}{dt^2} + \overline{\omega} \wedge \tilde{r} + \overline{\omega} \wedge (\overline{\omega} \wedge \tilde{r}) + 2 \overline{\omega} \wedge \overline{v_r} \right) \right] \rho d\mathcal{V} &= \\ = \frac{d}{dt} \int_{VC} (\tilde{r} \wedge \overline{v_r}) \rho d\mathcal{V} + \int_{SC} (\tilde{r} \wedge \overline{v_r}) \rho (\overline{v_{r,SC}} \cdot d\overline{A}) \end{aligned} \quad (5.127)$$

Simplificando propiedades uniformes de las variables en las secciones de entrada y salida, así como en el interior del VC:

$$\begin{aligned} \sum \overline{M_{Ext}} \left[ \tilde{r} \wedge m \left( \frac{d^2 \overline{R}}{dt^2} + \frac{d\overline{\omega}}{dt} \wedge \tilde{r} + \overline{\omega} \wedge (\overline{\omega} \wedge \tilde{r}) + 2 \overline{\omega} \wedge \overline{v_r} \right) \right]_{VC} &= \\ = \frac{d(\overline{\tilde{r} \wedge m \overline{v_r}})_{VC}}{dt} + \sum_{\text{Salidas } i} [(\overline{\tilde{r} \wedge \overline{v_r}}) \rho Q]_i - \sum_{\text{Entradas } j} [(\overline{\tilde{r} \wedge \overline{v_r}}) \rho Q]_j \end{aligned} \quad (5.128)$$

Y para el caso de régimen permanente:

$$\begin{aligned} \sum \overline{M}_{Ext} \left[ \vec{r} \wedge m \left( \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \right) \right]_{VC} &= \\ &= \sum_{Salidas\ i} \left[ (\vec{r} \wedge \vec{v}_r) \rho Q \right]_i - \sum_{Entradas\ j} \left[ (\vec{r} \wedge \vec{v}_r) \rho Q \right]_j \quad (5.129) \end{aligned}$$



Capítulo 6

# Flujo a presión

## Índice

### Introducción

Balances que presiden el análisis del flujo a presión en conductos cerrados

Cálculo de las pérdidas de carga en las tuberías

Pérdidas de carga localizadas

Línea de altura geométrica, piezométrica y total

Caracterización de otros elementos de los sistemas a presión

Análisis, dimensionado y modelación de sistemas a presión

Análisis estático de redes

Modelaciones hidráulicas de los flujos a presión

La modelación cuasi estática

Los modelos dinámicos

### Transitorios hidráulicos

El modelo dinámico rígido (oscilación en masa)

El modelo dinámico elástico o golpe de ariete

### Bibliografía



## Introducción

El transporte de agua en régimen de lámina libre ya estudiado ha sido la primera opción por la que el hombre, en su afán por imitar a la naturaleza, siempre ha optado. No en vano el transporte natural del agua (ríos, torrentes o barrancos) o el artificial diseñando por el hombre como réplica a los anteriores (canales y acequias) tiene muchas ventajas, siendo la mayor la que otorga la propia naturaleza que siempre actúa como motor del movimiento (es la fuerza de la gravedad la que mueve el agua por los cauces naturales) por lo que no hay que recurrir a fuentes energéticas externas, como son las bombas. Tampoco las necesita, claro está, el transporte de agua a presión si el fluido se desplaza desde una cota alta a otra inferior. No es, pues, la presencia de una fuente energética exterior el hecho diferencial entre estas dos modalidades del transporte del agua. Sí lo es que en régimen de lámina libre el agua está en contacto con la atmósfera y, en consecuencia no puede almacenar la energía elástica de presión, de tal manera que el trabajo que siempre hay que realizar para vencer las fuerzas de rozamiento sólo lo puede aportar la energía potencial gravitatoria. Dicho de otro modo, el régimen en lámina libre exige que el agua vaya siempre desde una cota superior a otra inferior. No hay alternativa posible.

En el transporte de agua en conductos cerrados, la energía elástica que el agua almacena en forma de presión le confiere una gran versatilidad al trazado. El fluido, además de vencer el rozamiento que se opone a su movimiento, puede ganar cota a costa de perder energía de presión, una circunstancia clave para flexibilizar el trazado de una conducción que ya no debe ser esclava de la topografía del terreno. Este hecho, y la mayor operatividad que su manejo ofrece (lo que permite un uso más eficiente del fluido), está propiciando que con el paso del tiempo el transporte de agua a presión esté ganándole mucho terreno al flujo en lámina libre. Así lo evidencia tanto la progresiva transformación del riego tradicional a manta en riego localizado, como los recientes trasvases de agua intercuenas entre los que destaca, por su proximidad en el espacio y en el tiempo, el Júcar-Vinalopó en el que en la mayor parte de su trazado el transporte de agua discurre a presión, lo que no sucede en los que se proyectaron hace unas décadas, como es el caso del Tajo-Segura.

Con todo, el transporte de agua a presión es conocido desde hace varios milenios. Así lo confirma la que probablemente sea la tubería de presión más antigua, un sifón invertido que en tiempos de Salomón, el hijo del Rey David (siglo X a.C.), suministraba agua a Jerusalén. Aunque posterior (siglo II a.C.), otra tubería de presión más conocida por las evidencias que nos han llegado, es el sifón que alimentaba la acrópolis de Pérgamo en la antigua Grecia (hoy Turquía). Era una tubería de plomo de 22 cm de diámetro interior, con una pared de 8 cm. Sometida a un régimen prácticamente permanente, soportaba una presión de 20 bares (Bonnin, 1984). Con todo no abundaban este tipo de conducciones porque había que superar dos obstáculos importantes. El primero, tener un acceso relativamente fácil a materiales capaces de soportar presiones medianamente altas. Y aún admitiendo que se podría tener, había un segundo obstáculo imposible de vencer. La limitación de los conocimientos técnicos del momento para construir tuberías de grandes diámetros. En cualquier caso, tuberías a presión de pequeño diámetro sí fueron relativamente frecuentes en la antigüedad.

En cualquier caso su estudio formal se inicia cuando el uso de estas tuberías a presión comienza a generalizarse. Es decir, hay que esperar hasta el siglo XVIII. De hecho la ecuación de Bernoulli, la que por excelencia caracteriza este flujo en régimen estacionario, es conocida desde 1738 (la introduce Daniel Bernoulli en su libro "Hidrodinámica"). A ella le seguirá la conocida expresión de Chezy en la que por vez primera se introduce la resistencia a la fricción, bien que en flujos en lámina libre. Su adecuación a tuberías de presión es posible gracias a los posteriores trabajos de Weisbach (1845) y de Darcy (1857). Pronto culminarán en la fórmula universal de la pérdida de carga en tuberías, aún plenamente vigente, y que en su honor es conocida con el nombre de Darcy-Weisbach. Más adelante se le presta la atención que merece.

El estudio del movimiento unidimensional (una hipótesis absolutamente válida cuando el fluido se mueve confinado en el interior de una tubería) que se estudia, se acostumbra a dividir en estacionario (la variable temporal no interviene) y transitorio. Ambos tipos de análisis son tan necesarios como complementarios. El primero estudia las condiciones de funcionamiento más habituales de una instalación y, por ello, su diseño debe realizarse a partir de las expresiones que lo

caracterizan. Y así, el diámetro de una tubería debe seleccionarse a partir del estudio del sistema en régimen estacionario. Y si, como resulta cada vez más frecuente, las condiciones de servicio cambian con el tiempo, para dimensionar la instalación hay que situarse en el "centro de gravedad" de las diferentes situaciones estacionarias "previsibles". Hay, pues, que identificar el **marco habitual más representativo**, al que le corresponden magnitudes hidráulicas (caudales y presiones) constantes en el tiempo.

También hay que caracterizar las condiciones de contorno (generalmente la cota del agua en los depósitos y las demandas) y el estado de los elementos complementarios (grado de apertura de las válvulas y velocidad de giro de las bombas, entre otros datos de partida). Con todos estos datos de partida se determina el estado de equilibrio hidráulico del sistema, cálculo relativamente sencillo en sistemas simples y mucho más complejo, por la cantidad de ecuaciones que deben resolverse simultáneamente, en redes. Por ello el artículo de Hardy Cross (1936), que introduce el método iterativo para el análisis de sistemas complejos, llamado por su nombre en su honor, ha jugado un papel decisivo. Al análisis en régimen estacionario de los sistemas a presión se le dedica la mayor parte del capítulo.

Pero, como ya decía el filósofo griego Heráclito (513 a.C.) "*nada, excepto el cambio, es permanente*". Sin embargo como la mayoría de los cambios que en la práctica acontecen son muy lentos, casi imperceptibles, hay evoluciones que pueden modelarse con ecuaciones estáticas en las que la variable "tiempo" no interviene. Un hecho que no nos puede hacer ignorar que, con la mirada puesta en el medio-largo plazo, toda instalación hidráulica es un sistema dinámico, ya que ninguna variable es estacionaria. Todos los flujos, bien de forma gradual bien repentina, cambian continuamente. Desde el primer llenado de un depósito hasta al final de la vida útil de una instalación, todo cambia con el tiempo. En cualquier caso, un análisis del movimiento basado en las ecuaciones estacionarias y con la actualización, cada cierto intervalo de tiempo, de las condiciones de contorno es lo que se conoce como análisis cuasi-estático o simulación en periodo extendido, una estrategia que contempla el programa EPAnet, la herramienta de simulación por excelencia en el cálculo de redes de agua a presión.

Pero también en el movimiento de los líquidos a presión hay cambios bruscos. El cierre rápido (o incluso instantáneo de una válvula), el arranque (o la parada) de una bomba o la simulación de un reventón en una tubería de agua generan cambios bruscos en el movimiento del fluido que requieren incluir no sólo la inercia del agua sino también la elasticidad del fluido (representada por el módulo de compresibilidad volumétrico) y de las paredes de la tubería (modelada con el módulo de Young del material con que se ha construido). El estudio de estos transitorios hidráulicos tiene gran interés porque es en estas circunstancias cuando el sistema, en especial las tuberías, suelen soportar las mayores tensiones. El objetivo principal del estudio de los transitorios hidráulicos es cuantificarlas y verificar que pueden ser absorbidas por el sistema sin que la instalación corra riesgo alguno. Como también lo es, si un primer análisis ha evidenciado un potencial riesgo de rotura, dimensionar los elementos de protección que los anule. Con todo, y pese a su indudable interés, al análisis de los transitorios hidráulicos se le va a prestar poca atención. Tan sólo los dos últimos apartados de este capítulo.

De hecho, la mayor parte de este capítulo se dedica al análisis del flujo a presión en régimen estacionario y, con el apoyo del programa EPAnet, se dan las directrices para estudiar el comportamiento de estos sistemas cuando las condiciones de funcionamiento varían muy lentamente lo que se conoce, ya se ha dicho, como simulación en periodo extendido. En cuanto a los transitorios hidráulicos sólo hay espacio para evidenciar el interés de su estudio y presentar sus fundamentos. Para ello se describen las dos formas habituales de modelarlos. La primera, conocida por oscilación en masa incluye sólo la inercia del agua en el sistema e ignora los efectos elásticos. Pero es suficientemente precisa cuando los cambios no son tan lentos como para despreciar la inercia del agua, pero no son tan rápidos como para incluir la elasticidad del sistema (fluido y tuberías). La inclusión de estos efectos equivale a referirse al golpe de ariete. Aunque, ya se ha dicho, los créditos asignados a esta materia impiden profundizar en el análisis de los transitorios hidráulicos, es imprescindible presentar algunas ideas básicas que, cuanto menos, permitan al alumno conocer la existencia de un problema concreto y saber en qué casos se puede presentar. Es, sin duda, la condición necesaria (aunque no suficiente) para evitar accidentes e incidentes hidráulicos.

## Balances que presiden el análisis del flujo a presión en conductos cerrados

En lo que sigue y mientras no se indique lo contrario el flujo es además de unidimensional, una hipótesis que en ningún momento se abandona, estacionario. En estas condiciones los balances que presiden el análisis del flujo a presión en conductos cerrados son el balance de materia y el de energía. El balance de materia en flujos incompresibles, también conocido como ecuación de continuidad, se ha estudiado en lecciones precedentes y, coloquialmente, se puede simplificar diciendo que la masa entrante es igual a la saliente. En el caso de que la tubería sea simple, equivale a decir que el caudal a través de cualquier sección recta es siempre el mismo. Si el balance (figura 1) se aplica al nudo ( $i$ ), vecino del (o de los) nudo(s) ( $j$ ) y en el que, además, confluyen un conjunto de tuberías (1, 2, ...,  $n$ ), la ecuación de continuidad establece que la suma de caudales que se dirigen hacia el nudo es igual a la suma de los que lo abandonan.

Un balance de materia que adoptando un convenio de signos coherente resume la ecuación siguiente:

$$\sum_{j=1}^n Q_{ij} = D_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.1)$$

y en la que el índice  $j$  referencia todos los nudos conectados directamente al nudo  $i$  en tanto que se considera un caudal interno. En particular, el criterio de signos que adopta EPAnet es función de cómo se ha definido la línea  $ij$  por la que discurre el caudal. Y así  $Q_{ij}$  es positivo cuando el fluido parte del nudo inicial y viaja hacia el final y negativo en caso contrario. En el segundo miembro de la ecuación figuran las demandas  $D_i$  de los abonados (son los caudales externos), positivas cuando, es el caso habitual, se detrae agua de la red. Esta es la situación más frecuente (tanto las demandas de los abonados como las fugas son caudales que abandonan el nudo y, por tanto, positivos). Sin embargo en el dimensionado de redes ramificadas puede convenir simular unos caudales circulando por las tuberías que no "cumplen" la ecuación de continuidad en un nudo en el que convergen. En tal supuesto se puede "introducir" agua en el sistema con una demanda "negativa", equivalente a un aporte

te, una posibilidad que sólo tiene sentido en el diseño de redes ramificadas. En definitiva hay  $N$  ecuaciones, una por cada nudo de la red, de continuidad o balances de materia.

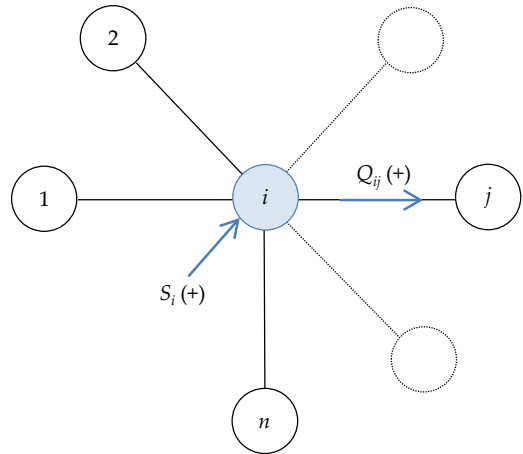


Figura 1 Criterio de signos para la ecuación de continuidad en un nudo genérico  $i$

Obviamente la ecuación de continuidad también puede extenderse al total de la red, de manera que la suma de las demandas (y las fugas  $F_j$ , si las hay) sea igual a la de los aportes ( $A_i$ ). Éstos se determinan fácilmente a partir de los caudales que salen de los depósitos y/o embalses que alimentan el sistema. De este modo, estableciendo el balance global de materia para el conjunto de la red se tiene:

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{j=1}^N (D_j + F_j) \quad (6.2)$$

donde  $N$  es el número de nudos total de la red, mientras  $n$  es el de puntos desde los cuales se inyecta agua al sistema. En definitiva el número de total de ecuaciones de continuidad que se pueden plantear es  $N + 1$ . Sin embargo la ecuación (6.2) se puede obtener asimismo sumando las  $N$  ecuaciones del sistema (6.1) por lo que las ecuaciones  $N + 1$  que imponen la conservación de masa (continuidad) proporcionan  $N$  relaciones independientes (de las  $N + 1$  posibles). Más adelante,

al contabilizar datos e incógnitas, se vuelve sobre este asunto.

El segundo balance a aplicar es el de la energía, que particularizado para flujos unidimensionales y estacionarios se reduce a la ecuación de Bernoulli que puede establecerse entre dos secciones rectas cualesquiera del sistema, en particular, entre los extremos de cada línea del modelo o bien a un conjunto de ellas integradas en una malla de la red. Y llegados a este punto conviene decir que en el análisis de flujos a presión el término cinético del trinomio de Bernoulli acostumbra a despreciarse. Y ello por dos razones. La primera y más importante, porque es un término de valor despreciable. Conviene recordar que la velocidad de circulación de un fluido incompresible por una tubería rara vez supera los 2,5 m/s en cuyo caso el valor de la energía por unidad de peso ( $V^2/2g$ , en metros) es de unos 0,3 m, valor poco representativo (menos del 2%) cuando se le compara con los, por ejemplo, 20 m de presión (en metros de columna de agua) que, como mínimo, requieren las redes de agua urbana o de riego. Hay además una segunda razón. Y es que en un nudo (el extremo de la tubería en el que se le particulariza la ecuación de Bernoulli) es imposible conocer con rigor la velocidad del flujo. En estas condiciones el trinomio energético, al incluir únicamente la energía potencial y la de presión (o elástica), se convierte en binomio ( $z + p/\gamma$ ). Se le denomina, sencillamente, altura piezométrica  $H$ . La importancia de este asunto aconseja abundar en ello más adelante.

Teniendo presente cuanto antecede, la ecuación de Bernoulli aplicada entre los puntos extremos de una tubería, establece que la diferencia de energía (alturas piezométricas)  $H_i - H_j$  es igual a la suma de las pérdidas por rozamiento más las pérdidas localizadas. Una diferencia que altera la presencia de bombas que añaden (o, en el caso de una turbina, sustraen) energía al flujo. Llamando  $\Delta H_{ij}$  a la pérdida de carga total de esa tubería que une los nudos  $i$  y  $j$ ,  $H_{bomba}$  el aporte de energía de la bomba (si existe) en el trayecto  $i-j$ , se puede escribir:

$$H_i + H_{bomba} = H_j + \Delta H_{ij} \quad (6.3)$$

La caracterización de los elementos resistentes y de las bombas se detalla en apartados posteriores. Con el nom-

bre de **ecuación característica o constitutiva del elemento**, se relaciona el caudal circulante (o, alternativamente, la velocidad que le corresponda) con la pérdida de carga (o de energía), supuesto un elemento resistente, o con el aporte de energía en el caso de una bomba. De este modo en la precedente ecuación (6.3) se puede sustituir  $\Delta H_{ij}$  o  $H_{bomba}$  por una función del caudal de modo que la ecuación que modela el comportamiento de una línea sea, en función del elemento, la que sigue:

- En la línea sólo hay elementos resistentes (tubería, válvulas, etc.). En este caso:

$$H_i - H_j = \Delta H_{ij} = R_{ij} Q_{ij} |Q_{ij}| \quad (6.4)$$

en donde el término  $R_{ij}$  representa aquí un coeficiente de resistencia hidráulica global de la línea  $i-j$ , dado por  $8f_{ij}L_{ij}/g\pi^2D_{ij}^5$  para un elemento tubería (ecuación de Darcy-Weisbach), y por  $8k_{ij}/g\pi^2D_{ij}^4$  para un elemento válvula o cualquier otra pérdida de carga singular. El plantear el signo de la pérdida de carga de la ecuación (6.4) en función del caudal (y no de su cuadrado) es necesario para que tome el valor que le corresponda. No conviene olvidar que en una línea de una red mallada, el sentido de circulación no está previamente definido.

- Si la línea corresponde a un elemento bomba, más adelante se verá, la ecuación queda:

$$H_i - H_j = -H_{bomba} = -(A + BQ + CQ^2) \quad (6.5)$$

## Cálculo de las pérdidas de carga en las tuberías

Un análisis cualitativo de la pérdida de energía unitaria ( $J = h/L$ ) debida al rozamiento del fluido con las paredes de la tubería, permite evidenciar su dependencia de un conjunto de parámetros:

- Dos de carácter geométrico que, obviamente, tienen unidades de longitud. Por orden de importancia el diámetro de la tubería ( $D$ ) al que es muy sensible y la rugosidad,  $\epsilon$ , la longitud media de las discontinuidades de la pared que la constituye (tal vez por

ello convendría hablar de "aspereza" de las paredes de la conducción). Y, obviamente, si se hace referencia a la pérdida de energía total,  $h_f$ , en un tramo de tubería de longitud  $L$ , habrá un tercer parámetro de carácter geométrico que intervendrá en su determinación ( $h_f$ ), la referida longitud  $L$ .

- Uno de carácter cinemático. Mayor velocidad de circulación del fluido,  $V$ , (que equivale a un mayor caudal  $Q$  transportado) también genera una mayor pérdida de carga unitaria del sistema. Si el régimen de circulación del fluido es turbulento ( $Re > 4000$ ), la pérdida varía con el cuadrado de la velocidad, mientras que si es laminar resulta proporcional a la primera potencia de la velocidad.
- Dos dependientes del fluido. En concreto de la viscosidad  $\mu$  y del peso específico,  $\gamma$ , producto de densidad,  $\rho$ , por la aceleración de la gravedad,  $g$ , es decir  $\gamma = \rho g$ . Alternativamente estas dos variables ( $\mu$  y  $\gamma$ ) pueden ser representadas por otras dos, densidad  $\rho$  y viscosidad cinemática (recuérdese  $\nu = \mu/\rho$ ).

En definitiva, de manera cualitativa, se puede establecer la expresión cualitativa:

$$J = \frac{h_f}{L} = J(D, \varepsilon, V, \nu, g) \quad (6.6)$$

Algunas de estas variables intervienen en la pérdida de carga de manera indirecta a través del coeficiente adimensional de fricción ( $f$ ). Es el caso de la rugosidad y la viscosidad. Otras, es el caso de la velocidad y del diámetro, tienen mucho mayor protagonismo toda vez que de una parte influyen en el valor del coeficiente de fricción y, de otra, también figuran de manera explícita en la ecuación de Darcy-Weisbach que es la que, finalmente, permite concretar el valor de la pérdida de energía. En definitiva:

$$J = \frac{h_f}{L} = \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (6.7)$$

El coeficiente, o factor de fricción, cual se ha dicho, depende de cuatro variables que se pueden agrupar

en dos parámetros adimensionales. De este modo se puede establecer:

$$f = f(\varepsilon, D, V, \nu) = f\left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{VD}{\nu}\right) = f(\varepsilon_r, Re) \quad (6.8)$$

El segundo de los parámetros adimensionales es el conocido número de Reynolds,  $Re$ , un indicador que pondera la influencia de las fuerzas de inercia (proporcionales al cuadrado de la velocidad) con las viscosas (proporcionales a la velocidad). De otra parte el cociente entre rugosidad absoluta y diámetro, llamado rugosidad relativa  $\varepsilon_r$ , permite valorar la influencia de la aspereza de la tubería. Porque es evidente que la misma rugosidad absoluta no perturba el flujo del mismo modo en tuberías de diferente diámetro. Cuanto mayor es su tamaño, menos influyen las discontinuidades existentes en la pared de la conducción.

Queda ya una única cuestión pendiente, el cálculo del factor de fricción  $f$ . Cuando el flujo es turbulento lo proporciona la ecuación (6.9), una relación a la que Colebrook y White llegaron por vía semiempírica. Es una expresión a resolver mediante iteraciones sucesivas, toda vez que el factor de fricción figura de manera implícita. Cual se constata, figura en los dos miembros:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) = -2 \log \left( \frac{\varepsilon_r}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (6.9)$$

Conviene comprobar que cuando el fluido circulante es agua, el número de Reynolds casi con seguridad indicará que el régimen es turbulento. Al ser la viscosidad cinemática del agua a 20 °C,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , el número de Reynolds resulta  $Re = 10^6$ ,  $D$  (m)  $V$  (m/s). Como quiera que cuanto menor sea el diámetro menor es el Reynolds, la hipótesis más desfavorable corresponde a las tuberías más estrechas que se puedan encontrar en la práctica, las de las instalaciones interiores de una vivienda. Unos 10 mm = 0,01 m. En ellas el Reynolds resultante es 10000  $V$  por lo que sólo para valores inferiores a 0,4 m/s sería inferior a 4000 el umbral que ya no garantiza la turbulencia del flujo.

Entre este límite superior del Reynolds (4000) y el umbral de garantía del régimen laminar, en torno a los 2000, el flujo puede ser laminar o turbulento, dependiendo de circunstancias externas (como el nivel de las perturbaciones externas que la tubería soporte). Ya por debajo de 2000, cual se ha dicho, el flujo es laminar en cuyo caso el factor de fricción ya no depende de la rugosidad de la tubería siendo función exclusiva del número de Reynolds, todo ello de acuerdo con la relación (6.10) característica del régimen laminar, conocida como relación de Poiseuille.

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{VD} \quad (6.10)$$

La sustitución de este valor del factor de fricción  $f$  en la fórmula de Darcy-Weisbach (relación 6.7) evidencia que en régimen laminar, la pérdida de carga es proporcional a la primera potencia de la velocidad de acuerdo con la expresión (6.11) que sigue:

$$J = \frac{h_f}{L} = \frac{VD}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{64\nu}{2gD^2} V = kV \quad (6.11)$$

razón por la cual, el rozamiento viscoso es el proporcional a la primera potencia de la velocidad. Sin embargo conviene subrayar que en un flujo turbulento y, contrariamente a lo que pudiera parecer, el flujo no es, estrictamente hablando, siempre proporcional a la velocidad. Lo sería si el factor de fricción no dependiese también de la velocidad (a través del número de Reynolds). Como quiera que al aumentar  $Re$  el factor de fricción  $f$  disminuye (relación 6.9), es proporcional a  $V^{2-n}$ , con  $n$  tendiendo a cero a medida que la turbulencia aumenta y el valor de  $f$  tiende a un valor constante. En la figura 2 (diagrama de Moody) se aprecia con claridad la zona en la que  $f$  se independiza del valor del número de Reynolds y sólo depende de la rugosidad relativa. Es la parte del diagrama situada a la derecha de la zona de puntos (turbulencia completa, tuberías rugosas).

La incomodidad de calcular el factor de fricción  $f$  por procedimientos iterativos (relación 6.9) le ha otorgado

un notable protagonismo al diagrama de Moody (sobre todo antes de que el uso de los ordenadores digitales se popularizara) que no es sino la representación de tal relación. Cual se ve (figura 2), a partir de los dos parámetros adimensionales de los que el factor de fricción depende, de inmediato se determina el valor de  $f$ . En la figura se visualiza el cálculo para una tubería de fundición (de acuerdo con la leyenda de la figura 2, cast iron) de 600 mm de diámetro, con una rugosidad de 0,26 mm. En consecuencia la rugosidad relativa será 0,00043. Si la velocidad del fluido en la tubería es 1 m/s (caudal transportado 282 l/s), el número de Reynolds es 600000, resultando un factor de fricción ligeramente superior a 0,017.

Con el diagrama de Moody, pues, se soslaya con sencillez el tedioso cálculo de  $f$  por la expresión de Colebrook y White. Con todo, existen excelentes simplificaciones de esta expresión y que permiten calcular directamente el valor del factor de fricción. De entre todas destaca la de Swamee y Jain (ecuación 6.12) que, de hecho, es la que utiliza EPAnet en su algoritmo de cálculo.

$$f = \frac{0.25}{\left[ \text{Log} \left( \frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (6.12)$$

La sustitución de los valores precedentes en esta expresión proporciona, efectivamente, un factor de fricción  $f = 0,0172$ , análogo al que se obtiene a partir del adjunto diagrama de Moody.

