La distribución Poisson

Apellidos, nombre	Martínez Gómez, Mónica (momargo@eio.upv.es) Marí Benlloch, Manuel (mamaben@eio.upv.es)
Departamento	Estadística, Investigación Operativa Aplicadas y Calidad
Centro	Universidad Politécnica de Valencia

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo vamos a conocer las características básicas de la distribución Poisson y sus posibles aplicaciones prácticas con la finalidad de elaborar una especie de catálogo al que acudir para desarrollar un modelo de probabilidad que nos permita estimar la pauta de variabilidad para variables discretas que sigan dicha distribución.

2 Introducción

La distribución Poisson es, junto con la distribución binomial, una de las más importantes distribución de probabilidad para variables discretas, es decir, sólo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, ..., k.

La distribución de Poisson se emplea para describir varios procesos, entre otros:

- ✓ El número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta (suficientemente distantes de los semáforos) durante un periodo definido de tiempo.
- ✓ El número de errores de ortografía que uno comete al escribir una única página.
- ✓ El número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.
- ✓ El número de servidores web accedidos por minuto.
- ✓ El número de defectos en una longitud específica de una cinta magnética.
- ✓ El número de mutaciones de determinada cadena de ADN después de cierta cantidad de radiación.
- ✓ El número de defectos por metro cuadrado de tela.
- ✓ El número de estrellas en un determinado volumen de espacio.

Cada una de estas variables aleatorias representa el número total de ocurrencias de un fenómeno durante un periodo de tiempo fijo o en una región fija del espacio. Expresa la probabilidad de un número k de ocurrencias acaecidas en un tiempo fijo, si estos eventos ocurren con una frecuencia media conocida y son independientes del tiempo discurrido desde la última ocurrencia o suceso.

La finalidad del presente objeto de aprendizaje, es adquirir la destreza y conocimiento necesario para la correcta utilización de la distribución de Poisson en el cálculo de probabilidades. Para ello, en primer lugar presentamos los objetivos específicos que pretendemos conseguir; a continuación trabajaremos la definición y características de la distribución de Poisson, haciendo especial relevancia en cómo identificarla y diferenciarla de otras distribuciones discretas y se resuelven algunos ejemplos prácticos para ayudar a su comprensión. Finalmente, destacaremos los conceptos básicos de aprendizaje con respecto a la distribución de Poisson y sus aplicaciones prácticas.

- Identificar las propiedades de una distribución Poisson, así como sus parámetros característicos, esperanza y varianza.
- Estimar el valor promedio, la λ, característico de las variables de Poisson a partir de la frecuencia o probabilidad de ocurrencia, *p*, y el número de veces que se presenta un suceso, *n*.
- Establecer las bases para el cómputo de las probabilidades para variables Poisson

3 Definición y características de la distribución binomial

3.1 ¿Para qué me puede servir la distribución binomial?

La distribución de Poisson fue desarrollada por Siméon-Denis Poisson (1781-1840). Esta distribución de probabilidades es muy utilizada para situaciones donde los sucesos son impredecibles o de ocurrencia aleatoria. En general, utilizaremos la distribución de Poisson como aproximación de experimentos binomiales donde el número de pruebas es muy alto ($n\to\infty$), pero la probabilidad de éxito muy baja ($p\to 0$).

3.2 Características

Se dice que X sigue una distribución de Poisson de parámetro λ y que se obtiene del producto *n**p (que nombraremos a partir de aquí como np, por mayor simplicidad*)*, que se representa con la siguiente notación:

$$X \sim Ps\ (\lambda)$$

La distribución de Poisson se caracteriza por las siguientes propiedades:

- ✓ Sea una población de tamaño ∞.
- ✓ Sea una muestra de tamaño n bastante elevado (se suele hablar de que tiende a ∞)
- ✓ Los sucesos son independientes entre si.
- ✓ Sea A un suceso que tiene una probabilidad p de suceder durante un periodo de tiempo, siendo esta probabilidad de ocurrencia durante un periodo de tiempo concreto muy pequeña (se suele hablar de que tiende a 0).

- ✓ El producto $n*p$, tiende a aproximarse a un *valor promedio o número medio*, al que llamaremos λ. Por ejemplo, promedio de llamadas recibidas en una centralita por minuto o número medio de accidentes producidos en una carretera durante el fin de semana.
- ✓ X: número de individuos de la muestra que cumplen A.
- ✓ El conjunto de posibles valores de A es, E = {0,1,2,3,4....}

Su función de probabilidad viene definida por:

$$F(X = x) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^x}{x!}$$

Ecuación 1. Función de Probabilidad de la distribución Poisson.

donde *x* debe ser un entero positivo.