En el diagrama de Moody (figura 2) se detallan, conviene insistir en ello, cuatro zonas bien diferenciadas. La primera es la que corresponde al régimen laminar y viene representada por la ecuación (6.10), una recta debido a la escala logarítmica con que se representa el diagrama de Moody. La segunda zona es la crítica y corresponde al intervalo  $2000 < Re < 4000$  en que el carácter del flujo no se sabe a priori cuál es. Ya se ha dicho que la existencia de perturbaciones externas (como vibraciones de la tubería provocadas por cargas exteriores) puede propiciar una anticipada transición al régimen turbulento. En cualquier caso, la figura 2 así lo evidencia, en esta zona el factor de fricción no se puede concretar.

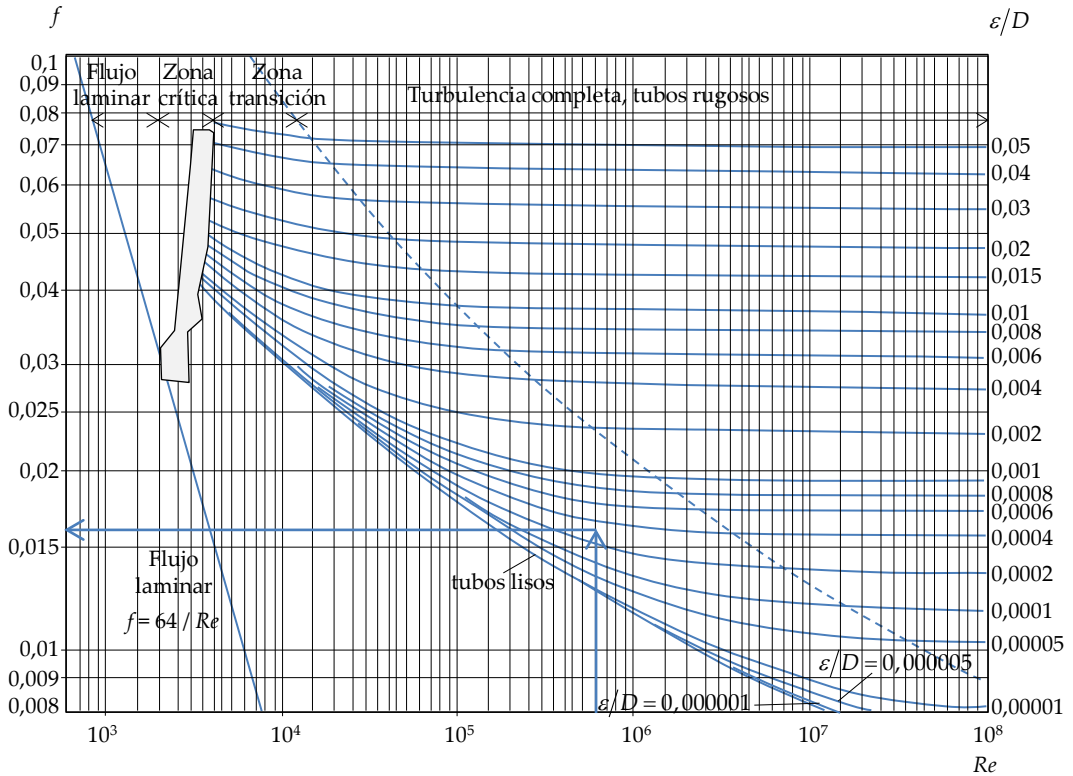


Figura 2 Diagrama de Moody para el cálculo del factor de fricción

Tabla 1 Rugosidad de materiales

Material	$f$	Rugosidad $\varepsilon$ (mm)
Vidrio, plástico	0	0
Hormigón	0,003 - 0,03	0,9 - 9
Madera	0,0016	0,5
Caucho suavizado	0,000033	0,01
Tubería de cobre o latón	0,000005	0,0015
Hierro fundido	0,00085	0,26
Hierro galvanizado	0,0005	0,15
Hierro forjado	0,00015	0,046
Acero inoxidable	0,000007	0,002
Acero comercial	0,00015	0,045

La tercera zona es la de transición. En ella el flujo ya es turbulento pero, cual se ve, el factor de fricción  $f$  es muy sensible al valor del número de Reynolds (piénsese en la escala logarítmica del diagrama), disminuyendo de

manera notable su valor. Es en esta zona en la que la pérdida de carga no es proporcional al cuadrado de la velocidad ya comentada anteriormente. Por último, se halla la zona turbulenta en la que el factor de fricción tiende a independizarse del número de Reynolds y prácticamente es función exclusiva de la rugosidad, particularmente a medida que su valor aumenta. En el diagrama de Moody está representada por las líneas horizontales en las que el factor de fricción cualquiera sea el número de Reynolds, siempre es el mismo. De este modo a cada rugosidad relativa le corresponde un valor del factor de fricción.

Ya para concluir comentar que existen otras expresiones que permiten calcular el factor de fricción. Entre todas ellas destacan las dos que también contempla el programa EPANet (ver en las opciones Hidráulicas el desplegable "fórmula de pérdidas"). Además de la Darcy-Weisbach (que en el programa figura como



D-W), otras dos se contemplan. La de Hazen Williams (H-W en EPAnet), que es la expresión que habitualmente se utiliza en los USA y en el Reino Unido (en EPAnet es la primera opción). Su sistema de unidades es el sajón (y no en el SI, habitual en toda Europa, excepción hecha del Reino Unido). La tercera es la de Chezy-Manning (C-M en EPAnet) y que es, ya se ha visto, la más habitual en canales. Pero también se utiliza en tuberías a presión.

## Pérdidas de carga localizadas

Aunque en diámetros pequeños, se pueden tender longitudes notables de tuberías de plástico sin necesidad de recurrir a accesorios de unión (un tubo de notable longitud se enrolla en un carrete), a partir de determinados diámetros en tuberías de plástico y siempre en el resto de materiales (fundición, acero, hormigón,...) las conducciones se fabrican en tubos, generalmente de 6 m de longitud, que posteriormente hay que enlazar con juntas y uniones para adecuar el tendido de la conducción a las necesidades del trazado. A tal efecto, así como para cambiar de diámetro, se necesitan diversos accesorios. En ellos se generan pérdidas que se denominarán localizadas.

Estos elementos son absolutamente necesarios. Uniones, codos (de ángulos diversos), conos de reducción que permiten adecuar el diámetro de la conducción a las necesidades, "tes" que permiten dividir una tubería de notable diámetro en otras de menor entidad y, en fin, entronques de las tuberías en los depósitos de alimentación del sistema son solo algunos de la infinidad de elementos que en la práctica se encuentran. Y a todos estos elementos complementarios aún hay que añadir las válvulas de corte y regulación que permiten regular el flujo según interese o, en fin, variar el caudal circulante, así como otros muchos tipos de válvulas. En definitiva un sistema hidráulico a presión lo conforman, además de tramos rectos de tuberías, un sinnúmero de elementos complementarios y válvulas.

En todos estos elementos el flujo se perturba (en mayor o menor medida, según el elemento) y, por ello, se genera una pérdida de energía localizada en sus inmediaciones. De ahí el nombre de pérdida localizada, también en ocasiones denominada pérdida menor (en contraposición a las pérdidas por fricción en las tube-

rias, generalmente llamadas mayores y que ya se han explicado en el epígrafe precedente). Conviene, con todo, subrayar que el término pérdida menor es en algunas ocasiones contradictorio porque estas pérdidas pueden superar a las "mayores". Pero lo cierto es que es un término muy utilizado y que, por tanto, conviene conocer.

Estas pérdidas, se expresan siempre como una fracción de altura de velocidad ( $V^2/2g$ ), lo que supone admitir que en estos elementos el flujo es turbulento. Si no se indica lo contrario esta fracción se refiere a la altura de velocidad del diámetro nominal del elemento que en el caso, por ejemplo, de válvulas y codos está bien definido. Si se tiene un elemento que une dos secciones diferentes (como los estrechamientos y ensanchamientos a la salida y llegada de las tuberías a los depósitos, o los conos de reducción) casi siempre viene especificado el diámetro de la sección a la que está referida la pérdida. Por lo general es la sección de menor diámetro y, en consecuencia, la de mayor velocidad. Se verá en algunos casos (ensanchamiento y estrechamiento bruscos) que a continuación se presentan.

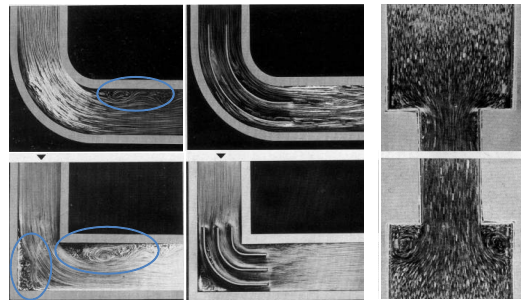


Figura 3 Visualización de turbulencias (pérdidas localizadas)  
En diferentes codos de 90° (izq.)  
En contracción y ensanchamiento (der.)

Las figuras 3 y 4 muestran las líneas de corriente de algunos de estos elementos perturbadores del flujo. En la parte derecha de la figura 3 se muestran cuatro codos de 90° con diferentes pérdidas localizadas dependientes de la ejecución del cono. En la parte superior se ven codos sin aristas en los que se aprecia que el flujo presenta muchas menos turbulencias que cuando no se suprimen. Y aún se pueden disminuir



estas pérdidas introduciendo perfiles que contribuyan a que el flujo se adapte mucho más al contorno, una solución a la que se recurre excepcionalmente en las tuberías de aspiración de las bombas en las que existe riesgo de cavitación y, por tanto, es necesario reducir las pérdidas tanto como se pueda. A la izquierda de la figura 3 se muestra un estrechamiento (parte inferior) y un ensanchamiento (parte superior). Con claridad se aprecia que las pérdidas serán mayores en este segundo caso, toda vez que las turbulencias que se generan también lo son. De hecho la modelación de las pérdidas por un ensanchamiento las proporciona la relación (6.13), donde la sección 1 es la de aguas arriba del flujo es decir, la más estrecha:

$$h_e = \frac{V_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (6.13)$$

Por otra parte la expresión que permite el cálculo de una contracción (Streeter, 1963) es:

$$h_e = \frac{V_2^2}{2g} \left( \frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \quad (6.14)$$

siendo  $V_2$  la velocidad aguas abajo (la mayor, pues es un estrechamiento), y  $C_c$  el coeficiente de contracción de la vena fluida dependiente de la relación de áreas. Lo detalla la tabla 2, que fue el propio Weisbach quien, hace más de 150 años, tras un histórico trabajo experimental, la publicó:

Tabla 2 Valor del coeficiente de contracción en diferentes estrechamientos bruscos

$A_2/A_1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$C_c$	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681
$A_2/A_1$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$C_c$	0,712	0,755	0,813	0,892	1,0

Es fácil, aplicando las expresiones (6.13) y (6.14) confirmar que la pérdida de energía es mayor en un ensanchamiento que en una contracción. Por ejemplo, supóngase un brusco cambio de diámetro de 200 mm a 400 mm siendo el caudal circulante de 100 l/s. Las

velocidades en las dos secciones correspondientes son 3,18 m/s y 0,80 m/s. Una relación de áreas de 0,25 indica que el coeficiente de contracción de 0,638, al que le corresponde (ecuación 6.14) una pérdida localizada en el ensanchamiento  $h_e = 0,29$  m. Sin embargo, con idéntica relación de secciones, la pérdida en la contracción es  $h_e = 0,17$  m, lo que confirma numéricamente lo que en la figura 3b se visualiza perfectamente. Conviene decir que las diferencias crecen a medida que el cambio es mayor llegando a coincidir cuando la relación de áreas es la unidad. No puede ser de otro modo, pues en este caso no hay ni ensanchamiento ni estrechamiento. La sección es la misma y, en consecuencia, la pérdida menor como tal es nula.

La figura 4 visualiza las líneas de corriente para diferentes modos de entroncar una tubería en un depósito. De entre los tres casos de la izquierda claramente se observa que es el inferior el más desfavorable (una conexión oblicua que obliga al fluido a cambios de dirección muy bruscos) mientras el más favorable corresponde a la embocadura gradual. Por último el entronque recto superior se puede asimilar a una contracción brusca con una relación de áreas igual a 0, toda vez que  $A_1$  es el área del depósito que se puede suponer (frente a  $A_2$ ) infinita.

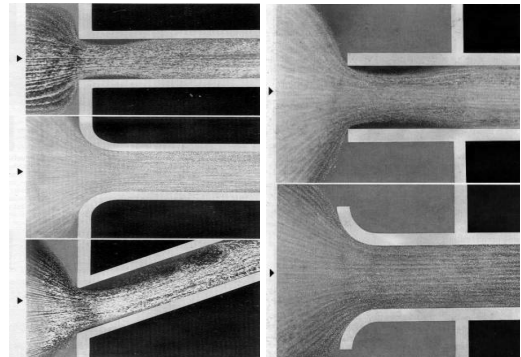


Figura 4 Visualización de las pérdidas localizadas en diferentes entronques depósito - tubería

De otra parte, las entradas de la derecha (el tubo ingresa) en el interior del depósito, conocidas como conexiones Borda (en honor del hidráulico francés que las estudió), proporciona pérdidas superiores a las del

entronque enrasado al depósito. Las turbulencias existentes así lo demuestran.

Con la excepción de las válvulas, estos elementos complementarios son todos estáticos, por lo que una constante  $k$  adimensional basta para determinar las pérdidas localizadas  $h_L$  que introducen ( $h_L = k \cdot V^2/2g$ ). La tabla 3 es la que para valorar el comportamiento de algunos componentes incluye el manual de EPANet. Cual se ve, contempla válvulas pero siempre indicando su posición. También, entre otras, detalla las pérdidas en ensanchamiento y estrechamiento bruscos que se acaban de analizar con más detalle. Conviene subrayar al respecto dos puntos. De una parte se constata que, en efecto, las pérdidas en un ensanchamiento superan las de un estrechamiento. Y de otra que sólo se aportan los valores máximos de estas pérdidas. Y así si en la relación (6.14), -ensanchamiento-, se hace la sección  $A_2 = \infty$  (descarga en un depósito), el valor de  $k$  es la unidad, justo el que figura en la tabla adjunta que sigue (tabla 3).

Tabla 3 Coeficientes de pérdidas menores que figuran en el manual de EPANet

Elemento	$k$
Válvula de globo, completamente abierta	10,0
Válvula de ángulo, completamente abierta	5,0
Válvula de retención, tipo clapeta	2,5
Válvula de compuerta, completamente abierta	0,2
Codo, radio de curvatura pequeño	0,9
Codo, radio de curvatura mediano	0,8
Codo, radio de curvatura grande	0,6
Codo (45°)	0,4
Inversión de sentido (curva 180°)	2,2
T estándar (flujo recto)	0,6
T estándar (con variación de la dirección del flujo)	1,8
Estrechamiento brusco	0,5
Ensanchamiento brusco	1,0

Sin embargo, y cual se ha dicho, las válvulas presentan unos coeficientes de pérdidas menores variables con el grado de apertura, siendo el valor máximo de dicho coeficiente el que corresponde al de la válvula cerrada ( $k = \infty$ ) y el mínimo el de válvula abierta. Unas válvulas que se pueden clasificar bien atendiendo al obturador que controla el paso del flujo a su través, (compuerta, mariposa, bola, globo,...) bien al cometido que se le encarga

(seccionamiento, regulación, reducción de la presión, limitación de caudal, mantenimiento de la presión, etc).

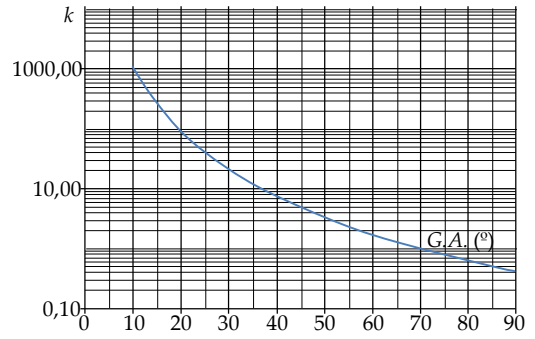


Figura 5 Coeficientes de pérdidas menores en función de su apertura (válvula de mariposa)

La tabla 4 detalla numéricamente la misma información.

Tabla 4 Coeficientes de pérdidas menores en función de su apertura (válvula de mariposa)

Apertura (°)	10	15	20	22,5	30	40	45
$k$	1084,08	255,24	91,47	60,09	21,54	7,72	5,07
Apertura (°)	50	60	67,5	70	75	80	90
$k$	3,48	1,82	1,19	1,05	0,82	0,65	0,43

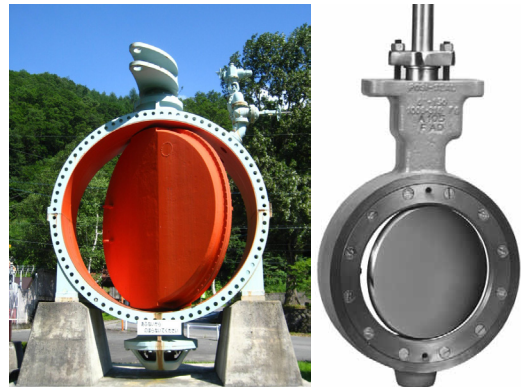


Figura 6 Válvula de mariposa. Central hidroeléctrica de Yagisawa (Japón)

No hay espacio para abundar en estos detalles. Pero, en cualquier caso, y para aclarar estos conceptos, sir-

va de ejemplo una de las válvulas más utilizadas (la de mariposa, figura 6), cuya coeficiente  $k$  en función de su grado de apertura (medido por el ángulo que forma el eje del disco de obturación con la sección recta del tubo que la alberga) se da en la tabla 4. Cuando está abierta ( $\theta = 90^\circ$ ) el valor de  $k$  es mínimo. Al comienzo del cierre el valor de  $k$  aumenta muy poco y sólo al final el aumento es significativo (observar, figura 5, que la escala de ordenadas es logarítmica).

Finalmente conviene referirse a un modo alternativo de contabilizar las pérdidas localizadas de un elemento complementario. Es la longitud equivalente,  $L_e$ , igual al tramo de tubería ficticia que genera la misma pérdida de carga que el elemento en cuestión. Obviamente sólo tiene sentido en elementos estáticos, toda vez que una válvula daría lugar a diferentes  $L_e$  en función de su grado de apertura. Su cálculo es inmediato. En efecto, refiriendo ambas pérdidas a la velocidad de la tubería en cuestión, e igualando sus valores:

$$f \frac{L_e}{D} \frac{V^2}{2g} = k \frac{V^2}{2g} \quad (6.15)$$

resulta la equivalencia:

$$L_e = k \frac{D}{f} \quad (6.16)$$

Un valor que no suele ir más allá de unas decenas de metros. En efecto, para la contracción brusca ( $k = 1$ ) desde un depósito a una tubería de 400 mm de diámetro y con un coeficiente de fricción  $f = 0,02$ , la longitud equivalente es 20 m. Con todo, y ya para concluir, conviene hacer al respecto dos comentarios. En primer lugar que, para una tubería dada ( $D$ ) no hay una relación biunívoca perfecta entre  $L_e$  y  $k$ , pues en ella interviene el coeficiente de fricción función del flujo a través del número de Reynolds. Y aunque es cierto que la horquilla de variación es estrecha, cual se ha dicho, la correspondencia no está completamente cerrada. En segundo lugar indicar que se pueden incluir en EPAnet las pérdidas localizadas a lo largo de un tramo de tubería bien incluyendo el valor de  $k$ , bien aumentando artificialmente su longitud. Esta es una solución menos

recomendable, pues distorsiona la realidad física del conducto, no deja de ser un modo un tanto ficticio. De ahí que conviene utilizar siempre el valor de  $k$ . Con todo en la práctica hay una excepción que se estudia más adelante (en el epígrafe **caracterización de otros elementos de los sistemas a presión**): las válvulas de sección de paso es variable.

Finalmente indicar que con las grandes posibilidades que ofrece internet, hoy no tiene sentido incluir tablas con las constantes de los innumerables elementos que en un sistema hidráulico a presión se pueden encontrar. Y aunque hasta hace poco era muy frecuente acabar un epígrafe como este añadiendo, como anexo, una infinidad de tablas y ábacos hoy toda esta información puede encontrarse en la red.

## Línea de altura geométrica, piezométrica y total

En el transporte de fluidos a presión, ya se ha visto, las tres formas básicas de almacenar la energía hidráulica son: posicional, elástica (o de presión) y cinética. Además, lógicamente, de la térmica cuyo papel, ya se ha visto en temas precedentes, en hidráulica es muy menor. A la suma de las tres formas básicas de energía hidráulica se la denomina trinomio de Bernouilli. Expresada en energía por unidad de peso (unidades de longitud), es:

$$B_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \quad (6.17)$$

Si durante el movimiento del fluido no hubiese que vencer un rozamiento, el trinomio de Bernouilli se mantendría constante. Pero, con fricción o sin ella, puede aumentar un término a costa de otro. De hecho en un flujo a presión el fluido puede ascender por una tubería porque la energía elástica que almacena se va transformando en posicional (o gravitacional). Y viceversa, si un fluido desciende por una tubería de presión (es el caso de una tubería forzada en un aprovechamiento hidroeléctrico) parte de la energía potencial que almacena se va transformando en presión. Estos intercambios son posibles gracias a la capacidad de almacenar energía elástica, tanto por parte del fluido (re-

cuérdese la definición de módulo de compresibilidad volumétrico) como de la propia tubería cuyas paredes están constituidas por materiales elásticos.

En cualquier caso, y antes de volver sobre los alternativos cambios de un tipo de energía (elástica) en otra (posicional), o viceversa, y que caracterizan los flujos a presión, convendrá referirse por un momento al cuarto modo de almacenar la energía que tiene un fluido. Es la térmica, destino final de las pérdidas de energía ocasionadas por la fricción. Pero como quiera que cuando el fluido es incompresible los procesos térmicos se desacoplan de los mecánicos, estos análisis no interfieren en los del propio movimiento. En hidráulica, en cualquier caso, como el calor específico del agua es muy alto, sobre todo si se tiene en cuenta las cantidades de energía disipada por fricción, las variaciones de temperatura son, ya se ha visto, muy pequeñas, razón por la cual en la práctica a estos análisis apenas se les presta atención. Sólo en la termo hidráulica (son los flujos propios de un reactor nuclear, con el objetivo fundamental de extraer el calor que en su interior se genera), los asuntos térmicos adquieren el máximo protagonismo. Pero ello queda lejos de los objetivos de este capítulo.

Así, pues, se estudian los tres modos de almacenar energía que caracterizan el flujo a presión. Y para ello se sigue su evolución a lo largo de una conducción. En primer lugar contabilizando en cada sección recta el primero de los sumandos ( $z$ ) para así obtener la línea de **altura geométrica**. Como es lógico esa línea coincide con el eje de la conducción. Y así (figura 7) la línea de altura geométrica del bombeo de una tubería de perfil irregular coincide con su propio trazado.

Si en cada sección recta de la tubería, a la altura geométrica se le suma la altura de presión del fluido en su eje, se irá obteniendo la altura piezométrica ( $H = z + p/\gamma$ ) de la tubería. Se la denomina de este modo porque es la altura hasta la que ascendería el agua en un piezómetro (tubo vertical) montado en cada una de las secciones rectas de la tubería. De hecho, agujereando una tubería con agua a presión en su interior, el chorro que saldría también alcanzaría esta altura despreciando la fricción del chorro con el aire, rozamiento que, claro está, evita el piezómetro. EPAnet, una vez ha realizado los cálculos permite de inmediato dibujar la línea de alturas piezométricas. Tan sólo hay que sumar cota

y la altura de presión (altura en EPAnet, una terminología que no es rigurosamente correcta).

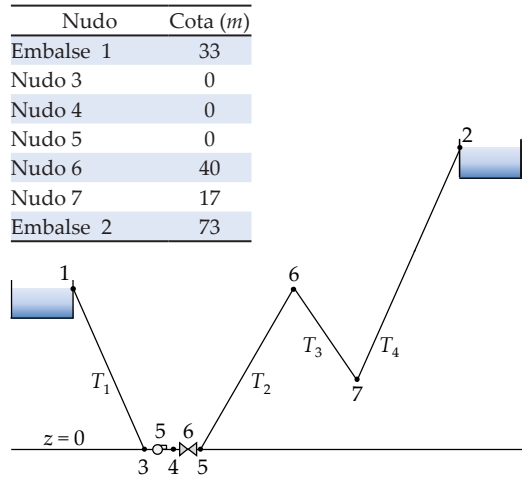


Figura 7 Impulsión de perfil irregular (la propia conducción es la línea de altura geométrica)

Y no lo es porque ya se ha visto que la altura total la proporciona el trinomio de Bernouilli (relación 6.17), para lo que hay que sumar a la piezométrica el término cinético. Pero llegados a este punto convendrá recordar la hipótesis ya realizada de que el tercer sumando del trinomio es, en la práctica, despreciable algo que ya ha sido debidamente justificado. Una línea, la de **alturas totales**, que sólo difiere de la piezométrica en el término cinético y cuyo interés práctico es muy limitado. En cualquier caso conviene decir que esta línea (que representa la energía total del fluido en una sección recta) es, en el sentido de avance del flujo siempre decreciente o, a lo sumo, si no hay fricción o es despreciable, horizontal.

No es este el caso de las otras dos líneas previamente definidas. La geométrica, coincide con el trazado. Y ya se ha visto que si el perfil es irregular, puede ascender y descender. Y también, en ocasiones, la piezométrica puede ascender. Supuesta una tubería horizontal con un cambio de sección tal cual nos muestra la figura 6. Dado que la variación es muy gradual, se supone que las pérdidas por fricción en el ensanchamiento son despreciables. Tampoco en el tramo de tubería que, por otra parte, es corto. Pues bien, en este caso la ralentiza-



a un diámetro intermedio. Conviene subrayar que la figura está bien escalada en ordenadas, aunque no en abscisas, por lo que la figura es sólo orientativa. También se observa como la altura que aporta la bomba queda claramente reflejada con la "subida" de la línea de alturas piezométricas entre los nudos de aspiración e impulsión (nudos 3 y 4) de la bomba. Finalmente se ve como la válvula reguladora de caudal apenas introduce pérdidas en el sistema (los nudos 4 y 5 tienen, prácticamente, la misma altura piezométrica).

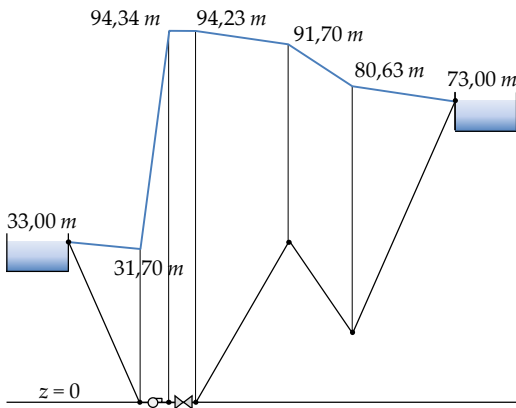


Figura 9 Línea de alturas piezométricas de la impulsión de la figura 7 (Válvula abierta)

Finalmente la figura 10 muestra la línea de alturas piezométricas pero con la válvula de regulación casi cerrada ( $\alpha = 10^\circ$ ). La única variación en los datos de partida del sistema es cambiar la constante de pérdidas de la válvula 6 (figura 7) desde un valor casi nulo ( $k = 0,43$ ) a un valor notable ( $k = 1084,08$ ). La respuesta que se obtiene es, desde la óptica hidráulica, de lo más previsible. La válvula introduce en el sistema una resistencia muy superior, lo que a la postre se traduce tanto en aumentar la altura de impulsión de la bomba como en una reducción del caudal. La curva característica de la bomba así lo exige. En concreto un caudal inicial de 98,32 l/s se reduce hasta 32,04 l/s. La línea de alturas piezométricas de la figura 10 reproduce este comportamiento. Conviene subrayar que:

- Apenas hay pérdida de carga entre el depósito inferior, representado por un embalse y el nudo de aspiración (el caudal es ahora mucho menor).

- La válvula de regulación introduce una pérdida de carga significativa ( $h_v = 23,53$  m).
- La altura que genera la bomba aumenta en casi 4 m (para vencer la superior resistencia) ya que aunque la fricción en las tuberías disminuye, el aumento de la pérdida a través de la válvula compensa la disminución holgadamente.
- Las pendientes de las líneas piezométricas se suavizan notablemente como consecuencia de circular un caudal menor y, por tanto, la pérdida de carga unitaria (proporcional al cuadrado del caudal) es ahora mucho menor.

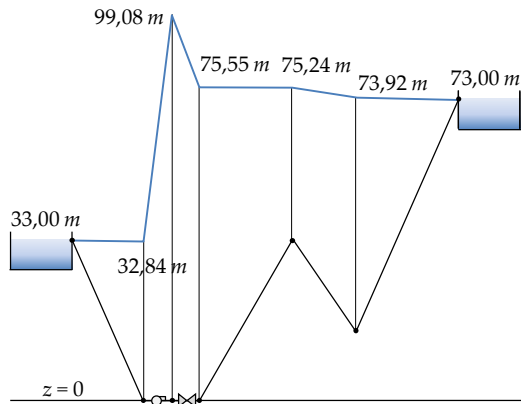


Figura 10 Línea de alturas piezométricas de la impulsión de la figura 7 (Válvula casi cerrada)

Otro punto merece destacarse. La presión que soporta en cada punto la tubería es igual a la ordenada existente entre la línea de alturas piezométricas y la geométrica. A partir de las figuras 9 y 10 se concluye que el tramo final de la tubería 4 es el que debe soportar la menor presión. Una información muy relevante para:

- Poder concretar correctamente el espesor (que no el diámetro) de la conducción.
- Identificar los puntos conflictivos en los que la tubería puede entrar en depresión.

En efecto, las presiones que soporta una tubería son positivas siempre que la línea de altura piezométrica dis-

curra por encima de la línea de altura geométrica. Pero claro, si la línea piezométrica corta a la línea geométrica y pasa a discurrir por debajo (en la figura 11 es tramo de tubería a la derecha), en esa parte de la tubería en concreto habrá una presión inferior a la atmosférica. Y si la distancia entre líneas llegara a superar los 10,33 m, el sistema jamás podría funcionar porque en ese punto alto antes de alcanzarla el fluido cavitará y al hervir, la columna líquida se interrumpirá y, al tiempo, el flujo se bloqueará. En las tuberías de perfil irregular con máximos relativos se pueden presentar estas situaciones. Uno de los casos más conocidos es el del sifón. La solución de estos problemas siempre pasa por aplicar el balance de energías entre los puntos inicial y final del flujo para, posteriormente, aplicarlo entre el punto inicial de partida y el punto donde se encuentra el máximo relativo y comprobar que la presión en este punto es aceptable.

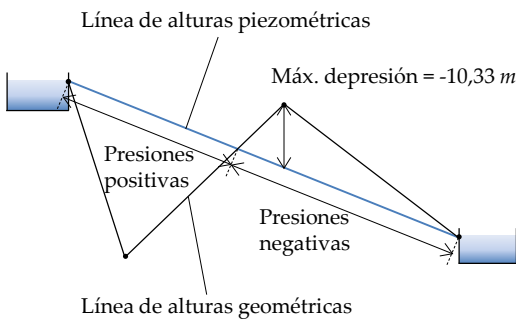


Figura 11 Tubería de perfil irregular con potenciales depresiones que pueden bloquear el flujo

La adjunta figura 11 muestra una tubería de perfil irregular con un diámetro constante, toda vez que la línea de alturas piezométricas tiene una pendiente constante. Tal cual se nos muestra esa tubería tendría serios problemas para funcionar pues gran parte de la conducción estará sometida a depresiones. La solución válida consistiría en proyectar el primer tramo con un diámetro grande de manera que la línea piezométrica estuviese por encima del punto alto. Y una vez alcanzado, toda vez que se dispone de un gran desnivel, proyectar la segunda parte de la conducción con un diámetro muy inferior. De este modo la línea de alturas piezométricas sería casi horizontal hasta llegar al máximo relativo de la

conducción y, a partir de ese punto, caería bruscamente hasta alcanzar el depósito inferior. Alternativamente se puede disponer una tubería de diámetro constante y una válvula parcialmente cerrada en su extremo inferior. Un análisis de costes nos indicaría cuál es la solución más conveniente y que, en general, sería la primera.

## Caracterización de otros elementos de los sistemas a presión

En los sistemas hidráulicos a presión, además de las tuberías, hay otros elementos que juegan un papel muy relevante. En concreto los que contempla el programa EPANet son:

- Embalses.
- Depósitos.
- Válvulas.
- Bombas.

Existen, obviamente, otros elementos. Comenzando por las turbinas, máquinas hidráulicas que, al contrario que las bombas, permiten transformar energía hidráulica en energía mecánica. Sin embargo, la óptica del presente curso se centra en los que incluye EPANet. El primero de ellos, el embalse, es el más fácil de caracterizar. Al tener una gran capacidad de almacenamiento su nivel, con independencia del agua que salga o entre en el mismo, se va a mantener siempre constante. De ahí que el único dato relevante necesario es la altura de su superficie libre. Sin embargo un depósito sí puede llenarse y vaciarse. De ahí que requiera, además del valor de su sección recta, cuatro alturas. Dos son de carácter intrínseco (la cota de su solera y la altura máxima del depósito) y otras dos funcionales (el nivel mínimo, para garantizar la existencia de una reserva de agua, y el máximo hasta el que se quiera llenar). La ecuación de continuidad (caudal entrante menos saliente igual a variación de volumen por unidad de tiempo en el depósito) permite en cada momento a EPANet efectuar el seguimiento de la evolución del nivel de agua.

Los siguientes elementos, las válvulas, son los que más variantes presentan. Cual se ha dicho, pueden clasificarse atendiendo a dos criterios. El primero constructivo y el segundo por la misión que realizan. Pero en



este curso preocupa su caracterización hidráulica que se lleva a cabo con la constante de pérdidas  $k$  cuyo valor, cual se ha visto, depende de su mayor o menor grado de apertura. Es el fabricante de la válvula el responsable de proporcionar su valor. Y si, como en el caso de la válvula de mariposa, la posición de su obturador la fija un ángulo, lo que importa conocer es (ver figura 5) la relación  $k = k(\theta)$ .

Tampoco es misión detallar ahora su clasificación atendiendo al cometido que se les asigna. Sólo se enuncian los cuatro objetivos que con más frecuentemente se les encomienda. Son:

- **Válvulas de retención.** Sólo permiten el paso del flujo en un sentido y se instalan para evitar flujos de retorno que, por ejemplo, propicien el vaciado de un depósito cuando se le alimenta por su parte inferior. Por su singularidad EPAnet no las contempla como tales válvulas. Permite introducirlas como una tubería singular con su correspondiente constante de pérdidas.
- **Válvulas de seccionamiento o corte.** Son válvulas concebidas para actuar como todo o nada, generalmente para aislar un tramo de tubería, una maniobra necesaria para realizar unas obras o reparar una avería. Y de nuevo EPAnet no ha pensado en ellas como una válvula específica toda vez que deben incluirse, una vez más, como parte de una tubería. Dentro de sus propiedades, es el mismo desplegable **Estado** que permite introducir la válvula de retención el que permite "cerrar" el flujo de agua a través de esa conducción cualquiera sea el sentido de paso.
- **Válvulas de regulación.** Si hay necesidad de variar el caudal de paso de agua a través de una conducción la forma más sencilla de hacerlo es, ya se ha visto en el punto anterior, aumentar la resistencia del sistema. De hecho su capacidad de regulación depende del "peso" de la pérdida de carga adicional introducida con relación a la del sistema. Dicho de otro modo, si la pérdida adicional que la válvula introduce tras un cierre parcial es, con relación a la fricción de la tubería, poco significativa, el caudal apenas variará.

- **Válvulas reductoras de presión.** En ocasiones desde un mismo punto de suministro se alimentan zonas de una ciudad situadas a diferentes niveles. Una presión excesiva tiene pocas ventajas y muchos inconvenientes. Entre estos, propiciar las averías en las tuberías y, con ellas, las fugas de agua del sistema aumentan. En estas válvulas se fija el valor de la presión a la salida (por ejemplo en 30 m), una denominada presión de tarado ( $p_t$ ), y su misión consiste en disipar el exceso de potencia igual a la caída de presión entre la entrada ( $p_1$ ) y salida ( $p_2 = p_t$ ) multiplicada por el caudal que atraviesa la válvula. Se tiene, pues,  $P_{dis} = (p_1 - p_2) Q = \Delta p Q$ . Obviamente, si la presión a la entrada es igual o inferior a la de tarado ( $p_1 \leq p_t$ ) la válvula no actúa (no introduce pérdida de carga adicional alguna).

Antes de cerrar la referencia a las válvulas convendrá decir que, aún cuando en EPAnet se las caracteriza por la constante de pérdidas  $k$ , la mayor parte de los catálogos que en la práctica se manejan se refieren a su coeficiente de caudal  $K_v$ , una constante que relaciona el caudal que atraviesa la válvula con la raíz cuadrada de la caída de presión a su través. Su determinación se realiza con un simple cambio de variables. Para ello hay que recordar tanto la ecuación de continuidad ( $Q = VA$ ) como que la relación entre la caída de presión a través de una válvula y la pérdida localizada a su través es ( $\Delta p = \gamma h_L$ ). Teniéndolo todo en cuenta se puede escribir:

$$h_L = k \frac{V^2}{2g} \rightarrow \frac{\Delta p}{\gamma} = k \frac{Q^2}{A^2 2g} \quad (6.20)$$

Y a partir de esta última relación es inmediato obtener la ecuación (6.21) que proporciona el valor del denominado "coeficiente de caudal de la válvula",  $K_v$ :

$$Q = K_v \sqrt{\Delta p} \quad K_v = \sqrt{\frac{2gA^2}{\gamma k}} \quad (6.21)$$

que representa la conductancia hidráulica de una válvula (inversa a la resistencia que ofrece).



Tres comentarios importantes al respecto. De una parte que el coeficiente  $K_v$  es dimensional y, por tanto, función de las unidades que se utilicen en el caudal y la presión. De otra que su valor, a través de la constante  $k$ , depende del grado de apertura de la válvula. Y, por último, que mientras para una posición determinada el valor de  $k$  es el mismo para un tipo de válvula (cualquiera sea su diámetro) no sucede lo mismo con  $k_v$ , que no sólo es función de su apertura. También es función del tamaño de válvula (a través de  $A$ ).

Por último las bombas son elementos muy utilizados en los sistemas a presión. Estas máquinas convierten la energía mecánica que reciben del motor eléctrico que las arrastra y la transforman en hidráulica. Desde la óptica que aquí nos ocupa, su comportamiento se concreta con sus dos curvas características más relevantes. De una parte la que relaciona el caudal con la altura que genera  $H_b = H_b(Q_b)$  y de otra la que, conocido el caudal que trasiega, nos indica cuál es su rendimiento  $\eta = \eta(Q_b)$ . Y aún hay una tercera curva, la que indica la potencia que absorbe la bomba del motor eléctrico  $P_a = P_a(Q_b)$ . Ocurre, sin embargo, que esta puede determinarse a partir de las dos precedentes, teniendo en cuenta la relación:

$$P = \frac{\gamma \cdot Q_b \cdot H_b(Q_b)}{\eta_b(Q_b)} = P_a(Q_b) \quad (6.22)$$

Una correspondencia que de inmediato se evidencia a partir de las tres curvas de una misma bomba detalladas por la figura 12 y que corresponden a la velocidad de rotación de 1450 rpm. Y así al punto destacado ( $Q = 330 \text{ m}^3/\text{h}$ ) le corresponde una altura de 52 m y un rendimiento del 81%. En estas condiciones la potencia absorbida será:

$$P_a = \frac{9810 \cdot \left(\frac{330}{3600}\right) \cdot 52}{0,81} = 57,73 \text{ kw} \quad (6.23)$$

Potencia que expresada en CV ( $0,736 \text{ kw} = 1 \text{ CV}$ ), proporciona 78,5 CV, el valor que la gráfica de potencia  $P_a$  proporciona. Un punto, el de mayor rendimiento, que corresponde al destacado en la figura 12 y que se deno-

mina punto de funcionamiento óptimo. Obviamente es el punto en que se desea trabaje la bomba.

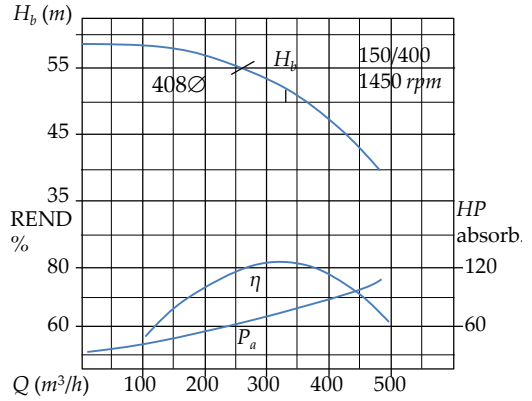


Figura 12 Curvas características de una bomba

Como un cálculo analítico exige disponer de las ecuaciones que representan las curvas de las bombas y generalmente los fabricantes proporcionan las gráficas de las curvas que determinan en sus bancos de ensayo, hay que proceder a su ajuste analítico. Par ello se proponen expresiones cuadráticas del tipo:

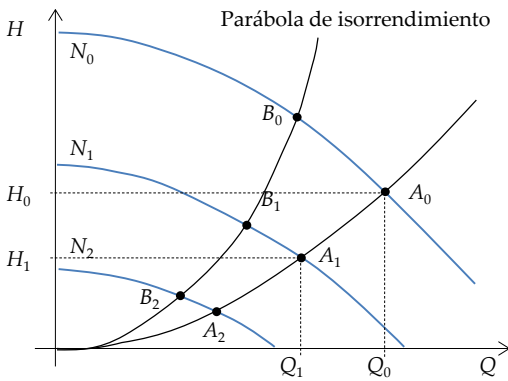
$$H_b = A + BQ_b + CQ_b^2 \quad (6.24)$$

$$\eta_b = DQ_b + EQ_b^2 \quad (6.25)$$

cuyos coeficientes, a partir de los puntos de paso experimentales de la bomba, se determinan fácilmente utilizando el método de los mínimos cuadrados. No precisa tanta información EPAnet, ya que le basta con dar el punto de funcionamiento nominal de la bomba (el par de valores altura-caudal deseado) y de modo automático proporciona la ecuación que modela de forma aproximada su comportamiento. En cualquier caso si se dispone de las curvas reales de la bomba, con todos sus puntos de paso, conviene detallar mejor esta información, trasladándola toda completa.

Finalmente y ya para concluir conviene decir que cada vez es más frecuente accionar bombas con motores

eléctricos cuya velocidad de rotación puede regularse con variadores de frecuencia. La figura 13 visualiza, a través del parámetro  $\alpha$  ( $\alpha = N/N_0$ ) el comportamiento de una bomba a diferentes velocidades de giro  $N$ , respecto a la nominal  $N_0$ . Siendo el caudal que trasiega proporcional a la velocidad de giro y la altura a su cuadrado, las ecuaciones que modelan su comportamiento a partir de las curvas de partida (las que corresponden a su velocidad nominal) las detalla la figura 13. Todos los puntos situados sobre parábolas que pasan por el origen y correspondientes a distintas velocidades de giro tienen el mismo rendimiento. Sobre ello se profundizará en la asignatura de máquinas hidráulicas.



Relación de velocidad de rotación

$$\alpha = \frac{N}{N_0}$$

Leyes de semejanza para cambio de  $N$

$$\frac{Q}{Q_0} = \alpha \quad \frac{H}{H_0} = \alpha^2 \quad \eta = \eta_0$$

Curva característica con cambio de  $N$

$$H_b = A\alpha^2 + B\alpha Q_b + CQ_b^2 \quad \eta = \frac{D}{\alpha} Q_b + \frac{E}{\alpha^2} Q_b^2$$

Figura 13 Comportamiento de una misma bomba a distintas velocidades de giro

## Análisis, dimensionado y modelación de sistemas a presión

Conviene diferenciar con claridad entre analizar, dimensionar y modelar sistemas hidráulicos a presión. En el análisis el sistema hidráulico está completamente

definido y se trata de determinar sus prestaciones es decir, en qué condiciones se puede prestar un determinado servicio. Es de interés para, por ejemplo, saber si con una red existente se puede atender un crecimiento de la demanda determinado. De algún modo, analizar equivale a verificar el funcionamiento de un sistema en determinadas condiciones de trabajo. Sin embargo el dimensionado es el problema inverso y, de algún modo, equivale a calcular los diámetros a partir del trazado preestablecido de las tuberías, de las demandas a atender y de las condiciones en las que hay que hacerlo. El objetivo final acostumbra a ser concretar los diámetros de las tuberías de modo que se satisfagan las condiciones impuestas al menor coste posible. Las primeras prácticas de EPAnet propuestas al alumno consisten fundamentalmente en analizar el comportamiento de sistemas a presión. Las últimas explican cómo diseñar un sistema hidráulico a presión.

El diseño, al estar mucho más indefinido, siempre es un problema más complejo que el análisis. En este último el ingeniero no toma decisiones. Se limita a comprobar el funcionamiento de un sistema concreto. El diseño, sin embargo, una vez tomada la primera decisión sobre los diámetros de las tuberías se debe analizar si la selección establecida cumple las condiciones de funcionamiento deseadas y, si tal no es el caso, modificarla para ir convergiendo hacia ellas. La solución que finalmente se concrete debe cumplir las condiciones de servicio prefijadas con el menor coste posible.

Por último la modelación es reproducir correctamente por vía analítica el comportamiento de un sistema real en funcionamiento. La dificultad principal estriba en que con el paso de los años las características de las tuberías se han modificado. Su rugosidad, por incrustaciones, ha aumentado e, incluso, su diámetro ha podido disminuir de manera notable (figura 14). Y claro está, estando las tuberías enterradas no es fácil adivinar cuál es su estado real. Y no sólo es complejo adivinar el estado real de la conducción. También lo es conocer (tanto en el espacio como en el tiempo) las demandas reales de los abonados que no tienen por qué coincidir con las supuestas inicialmente. Todo ello hace que modelar matemáticamente sistemas reales con muchos años de funcionamiento sea una tarea compleja lejos del alcance de este curso. Sobra con saber en qué consiste y en el interés que tiene reproducir matemáticamente el comportamiento real de una

red. En síntesis, permite adoptar decisiones de notable riesgo minimizándolos. Por ejemplo, ante una potencial avería en la red, definir el protocolo a seguir. O bien las decisiones a tomar para mejorar la calidad del agua distribuida, condicionada por el excesivo tiempo que transcurre desde que (tras potabilizarla) se inyecta en la red hasta que llega al grifo del abonado. En cualquier caso, en lo que sigue se hace referencia sólo al análisis y al diseño de estos sistemas.



Figura 14 Tubería muy envejecida tras décadas de servicio

La creciente dificultad de estos tres procesos la evidencia EPANet. Porque mientras permite analizar sistemas hidráulicos en régimen estático (y, como se verá, cuasi estático) evitando realizar tediosos y, en ocasiones, inabordable cálculos, sin ninguna restricción, no se puede decir lo mismo del diseño o modelación. Diseñar exige establecer estrategias, más o menos complejas y que, con los análisis correspondientes, vayan aproximando las soluciones tanteadas al objetivo deseado. Finalmente, y desde la óptica de la modelación, EPANet sólo es una herramienta soporte que permite diagnosticar hasta qué punto las hipótesis realizadas (sobre el estado real de la red, las demandas, etcétera) sirven para aproximar el modelo a la realidad.

Por ejemplo, el análisis del sistema de la figura 7 es el resultado de aplicar un balance de energía entre los dos depósitos. O lo que es lo mismo, de buscar la intersección de la curva motriz de la bomba y la resistente de la instalación lo que equivale a resolver gráficamente

(figura 14) el balance energético (ecuación de Bernoulli) aplicada al mismo. Se tiene:

$$B(1) + H_b(Q) = B(2) + \sum_{i=1}^n h_{fi}(Q) \quad (6.26)$$

Y, teniendo en cuenta que  $B(1) - B(2) = z_2 - z_1 = 40 \text{ m} = H_g$  (desnivel geométrico a vencer), la suma de todas las pérdidas por fricción (en tuberías, válvulas y accesorios en general), es proporcional al cuadrado del caudal ( $KQ^2$ ) y, por último, la curva característica de la bomba puede escribirse en general como  $H_b = A + BQ + CQ^2$  y, en particular, tras el ajuste que EPANet directamente proporciona cuando sólo se le suministra el punto óptimo de la bomba (en este caso  $Q_b = 200 \text{ l/s}$  y  $H_b = 50 \text{ m}$ ),  $H_b = 66,67 - 0,004167 Q^2$ , con  $Q$  en  $\text{l/s}$ ,

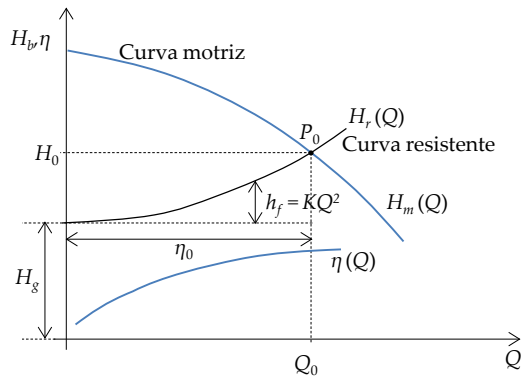


Figura 15 Resolución gráfica de la impulsión detallada en la figura 7

La intersección de la curva motriz que proporciona la bomba (derecha de la ecuación 6.13) y de la resistencia (desnivel geométrico a superar más las pérdidas por fricción) del sistema (parte izquierda de la ecuación) es la solución a uno de los problemas de análisis más simples que se pueden plantear. Ya se ha visto como facilita EPANet unos cálculos (en este caso la solución de la ecuación (6.13), a falta de concretar las pérdidas de carga en tuberías y válvulas de acuerdo con lo expuesto en los apartados anteriores de este capítulo) cuya solución es  $98,32 \text{ l/s}$  cuando la válvula de mariposa que regula el flujo está completamente abierta y que

se reduce hasta 32,04 l/s cuando la válvula se cierra casi por completo ( $\alpha = 10^\circ$ ).

Los problemas de diseño, ya se ha dicho, son más complejos. No se trata de resolver sin más un problema hidráulico. Previamente hay que situar la instalación en el marco en que va a funcionar lo que, sin duda, condiciona su diseño. Se ha comentado que el rango razonable de la velocidad de circulación del agua por una tubería es amplio ( $V_{min} = 0,5 \text{ m/s}$ ;  $V_{max} = 2,0 \text{ m/s}$ ), valores a los que cuando se ha de trasegar un caudal  $Q$  les corresponden diámetros diferentes (menor valor cuanto mayor es la inversión). Pues bien, diseño es el proceso que debe resolver la inconcreción. Para ello, establecidas las condiciones de servicio a cumplir, debe definirse la instalación más económica. O, dicho de otro modo, hay que maximizar la relación coste - beneficio, un principio que jamás el buen ingeniero debe olvidar. Debe ser capaz de diseñar una instalación fiable y que cumpla con las exigencias requeridas al menor coste posible.

Por ejemplo, y volviendo de nuevo al bombeo de la figura 7, la tubería de impulsión tiene tres diámetros diferentes (400 mm el primer tramo, 350 mm el segundo y el cuarto y 300 mm el tercero). No es una solución, en principio razonable. Si se ha considerado de este modo es para visualizar una línea de alturas piezométricas con pendientes diferentes (pendiente hidráulica), tanto menor cuanto mayor es el diámetro. Pero los tres valores son, en principio, razonables dado que para el máximo caudal circulante (98,30 l/s) las velocidades correspondientes son 0,78 m/s, 1,02 m/s y 1,39 m/s todas ellas, como no podía ser de otro modo, dentro del intervalo "razonable". Pero en la práctica hay que decidirse por uno de ellos porque, ya se ha dicho, no es razonable desde un punto de vista práctico cambiar de diámetro. El diseño precisamente consiste en decantarse por uno de ellos. Y este debe ser, el que presente la mejor relación coste/beneficio.

La solución debe, pues, optimizar todos los costes que entran en juego. En este caso concreto, los energéticos y los de amortización de la tubería, supuesto que la bomba y los dos depósitos son los mismos para cualquier diámetro. De no ser así, habría que incluir las variaciones en el análisis. En cualquier caso el análisis del problema nos conduce siempre a una situación como la que presenta la figura 16. A menor diámetro, más fricción y mayores costes energéticos asociados pero menor inversión en tuberías. El coste

anual total (energía más inversión) presentará un mínimo siempre, es decir, una solución "óptima".

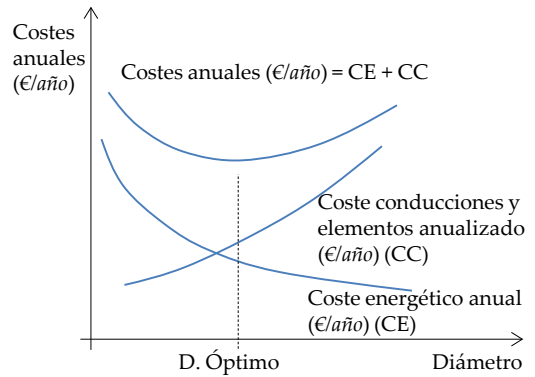


Figura 16 Concepto de diámetro más económico, una etapa esencial del diseño

Es importante aclarar que se suelen sumar los costes energéticos anuales (€/año) con los de amortización de las inversiones (también €/año) que se calculan a partir del coste de inversión, teniendo en cuenta la amortización de la misma a lo largo de los años (Costes de amortización es igual al factor de amortización por el coste de inversión). Evidentemente, el factor de amortización, menor que la unidad, será menor cuanto mayor sea el plazo de amortización, mientras que los costes energéticos serán más importantes a medida que aumenten las horas anuales de utilización de la instalación. Sin la menor duda que un escaso uso del bombeo (alrededor de unas 500 horas/año) llevará la solución de la parte del menor diámetro (300 mm o, tal vez, aún menos) mientras que una alta utilización (aproximadamente 6000 horas/año) sin duda dará como solución óptima el mayor diámetro (400 mm).

En los ejercicios prácticos se presentan dos ejemplos de diseño basados en minimizar, dentro de las disponibilidades energéticas la pendiente hidráulica (o de las líneas piezométricas, llámesele como se quiera). El diseño, sobre todo el de redes ramificadas, es todo un mundo sobre el que aún se sigue investigando. En este campo no se ha dicho la última palabra. Pero las ideas aquí expuestas y los ejercicios prácticos a realizar son más que suficientes para tener una primera aproximación a un asunto muy importante.

## Análisis estático de redes

Las redes de distribución de agua a grandes núcleos urbanos son sistemas hidráulicos complejos cuya resolución manual es inabordable. Por ello se presentarán los fundamentos del problema de análisis en régimen permanente utilizando los llamados modelos estáticos o **modelos de equilibrio hidráulico**. Este tipo de modelos permite predecir la respuesta del sistema (caudales internos que circulan a través de las tuberías y bombas así como las alturas piezométricas y presiones en los nudos) a partir de su configuración y características físicas (comportamiento e interconexión de los diferentes elementos), como respuesta a un estado de funcionamiento concreto (consumos y condiciones definidas en los puntos de alimentación).

Los principales elementos que forman parte de una red hidráulica, tuberías, depósitos, válvulas y bombas, ya han sido estudiados. Su comportamiento se describe con relaciones algebraicas. Las tuberías y válvulas son elementos resistentes (disipan energía) mientras las bombas generan energía hidráulica y la ceden en forma de energía de presión adicional al fluido. La cantidad depende del caudal trasegado y la establece la curva característica de la bomba  $H_b = H_b(Q_b)$  ya estudiada. Por otra parte los depósitos también son fuentes de alimentación de presión al sistema. Pero en este caso el aporte de energía es siempre el mismo (no es función, como en el caso de las bombas, del caudal) y depende de su cota. De ahí que se consideren elementos fuente de presión ideal, razón por la que en el análisis estático, un depósito es un nudo del sistema de altura piezométrica conocida (la cota del nivel de agua) y el caudal de inyección a la red la incógnita.

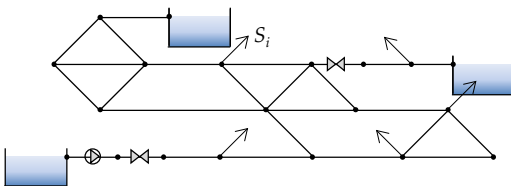


Figura 17 Esquema físico de un sistema de distribución de agua a presión

En definitiva, un sistema de distribución, cualquiera sea su nivel de complejidad, se puede representar de

modo esquemático por un conjunto de "nudos" y "líneas" (figura 17). Nudos son, pues, tanto las uniones de dos tuberías diferentes como los depósitos y embalses mientras las líneas son, además de las tuberías, las bombas y las válvulas. Los consumos (de los abonados en el caso de una red de agua urbana o las necesidades de una parcela en el caso de una red de riego) se concentran en los nudos del modelo de tal manera que el caudal que circula por una tubería es, a lo largo de ella, siempre el mismo. De este modo una derivación de un consumo en una tubería, al modificar el caudal que circula por ella (diferentes valores antes y después de la derivación), siempre generará un nuevo nudo. De este modo el agua fluye a lo largo de las líneas y entra (por los depósitos o por fuentes nodales externas de caudal) o sale (consumos, flechas en la figura 17) del sistema por los nudos. En las clases prácticas se explica cómo asignar los consumos a los nudos del sistema.

Atendiendo a sus características topológicas, un sistema puede ser ramificado, mallado o mixto. Un sistema ramificado se caracteriza por tener una forma arborescente, y sus líneas se subdividen formando ramificaciones de tal manera que dos nudos sólo están unidos por una tubería única. Los sistemas mallados, como su nombre indica, se caracterizan por la existencia de mallas. Una **malla** es un circuito cerrado (con origen y final en el mismo nudo) formado por varias líneas. Por otra parte, las mallas primarias o elementales de un sistema son circuitos de líneas cerrados dentro del sistema y que a su vez no contienen otros circuitos cerrados en su interior.

La teoría de grafos permite justificar que el número de líneas ( $L$ ) y nudos ( $N$ ) de un sistema está relacionado con el de mallas  $M$  a través de la relación:

$$M = L - N + 1 \quad (6.27)$$

válida para cualquier red. Para el caso del sistema que detalla la figura 17 se tiene  $N = 20$  y  $L = 26$ , por lo que:  $M = L - N + 1 = 26 - 20 + 1 = 7$ .

La formulación matemática del problema de análisis estático consiste en establecer un sistema de ecuaciones de forma que el número de incógnitas iguale al número de ecuaciones independientes. Se han propuesto

distintas formulaciones para la resolución del problema, que fundamentalmente difieren entre sí en el tratamiento del sistema de ecuaciones. Las dificultades típicas provienen de la no linealidad (las pérdidas de carga en una tubería son proporcionales al cuadrado del caudal) y del gran número de ecuaciones que, en general, hay que resolver.

Desde un punto de vista formal existen tantas ecuaciones de la energía (se aplica Bernoulli entre dos nudos consecutivos) como líneas  $L$  tiene el sistema y tantas ecuaciones de continuidad como nudos  $N$  tiene la red de tal manera que conforman un conjunto de  $N + L$  ecuaciones con tantas otras incógnitas. De una parte los  $L$  caudales que circulan por las líneas más otras  $N$  incógnitas, una por nudo. En el caso de nudos tipo depósito se conoce la altura piezométrica pero no el caudal que del mismo sale, mientras en los nudos convencionales el dato es el consumo y la incógnita la altura piezométrica. En definitiva otras tantas  $(L + N)$  incógnitas de manera se tienen tantas ecuaciones independientes como incógnitas. La solución, pues, existe y es única. El único requisito adicional a cumplir es que al menos debe existir un nudo, generalmente es un depósito, de altura piezométrica conocida (o, alternativamente, que esta sea una función conocida del caudal externo). En caso contrario se puede calcular entre cada par de nudos la diferencia de alturas piezométricas pero no su valor concreto.

En una red ramificada se cumple  $L = N - 1$ . Como el sistema ramificado contiene un único nudo de altura piezométrica conocida (el depósito de cabecera) las  $N - 1$  ecuaciones de continuidad correspondientes a los nudos de conexión (y que constituyen un sistema de ecuaciones lineales), se resuelven independientemente del sistema de ecuaciones energéticas, que permiten determinar los caudales circulantes por cada una de las  $L = N - 1$  líneas del sistema a partir de los datos de consumo en los nudos de la misma mientras que el caudal externo,  $S_e$ , aportado por el depósito se puede determinar directamente mediante la ecuación de continuidad o bien con un balance global de consumos y aportes. O, dicho de otro modo, en una red ramificada los caudales circulantes por las líneas se pueden determinar independientemente de las ecuaciones energéticas.

Por ello, desde el punto de vista del cálculo hidráulico, una red ramificada es aquella en que la determinación

de los caudales que circulan por las líneas se conoce con independencia de las características de las propias líneas. Basta con conocer los consumos de la red y la conectividad del sistema. Y puesto que las características hidráulicas de tuberías y bombas son conocidas, sustituyendo los caudales obtenidos anteriormente en el sistema de ecuaciones de energía, constituido por  $L = N - 1$  ecuaciones, se obtienen finalmente, empezando por la altura especificada en el nudo de altura piezométrica conocida, las alturas piezométricas en los restantes  $N - 1$  nudos de conexión del sistema.

Sin embargo la distribución de caudales en las líneas de una red mallada sí depende de sus características hidráulicas. Ello implica que aunque desde un punto de vista topológico, un sistema con varios puntos de alimentación y sin mallas puede, por su estructura arbórea, considerarse ramificado, desde el punto de vista del cálculo hidráulico es un sistema mallado. En definitiva, siempre que un sistema contenga mallas o, alternativamente, siendo ramificado disponga de más de un nudo de altura piezométrica conocida, las ecuaciones de continuidad aplicadas a los nudos que no suministran caudal combinadas con las  $L$  ecuaciones de línea forman un sistema acoplado de ecuaciones no lineales que permiten determinar los  $L$  caudales internos de las líneas y las alturas piezométricas en los nudos de conexión. El cálculo de los caudales externos de cada uno de los nudos de altura conocida (generalmente depósitos) se realiza una vez se han determinado los caudales de línea, aplicando a los mismo la ecuación de continuidad.

Además de contar con las  $L$  ecuaciones de línea y  $N$  ecuaciones de nudo, se pueden plantear  $M$  ecuaciones de malla. Estas ecuaciones resultan de aplicar el principio de "conservación" de la energía mecánica (Bernoulli) a un circuito cerrado. Por ello, la suma algebraica de las pérdidas de carga y de la energía proporcionada al fluido a lo largo de un circuito cerrado debe ser nula. Ahora bien, como las  $L + N + M$  ecuaciones anteriores no son independientes, para resolver el problema de análisis se han propuesto diversas alternativas que no es del caso describir (formulaciones por mallas y por nudos). Cada alternativa presenta ventajas e inconvenientes en las que no es del caso entrar a describir.

En síntesis, el análisis de redes es un problema matemáticamente simple, pero sumamente laborioso, si

bien hoy en día gracias al creciente uso y a la potencia de los ordenadores no presenta inconveniente alguno. El hecho de que EPANet sea un programa de dominio público la hace particularmente sencillo. En la práctica el verdadero problema del análisis de redes es el conocimiento de los datos de partida. Porque de la bondad de ellos (rugosidades y diámetros efectivos de sus líneas, distribución y evolución temporal de consumos en los nudos, etc.) depende la fiabilidad de cualquier modelo elaborado a partir de una red existente. Pero, cual se ha dicho, la modelación de redes reales queda al margen de este curso.

## Modelaciones hidráulicas de los flujos a presión

### La modelación cuasi-estática

En los análisis hasta ahora descritos los valores obtenidos (resultados de un análisis estático) tienen validez exclusivamente instantánea (estado del sistema en un momento), y corresponden así una fotografía del sistema. Tradicionalmente, las tuberías se dimensionan, por lo que a diámetro (o capacidad de transporte) se refiere, considerando el estado estacionario del sistema más desfavorable y, por ello, los modelos estáticos son una herramienta auxiliar de los modelos de diseño (con frecuencia, dentro de un proceso iterativo).

Ahora bien, centrándonos, una vez más, en los sistemas de distribución de agua los consumos (y, por tanto, las presiones y los caudales que circulan por las tuberías del sistema) no se mantienen constantes, sino que presentan fluctuaciones diarias importantes. Por otro lado las cotas de los niveles de agua en los depósitos de regulación varían como consecuencia de la entrada y salida de agua en ellos. Las estaciones de bombeo arrancan o paran, las velocidades de giro de los motores que las arrastran cambian y, en fin, para operar adecuadamente el sistema las válvulas se accionan. De hecho la gestión eficiente de los sistemas exige maniobrarlos.

El modelo cuasi-estático, también llamado **simulación en período extendido**, permite enlazar secuencialmente distintas fotografías instantáneas estáticas y, por ello, es de gran utilidad en el análisis de la evolución del comportamiento de los sistemas hidráulicos a presión siempre que, y tal suele ser el caso, los cambios no sean

bruscos. Para ello se simula la evolución de las variables asociadas a la red (presiones, niveles y caudales) en un periodo amplio de tiempo (24 horas, por ejemplo) cumpliendo el balance de masas en el sistema de acuerdo con las previsiones de consumos. EPANet permite este tipo de análisis (dentro de las opciones se programa el tiempo al que el análisis se quiere extender).

Conviene insistir en que para este análisis cuasi-estático (que también podría denominarse cuasi dinámico) las condiciones de contorno (como, por ejemplo las demandas) deben variar con el tiempo lentamente. Porque en tal caso es aceptable despreciar la inercia del agua (que sólo se manifiesta si la velocidad cambia bruscamente) y los efectos elásticos, tanto del fluido como de las paredes de la tubería, pues sólo intervienen cuando los cambios de presión son, además de bruscos, notables. Unas hipótesis de trabajo válidas en redes de agua, siempre y cuando no se presenten perturbaciones bruscas (el arranque o parada de una bomba, un reventón en una tubería relevante). Al tener que incluir inercia y efectos elásticos EPANet no puede analizar estos casos y hay que recurrir a programas más completos como el paquete ALLIEVI del ITA.

En una escala de tiempos larga (varias horas), el análisis cuasi estático supone que los equilibrios hidráulicos se establecen de un modo casi instantáneo. El modelo cuasi-estático en realidad es el resultado de superponer una secuencia de estados estacionarios a lo largo de un cierto período de tiempo (período de simulación). Cada solución estacionaria corresponde a un instante distinto y a un diferente estado del sistema. Son pues las mismas ecuaciones que gobiernan el flujo en las tuberías, pero tras un intervalo de tiempo transcurrido,  $\Delta t$ , se actualizan todas las variables. En este sentido, la característica dinámica se incorpora a través de un conjunto de condiciones de contorno lentamente variables en el tiempo que cambian progresivamente el estado del sistema.

Y así, la ecuación dinámica que rige el llenado/vaciado de un depósito cuyo nivel cambia poco a poco en el tiempo, cual se ha visto, es:

$$A \frac{dz}{dt} - \sum_{j=1}^n Q_j + S_i = 0 \quad (6.28)$$



donde  $A$  es el área de la sección transversal del depósito,  $z$  es el nivel de agua en el mismo,  $n$  el número de tuberías que convergen (divergen) en el depósito y a las que está asociado un caudal interno  $Q_i$ . De otra parte  $S_i$  es la aportación (por bombeo), o la demanda (de los consumidores) al depósito. Estas ecuaciones de los depósitos son las que confieren el carácter dinámico al modelo cuasi-estático cuya formulación completa es muy semejante al del análisis estático. Basta con sustituir las ecuaciones nodales de continuidad aplicadas a los depósitos del problema estático por las correspondientes ecuaciones dinámicas del tipo (6.28). Ahora los nudos en los que en el modelo estático la altura piezométrica era un dato, corresponden a depósitos de nivel variable.

Un cambio conceptual que desde el punto de vista matemático conlleva a dos variaciones notables. En primer lugar, las ecuaciones diferenciales de los depósitos, y al contrario de lo que ocurría en el caso estacionario, se han acoplado al resto del sistema de ecuaciones (tantas como líneas  $L$  y nudos de consumo puro). En segundo lugar el sistema ya no es algebraico. Debe resolverse un sistema de ecuaciones algebraico-diferencial. La figura 18 resume el proceso de cálculo.

Las dos etapas de cálculo que incluye son:

- **Módulo de análisis estático:** en un determinado instante genérico  $t$ , en el que se dispone de un escenario dado de consumos en los nudos, unos niveles de agua en los depósitos y unos estados de los diferentes elementos del sistema (bombas y válvulas), este módulo calcula los valores de los caudales circulantes por las tuberías y las alturas piezométricas en los nudos de conexión del sistema.
- **Módulo de integración de los caudales en los depósitos:** con los valores obtenidos de caudales en las líneas que concurren en los depósitos (modelo estático) y a partir de las curvas de demanda en los nudos y las leyes de variación del volumen de agua en los depósitos se efectúa, a través de un esquema de integración de las ecuaciones dinámicas de los depósitos, el balance de masa en el sistema para, de este modo, obtener las variaciones de nivel en los depósitos. Este esquema de integración permite enlazar en el tiempo la secuencia de soluciones estáticas que se van obteniendo.

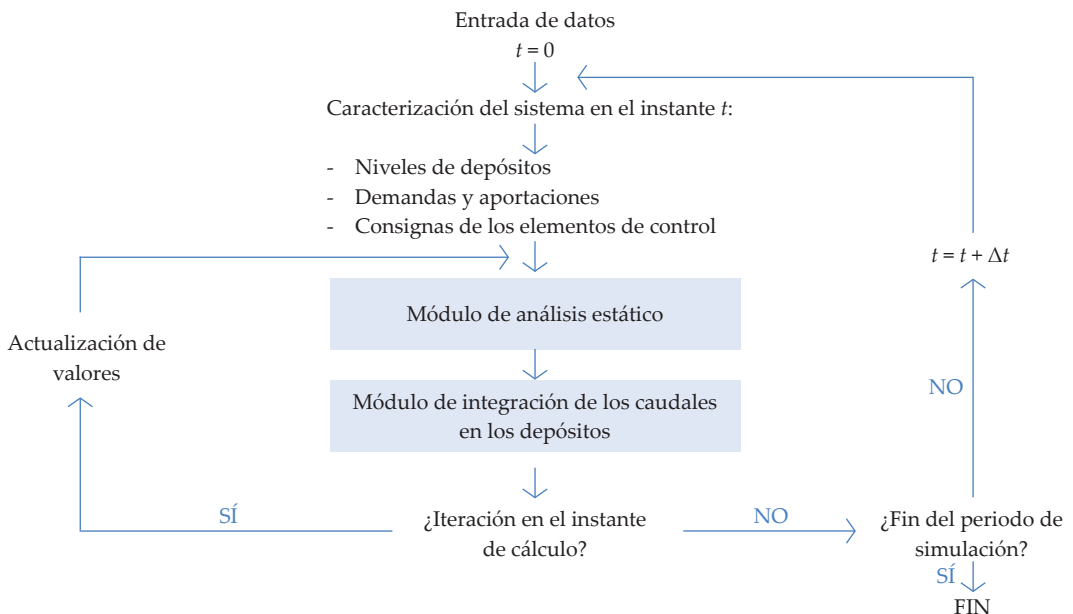


Figura 18 Diagrama de bloques que sintetiza el modelo del cálculo del régimen cuasi-estático



Este proceder, además de describir la evolución de los niveles de agua en los depósitos y las variaciones de estado del equipamiento electromecánico, permite incluir (con las leyes de control en EPAnet) reglas de operación como el arranque o la parada de grupos de bombeo (o la modificación de su velocidad de giro) en función de los consumos, de las presiones o de los niveles de agua de los depósitos, etcétera. Con las reglas de operación también se modifican las condiciones de actuación de válvulas de control (reguladoras, reductoras de presión,...). Estos procesos, en general, requieren iteraciones en cada instante de cálculo.

### Los modelos dinámicos

Cual se ha dicho el modelo dinámico "cuasi-estático" no incluye dos efectos clave que es menester tomar en consideración cuando los cambios que se desean modelar son más rápidos. Se está hablando de los términos de inercia y elástico. Porque si lo que se desea es estudiar las variaciones de presión a lo largo de la red debidos a los cambios de demanda o a la variación de los niveles de agua en los depósitos de cabecera, es evidente que estas variaciones son lo suficientemente lentas como para que los cambios de velocidad y de presión inducidos en flujos y nudos, respuestas a aquellas modificaciones, sean muy discretas. Por ello los efectos debidos a la inercia del agua (es un fluido de alta densidad cuyos cambios de velocidad son un consumo o un aporte, -según el signo de la aceleración-, de energía al conjunto del sistema) y la elasticidad del sistema (al comprimirse tanto el fluido como la tubería almacenan una energía que devuelven en cuanto la presión descende) no es necesario incluirlos en el modelo.

Pero claro, hay situaciones en las que los cambios de flujo son importantes y el modelo debe incluir los dos efectos precedentes (inercia y elasticidad). Es el caso de un reventón en una conducción, una maniobra brusca de una válvula, el arranque o parada de una bomba o, en fin, el conocido problema de la intrusión patógena generada por una depresión (reingreso de agua previamente fugada en la conducción). En función de que se incluya uno o los dos efectos, se llega a los dos modelos dinámicos tradicionales que en lo que sigue se presentan. El primero toma en consideración sólo la inercia del agua en la tubería y se le denomina modelo rígido (u oscilación en masa) mientras modelo

elástico es el que contempla ambos efectos. También se le denomina golpe de ariete.

El primero de los modelos, el rígido, sólo modifica la ecuación constitutiva de las líneas. De tal manera que en lugar de modelarlas con la ecuación de Bernoulli utiliza la de Euler que también ha sido estudiada con anterioridad. Con todo el cambio es importante. Mientras el balance energético de Bernoulli se establece con una ecuación algebraica, el de Euler (o de Bernoulli generalizado) se realiza a través de una ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo las ecuaciones de continuidad nodales son las mismas que en el modelo estático. El modelo elástico exige el uso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Y tanto para el balance de energía como para el de masa lo que exige resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que en este curso no se llegan a plantear. Se estudiarán brevemente en el último apartado de este capítulo.

### Transitorios hidráulicos

Cuando el tiempo interviene en la ecuación que caracteriza el comportamiento del elemento más importante de los sistemas hidráulicos a presión, las tuberías, se está hablando de un transitorio hidráulico. Ya se ha visto como en la práctica se pueden agrupar en dos grandes bloques. El hecho diferencial desde el punto de vista físico es la consideración (o no) de los efectos elásticos del sistema. Una diferencia que matemáticamente se traduce en que las ecuaciones diferenciales ordinarias que caracterizan la oscilación en masa se conviertan en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Los transitorios hidráulicos, ya se ha dicho, se generan cuando por la circunstancia que sea (arranque o parada de una bomba, apertura o cierre de una válvula, reventón de una tubería,...) el cambio del movimiento del fluido es rápido o muy rápido. En el primer caso los efectos elásticos se van a poder despreciar, y basta el modelo rígido para modelar el flujo. Es el caso de la apertura instantánea de una válvula y del tiempo de establecimiento de una corriente que seguidamente se analiza. Sin embargo, si el cambio de régimen es mucho más brusco, para estudiarlo habrá que recurrir a las ecuaciones del golpe de ariete. En lo



Así se obtiene la velocidad a la que el fluido se irá aproximando. Pero es evidente que el sistema se "toma un tiempo" para alcanzar esa velocidad de régimen. La respuesta la proporcionará la aplicación de Euler (o Bernoulli generalizada) idéntica a la precedente con dos salvedades. La velocidad  $V(t)$  es variable en el tiempo y de hecho irá aumentando desde cero (instante inicial) hasta el valor de régimen  $V_0$ . La segunda diferencia, y más importante, es la inclusión en la ecuación del término de inercia del agua. De este modo, y mientras se cumpla  $0 \leq t \leq T_e$ , vale:

$$H = \frac{V^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \quad (6.33)$$

cuya sencilla integración entre el instante  $t = 0$  (al que corresponde la velocidad  $V = 0$ ) y un instante genérico  $t$ , al que corresponde una velocidad  $V$ , proporciona la solución del problema:

$$t = \frac{LV_0}{2gH} \ln \frac{V_0 + V}{V_0 - V} \quad (6.34)$$

una respuesta que indica que el tiempo de establecimiento de una corriente (hay que sustituir en 6.34 el valor de la velocidad  $V$  por  $V_0$ ) es infinito, porque así lo es el logaritmo de infinito, y donde  $V_0$  es, lógicamente, el valor que corresponde al régimen estacionario previamente calculado.

El resultado obtenido tiene dos lecturas:

- La primera evidenciar que el modelo rígido no es del todo correcto porque ese resultado no es físicamente admisible. El modelo elástico no genera esta inconsistencia.
- Sin embargo, desde la óptica numérica, el valor que se obtiene calculando el tiempo de establecimiento  $T_e$  cuando la velocidad  $V$  no es igual a  $V_0$  pero se aproxima mucho a ella (por ejemplo haciendo  $V = 0,95 V_0$ ) proporciona un valor correcto e igual a:

$$T_e = 1,832 \frac{LV_0}{gH} \quad (6.35)$$

El modelo exacto es, pues, el elástico. No hay espacio ni tiempo para profundizar en su análisis. Tan sólo, pero no es poco, se va a subrayar su interés, dar las expresiones básicas, la celeridad de la onda de presión y el valor del pulso de Joukowsky, unas expresiones que permiten tener un orden de magnitud de lo que puede suponer un golpe de ariete brusco y, en fin, realizar una breve y sencilla descripción que permitirá comprender en qué consiste el fenómeno.

### El modelo dinámico elástico o golpe de ariete

Ya se ha visto que los diámetros de las tuberías se dimensionan a partir de las condiciones de servicio que habitualmente deben satisfacer. Pero todas las instalaciones en algún momento deben arrancarse y pararse. Y es precisamente en estos momentos cuando las condiciones que soportan suelen ser las más severas por lo que es necesario realizar su análisis para así poder concretar cuáles deben ser sus capacidades estructurales que, por lo general, se definirán a partir de las presiones máximas que deben soportar. Esta información clave es la que, conjuntamente con el material de la tubería, permite decidir cuál debe ser el espesor de la conducción. En síntesis, las capacidades de las conducciones (diámetros) se deciden siempre analizando el funcionamiento de la instalación en régimen estacionario o, a lo sumo, cuasi-estacionario. Sin embargo es el golpe de ariete el que decide las máximas presiones y depresiones que las tuberías deben ser capaces de soportar o, lo que es lo mismo, cuál debe ser el espesor de las tuberías.



Figura 20 Central hidroeléctrica de Sayano-Shushenskaya (Rusia) tras el accidente (izq.)  
Tubería colapsada por una depresión en Valencia (der.)

La figura 20 es la mayor evidencia de que los análisis de los transitorios son imprescindibles. En su parte

izquierda muestra un accidente relativamente reciente (fue en 2009) ocurrido en Rusia en una central hidroeléctrica. La causa un golpe de ariete provocado por el cierre repentino de una de las compuertas que controlaba el paso de agua de la tubería que alimentaba la turbina nº 2. La sobrepresión y la rotura de conducciones que el cierre dejó la sala de máquinas de la central tal cual se ve en la figura 20, refleja fielmente lo acontecido porque el resultado fue una auténtica catástrofe. Tan es así que murieron 77 trabajadores mientras los daños superaron los 310 millones de dólares, unos 240 millones de euros.

Pero no siempre, como en el caso de la central rusa, los accidentes los provocan aumentos de presión. También las depresiones pueden provocar que una tubería quede inservible. La foto de la derecha de la figura 20 muestra el colapso de una tubería de acero en Valencia. Sucedió en el 2001 como consecuencia de otro cierre demasiado rápido de una válvula. Pero así como en el caso de la central la compuerta maniobrada estaba aguas abajo de la tubería, en el caso del colapso la válvula cerrada estaba aguas arriba. Y ni hubieron muertos ni tampoco los daños fueron tan cuantiosos. Pero de lo que no cabe la menor duda es que de inmediato el servicio quedó interrumpido con todos los inconvenientes que ello conlleva y que, por ello, el ingeniero responsable de su diseño debe ser capaz de anticiparse a este accidente. En el caso de esta tubería colapsada bastaba con disponer una toma de aire justo aguas abajo de la válvula. Su coste, poco más de unos centenares de euros. Es la diferencia entre conocer un fenómeno físico e ignorarlo.

Quien proyecte tuberías a presión tiene, pues, cuanto menos la obligación de conocer los principales fundamentos de un fenómeno gobernado por dos parámetros básicos. De una parte la relación entre los cambios de velocidad propios de todo régimen transitorio y las variaciones de presión que, como consecuencia de ellos, se generan. De otra la celeridad,  $a$ , con que los pulsos de presión inducidos por los **cambios** de velocidad viajan por estas tuberías.

La relación entre un cambio de velocidad  $\Delta V$  y el pulso de presión  $\Delta p$  (de signo contrario al de la velocidad) en el campo de la hidráulica la estableció Joukowski a finales del siglo XIX. Desde un punto de vista físico es muy fácil de comprender. Cuando

la velocidad del fluido en una tubería disminuye bruscamente esa energía cinética no puede convertirse más que en energía elástica de presión (al fluido detenido está confinado dentro de una tubería inmovilizada. Como la cota de la tubería, y por tanto del fluido, no puede cambiar esa energía debe necesariamente transformarse en energía de presión elástica). Una parada del fluido supone un aumento de la presión mientras que si el fluido arranca y, por estar el sistema cerrado, detrás de sí deja el vacío (como en la tubería colapsada de la figura 20), lo que se genera es una depresión. La relación de Joukowski es:

$$\Delta p = -\rho a \Delta V \quad (6.36)$$

de tal manera que cuando el fluido es detenido brusca e instantáneamente ( $\Delta V = 0 - V_0 = -V_0$ ) resulta el máximo pulso de presión o pulso de Joukowski igual a:

$$\Delta p_j = \rho a V_0 \quad (6.37)$$

$$\Delta H_j = \frac{a V_0}{g} \quad (6.38)$$

expresado bien en unidades de presión, bien en metros de columna de agua. Y así en una tubería en la que el agua circule a una velocidad de 1 *m/s* la sobrepresión, para una celeridad de la onda de presión  $a$  de 1000 *m/s*, la sobrepresión por golpe de ariete es de unos 100 *m* de columna de agua (unos 10 *bar*). Y se dice sobrepresión, porque estos pulsos se suman (con sus signos correspondientes) a las presiones ya existentes en las conducciones. En un arranque, debido a la inercia del agua, los cambios de velocidad no suelen ser tan bruscos. Pero de llegar a producirse, en las mismas condiciones pero al revés, claro está, la depresión potencial que se generaría también serían -100 *m* de columna de agua, capaz de colapsar cualquier tubería cuya presión de funcionamiento no fuese de, al menos, 10 *bar*. Hay, pues, que amortiguar todos estos cambios de velocidad y, cuando no sea posible, al menos instalar los dispositivos de protección necesarios para evitar el accidente un asunto que, obviamente, queda al margen de este curso.

La celeridad de la onda (velocidad a la que viajan las perturbaciones generadas) es, sin la menor duda, el parámetro más característico de estos transitorios hidráulicos. Su valor depende de la elasticidad del sistema, combinación de los dos medios elásticos que intervienen en el fenómeno, fluido (a través de su módulo elástico  $K$ , visto en la primera lección) y tubería (representada por el módulo de Young  $E$  del material correspondiente). Su valor es

$$a = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{KD}{Ee}}} \quad (6.39)$$

y donde el resto de variables que intervienen son densidad del agua  $\rho$ , diámetro y espesor de la tubería ( $D$  y  $e$ ). Su valor, cuando es agua el fluido que discurre por la tubería, está comprendido entre los 1000  $m/s$  en las tuberías metálicas (las de mayor módulo de Young) y unos 250  $m/s$  en las tuberías más elásticas (las de plástico). Puede observarse que si el fluido es incompresible ( $K = \infty$ ) y el material también ( $E = \infty$ ) la celeridad tiende a infinito porque los efectos elásticos han desaparecido. Unos efectos elásticos que permiten entender bien el fenómeno que se describe a continuación. Para ello se observa el mecanismo de transmisión y reflexión de las ondas de presión, fijándonos en un sistema simple integrado por un depósito de grandes dimensiones (y, por tanto, de nivel constante) que alimenta una tubería horizontal de características uniformes y que finaliza en una válvula que descarga en la atmósfera. La válvula, tal cual detalla la figura 21a, permite regular el caudal.

Inicialmente la válvula está totalmente abierta, mientras por la tubería circula un caudal  $Q_0$  (velocidad media  $V_0$ ) en régimen permanente. Su valor depende del nivel de agua del depósito,  $H_0$ . Para centrarnos bien en el fenómeno se desprecia la fricción en la tubería, lo que equivale a admitir que las oscilaciones de presión que se originan tras el cierre de la válvula no se amortiguan. Asimismo se desprecia la altura cinética del fluido, por lo que resulta una línea piezométrica de régimen horizontal, a la que corresponde una presión  $H_0$  (figura 21a).

Si en estas condiciones se produce el cierre total e instantáneo ( $T_c = 0$ ) de la válvula (esta maniobra es físicamente imposible, pero es el mejor ejemplo para explicar el estudio de casos reales), el caudal de descarga también se anula instantáneamente (figura 21b). De este modo el caudal en la tubería, aunque sólo junto a la válvula, es nulo ( $Q = 0$ ). Tras el cierre de la válvula se inicia un proceso que se caracteriza por la transformación alternativa (y cíclica) de la energía cinética del fluido en energía elástica que almacenarán tanto el fluido como las paredes de la propia tubería en forma de energía elástica de presión. La cantidad de energía intercambiada en este proceso depende de la magnitud de la variación de energía cinética que el transitorio introduzca en el flujo (la causa es el decremento cinético).

Si el líquido fuera incompresible y las paredes de la tubería rígidas, toda la columna líquida aguas arriba de la válvula se detendría de inmediato y en bloque, posibilidad inviable desde el punto de vista físico porque la aceleración negativa resultante sería infinita. Es, pues, necesario incluir, aunque sea muy pequeña, la compresibilidad del líquido y la elasticidad de la tubería. De este modo cuando se produce el cierre de la válvula, el anillo de fluido pegado a ella (de espesor diferencial) se detiene súbitamente, convirtiendo su energía cinética (debida a la velocidad  $V_0$  que tenía) en energía de presión que se manifiesta con una sobrepresión, sobre el valor de la piezométrica de régimen, de valor  $\Delta H_j$  (en la figura  $\Delta H$ ).

Esta sobrepresión tiene dos efectos, comprimir ligeramente el agua, reduciendo su volumen y al tiempo dilatar un poco la tubería de modo que el resto del fluido en el interior de ella no acusará inmediatamente el cierre de la válvula y continuará avanzando a idéntica velocidad  $V_0$ . De este modo el fluido puede seguir entrando en el sistema, ocupando los huecos generados tanto por el empaquetamiento del fluido como por el ensanchamiento de la tubería, manifestándose de este modo con claridad los efectos elásticos. Al proceso de compresión del primer anillo de líquido, le sigue el del siguiente de manera que a medida que transcurre el tiempo desde el instante inicial, la parada y compresión del fluido y la dilatación de las paredes de la tubería alcanza a los anillos de fluido que quedan en las condiciones antes descritas. De este modo el fenómeno de aumento de presión se propaga en el sentido válvula-deposito a la

velocidad de la onda,  $a$ , y que proporciona la expresión (6.30). El fluido alejado de la válvula, continúa moviéndose sin que su velocidad se vea afectada hasta que el pulso de presión que se desplaza en dirección contraria le alcanza provocando su detención.

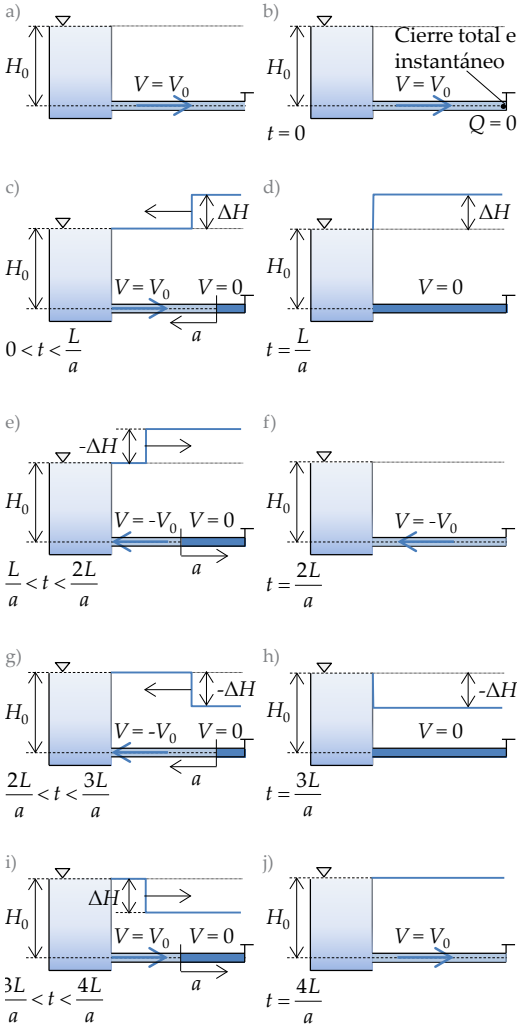


Figura 21 Transmisión y reflexión de las ondas en diferentes instantes de un ciclo (cierre instantáneo de la válvula)

En resumen, un observador moviéndose con el fluido (y, por tanto, a su velocidad  $V_0$ ) observa el fenómeno

como un pulso de presión de intensidad  $\Delta H_j$  (expresado en altura de columna de fluido) generado en el instante inicial en la válvula (tras el cierre) y se propaga aguas arriba de ésta a una velocidad finita  $a$  (**celeridad**). El fluido que queda detrás del frente del pulso queda en reposo a una presión  $H_0 + \Delta H$  metros de columna de agua,  $mca$ , (figura 21c).

Cuando el pulso u onda de compresión llega en el instante  $t = L/a$  al depósito, todo el fluido en la tubería se encuentra en reposo ( $V = 0$ ) y bajo los efectos de la sobrepresión  $\Delta H_j$   $mca$  y la tubería totalmente expandida (figura 21d). Conviene significar que en realidad, respecto a un observador fijo, la onda viaja a una velocidad  $a - V_0$ . Pero como normalmente  $a \gg V_0$  este hecho, aunque en el párrafo precedente sí se ha mencionado, no suele tomarse en cuenta.

Debido a que el depósito (capacidad infinita) impone en el extremo aguas arriba de la tubería una condición de altura de presión constante, igual a  $H_0$ , existe una situación de desequilibrio. En consecuencia, el fluido contenido en la tubería expandida inicia su retroceso hacia el depósito con velocidad  $V_0$  comenzando por el que está en el punto de entronque de la tubería con el depósito. En este punto la presión del fluido retoma el valor que tenía antes del cierre de la válvula, la pared del tubo recupera sus dimensiones originales y el líquido adquiere una velocidad igual pero en sentido contrario a la original. Ello propicia que el anillo de fluido de la tubería anexo al depósito empiece a moverse hacia el depósito con velocidad  $V_0$ , decayendo su presión al valor que había antes del cierre ( $H_0$ ) y volviendo la porción de tubería que lo rodea a su estado normal (figura 21e). En esta fase, pues, se produce un nuevo intercambio de energía pero en sentido inverso. La energía elástica almacenada se convierte ahora en energía cinética. En ausencia de pérdidas, el intercambio devuelve al fluido la velocidad  $-V_0$  a costa, claro está, de una reducción de la presión de valor  $\Delta H_j$ . El efecto descrito equivale a la reflexión del pulso de compresión que, llegando al depósito, se convierte en un pulso de descompresión que se traslada hacia la válvula a idéntica celeridad  $a$ .

La segunda fase se ha completado cuando en el instante  $t = 2L/a$  la onda llega a la válvula, y de nuevo toda la tubería está con la altura de presión inicial,  $H_0$  y el fluido circulando a la velocidad de régimen, bien que

en sentido contrario,  $V = -V_0$ . (figura 21f). De ahí que se denomine, **tiempo de fase o periodo de la tubería** al periodo de tiempo que tarda la onda de presión en ir y volver desde la válvula al depósito ( $Te = 2L/a$ ).

El inicio de la tercera fase lo origina la situación inestable correspondiente al final de la fase anterior. Al llegar la onda de descompresión a la válvula en el instante  $t = 2L/a$  y ser imposible una nueva aportación de flujo fluido (al estar cerrada la válvula no puede haber flujo a su través). En estas condiciones el sistema responde intentando compensar la no reposición de fluido (el que avanza no es repuesto). Y lo hace generando una depresión aguas arriba de la válvula, de valor  $-\Delta H_j$ , mca con respecto de la presión en condiciones estáticas. Una depresión que provoca la detención del fluido, en un proceso que recuerda al que siguió al cierre de la válvula, pero con una diferencia. La energía cinética que corresponde a la velocidad  $-V_0$  se convierte en depresión  $-\Delta H_j$ , de tal manera que en estas condiciones viaja hacia el depósito una onda depresiva, de celeridad  $a$ , que deja tras de sí al fluido en reposo, con una presión  $H_0 - \Delta H_j$  y con la tubería contraída. La válvula en este caso ha reflejado la onda de descompresión pero sin cambiarle el signo al pulso (figura 21g).

Al llegar el pulso  $-\Delta H_j$  al depósito en el instante  $t = 3L/a$  (figura 21h) éste, al igual que hizo con la onda de compresión, la refleja. Pero ahora la onda que viaja hacia la válvula deja tras de sí el fluido moviéndose hacia la válvula a una velocidad  $V_0$ , con una presión igual a la inicial y con la tubería en su estado normal (figura 21i), todo ello propiciado por la nueva inestabilidad. Porque con la llegada de la onda de depresión al depósito, cuya altura mantiene su gran volumen, hay un gradiente de presiones entre la tubería y el depósito. El nivel de presiones en éste es superior al de la tubería, desequilibrio que se corrige aumentando la velocidad en la conducción. Así pues, hay un nuevo intercambio energético pasando de nuevo de energía elástica a energía cinética. La presión, en ausencia de pérdidas, aumenta en  $\Delta H_j$  y por el contrario la velocidad, circulando en el sentido inicial, adquiere su valor inicial  $V_0$ .

Transcurridos  $4L/a$  segundos desde el inicio del transitorio, esta cuarta onda llega a la válvula (figura 21 j), reproduciéndose exactamente la situación inicial del momento del cierre. De nuevo comienza el proceso que, en ausencia de pérdidas, se repetiría cíclicamen-

te de manera indefinida y con periodo de oscilación  $T_p = 4L/a$ . La presencia de las pérdidas hace que estos ciclos se amortigüen progresivamente hasta alcanzar el valor final de régimen permanente.

A partir de la precedente descripción se puede representar el historial de la altura piezométrica en cualquier punto de la tubería. En particular la figura 22 detalla las de los puntos extremos de la tubería (depósito y válvula) y la del punto medio. La línea horizontal representa la presión en el depósito, la línea roja muestra la evolución del punto situado inmediatamente aguas arriba de la válvula, mientras la línea azul detalla esta evolución en el punto medio de la conducción.

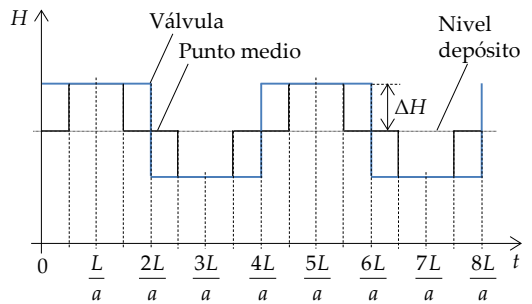


Figura 22 Historiales de alturas piezométricas junto a la válvula (línea roja) y en el punto medio de la tubería (línea azul)

En definitiva la elasticidad del sistema otorga a los transitorios hidráulicos elásticos un carácter cíclico. Cual se ve, sobrepresiones y depresiones se suman a la presión inicial y la tubería debe ser capaz de absorber la presión máxima de cada punto y de soportar la depresión que, sin duda aparecerá si  $H_0 < \Delta H_j$ .

Dos asuntos confieren notable complejidad a estos fenómenos. De una parte que no siempre es tan sencillo concretar la magnitud de la causa (variación de la velocidad) como en el cierre instantáneo de una válvula en el que la velocidad pasa de ser  $V_0$  a cero. Casi nunca es un dato directo. Por ejemplo, en la parada de una bomba, conocer cómo va a ir disminuyendo la velocidad no es inmediato. Todo depende de cómo se genera el transitorio. Este cálculo de las "condiciones de contorno reales" es, según el caso, muy diferente. La segunda complejidad, sobre todo en sistemas complejos (redes) es consecuencia de la dificultad de contabilizar cómo se transmite la perturbación al llegar a un nudo concreto.



Y no sólo cómo se transmite. También cómo rebota. En el ejemplo analizado se han descrito las dos interacciones más sencillas: tubería-depósito y tubería-válvula cerrada. Pero en la práctica, el número de situaciones que se pueden encontrar son, prácticamente, infinitas.

Por ello, el análisis de estas situaciones reales y el dimensionado de los sistemas de protección que eviten que sobrepresiones o depresiones causen accidentes como los mostrados en la figura 20 debe llevarse a cabo con todos los conocimientos y las herramientas necesarias. Obviamente queda fuera del alcance de este curso básico profundizar en su estudio. Con todo, quien en algún momento tenga necesidad de estudiar todas estas cuestiones puede recurrir tanto a libros especializados (Abreu y col, 2011) como a potentes herramientas informáticas, cual el programa ALLIEVI del ITA.

## Bibliografía

Abreu J.M., Cabrera E., Espert V., García-Serra J., Sanz F., 2011

*Transitorios hidráulicos. Del régimen estacionario al golpe de ariete*

Universidad Politécnica de Valencia.

Bonnin J., 1984

*L'eau dans l'antiquité. L'hydraulique avant notre ère*

Direction des Etudes et Recherches d'Electricite de France, Eyrolles. Paris.

Cross H, 1936

*Analysis of flow in networks of conduits or conductors*

University of Illinois. Bulletin. 286, 1936.

Streeter V.L., 1963

*Mecánica de los Fluidos*

Ediciones del Castillo.



Capítulo 7

## Flujo en lámina libre

## Índice

### Introducción

#### Parámetros relacionados con la sección de paso

Sección rectangular

Sección trapecial

Sección circular

#### Caracterización de los diferentes flujos

Pendientes a definir en flujo en lámina libre

Flujo uniforme y permanente. Ecuación de Manning

Sección más eficiente de un conducto en lámina libre

Sección rectangular

Sección trapecial

Sección circular

#### Curvas de llenado en conductos circulares en lámina libre

Conductos circulares

Secciones cerradas no circulares

#### Algunos fenómenos que se producen en el flujo en lámina libre

Onda de gravedad

Curva de remanso

Resalto Hidráulico

Bajantes verticales en lámina libre

### Bibliografía

## Introducción

El movimiento de fluidos en cauces o conductos parcialmente llenos, en los cuales el flujo presenta una superficie límite superior en contacto directo con la atmósfera, se denomina flujo en lámina libre. Este movimiento solamente lo pueden experimentar los líquidos, pues los gases tienden a difundirse y a escaparse del conducto si éste no es cerrado. De entre las aplicaciones y/o situaciones que presentan este tipo de flujo cabe destacar las siguientes:

- Flujo en ríos y cauces naturales.
- Transporte de agua por canales y acequias.
- Sistemas de evacuación de aguas (conductos cerrados parcialmente llenos, con circulación a presión atmosférica), bien sean de pluviales o de residuales.

La diferencia básica y fundamental entre este modo de transporte de líquido y la conducción por tuberías a presión está en el hecho de que el fluido no puede almacenar energía elástica (energía de presión), por lo que el líquido solamente dispondrá de las energías potencial y cinética. No cabe la posibilidad, en consecuencia, de que el fluido ascienda por una conducción abierta desde una cota inferior hasta una cota superior, salvo cuando por inercia sube una pequeña rampa durante un corto periodo de tiempo.

Sin embargo, y respecto del flujo a presión, en la mayor parte de los casos el estudio del flujo en lámina libre es comparativamente más complejo. La razón básica de esta dificultad radica en el hecho de que el flujo en lámina libre presenta una gran disparidad de secciones de paso, figura 1, mientras que en flujo a presión las secciones de paso son prácticamente siempre circulares (en sistemas de ventilación se utilizan en ocasiones conductos rectangulares).

No se puede olvidar, por último, que en ocasiones las conducciones de alcantarillado de una zona urbana a menor cota pasan a ser indeseablemente conductos a presión, haciendo saltar las trapas de los pozos de registro. Este caso se puede dar en episodios de lluvia fuerte, cuando la alcantarilla ha de transportar un gran caudal y su sección de paso es insuficiente. En estas situaciones se producen problemas de flujo mixto, coexistiendo en una misma conducción tramos de flujo en lámina libre y tramos con flujo a presión.

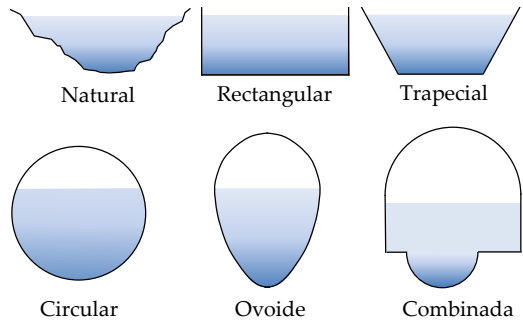


Figura 1 Diferentes tipos de secciones de paso con flujo en lámina libre

## Parámetros relacionados con la sección de paso

Para un conducto en lámina libre, la sección de paso depende de la forma del conducto y de la altura del líquido alcanzada en dicho conducto. Tomando como base la figura 2, los parámetros relacionados con la sección de paso son:

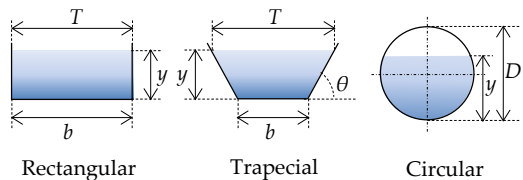


Figura 2 Parámetros relacionados con la sección de paso en conductos en lámina libre

- Ancho de solera,  $b$ , en conductos rectangulares y trapeciales.
- Ángulo de inclinación de las paredes laterales,  $\theta$ , en conductos trapeciales.
- Diámetro interior del conducto,  $D$ , en conductos circulares.
- Calado,  $y$ , en cualquier tipo de conducto.
- Longitud del contorno superior de la sección de paso en contacto con la atmósfera, o tirante  $T$ , en cualquier tipo de conducto. En conducto rectangular  $T = b$ .
- Sección de paso,  $A$ , la cual depende del calado  $y$  y de la forma del conducto.
- Perímetro mojado,  $p$ , o perímetro de la sección del conducto en contacto con el líquido circulante.

- Radio hidráulico,  $R_h$ , o relación entre la sección de paso y el perímetro mojado:  $R_h = A/p$ .

### Sección rectangular

Sección de paso:  $A = b \cdot y$  (7.1)

Perímetro mojado:  $p = b + 2y$  (7.2)

Radio hidráulico:  $R_h = \frac{b \cdot y}{b + 2y}$  (7.3)

Como se ha visto, el valor de los parámetros tales como tirante, sección de paso, perímetro mojado y radio hidráulico para conductos rectangulares resulta muy sencillo de obtener. Sin embargo, para otros tipos de secciones como la trapecial o la circular el cálculo de estos parámetros es un poco más complejo, aunque siempre respondiendo a determinadas relaciones geométricas.

### Sección trapecial

Tirante:  $T = b + \frac{2y}{\tan \theta}$  (7.4)

Sección de paso:  $A = b \cdot y + \frac{y^2}{\tan \theta}$  (7.5)

Perímetro mojado:  $p = b + \frac{2y}{\sin \theta}$  (7.6)

Radio hidráulico:  $R_h = \frac{A}{p}$  (7.7)

### Sección circular

$$\alpha = \arccos \frac{D - 2y}{D} \quad (7.8)$$

las expresiones anteriores resultan:

Tirante:  $T = 2\sqrt{D \cdot y - y^2}$  (7.9)

Sección de paso:  $A = \frac{D^2}{4} \left( \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$  (7.10)

Perímetro mojado:  $p = \alpha \cdot D$  (7.11)

Radiohidráulico:  $R_h = \frac{D}{4} \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot \alpha} \right)$  (7.12)

El caso de sección circular llena con flujo en lámina libre correspondería a la situación en la cual el líquido ocupa toda la sección de paso, con presión atmosférica en la arista superior de la sección. El radio hidráulico en este caso valdrá:

$$R_{hll} = \frac{A_{ll}}{p_{ll}} = \frac{\pi \cdot R^2}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{R}{2} = \frac{D}{4} \quad (7.13)$$

O sea, para una sección circular llena el radio hidráulico es la mitad del radio interior de la tubería, o la cuarta parte de su diámetro.

### Caracterización de los diferentes flujos

Aun no siendo estrictamente cierto, aunque en algunos casos prácticamente lo es, el flujo en lámina libre se va a considerar como unidimensional. Esto es, la variable espacial  $x$ , o distancia a lo largo del eje del conducto, es la única coordenada significativa a la hora de analizar el problema. De este modo, en sentido espacial todas las variables que intervienen en el fenómeno sólo varían con  $x$ , aunque variando también en algunas ocasiones con el tiempo.

Por lo tanto, en el caso más general,  $y = y(x, t)$ ,  $A = A(x, t)$ ,  $V = V(x, t)$ , y así con las demás variables del flujo.

Evidentemente, existen relaciones que ligan estas variables entre sí. Por ejemplo, mediante la ecuación de continuidad se puede relacionar la velocidad media con el caudal circulante y la sección de paso,

$$V(x,t) = \frac{Q(x,t)}{A(x,t)} \quad (7.14)$$

También se puede determinar la sección de paso  $A(x,y)$ , el perímetro mojado  $p = p(x,y)$ , el radio hidráulico  $R_h = R_h(x,t)$  y el tirante  $T = T(x,t)$  conociendo la forma y dimensiones del cauce por el que discurre el fluido, así como el calado  $y = y(x,t)$  en cada sección e instante de tiempo. Las expresiones (7.1) a (7.12) nos indican el procedimiento a seguir.

Cuando el caudal circulante no depende del tiempo se produce un régimen permanente, mientras que cuando sí depende del tiempo el régimen es transitorio. En caso de régimen permanente, si las variables del flujo no dependen de  $x$  el flujo se denomina uniforme, mientras que en caso de que sí dependan el flujo se denomina variado. En flujo uniforme y permanente, todas las variables del flujo se mantienen constantes a lo largo del cauce. En caso de flujo permanente y variado, y según la rapidez con que varíe el flujo a lo largo del conducto, se puede observar tanto un flujo gradualmente variado como un flujo rápidamente variado.

Régimen Permanente $Q = cte$	Uniforme: $y = cte ; V = cte$	Gradualmente Variado (RGV) Rápidamente Variado (RRV)
	Variado: $y = y(x) ; V = V(x)$	

Régimen Transitorio  
 $Q = Q(x,t) ; y = y(x,t) ; V = V(x,t)$

El esquema anterior es resumen de esta clasificación de flujos representados gráficamente los diferentes tipos de flujos en régimen permanente en la figura 3.

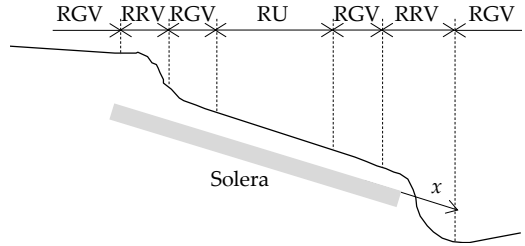


Figura 3 Diversos tipos de flujo en régimen permanente en el interior de un canal

Por otra parte, en lámina libre los flujos se clasifican en subcríticos o supercríticos según el número de Froude del flujo, el cual representa una relación entre las fuerzas de inercia y las gravitatorias. El número de Froude se calcula mediante la expresión:

$$Fr^2 = \frac{V^2 \cdot T}{g \cdot A} \quad (7.15)$$

la cual, aplicada al caso de sección rectangular, queda:

$$Fr^2 = \frac{V^2}{g \cdot y} \quad (7.16)$$

Con  $Fr < 1$  el flujo es subcrítico, y con  $Fr > 1$  el flujo es supercrítico. Obviamente, el flujo es crítico con  $Fr = 1$ .

En lámina libre, la celeridad de la onda de gravedad es la velocidad a la cual se transmite una perturbación como puede ser, por ejemplo, una onda superficial. Su valor es:

$$c = \sqrt{g \frac{A}{T}} \quad (7.17)$$

con lo que el número de Froude quedaría,

$$Fr^2 = \frac{V^2}{c^2} \quad (7.18)$$

Con ello, en flujo subcrítico  $c > V$ , de donde se deduce que la perturbación se puede transmitir hacia aguas arriba con velocidad  $c - V$ . Pero en flujo supercrítico  $c < V$ , por lo que en este caso la perturbación no se puede transmitir hacia aguas arriba. Estas situaciones van a hacer que algunas características del flujo sean diferentes en uno y otro caso, aunque estas diferencias no se contemplarán en el presente tema.

## Pendientes a definir en flujo en lámina libre

El principio físico del funcionamiento de una conducción en lámina libre se basa en que la energía potencial disponible, por la inclinación del canal, se invierte en vencer las pérdidas por rozamiento que aparecen cuando circula un determinado caudal. Esto, que es rigurosamente cierto cuando se observa un régimen uniforme perfectamente establecido, no es cierto en otra clase de flujos en los que puedan intervenir, además, efectos inerciales derivados de la aceleración del fluido. En cualquier caso es una idea a tener presente para entender con sencillez el comportamiento de un flujo en lámina libre.

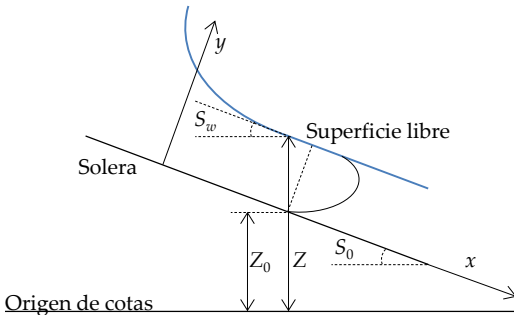


Figura 4 Pendientes que cabe definir en una conducción en lámina libre

Profundizando más en esta idea puede decirse que en toda conducción abierta, y tomando como referencia la figura 4, cabe definir tres pendientes:

- Pendiente de solera del canal,  $S_0$ . Se corresponde con la pendiente geométrica del fondo de la conducción,

$$S_0 = -\frac{dZ_0}{dx} \quad (7.19)$$

- Pendiente de la lámina de agua,  $S_w$ . Es la variación, por unidad de longitud de la conducción, de la superficie libre del agua en el canal. De acuerdo con la figura 4,

$$S_w = -\frac{dZ}{dx} \quad (7.20)$$

- Pendiente motriz, o pendiente hidráulica,  $S$ . Es la variación, por unidad de longitud de la conducción, de la energía del fluido por unidad de peso  $E$ . Por lo tanto, si:

$$E = Z + \frac{V^2}{2g} \quad (7.21)$$

pues la presión sobre la superficie libre del líquido a la cota  $Z$  es la atmosférica, la pendiente hidráulica responde a la expresión,

$$S = -\frac{dE}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( Z + \frac{V^2}{2g} \right) \quad (7.22)$$

El signo menos aparece en las tres expresiones para que las correspondientes pendientes sean positivas, ya que tanto las cotas como la energía disminuyen en el sentido positivo de las  $x$  (sentido hacia aguas abajo).

También cabe señalar que en la definición de las pendientes se aproxima el seno del ángulo de inclinación de la solera a su tangente, dado el escaso valor de este ángulo de inclinación. Por ello el valor del calado  $y$  se puede tomar, sin introducir un error excesivo, tanto vertical como perpendicular a la solera del canal.

Para el régimen uniforme y permanente tanto la pendiente de solera como el calado y la velocidad son constantes a lo largo del canal, por lo que se cumple:

$$-\frac{dZ_s}{dx} = -\frac{dZ}{dx} = -\frac{dE}{dx} \quad (7.23)$$

lo que corresponde en este caso a la igualdad de las tres pendientes,

$$S_0 = S_w = S \quad (7.24)$$

Obviamente cuando se produce la igualdad entre las tres pendientes es porque el régimen es uniforme, está perfectamente establecido, y se produce de manera que la energía potencial que se va perdiendo se invierte en vencer las pérdidas por fricción en el canal para el caudal que se establece.

## Flujo uniforme y permanente. Ecuación de Manning

En anteriores apartados se ha hablado de los diferentes tipos de flujo que se pueden establecer en lámina libre, pero lo que aún no se ha comentado es cómo determinar los parámetros del flujo en función de las características del mismo. Si se pretende llevar a cabo esta determinación en el caso más simple que corresponde al régimen uniforme y permanente se precisa de una ecuación que ligue las variables:

- Velocidad de circulación o caudal trasogado.
- Material que constituye el revestimiento de las paredes del canal, o estado del cauce.
- Geometría de la sección recta del canal, de características uniformes.
- Pendiente de la solera del canal (en este caso  $S_0 = S_w = S$ ).

La expresión más usual en este caso es la ecuación de Manning, aceptada por la práctica totalidad de especialistas como la más adecuada para el cálculo del flujo

uniforme y permanente en canales de características asimismo uniformes. Esta expresión tiene la forma:

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \cdot S_0^{1/2} \quad (7.25)$$

o bien, multiplicando ambos miembros por la sección de paso  $A$ , queda:

$$Q = \frac{1}{n} A \cdot R_h^{2/3} \cdot S_0^{1/2} \quad (7.26)$$

en donde:

- $n$ : coeficiente de Manning, dependiente del revestimiento del canal o cauce, de su estado de conservación, de la geometría de la sección y del grado de llenado (generalmente esta última variación no se considera).
- $S_0$ : pendiente de solera del canal. Generalmente se expresa en tanto por cien o en tanto por mil, aunque en las expresiones (7.22) y (7.23) se debe introducir su valor en tanto por uno (desnivel en metros por cada metro de longitud de conducción).
- $V$ : Velocidad media de circulación por el canal, en  $m/s$ .
- $Q$ : Caudal circulante por el canal, en  $m^3/s$ .
- $A$ : Sección recta realmente ocupada por el líquido en el canal, en  $m^2$ .
- $R_h$ : radio hidráulico correspondiente a la sección  $A$ , en  $m$ .

Las expresiones (7.25) y (7.26) se utilizan también en otro tipo de regímenes (RGV, RRV) sin más que sustituir la pendiente de solera  $S_0$  por la pendiente hidráulica  $S$ .

El coeficiente de Manning  $n$  viene tabulado en la bibliografía existente, reproduciéndose en la tabla 1 algunos de sus valores característicos. Son comúnmente aceptados valores de  $n$  entre 0,013 y 0,015 en redes de alcantarillado.

Tabla 1 Valores del coeficiente de Manning n.

Superficie	Óptimo	Bueno	Mediano	Malo
Tubo de hierro fundido sin recubrir	0,012	0,013	0,014	0,015
Tubo de hierro fundido recubierto	0,011	0,012*	0,013*	
Tubo de hierro forjado comercial, negro	0,012	0,013	0,014	0,015
Tubo de hierro forjado comercial, galvanizado	0,013	0,014	0,015	0,017
Tubos de vidrio y latón, lisos	0,009	0,010	0,011	0,013
Tubos soldados y de barra, lisos	0,010	0,011*	0,013*	
Tubo de acero en espiral y roblonado	0,013	0,015*	0,017*	
Tubo vitrificado para alcantarillas	0,010	0,013*	0,015	0,017
Tubo de drenaje de arcilla común con juntas abiertas	0,011	0,012*	0,014*	0,017
Mampostería de ladrillo vitrificado	0,011	0,012	0,013*	0,015
Ladrillo con mortero de cemento, alcantarillas de ladrillo	0,012	0,013	0,015*	0,017
Superficies de cemento sin arena	0,010	0,011	0,012	0,013
Superficies de mortero de cemento	0,011	0,012	0,013*	0,015
Tubo de hormigón	0,012	0,013	0,015*	0,016
Tubo de duelas de madera	0,010	0,011	0,012	0,013
Canalones de tablonés: acepillados	0,010	0,012*	0,013	0,014
Canalones de tablonés: sin acepillar	0,011	0,013*	0,014	0,015
Canalones de tablonés: con listones	0,012	0,015*	0,016	
Canales revestidos de hormigón	0,012	0,014*	0,016*	0,018
Superficie de cascote de cemento	0,017	0,020	0,025	0,30
Superficie de cascote	0,025	0,030	0,033	0,035
Superficie de piedra labrada	0,013	0,014	0,015	0,017
Canalón semicircular de metal, liso	0,011	0,012	0,013	0,015
Canalones semicirculares de metal, ondulados	0,0225	0,025	0,0275	0,030
<b>Acequias y regueras:</b>				
Tierra, en línea recta y uniforme	0,017	0,020	0,0225*	0,025
Excavadas en roca, liso y uniforme	0,025	0,030	0,033*	0,035
Excavadas en roca, mellado e irregular	0,035	0,040	0,045	
Acequias moderadamente serpenteantes	0,0225	0,025*	0,0275	0,030
Canales dragados en la tierra	0,025	0,0275*	0,030	0,033
Canales de lecho pedregoso áspero, con maleza en los bancos de tierra	0,025	0,030	0,035*	0,040
Fondo de tierra, márgenes de cascote	0,028	0,030*	0,033*	0,035
<b>Cursos de aguas naturales:</b>				
1) Limpio, márgenes rectas, sin escalones, ni vados o bolsas profundas	0,025	0,0275	0,030	0,033
2) Como el anterior, pero con algunos matorrales y piedras	0,030	0,033	0,035	0,040
3) Serpenteantes, algunas balsas y bancos de arena, limpio	0,033	0,035	0,040	0,045
4) Como el anterior, escalones más profundos, secciones y pendientes menos eficaces	0,040	0,045	0,050	0,065
5) Como el 3, algunos materiales y piedras	0,035	0,040	0,045	0,050
6) Como el 4, tramos pedregosos	0,045	0,050	0,055	0,060
7) Tramos de río perezosos, más bien enmalezados o con balsas muy profundas	0,050	0,060	0,070	0,080
8) Tramos muy enmalezados	0,075	0,100	0,125	0,150

\* Valores utilizados correctamente en los proyectos



## Sección más eficiente de un conducto en lámina libre

Si se supone un conducto con una forma de sección determinada, por ejemplo rectangular o trapecial (figura 2). Para este conducto se fija el coeficiente de Manning  $n$ , la pendiente de solera  $S_0$ , la sección recta  $A$  ocupada por el líquido y la forma geométrica de la sección, pero se consideran como variables los parámetros dimensionales de dicha sección. Por ejemplo, y como se indica en la figura 5, para la forma rectangular la misma sección  $A$  se podría obtener con diferentes valores del ancho de solera  $b \cdot y$ , a condición de que  $A = b \cdot y$ . Lo mismo se podría decir de una forma trapecial, cuya sección  $A$  ocupada por el líquido se podría obtener aplicando la expresión (7.5) con diferentes valores del ancho de solera  $b$ , del ángulo de inclinación de las paredes laterales  $\theta$  y del calado  $y$ .

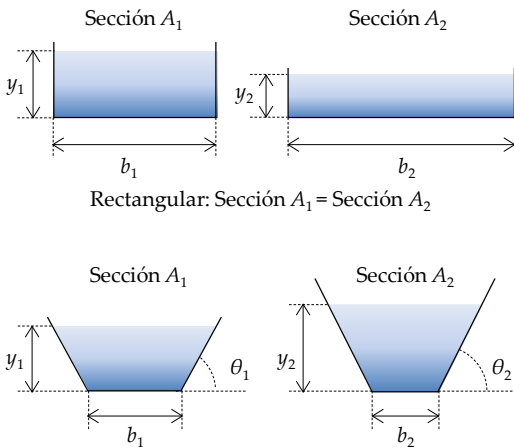


Figura 5 Dimensiones de secciones rectangulary trapecial para definición de sección más eficiente

En estas condiciones, y para una forma de sección determinada, se definirá la sección más eficiente de un conducto en lámina libre a las dimensiones que deberá tener la sección para transportar el máximo caudal habiendo fijado los valores de  $n$ ,  $S_0$  y  $A$ . Tomando como referencia la ecuación de Manning (7.26), para igualdad de otros parámetros el caudal máximo se obtendrá cuando el conducto posea el radio hidráulico máximo. Si se aplica este criterio a los tipos de sección definido se obtiene lo siguiente:

## Sección rectangular

Para una sección rectangular la sección más eficiente se obtendrá maximizando el valor del radio hidráulico

$$\text{Maximizar: } R_h = \frac{b \cdot y}{b + 2 \cdot y} \quad (7.27)$$

sujeto a la condición,

$$A = b \cdot y = cte \quad (7.28)$$

El radio hidráulico se maximiza cuando se cumple,

$$b = 2 \cdot y \quad y = \sqrt{\frac{A}{2}} \quad R_h = \frac{y}{2} \quad (7.29)$$

Por ello, la sección rectangular más eficiente es aquella en la cual el ancho de solera es igual a dos veces el calado. La sección más eficiente proporciona también la velocidad máxima, como se deduce de la expresión (7.28).

## Sección trapecial

Para la sección trapecial, la forma más eficiente se obtiene también maximizando el radio hidráulico,

$$\text{Maximizar: } R_h = \frac{b \cdot y + \frac{y^2}{\tan \theta}}{b + \frac{2y}{\sin \theta}} \quad (7.30)$$

sujeto a la condición:

$$A = b \cdot y + \frac{y^2}{\tan \theta} = cte \quad (7.31)$$

Al ser la sección  $A$  constante, maximizar el radio hidráulico equivale a minimizar el perímetro mojado. Así, a partir de la expresión (7.31) el problema se reduce a minimizar  $p$  de la forma:

$$\text{Minimizar: } p = b + \frac{2y}{\sin \theta} = \frac{A}{y} - \frac{y}{\tan \theta} + \frac{2y}{\sin \theta} \quad (7.32)$$

Derivando el perímetro mojado  $p$  respecto de  $\theta$  y respecto de  $y$  e igualando a cero ambas expresiones, la sección trapecial más eficiente se obtiene para:

$$\theta = 60^\circ \quad A = \sqrt{3} \cdot y^2 \quad R_h = \frac{y}{2} \quad (7.33)$$

lo cual quiere decir que la sección trapecial más eficiente es la de un semixégon.

### Sección circular

En el caso de sección circular no se puede hablar propiamente de sección más eficiente, pues la forma depende solamente del diámetro  $D$ . Pero en este caso lo que se puede hacer es, fijando los valores de  $n$ ,  $S_0$  y  $D$ , calcular el calado para obtener la velocidad máxima o el caudal máximo, pues el calado es diferente en uno y otro caso.

En un conducto circular, y teniendo en cuenta la expresión (7.25), si se fijan los valores de  $n$ ,  $S_0$  y  $D$ , la velocidad máxima se obtiene con el radio hidráulico máximo (ver expresiones (7.8) y (7.12)),

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } R_h &= \frac{D}{4} \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot \alpha} \right) \\ \alpha &= \arccos \frac{D - 2y}{D} \end{aligned} \quad (7.34)$$

A partir de esta expresión, la velocidad máxima se obtiene para,

$$\alpha = 2,245 \text{ rad} \rightarrow y = 0,812 \cdot D \quad (7.35)$$

Por otra parte, si lo que se pretende es obtener el caudal máximo, a partir de la expresión (7.26) y teniendo en cuenta (7.8), (7.10) y (7.12) se deberá maximizar la expresión:

$$\text{Maximizar: } A \cdot R_h^{2/3} = \frac{D^2}{4} \left( \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \left[ \frac{D}{4} \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot \alpha} \right) \right]^{2/3} \quad (7.36)$$

$$\alpha = \arccos \frac{D - 2y}{D}$$

Así, el caudal máximo se obtiene para,

$$\alpha = 2,64 \text{ rad} \rightarrow y = 0,938 \cdot D \quad (7.37)$$

Las relaciones (7.35) y (7.37), las cuales indican con qué calado relativo se obtiene velocidad o caudal máximo en un conducto circular con flujo en lámina libre, se han obtenido por consideraciones geométricas admitiendo que el coeficiente de Manning es constante e independiente del grado de llenado del conducto. Sin embargo, en la realidad dicho coeficiente depende del grado de llenado, por lo que los resultados indicados son solamente valores aproximados. En el siguiente apartado se verá la forma de obtener estos valores en casos reales a partir de las llamadas curvas de llenado.

## Curvas de llenado en conductos circulares en lámina libre

### Conductos circulares

En conductos circulares, y debido a la dificultad que presenta el cálculo del calado a partir de la ecuación de Manning utilizando las expresiones (7.10) y (7.12) para la sección de paso y el radio hidráulico, la solución de estas ecuaciones se presenta de modo gráfico mediante las llamadas curvas de llenado, figura 6. Estas curvas representan las relaciones  $p/p_{II}$ ,  $A/A_{II}$ ,  $R_h/R_{hII}$ ,  $V/V_{II}$  y  $Q/Q_{II}$  en función del calado relativo  $y/D$ , siendo los valores

con subíndice  $ll$  los que se obtienen para sección circular llena pero trabajando en lámina libre, y el resto de variables  $p$  perímetro,  $A$  área,  $R_h$  radio hidráulico,  $V$  volumen y  $Q$  caudal.

$$V_{ll} = \frac{1}{n} \left( \frac{D}{4} \right)^{2/3} \cdot S_0^{1/2} \quad (7.38)$$

$$Q_{ll} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left( \frac{D}{4} \right)^{2/3} \cdot S_0^{1/2} \quad (7.39)$$

Las curvas de llenado que se presentan en la figura 6 se obtienen por consideraciones geométricas y aplicando la ecuación de Manning, habiendo supuesto que el coeficiente de Manning  $n$  no varía con el grado de llenado. Sin embargo, y como ya se ha comentado, este coeficiente cambia con el grado de llenado, aumentando al principio conforme aumenta la sección de paso para luego disminuir. En la figura 7 se presenta la forma que adquieren las curvas de llenado en caso de conducto de sección circular, teniendo en cuenta la variación de  $n$  con el calado relativo  $y/D$ . En este caso los valores reales de velocidad máxima y caudal máximo se obtienen, respectivamente, para las relaciones  $y/D = 0,83$  e  $y/D = 0,97$ .

Como puede apreciarse en las figuras siguientes, el funcionamiento a máximo caudal (gasto) no se origina para la conducción circular completamente llena, y tal como se dedujo en la ecuación (7.37) el calado asociado al caudal máximo es próximo a  $0,94 \cdot D$ .

En lugar de las curvas de llenado para sección circular que se acaban de ver, una alternativa es utilizar la tabla de Thorman y Franke para obtener  $Q/Q_{ll}$  y  $V/V_{ll}$  en función del calado relativo  $y/D$ , las cuales se presentan en la tabla 2. Esta tabla se ha obtenido teniendo en cuenta la fricción del aire ocluido, la cual presenta la velocidad máxima para la relación  $y/D = 0,713$ , mientras que el caudal máximo se obtiene a sección llena ( $y/D = 1$ ).

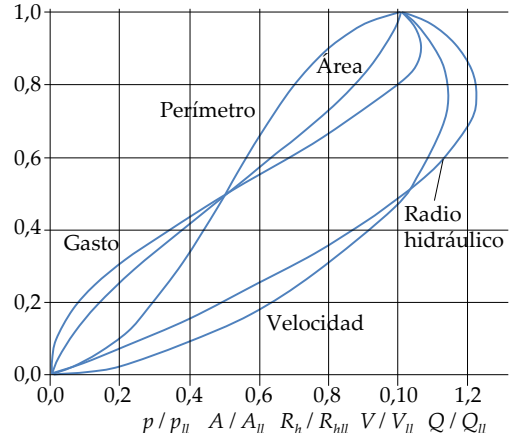


Figura 6 Curvas de llenado para conducto circular en lámina libre. Coeficiente de Manning constante e independiente del grado de llenado

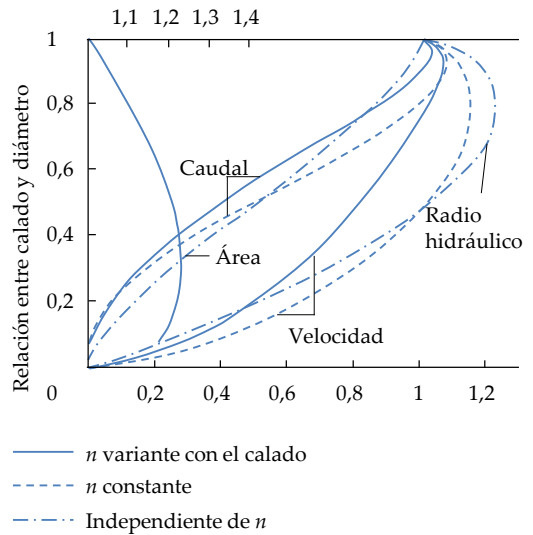


Figura 7 Curvas de llenado para conducto circular en lámina libre. Coeficiente de Manning constante e independiente del grado de llenado

Tabla 2 Tabla de Thormann y Franke. Variaciones del caudal y de la velocidad en función de la altura de llenado

$Q/Q_{II}$	$h/D$	$v/v_{II}$	$Q/Q_{II}$	$h/D$	$v/v_{II}$	$Q/Q_{II}$	$h/D$	$v/v_{II}$	$Q/Q_{II}$	$h/D$	$v/v_{II}$
0,001	0,023	0,17	0,056	0,158	0,55	0,155	0,263	0,74	0,660	0,600	1,05
0,002	0,032	0,21	0,057	0,159	0,56	0,160	0,268	0,74	0,670	0,607	1,06
0,003	0,038	0,24	0,058	0,160	0,56	0,165	0,272	0,75	0,680	0,613	1,06
0,004	0,044	0,26	0,059	0,162	0,56	0,170	0,276	0,76	0,690	0,620	1,06
0,005	0,049	0,28	0,060	0,163	0,57	0,175	0,281	0,76	0,700	0,626	1,06
0,006	0,053	0,29	0,061	0,164	0,57	0,180	0,285	0,77	0,710	0,633	1,06
0,007	0,057	0,30	0,062	0,166	0,57	0,185	0,289	0,77	0,720	0,640	1,07
0,008	0,061	0,32	0,063	0,167	0,57	0,190	0,293	0,78	0,730	0,646	1,07
0,009	0,065	0,33	0,064	0,168	0,58	0,195	0,297	0,78	0,740	0,653	1,07
0,010	0,068	0,34	0,065	0,170	0,58	0,200	0,301	0,79	0,750	0,660	1,07
0,011	0,071	0,35	0,066	0,171	0,58	0,210	0,309	0,80	0,760	0,667	1,07
0,012	0,074	0,36	0,067	0,172	0,58	0,220	0,316	0,81	0,770	0,675	1,07
0,013	0,077	0,36	0,068	0,174	0,59	0,230	0,324	0,82	0,780	0,682	1,07
0,014	0,080	0,37	0,069	0,175	0,59	0,240	0,331	0,83	0,790	0,689	1,07
0,015	0,083	0,38	0,070	0,176	0,59	0,250	0,339	0,84	0,800	0,697	1,07
0,016	0,086	0,39	0,071	0,177	0,59	0,260	0,346	0,85	0,805	0,701	1,08
0,017	0,088	0,39	0,072	0,179	0,59	0,270	0,353	0,86	0,810	0,705	1,08
0,018	0,091	0,40	0,073	0,180	0,6	0,280	0,360	0,86	0,815	0,709	1,08
0,019	0,093	0,41	0,074	0,181	0,6	0,290	0,367	0,87	0,820	0,713	1,08
0,020	0,095	0,41	0,075	0,182	0,6	0,300	0,374	0,88	0,825	0,717	1,08
0,021	0,098	0,42	0,076	0,183	0,6	0,310	0,381	0,89	0,830	0,721	1,08
0,022	0,100	0,42	0,077	0,185	0,61	0,320	0,387	0,89	0,835	0,725	1,08
0,023	0,102	0,43	0,078	0,186	0,61	0,330	0,394	0,90	0,840	0,729	1,07
0,024	0,104	0,43	0,079	0,187	0,61	0,340	0,401	0,91	0,845	0,734	1,07
0,025	0,106	0,44	0,080	0,188	0,61	0,350	0,407	0,92	0,850	0,738	1,07
0,026	0,108	0,45	0,081	0,189	0,62	0,360	0,414	0,92	0,855	0,742	1,07
0,027	0,110	0,45	0,082	0,191	0,62	0,370	0,420	0,93	0,860	0,747	1,07
0,028	0,112	0,45	0,083	0,192	0,62	0,380	0,426	0,93	0,865	0,751	1,07
0,029	0,114	0,46	0,084	0,193	0,62	0,390	0,433	0,94	0,870	0,756	1,07
0,030	0,116	0,46	0,085	0,194	0,62	0,400	0,439	0,95	0,875	0,761	1,07
0,031	0,118	0,47	0,086	0,195	0,63	0,410	0,445	0,95	0,880	0,766	1,07
0,032	0,120	0,47	0,087	0,196	0,63	0,420	0,451	0,96	0,885	0,777	1,07
0,033	0,122	0,48	0,088	0,197	0,63	0,430	0,458	0,96	0,890	0,775	1,07
0,034	0,123	0,48	0,089	0,199	0,63	0,440	0,464	0,97	0,895	0,781	1,07
0,035	0,125	0,48	0,090	0,200	0,63	0,450	0,470	0,97	0,900	0,786	1,07
0,036	0,127	0,49	0,091	0,201	0,64	0,460	0,476	0,98	0,905	0,791	1,07
0,037	0,129	0,49	0,092	0,202	0,64	0,470	0,482	0,99	0,910	0,797	1,07
0,038	0,130	0,50	0,093	0,203	0,64	0,480	0,488	0,99	0,915	0,802	1,06
0,039	0,132	0,50	0,094	0,204	0,64	0,490	0,494	1,00	0,920	0,808	1,06
0,040	0,134	0,50	0,095	0,205	0,64	0,500	0,500	1,00	0,925	0,814	1,06
0,041	0,135	0,51	0,096	0,206	0,65	0,510	0,506	1,00	0,930	0,821	1,06
0,042	0,137	0,51	0,097	0,207	0,65	0,520	0,512	1,01	0,935	0,827	1,06
0,043	0,138	0,51	0,098	0,208	0,65	0,530	0,519	1,01	0,940	0,834	1,05
0,044	0,140	0,52	0,099	0,210	0,65	0,540	0,525	1,02	0,945	0,841	1,05
0,045	0,141	0,52	0,100	0,211	0,65	0,550	0,531	1,02	0,950	0,849	1,05
0,046	0,143	0,52	0,105	0,216	0,66	0,560	0,537	1,02	0,955	0,856	1,05
0,047	0,145	0,53	0,110	0,221	0,67	0,570	0,543	1,03	0,960	0,865	1,04
0,048	0,146	0,53	0,115	0,226	0,68	0,580	0,550	1,03	0,965	0,874	1,04
0,049	0,148	0,53	0,120	0,231	0,69	0,590	0,556	1,03	0,970	0,883	1,04
0,050	0,149	0,54	0,125	0,236	0,69	0,600	0,562	1,04	0,975	0,894	1,03
0,051	0,151	0,54	0,130	0,241	0,7	0,610	0,568	1,04	0,980	0,905	1,03
0,052	0,152	0,54	0,135	0,245	0,71	0,620	0,575	1,04	0,985	0,919	1,02
0,053	0,153	0,55	0,140	0,250	0,72	0,630	0,581	1,05	0,990	0,935	1,02
0,054	0,155	0,55	0,145	0,254	0,72	0,640	0,587	1,05	0,995	0,955	1,01
0,055	0,156	0,55	0,150	0,259	0,73	0,650	0,594	1,05	1,000	1,000	1,00

Secciones cerradas no circulares

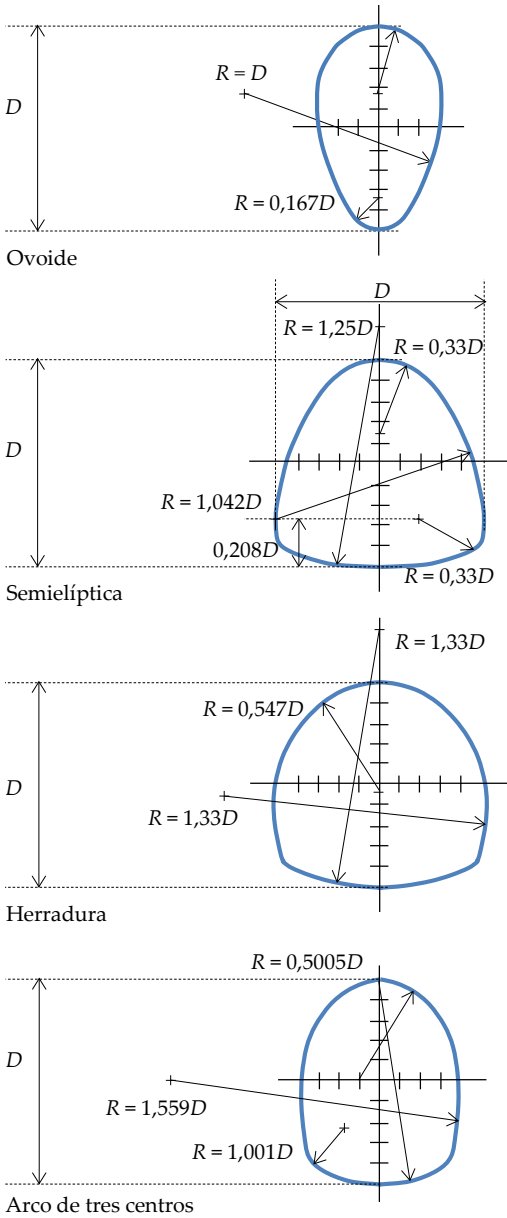
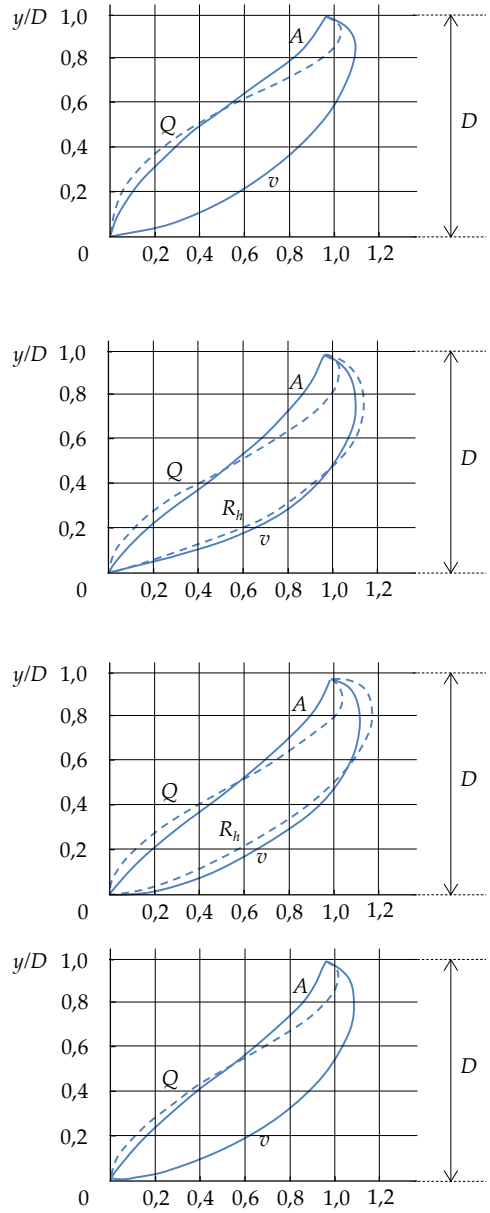


Figura 8 Secciones cerradas no circulares utilizadas en redes de alcantarillado



Relación entre parámetros hidráulicos del segmento de llenado y de la sección llena

Figura 9 Curvas de llenado para conductos cerrados no circulares

A pesar de que la mayoría de los conductos cerrados que se utilizan en alcantarillado son de sección recta circular, se dispone también de otro tipo de secciones con geometría distinta de la circular tales como ovoide, herradura, arco de tres centros y semielíptica, cuyas características geométricas se presentan en la figura 8. En cuanto al valor de los parámetros hidráulicos más importantes a sección llena, éstos aparecen reflejados en la tabla 3.

Tabla 3 Parámetros hidráulicos para secciones cerradas no circulares llenas

Tipo de sección	Parámetros hidráulicos de las secciones llenas		
	Área	Perímetro mojado	Radio hidráulico
Ovoide	$0,510 \cdot D^2$	$2,643 \cdot D$	$0,193 \cdot D$
Semielíptica	$0,783 \cdot D^2$	$3,258 \cdot D$	$0,240 \cdot D$
De herradura	$0,913 \cdot D^2$	$3,466 \cdot D$	$0,263 \cdot D$
De arco de tres centros	$0,786 \cdot D^2$	$3,193 \cdot D$	$0,246 \cdot D$

Es importante destacar que los conductos de sección ovoidal resultan especialmente interesantes debido a que la geometría de su sección recta transversal les confiere una mayor resistencia mecánica a la rotura que a los conductos circulares.

Análogamente a los conductos de sección circular, existen curvas de llenado para los conductos cerrados no circulares que recogen las relaciones entre los parámetros hidráulicos más importantes con relación a los mismos valores para sección llena. En la figura 9 se puede ver la forma de estas curvas de llenado.

## Algunos fenómenos que se producen en el flujo en lámina libre

Se ha estado viendo hasta ahora el comportamiento del flujo en lámina libre en las condiciones de régimen uniforme y permanente. Este es uno de los diversos casos de flujo que se pueden presentar, y que en realidad va a suceder muy pocas veces, pues en la mayor parte de los casos el flujo cambia con el tiempo debido a las circunstancias cambiantes en que se presenta. Se

puede pensar, por ejemplo, en una red de colectores de aguas residuales donde el caudal circulante es diferente de unos puntos a otros y de unos instantes a otros, pues todo depende de cómo vayan descargando sus aguas residuales los diferentes puntos de consumo. Y ello por no hablar de los colectores de aguas pluviales, cuyos caudales transportados dependen del espacio y del tiempo en razón de la variabilidad espacial y temporal de la intensidad de lluvia en la cuenca aportante. Ello justifica que cuando se diseñan canales o conductos de transporte de aguas en lámina libre se haga uso de las condiciones más desfavorables, las cuales corresponden a los caudales máximos a transportar. Y los cálculos se llevan a cabo en condiciones de flujo uniforme y permanente por la facilidad de aplicación de la ecuación de Manning.

Sin embargo, existen muchos fenómenos en el flujo en lámina libre cuyo estudio teórico presenta diferentes grados de complejidad, y a los cuales no se va a prestar atención especial en razón de los límites impuestos al presente tema. De todas maneras, se presentará a continuación algunos de ellos a nivel descriptivo, remitiéndose a las personas interesadas en su estudio a la bibliografía especializada.

## Ondas de gravedad

Todos hemos visto desplazarse una pequeña perturbación, en forma de onda superficial, hacia aguas arriba o hacia aguas abajo de un canal. Esta onda se mueve a una velocidad  $c$  respecto del flujo, denominada celeridad, la cual para canal rectangular y onda de pequeña amplitud responde a la expresión

$$c = (g \cdot y)^{1/2} \quad (7.40)$$

Cuando el fluido está en movimiento, la velocidad de la onda respecto de un observador fijo en las proximidades del canal será la combinación de la velocidad del flujo y la celeridad de la onda ( $V - c$  hacia aguas arriba y  $V + c$  hacia aguas abajo). Así, y según lo indicado en la figura 10, si el flujo es crítico ( $Fr = 1$ ), la velocidad del fluido y la de la onda son iguales, por lo que el observador ve quieta la onda que intentase remontar el canal. Si el flujo es subcrítico ( $Fr < 1$ ), la onda remonta

aguas arriba pues su velocidad es mayor que la de la corriente. En flujo supercrítico ( $Fr > 1$ ), la onda se deslizará hacia aguas abajo sin poder remontar el flujo. Por ello, y en el orden práctico, observando la evolución de la onda será posible identificar el tipo de flujo.

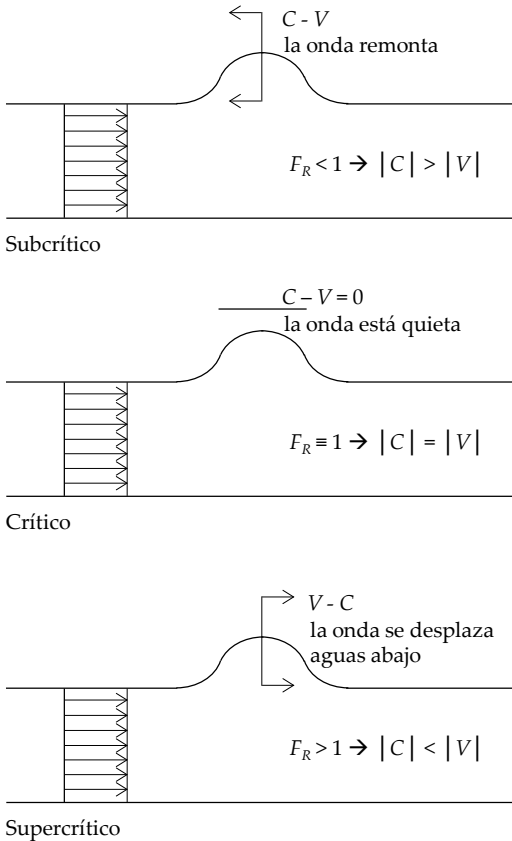


Figura 10 Evolución de una onda de gravedad, desde la perspectiva de un observador estático, en función de los distintos regímenes de circulación

### Curva de remanso

En régimen de lámina libre el flujo uniforme se alcanza cuando las características geométricas del canal permanecen aproximadamente constantes, produciéndose la igualdad de pendientes  $S = S_w = S_0$ .

Cuando la pendiente motriz  $S$  no es igual a la geométrica  $S_0$  se establece un flujo gradualmente variado, siempre y cuando la curvatura de las líneas de corriente no sea excesiva (para simplificar, en las expresiones de cálculo se supone que éstas son rectilíneas).

En el caso del régimen permanente y gradualmente variado, las características del flujo varían de sección en sección, pero permanecen constantes en el tiempo. Para este régimen, se denomina curva de remanso a la forma que describe la superficie libre del líquido lo largo de la longitud del canal. Las curvas de remanso se presentan, por ejemplo, cuando el calado en un canal va aumentando hasta conseguir nivel suficiente para que el agua supere un obstáculo como puede ser una presa o un aliviadero, figura 11, o bien descargue por debajo de una compuerta parcialmente abierta.

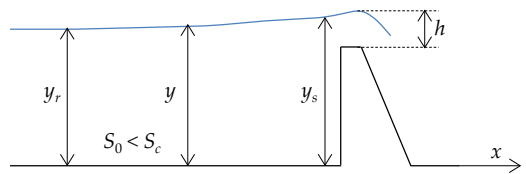


Figura 11 Curva de remanso introducida por una presa

El interés que presenta el conocimiento de un régimen de estas características es evidente. Una de las aplicaciones más notables es el análisis de la curva de remanso que nos permita ver la influencia que la instalación de una presa pueda tener en las tierras que como consecuencia de ello van a ser anegadas.

### Resalto hidráulico

Una de las formas en que el régimen pasa de supercrítico a subcrítico pero en forma brusca es mediante el resalto hidráulico, figura 12, el cual se produce con gran pérdida energética. Un caso típico es el que se origina cuando una compuerta descarga un cierto caudal a través de una pequeña abertura en su parte inferior. Aguas arriba de la compuerta se origina una carga hidráulica  $H$  que da lugar a la evacuación del caudal circulante por el canal a una velocidad  $V_1$  elevada y con un calado discreto  $y_1$ , para los cuales se admite que el número de Froude  $Fr_1 > 1$  siendo el flujo supercrítico.

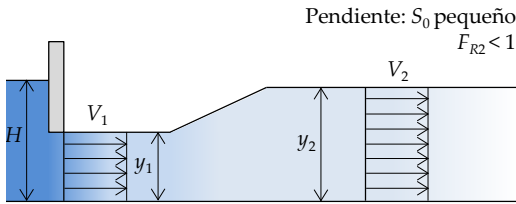


Figura 12 Formación del resalto hidráulico a la salida de una compuerta con apertura inferior

Sin embargo, si la pendiente  $S_0$  del canal es pequeña, ésta será totalmente insuficiente para mantener la elevada velocidad  $V_1$  al ser muy grandes las pérdidas correspondientes a dicha velocidad. El flujo trata, por lo tanto, de adaptarse a las condiciones permanentes que impone la pendiente del canal. Estas condiciones son, para el caso que se establezca flujo uniforme justo a la salida del resalto, velocidad  $V_2$  y calado  $y_2$ , con  $Fr_2 < 1$  (régimen subcrítico).

Pues bien, el cambio de régimen supercrítico (debido a la velocidad impuesta a la salida de la compuerta por la carga hidráulica  $H$ ) a subcrítico (impuesto por la pendiente de solera  $S_0$  del canal), se efectúa bruscamente, dando lugar a lo que se conoce como resalto hidráulico. Los resaltos hidráulicos disipan tanta más energía cuanto mayor sea el número de Froude del flujo supercrítico. Es particular, si  $Fr_1$  está comprendido entre 20 y 80, la energía disipada oscila entre el 45 y el 70%, pudiendo alcanzar valores de hasta el 85% con números de Froude superiores a 80. Haciendo una analogía entre el flujo en un canal y el flujo compresible en un conducto a presión, el resalto hidráulico equivale a la onda de choque con paso de flujo supersónico a flujo subsónico.

### Bajantes verticales en lámina libre

El flujo que se establece en los colectores y bajantes verticales de aguas pluviales y/o residuales de los edificios se puede considerar como flujo en lámina libre cuando el descenso del agua se produce en contacto con el aire a presión atmosférica. Sin embargo, para este caso no es de aplicación la ecuación de Manning, pues el flujo es muy distinto del que se establece en conductos en lámina libre de pendiente reducida.

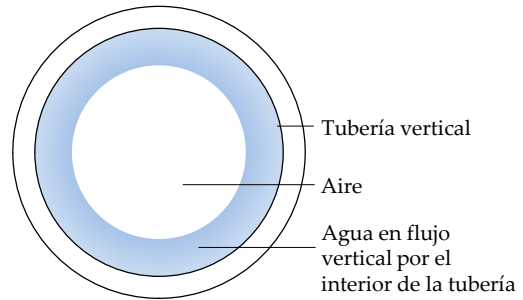


Figura 13 Disposición del flujo de agua en bajantes verticales

Experiencias de laboratorio han demostrado que el flujo de agua en conductos verticales depende esencialmente del caudal. Para caudales pequeños, el agua corre totalmente adherida a la superficie interior de la tubería, figura 13, con aire atmosférico en la parte central. Pero al crecer el caudal el agua sigue adherida hasta un límite, alcanzado el cual, y debido a la resistencia del aire, el agua termina formando una bola, cilindro o pistón que desciende a sección llena. Con ello la presión del aire bajo del pistón puede aumentar, hasta que dicho pistón termina fragmentándose en porciones de líquido que caen de manera más o menos individualizada. Estos cambios de forma dan lugar a rápidas oscilaciones de presión en el sistema de evacuación de aguas, los cuales pueden llegar incluso a descebar los sistemas de sellado en inodoros y desagües.

Para no alcanzar presiones excesivas en las conducciones de desagüe, es necesario dimensionar las bajantes para un caudal tal que la superficie ocupada por el agua en su descenso no sea nunca superior a un tercio de la sección transversal de la tubería.

Tras la conexión de un ramal horizontal con la bajante vertical, el agua se acelera por la fuerza de la gravedad y, rápidamente, forma una lámina alrededor de la superficie interna de la tubería. Esta corona circular de agua y el alma de aire en su interior continúan acelerándose hasta que las pérdidas por rozamiento con la pared interior del conducto igualan a la fuerza de la gravedad. Desde ese momento, la velocidad de caída alcanza un valor constante (conocido como velocidad terminal) mientras no se produzca el efecto pistón.



La velocidad terminal, y la distancia desde el punto de entrada del agua hasta el punto en que se alcanza dicha velocidad, se pueden expresar respectivamente mediante las siguientes fórmulas experimentales:

$$V_t = 10 \left( \frac{Q}{D} \right)^{0,4} \quad (7.41)$$

$$L_t = 0,17 \cdot V_t^2 \quad (7.42)$$

donde:

- $V_t$ : velocidad terminal en  $m/s$ .
- $L_t$ : distancia terminal en  $m$ .
- $Q$ : caudal en  $l/s$ .
- $D$ : diámetro interior de la bajante en  $mm$ .

El caudal de agua que circula por la bajante en las condiciones de la figura 13 puede expresarse en función del diámetro interior  $D$  de la tubería y de la relación  $r$  entre la sección transversal de la lámina de agua y la

sección transversal de la tubería mediante la fórmula experimental de Dawson y Hunter,

$$Q = 3,15 \cdot 10^{-4} \cdot r^{5/3} \cdot D^{8/3} \quad (7.43)$$

donde el diámetro  $D$  se expresa en  $mm$  y el caudal  $Q$  en  $l/s$ . Para el diseño de las bajantes, la relación de áreas  $r$  se toma entre  $1/3$  y  $1/4$ .

Al pie de la bajante vertical la lámina de agua circula pegada a la pared a la velocidad terminal mencionada anteriormente (valores del orden de 3 a 4,5  $m/s$ ), figura 14, mientras que en el tramo horizontal o albañal la velocidad es mucho menor, usualmente inferior a 1  $m/s$ . Durante un corto recorrido después del codo, como máximo unas 10 veces el diámetro de la tubería, el agua fluye en régimen que posiblemente sea supercrítico. Debido a que la pendiente de la tubería horizontal no es suficiente para mantener este flujo, la velocidad va disminuyendo y el calado va aumentando, hasta que dicho flujo pasa bruscamente a subcrítico mediante un resalto hidráulico si éste es el flujo en régimen permanente en la

conducción horizontal. En ocasiones el caudal puede ser suficientemente grande para llenar toda la sección de esta última tubería.

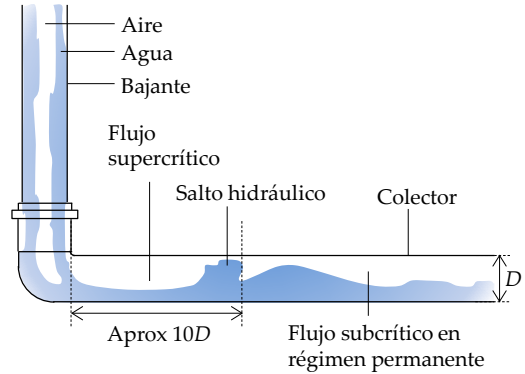


Figura 14 Flujo de transición entre bajante vertical y albañal horizontal

## Bibliografía

Arochas, S., 1983.

*Cloacas y drenajes. Teoría y diseño*

Ediciones Vega, s.r.l. Caracas (Venezuela).

Grupo Mecánica de Fluidos, 1999.

*Instalaciones interiores de fontanería y saneamiento*

Apuntes del curso del mismo nombre editados por el Grupo Mecánica de Fluidos de la Universidad Politécnica de Valencia.

Metcalf-Eddy, 1977.

*Tratamiento y depuración de las aguas residuales*

Ed. Labor, S.A. Barcelona.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., 2002.

*Mecánica de fluidos (3ª ed.)*

Ed. Thompson. México.

U.D. Mecánica de Fluidos, 1991. *Estaciones de bombeo de aguas pluviales y/o residuales*

Ed. Generalitat Valenciana, Conselleria d'Indústria, Comerç i Turisme.

White, F.M., 2008.

*Mecánica de fluidos (6ª ed.)*

Ed. Mc Graw Hill. Madrid.

Capítulo 8

# Flujo alrededor de cuerpos

## Índice

Introducción

La teoría de la capa límite

La paradoja de D'Alembert

Fuerzas sobre cuerpos sumergidos en un fluido con movimiento relativo

Los alveolos en las pelotas de golf

Fuerzas de arrastre y sustentación

Resistencia y sustentación en automóviles

Los coeficientes de arrastre en automóviles

Funcionamiento del DRS

Fuerzas debidas a flujos externos en otros cuerpos

El desastre del puente de Tacoma Narrows

El efecto Magnus, las costuras de los balones y la separación de la capa límite

Velocidad terminal

Bibliografía

## Introducción

El estudio de los flujos externos alrededor de cuerpos sumergidos en fluidos establece los principios básicos de la aerodinámica. Esta parte de la mecánica de fluidos tiene una gran importancia para las ingenierías aeronáutica y naval (en cuyo caso se denomina hidrodinámica). Sin embargo, también la tiene para el ingeniero industrial, pues afecta a las fuerzas que experimenta cualquier objeto que se mueva a través de un fluido (como un automóvil o un nadador) el movimiento de un fluido alrededor de los álabes de una turbina o un aerogenerador o incluso aquellos cuerpos alrededor de los cuales se mueven los fluidos (como un estadio o un puente).

El estudio de este tipo de flujos resulta sumamente complicado. Por ello la resolución de los problemas de ingeniería derivados de los mismos suele conllevar la utilización de la dinámica de fluidos computacional (CFD – Computational Fluid Dynamics) o la utilización de datos experimentales obtenidos en laboratorio (túnel de viento).

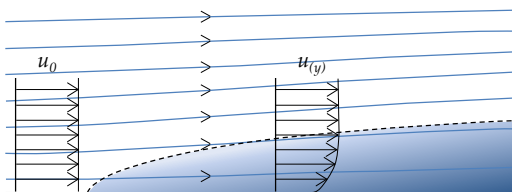


Figura 1 Perfiles de velocidad en torno a la capa límite generada por una placa plana

La teoría de la capa límite es la tercera alternativa para estudiar los flujos externos. Formulada por Prandtl (1904), simplifica el problema del flujo externo a un cuerpo dividiéndolo en dos zonas: la primera cercana al cuerpo donde la viscosidad juega un papel importante (en la figura 1, zona gris en la que las velocidades tienen un perfil creciente de forma parabólica) y una segunda zona en la que el flujo está plenamente desarrollado (turbulento). Los efectos viscosos son importantes en la primera zona, mientras que resultan despreciables a efectos de la resolución del problema en la segunda, al ser el gradiente de velocidades nulo.

Los flujos con números de Reynolds bajos tienen poca importancia en aplicaciones relacionadas con la ingeniería y presentan una mayor dificultad a la hora de su resolución mediante el acoplamiento de la capa límite. Afortunadamente, la mayoría de las aplicaciones reales de la ingeniería se dan en flujos con número de Reynolds elevados.

## La teoría de la capa límite

La teoría enunciada por Prandtl permite calcular los efectos viscosos cerca de las paredes de un sólido para posteriormente "acoplar" estos efectos al resto de flujo no viscoso. En otras palabras definir matemáticamente la interacción entre las zonas viscosas y no viscosas del flujo.

No existe una teoría simple para realizar este "acoplamiento" en flujos con números de Reynolds inferiores a 1000. La resolución de los problemas con este tipo de flujos se suele acometer mediante modelos numéricos (CFD).

El espesor de la capa límite puede definirse como el "lugar geométrico de los puntos donde la velocidad  $u$  (...) alcanza el 99% del valor de la velocidad exterior  $U$ " (White, 2008).

En el caso de cuerpos con un perfil aerodinámico y esbelto y que es paralelo a la dirección del flujo, el espesor de la capa límite es muy pequeño y el gradiente de velocidades permite alcanzar la velocidad exterior rápidamente (desde la velocidad nula relativa en las paredes del cuerpo –condición de adherencia–).

En estos casos el modelo de Prandtl es capaz de resolver adecuadamente el acoplamiento entre las zonas viscosas y turbulentas del flujo, realizando una predicción adecuada de la realidad.

Sin embargo, en el caso de cuerpos romos y que presentan una mayor superficie opuesta al flujo, el espesor de la capa límite continúa siendo pequeño pero en la realidad existe un desprendimiento de la misma. Este desprendimiento tiene lugar en la zona en la que la presión se vuelve a incrementar.

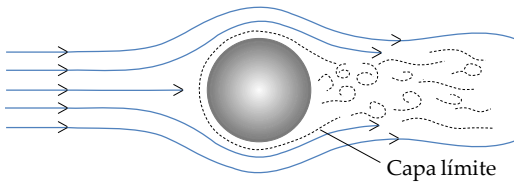


Figura 2 Desprendimiento de la capa límite en una esfera creando una estela en la parte posterior

La teoría para determinar en este caso la interacción entre las zonas viscosa y no viscosa no está bien desarrollada, y es necesario recurrir a medidas experimentales para afrontar este tipo de problemas. Así pues, en el caso de los problemas relativos a flujos externos la experimentación y el uso de CFD es fundamental.

## Fuerzas sobre cuerpos sumergidos en un fluido con movimiento relativo

Un cuerpo sumergido en un fluido con un movimiento relativo al mismo está sujeto a fuerzas en función de la interacción con el mencionado fluido. Las fuerzas que experimenta un cuerpo sin movimiento sumergido en un fluido ya fueron estudiadas en el capítulo relativo a la estática de fluidos.

A los efectos de las fuerzas que experimenta el cuerpo, es independiente si el movimiento es del fluido, del cuerpo o de ambos. De hecho, será la velocidad relativa entre cuerpo y fluido la que determinará en parte la magnitud de las fuerzas resultantes. De esta manera es posible estudiar en un túnel de viento los esfuerzos a los que hará frente un coche en movimiento simplemente creando un flujo de aire cuya velocidad sea la misma que la velocidad relativa coche-viento que se encontrará en la realidad.

Por lo tanto, pese a que en muchas ocasiones se hable en términos de **resistencia** (cuando es el objeto el que avanza contra el fluido) o de **arrastré** (cuando es el fluido el que se mueve en dirección hacia el objeto) lo cierto es que el cálculo de las fuerzas y sus magnitudes son completamente equivalentes.

Durante mucho tiempo se creyó que el origen de la resistencia al avance de un cuerpo en un fluido era únicamente consecuencia de la viscosidad del mismo. Sin embargo el aire es un fluido prácticamente ideal (y por tanto con una viscosidad casi nula) y es bien sabido que genera una resistencia notable en cuanto la velocidad aumenta de un cuerpo que avanza en dicho medio.

Durante un tiempo la mecánica de fluidos no fue capaz de explicar este hecho fácilmente comprobable de

## La paradoja de D'Alembert

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, planteó una interesante cuestión en 1752. Si un cuerpo simétrico (una esfera o un cilindro) se movía con velocidad uniforme a través del flujo potencial de un fluido incompresible e ideal, la resistencia teórica a su avance sería nula. Sin embargo, la observación práctica evidenciaba lo contrario.



Figura 3 Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (Wikipedia)

Los fallos en la teoría de la mecánica de fluidos llevaron a los ingenieros hidráulicos a dudar de su utilidad. Incluso cuando Saint-Venant desarrolló el concepto de viscosidad, que explicaba la disipación de energía en un fluido mediante fuerzas tangentes, se dudaba que fuera suficiente explicación para la resistencia al avance de, por ejemplo, una esfera.

No fue hasta que Prandtl enunció su teoría de la capa límite en 1904 que se admitió que la estela creada tras el cuerpo generaba una diferencia de presiones que resultaba en una fuerza resistente al avance. Fue en ese momento cuando nació la mecánica de fluidos moderna reuniendo de nuevo los campos de la hidráulica y la mecánica de fluidos.

manera experimental. Fue Prandtl en 1904 el que con la teoría de la capa límite logró dar explicación a este fenómeno y aportó las bases para caracterizarlo físicamente.

Las causas de las fuerzas que experimenta un cuerpo en el seno de un fluido pueden clasificarse en dos tipos en función de su origen:

- **Resistencia de fricción:** Es resultado de las tensiones tangenciales de origen viscoso y por tanto se origina en aquellas zonas dentro de la capa límite en la que dichos esfuerzos son significativos. En un flujo con número de Reynolds bajo (laminar) se trata de la principal causa de la resistencia al avance. Tan solo con recordar la definición de viscosidad es fácil establecer que su magnitud será consecuencia del valor de la viscosidad, del gradiente de velocidades y de la superficie de contacto cuerpo/fluido.
- **Resistencia de presión:** Su origen es totalmente distinto al de la resistencia de fricción. Se origina en la diferencia de presiones entre la superficie de ataque del cuerpo (la que primero entra en contacto con las partículas de fluido) y zona de la estela posterior al mismo. La fuerza resultante es la que se opondrá al avance del cuerpo (resistencia) o lo arrastrará con el flujo (arrastre).

Dado que la resistencia de presión depende en gran medida de la separación de la capa límite, una mayor adherencia de dicha capa al cuerpo representará una menor resistencia al avance. La capa límite es más resistente a la separación en tanto en cuanto el flujo sea más turbulento.

Cualquier cuerpo sumergido en una corriente fluida experimenta una serie de fuerzas y momentos que dependen del movimiento relativo con respecto al fluido y su geometría. Un objeto sin simetría alguna experimentará fuerzas en las tres direcciones del espacio.

Con tal de establecer una terminología común, se suele tomar como dirección de referencia aquella que sigue la corriente del fluido sin perturbar, con dirección positiva en el sentido aguas abajo (se considera siempre el movimiento relativo fluido-cuerpo, por lo que en el caso de que el fluido esté en reposo y el movimiento

corresponda al cuerpo el sentido positivo será en contra de dicho movimiento).

La fuerza que se opone al avance del cuerpo en el fluido (y por tanto según el sentido positivo del eje recién definido) se denomina **resistencia** o **arrastre** (*drag* en inglés). La fuerza perpendicular a la resistencia en la dirección opuesta a la aceleración de la gravedad se denomina **sustentación** (*lift* en inglés) y puede ser negativa (es decir sumarse al peso del objeto). Las fuerzas perpendiculares a las dos anteriores se denominan fuerzas laterales.

El momento alrededor del eje de resistencia se denomina momento de balanceo, el de cabeceo (o picado) es el momento en torno al eje lateral, mientras que el momento de giro en torno al eje de sustentación es el momento de guiñada.

En el caso de objetos simétricos con respecto al plano formado por los ejes de sustentación y arrastre, la fuerza lateral y los momentos de balanceo y guiñada desaparecen. Este es el caso de coches, trenes, barcos y aviones (aunque en los aviones mediante el uso de *flaps* y alerones es posible modificar la simetría y por tanto los tres momentos).

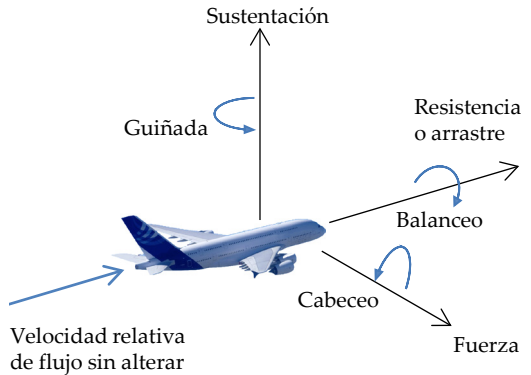


Figura 6 Fuerzas y momentos en un cuerpo sumergido en una corriente fluida uniforme

Por ello, en nuestro caso **se estudiarán fundamentalmente en las fuerzas de arrastre y sustentación.**

## Fuerzas de arrastre y sustentación

Tal y como se comentaba anteriormente, el cálculo las fuerzas a las que se ve sometido un cuerpo inmerso en una corriente fluida son debidas a fenómenos que tan solo pueden resolverse mediante el uso de CFD o técnicas experimentales. De hecho, en la vida real, los equipos de Fórmula 1 recurren a estas dos herramientas para intentar adivinar cómo afectarán las mejoras aerodinámicas en sus coches a los valores de dichas fuerzas. Sin embargo, incluso con las grandes mejoras que la informática ha proporcionado en cuanto a la capacidad de cálculo de los procesadores, los datos obtenidos en el túnel de viento siguen siendo los que más

se acercan a la realidad (pese a que nunca garantizan proporcionar información fiable al 100%).

Por ello, el cálculo de las fuerzas de resistencia y sustentación se basa en una fórmula empírica que tiene en cuenta los principales factores que determinan su valor:

- **Superficie (A):** En función de la cantidad de superficie característica del cuerpo (por ejemplo, la superficie frontal a la hora de calcular la resistencia al avance) será más difícil avanzar. Un ciclista de mayor altura ofrece una mayor resistencia al viento porque opone una mayor superficie. Por lo general se utiliza el área frontal, el área en planta (para superficies como alas) o el área mojada (para embarcaciones).

## Los alveolos en las bolas de golf

En los orígenes del golf las bolas eran fabricadas artesanalmente con piel cosida rellena de plumas (*feathery*). Con la llegada a mediados del siglo XIX del caucho, las bolas pasaron a fabricarse mediante un proceso de moldeo, naciendo la llamada "*gutta-percha*". Pronto los jugadores descubrieron que conforme las bolas de caucho comenzaban a rayarse y presentar imperfecciones alcanzaban una mayor distancia en los golpes. En ese momento comenzaron a aparecer diseños que incluían patrones y relieve en la superficie de las bolas, quedando como el más eficiente el diseño con alveolos u hoyuelos (*dimples*) que se utiliza en la actualidad.



Figura 4 Evolución de las bolas de golf (shutterstock)

La razón de que las bolas de golf vuelen más lejos al tener alveolos es la misma por la cual una esfera rugosa tiene mejor penetración en un fluido que una esfera lisa. Los alveolos consiguen generar turbulencia en el flujo y por lo tanto retrasar la separación de la capa límite, con lo que disminuyen la estela y la resistencia de presión, tal y como muestra la figura 5.

En cualquier caso, la aerodinámica del vuelo de las bolas de golf es más compleja e incluye los efectos en el vuelo (similares a los de otros deportes) que se comentan posteriormente.

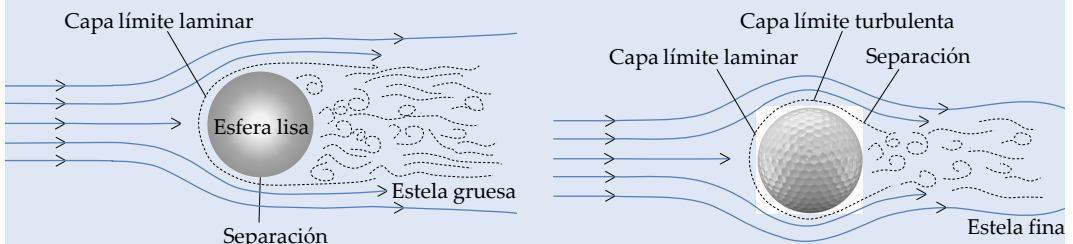


Figura 5 Influencia de la rugosidad de una esfera en la separación de la capa límite



- **Velocidad relativa del flujo ( $V$ ):** Cuanto mayor sea la velocidad, mayor la resistencia. De hecho, la resistencia se incrementa con el cuadrado de la velocidad.
- **Densidad ( $\rho$ ):** Un fluido más denso generará más resistencia.
- **Número de Reynolds:** El Número de Reynolds es un factor clave cuando la resistencia es fundamentalmente de forma (y por lo tanto a velocidades bajas) y también es determinante en la resistencia de presión.
- **Geometría del cuerpo:** Es evidente que la forma del cuerpo ejercerá una gran influencia en el módulo y la dirección de la fuerza que el fluido genera sobre el mismo.

Estos dos últimos factores (Reynolds y la geometría del cuerpo) se tienen en cuenta mediante unos coeficientes denominados **coeficiente de arrastre ( $C_D$ )** y **coeficiente de sustentación ( $C_L$ )** -obsérvese como las letras hacen referencia a las denominaciones de las fuerzas en inglés (*drag* y *lift*)-. Por lo general dichos coeficientes suelen facilitarse a números de Reynolds que se entienden normales para aplicaciones prácticas (aunque es habitual encontrar gráficas de los coeficientes en función del número de Reynolds).

Estos coeficientes se determinan de manera experimental y son propios de cada cuerpo. En ocasiones, los coeficientes reciben denominaciones relacionadas con los ejes de coordenadas cartesianas ( $C_x$ ,  $C_y$ ).

La expresión general para el cálculo de la fuerza de arrastre de un cuerpo en una corriente de fluido uniforme es:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D A V^2 \quad (8.1)$$

Mientras que de manera análoga el cálculo de la sustentación será:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho C_L A V^2 \quad (8.2)$$

El uso de los coeficientes de arrastre y sustentación es muy común en ingeniería, y es incluso habitual ver referenciado el de arrastre en revistas de divulgación (sobre todo en lo concerniente al sector del automóvil).

En términos generales, la resistencia de un cuerpo con aristas es generalmente elevada e independiente del número de Reynolds al provocar una separación de la corriente. Por ello, los diseños más aerodinámicos suelen tener formas redondeadas.

## Resistencia y sustentación en automóviles

### Los coeficientes de arrastre en automóviles

Los coeficientes  $C_D$  y  $C_L$  son habituales en los catálogos de fabricantes y revistas especializadas de automóviles. Un coeficiente de arrastre pequeño implica una menor resistencia de avance del coche (a igualdad del resto de factores como tamaño y velocidad) y permite el ahorro de combustible.

Por ello, la reducción del coeficiente de arrastre y de la superficie frontal del vehículo supone un parámetro importante de diseño, en especial cuando el consumo es un factor crítico (como viene siéndolo por regulación en los últimos años). Así, el Volkswagen XL1 (cuya fabricación está anunciada para 2013) presenta un  $C_D$  de tan solo 0,186. La primera gran evolución en la aerodinámica de los vehículos de gran consumo se produjo con la crisis del petróleo de 1973.

Como se puede apreciar en algunos de los coches más veloces de la tabla 1, los coeficientes de arrastre pueden parecer muy elevados. La razón de estos  $C_D$ , que en el caso de un Fórmula 1 superan la unidad, es la necesidad de influenciar el valor de la sustentación en el diseño de estos coches, y de generar incluso fuerzas verticales descendentes (*downforce*). Es decir, una fuerza descendente que les permita el agarre en curva. Dicha fuerza tiene como contrapartida un aumento del arrastre. Los grandes diseños logran generar fuerzas descendentes sin por ello perjudicar la resistencia (y por tanto la velocidad punta).

En el caso del F1, el coche se configura para maximizar el *downforce* -sustentación negativa- o minimizar la resistencia en función de las características del circuito, o incluso

de la parte del circuito por la que se circule. El DRS (*Drag Reduction System*) consiste en que mover el ala trasera para conseguir reducir el arrastre *-drag-* precisamente cuando se quiere maximizar la velocidad punta y no es necesario un agarre tan elevado (en rectas).

Tabla 1 Coeficientes de arrastre en diversos automóviles

$C_D$	Modelo	Año
0,07	Nuna (ganador de la World Solar Challenge)	2001-7
0,186	Volkswagen XL1	2013
0,195	General Motors EV1	1996
0,25	Honda Insight	1999
0,26	Mercedes Clase E	0,26
0,28	Porsche 997 Carrera	2002
0,29	Peugeot 308	2007
0,32	McLaren F1	1992
0,33	Lamborghini Murcielago	2001
0,35	BMW Z4	2006
0,37	Ferrari F50	1996
0,48	Volkswagen Beetle	1938
0,52	Seat 600	1957
0,57	Hummer H2	2003
0,7-1,5	Coche de Fórmula 1	-

### Funcionamiento del DRS

Los ingenieros tratan de hallar soluciones de compromiso que en algunos casos extremos llegan a sacrificar el coeficiente de arrastre forzando resistencias extremas (un  $C_D$  de 1,5) a cambio de obtener un espectacular coeficiente de sustentación  $C_L$  (negativo) de -5,2. Esta es la llamada configuración de máxima carga.

La mayoría de los turismos presentan sin embargo una sustentación positiva (fuerza ascendente) que ha supuesto que algún modelo pasara tristemente a la historia por su facilidad para despegar a altas velocidades cuando los pesos no estaban bien repartidos (como los modelos de competición en torno a 1950).

Algunos deportivos de producción en serie también incorporan elementos aerodinámicos móviles, como el Porsche 996 Carrera para reducir la sustentación positiva a altas velocidades:

Tabla 2 Variación de la fuerza de sustentación en un Porsche 996 carrera con el uso del alerón trasero

	Sustentación delantera (a 250 Km/h)	Sustentación trasera (a 250 Km/h)
Alerón normal	64 kgf	136 kgf
Alerón extendido	5 kgf	14 kgf

En cualquier caso, es conveniente recordar que los coeficientes de arrastre y sustentación son una simplificación ingenieril para hallar unas fuerzas resultantes que en realidad son la consecuencia de complejas distribuciones de presiones en la superficie de los cuerpos estudiados.

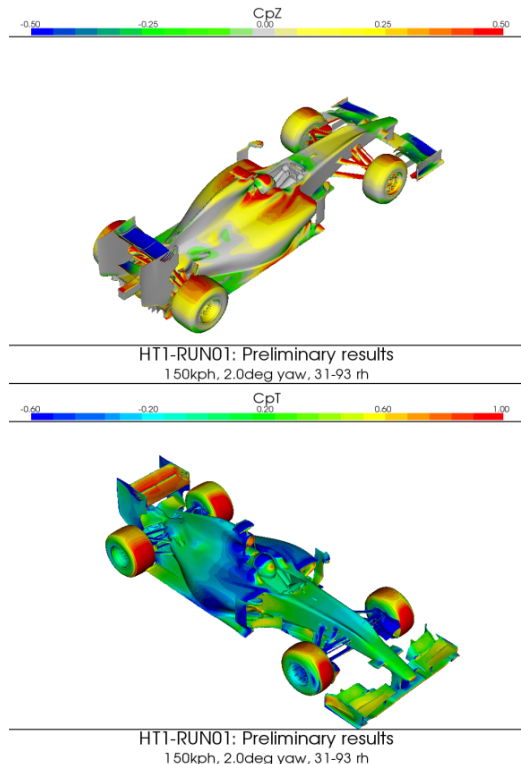


Figura 7 Coeficientes de fuerza vertical y de presión total resultado de estudiar mediante CFD un Fórmula 1 (Cedidas por HRT, 2010)

Un estudio más detallado del problema (por ejemplo mediante el uso de CFD o de infinidad de sensores en un túnel de viento) es necesario para comprender exactamente lo que sucede en un caso complejo. La figura 4 muestra un ejemplo real del resultado de estudiar mediante CFD un coche de Fórmula 1.

En la parte superior de la figura ( $C_pZ$ ), se puede apreciar como las fuerzas a las que se ven sometidas las distintas partes del coche varían en función de su geometría y del flujo de aire que circula por cada parte del mismo. En concreto, las zonas verdes y azules son aquellas en las que la distribución de presiones genera una fuerza negativa (hacia abajo) mientras que los tonos amarillos y rojos demuestran una sustentación positiva. Como puede apreciarse los elementos aerodinámicos (alerón frontal y trasero) están especialmente diseñados para que se genere una sustentación negativa que permita un paso por curva a mayor velocidad. Estas fuerzas son el resultado de la distribución de presiones, representada por el coeficiente  $C_pT$  (parte inferior de la figura) y de las superficies sobre las que se generan dichas presiones. El  $C_pT$  nos muestra como las presiones más altas se producen, entre otros, en las superficies que generan una mayor oposición a la circulación libre del fluido y que en función de su vector superficie generarán arrastre (parte frontal de las ruedas) o arrastre + sustentación (alerón trasero).

### Fuerzas debidas a flujos externos en otros cuerpos

Pese a la popularidad de los estudios aerodinámicos en el campo de la automoción, el estudio de las fuerzas que generan los fluidos en cuerpos sumergidos en los mismos supone un campo de gran interés en la ingeniería.

Los edificios suponen grandes obstáculos para la circulación de las corrientes atmosféricas. Si bien la densidad y las velocidades del viento podrían hacer suponer que las fuerzas unitarias debidas a las diferencias de presiones sobre los edificios no son muy grandes, las grandes superficies que se oponen a dichas diferencias de presiones pueden generar fuerzas de magnitud muy considerable.

Estos efectos son especialmente notables en edificios con gran altura. En concreto la intensidad de la presión generada por el viento en edificios depende de:

- Forma del edificio.
- Velocidad del viento (módulo y dirección).
- Densidad del aire.

La magnitud de la acción del viento es tal en los grandes rascacielos que en función de su forma, puede que oscilen notablemente. Las dos torres del World Trade Center oscilaban lateralmente 1 m en días de viento. Los arquitectos permiten esta flexibilidad hoy en día a los grandes rascacielos precisamente para dotarlos de mayor resistencia, incluso frente a terremotos y es habitual el uso de amortiguadores de masa para controlar el balanceo.

La figura 8 muestra diversas fases del diseño del edificio Vela en Barcelona, comenzando por la maqueta que se utilizaría en el túnel de viento y el estudio mediante CFD.

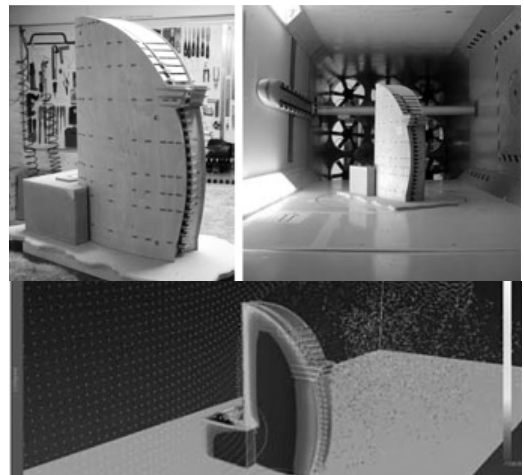


Figura 8 Maqueta, simulación en túnel de viento y campo de presiones en modelo CFD del edificio Vela en Barcelona (Cornejo et al., 2008)

Sin embargo, el módulo de las fuerzas generadas sobre las estructuras construidas no es el único factor a tener en cuenta. Los efectos dinámicos de la interacción viento/edificio pueden tener gran importancia. Así la aparición de vórtices y los efectos derivados de la turbulencia pueden tener también gran importancia.

Con independencia de las normativas existentes (como el Código Técnico de la Edificación de 2006) que pro-

porcionan valores máximos de fuerzas a considerar debido a la acción del viento, el estudio de edificios singulares debe ser realizado con el apoyo de modelos de CFD o del túnel de viento.

### El desastre del puente de Tacoma Narrows



Figura 9 Colapso del puente de Tacoma Narrows el 7 de Noviembre de 1940

El caso del puente de Tacoma Narrows es ampliamente conocido por su impacto posterior en el diseño de puentes. La estructura, que en su día fue el tercer puente más largo de sus características, colapsó bajo un viento constante de tan solo 70 Km/h. El puente entró en uno de sus modos naturales de resonancia, oscilando notablemente y colapsando en tan solo una hora. El hecho de que exista registro documental en imágenes del evento lo convierte en un caso de estudio clásico en ingeniería.

Otras estructuras menos convencionales pueden presentar también problemas aerodinámicos, destacando los problemas con viseras, voladizos y grandes superficies planas expuestas al viento (por ejemplo grandes carteles publicitarios).

Especial mención merecen para los ingenieros de la rama industrial el diseño de naves industriales, en las que las acciones del viento sobre las cubiertas, dada la ligereza de las mismas, debe ser tomada en cuenta (mediante la aplicación de la normativa existente).

La acción del viento (y de otros fluidos) está presente en múltiples aplicaciones prácticas en la vida real que deben ser tenidas en cuenta. La siguiente tabla proporciona coeficientes de arrastre para diversos cuerpos:

Tabla 3. Valores típicos de coeficientes de arrastre de diversos cuerpos (diversas fuentes)

Cuerpo	$C_D$	$C_D \cdot A$ ( $m^2$ )
Boeing 747	0,031	
Esfera lisa	0,1	
Bala	0,295	
Bola de golf	0,4	
Esfera rugosa	0,48	
Bola de tenis	0,65	
Ciclista	0,7	0,51
Ciclista en competición		0,3
Tren aerodinámico (5 vagones)		8,5
Camión y remolque (deflector sobre la cabina)	0,76	
Antena parabólica (lado convexo)	0,95	
Camión con remolque (sin deflector)	0,96	
Esquiador	1	
Paracaídas	1,2	
Empire State Building	1,3	
Antena parabólica (lado cóncavo)	1,42	
Torre Eiffel	1,9	

### Velocidad terminal

Una aplicación simple pero ilustrativa del cálculo de la resistencia al avance de un cuerpo en el aire es la llamada velocidad terminal o velocidad límite. Esta velocidad es la máxima que un cuerpo puede alcanzar en el seno del fluido cuando se ve sometido a una fuerza constante.

Dado que la fuerza de resistencia viene dada por:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D A V^2 \quad (8.3)$$

## El efecto Magnus, las costuras de los balones y la separación de la capa límite

Los efectos son muy importantes en algunos deportes jugados con pelotas esféricas. La existencia de dichos efectos es fácilmente explicable mediante los principios presentados en este tema. La base fundamental de cualquier efecto (despreciando cambios en la forma esférica de la pelota) es la rotación que se le imprime alrededor de uno de sus ejes. Esta rotación aparece en deportes como el fútbol, tenis, golf o beisbol. Este fenómeno conocido como el "efecto Magnus" ya fue observado por Newton viendo partidos de tenis en la Universidad de Cambridge.

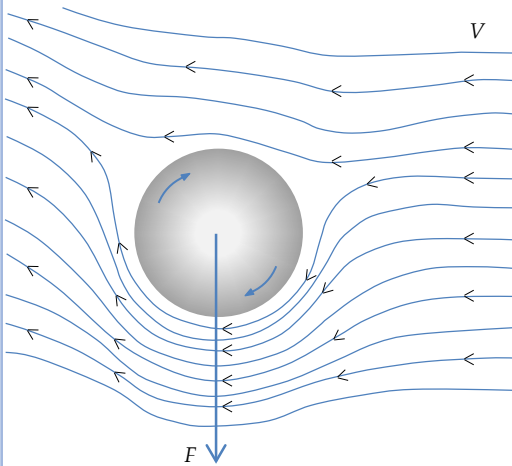


Figura 9 Efecto Magnus

Una explicación simplificada, similar a la que justifica la sustentación en el ala de un avión, es que al producirse una rotación, la velocidad relativa del aire con respecto de uno de los lados de la pelota será mayor que la del lado opuesto lo que generará una diferencia de presiones. Dicha diferencia de presiones generará una fuerza de sustentación o lateral (cuya dirección será perpendicular a la rotación y la velocidad de traslación, y por tanto determinada por el producto vectorial de  $\omega$  y el vector velocidad  $V$ ). La fuerza Magnus será también proporcional a dicho producto y puede incluso calcularse con la fórmula para la sustentación ya estudiada (con un  $C_L$  dependiente de la rotación y el número de Reynolds).

El efecto Magnus justifica la trayectoria de las pelotas de mesa, que debido a su masa son susceptibles de efectos notables.

Sin embargo, los efectos en los disparos en fútbol (incluyendo el rápido descenso de la "folha seca") y los aparentemente caprichosos efectos en los lanzamientos de beisbol no encuentran justificación en la sencilla descripción del efecto Magnus. Es necesario recurrir a la teoría de la capa límite y la asimetría que a veces presentan las costuras de dichas pelotas, que generan que la separación de la capa límite se presente de manera asimétrica:

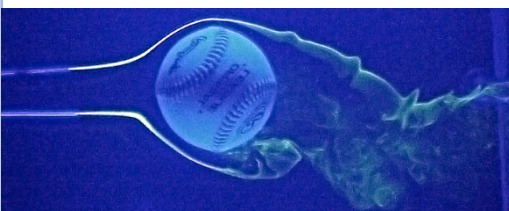


Figura 11 Separación de la capa límite en una pelota de beisbol en rotación

Tal y como se aprecia en la figura, el desprendimiento de la capa límite en la pelota se produce justo en las costuras. De hecho, al igual que en una pelota de tenis, la costura es única y asimétrica según ciertos ejes, lo que aprovechan los pitchers para variar el efecto al elegir determinados ejes de rotación de la bola.

La diferencia en las estelas creadas por el desprendimiento asimétrico de la capa límite y por tanto, de intercambio de cantidad de movimiento, justifican la aparición de fuerzas perpendiculares a la traslación que modifican la trayectoria.

Por ello, las diferencias de comportamiento entre distintos modelos de balón de fútbol (tema recurrente) pueden atribuirse no solo a diferencias en peso de los mismos si no también a las piezas que conforman el balón y los patrones de costura, lo que explicaría que los efectos cambiaran radicalmente de un balón a otro.

La resistencia que ofrece el fluido al avance del cuerpo se incrementa con el cuadrado de la velocidad. Ello quiere decir que con independencia de la magnitud de la mencionada fuerza, siempre habrá un determinado valor máximo de la velocidad que se alcanzará al equilibrarse las fuerzas motriz y de resistencia.

En la práctica esto implica que, por ejemplo en los medios de transporte, ante la potencia desarrollada por un determinado motor la velocidad máxima que desarrolla viene en gran medida determinada por la aerodinámica del vehículo (y la magnitud de la fuerza de resistencia).

Por otra parte, y para el caso de objetos en caída libre en la atmósfera (y otros fluidos) es posible plantear la velocidad terminal de caída del objeto, que será aquella en la que la fuerza de resistencia se iguale con el peso.

De manera adicional, en aquellas condiciones en las que no sea despreciable por su magnitud (dependiendo entre otros de la densidad del fluido y la del cuerpo) habrá que tener en cuenta la fuerza de empuje que ejerza el fluido.

$$\text{Peso} = \frac{1}{2} \rho C_D AV^2 + \text{Empuje} \quad (8.4)$$

Por último, es conveniente destacar que dado que la resistencia es función de la densidad del fluido, y que la densidad del aire disminuye con la altura, la resistencia aumentará conforme el objeto se acerque a la tierra, por lo que objetos lanzados desde gran altura, una vez hayan alcanzado la velocidad terminal, irán reduciendo dicha velocidad límite conforme disminuya su altura.

## Bibliografía

- Bitzer P. M., 2004.  
*Baseballs and boundary layers*
- Cornejo M., Lacoma L., Holman D., 2008.  
*Análisis de acciones de viento en edificios singulares. Aplicación al Hotel Vela de Barcelona*
- Dunlop, J., 2003.  
*Free flight aerodynamics of sport balls*
- Ilgin H. E., Günel M. H., 2007.  
*The role of aerodynamic modifications in the form of tall buildings against wind excitation*
- NASA, 2011.  
*The aerodynamics of soccer*  
<http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/soccer.html>
- Wan, M., 2000.  
*Autozine. Aerodynamics*  
[http://www.autozine.org/technical\\_school/aero/tech\\_aero.htm](http://www.autozine.org/technical_school/aero/tech_aero.htm)
- White, 2008.  
*Mecánica de Fluidos*  
McGraw Hill. Nueva York.
- Wikipedia, 2011.  
*Automobile drag coefficient*  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Automobile\\_drag\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Automobile_drag_coefficient)
- Wikipedia, 2011.  
*Capa límite*  
[http://es.wikipedia.org/wiki/Capa\\_límite](http://es.wikipedia.org/wiki/Capa_límite)
- Wikipedia, 2011.  
*Drag Coefficient*  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Drag\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient)
- Wikipedia, 2011.  
*D'Alembert's paradox*  
[http://en.wikipedia.org/wiki/D'Alembert's\\_paradox](http://en.wikipedia.org/wiki/D'Alembert's_paradox)





A high-speed photograph of a water splash, showing a vertical column of water falling from the top right, breaking into a crown-like shape at the bottom. The water is clear and bright, with some air bubbles visible. The background is a light, neutral color.

## APUNTES DE MECÁNICA DE FLUIDOS

Arregui F. J. - Cabrera E. - Cobacho R. - Gómez E. - Soriano J.

La Mecánica de Fluidos es la parte de la Física que estudia los fenómenos en los que, de un modo u otro, los fluidos participan. El movimiento de los fluidos se manifiesta en un gran número de situaciones de la vida cotidiana, de ahí que cruce las fronteras de las diversas ramas de la ingeniería y sea tema de estudio para una amplia gama de alumnos universitarios. En este libro se describen los fenómenos físicos relevantes en el movimiento de los fluidos y las ecuaciones generales que lo gobiernan.

Este material ha sido concebido para ser utilizado como texto de apoyo en la asignatura de Mecánica de Fluidos de diversos grados. El objetivo de este libro es dar a los estudiantes una imagen clara de cómo aplicar la asignatura en la práctica de la ingeniería. Se ha utilizado un estilo accesible, de fácil lectura y lo más simple posible, conservando el rigor científico, para que el lector pueda estudiar y comprender los aspectos más importantes y fundamentales de la Mecánica de Fluidos y sus aplicaciones. Este curso, sin embargo sólo es una introducción al amplio y complejo mundo de la Mecánica de Fluidos, aunque puede bastar para que el alumno se haga una primera idea del alcance global de esta materia.



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

EDITORIAL