Esta expresión, se obtiene tomando los límites cuando n tiende a ∞, p tiende a 0 y *np* permanece constante e igual a λ, de la función de probabilidad de la distribución de una variable binomial:

$$F(X = x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np\to\lambda}} \binom{n}{x} * p^x * (1-p)^{n-x} = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^x}{x!}$$

Ecuación 2. Función de Probabilidad de la distribución Poisson.

La media o esperanza y la varianza, se obtienen mediante el mismo procedimiento, tomando los límites cuando n tiende a ∞, p tiende a 0 y np tiende a λ:

$$E(X) = \lim_{np\to\lambda} np = \lambda$$

Ecuación 3.Esperanza de la distribución Poisson.

$$\sigma^2 = \lim_{np\to\lambda} (n * p * (1-p)) = \lambda$$

Ecuación 4. Varianza de la distribución Poisson.

Una propiedad importante de la distribución de Poisson, es que la suma de n variables de Poisson independientes, Ps(λ_1)+Ps(λ_2)+…….+Ps(λ_n), es tambien una variable de Poisson siendo el valor de su parámetro λ, la suma de los de las variables que se suman, Ps(λ_1+$\lambda_{2+\ldots\ldots+}\lambda_n$).

En general, la distribución de Poisson, ofrecerá buenas aproximaciones a probabilidades de variables binomiales cuando n $\geq$ 50 y p $\leq$ 0,1 y en el intervalo, 10 $\leq$ np $\leq$100, las aproximaciones serán excelentes, ya que en muchos casos la aplicación de la función de probabilidad de la binomial puede llegar a ser complicada.

- **Ejemplo**

La probabilidad de que en una mascletà en fallas una persona se desmaye es de 0,001. Considerando que acuden unas 5000 personas a ver la mascletà el día de San José, ¿cúal es la probabilidad de que se desmayen 25 personas?

Se trata de una binomial con n=5000 y p=0,001.
La probabilidad solicita sería:

$$F(X = 25) = \binom{5000}{25} * 0{,}001^{25} * (1 - 0{,}001)^{5000-25}$$

que resulta complejo de calcular. Por eso se prefiere aproximar a una distribución de Poisson, con λ=5000*0,001=50, y quedaría:

$$F(X = 25) = e^{-50} * \frac{50^{25}}{25!} = 3{,}70 * 10^{-5}$$

La distribución de Poisson se puede expresar de forma gráfica, ya que en realidad consiste en un diagrama de barras, similar a los obtenidos en la función de probabilidad, pero con forma asimétrica positiva como sucede con la distribución binomial. Sin embargo al ir aumentando los valores de λ, va adquiriendo la típica forma de campana de Gauss, pudiendo a deducirse, que conforme aumenta λ, las variables de Poisson van a poder aproximarse a la distribución normal, por el **Teorema Central del Límite**. La aproximación se considera buena para valores de λ iguales o superiores a 9.

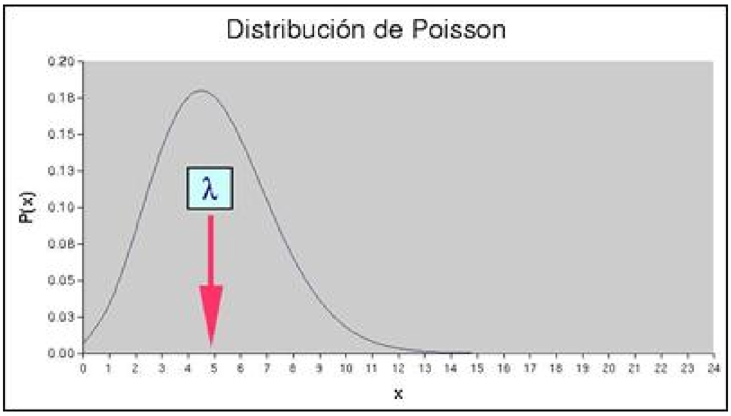

Imagen 1. *La figura es la gráfica de la función de probabilidad de variables Poisson*

Fuente: http://www.matematicasypoesia.com.es/Estadist/ManualCPE04p4.htm

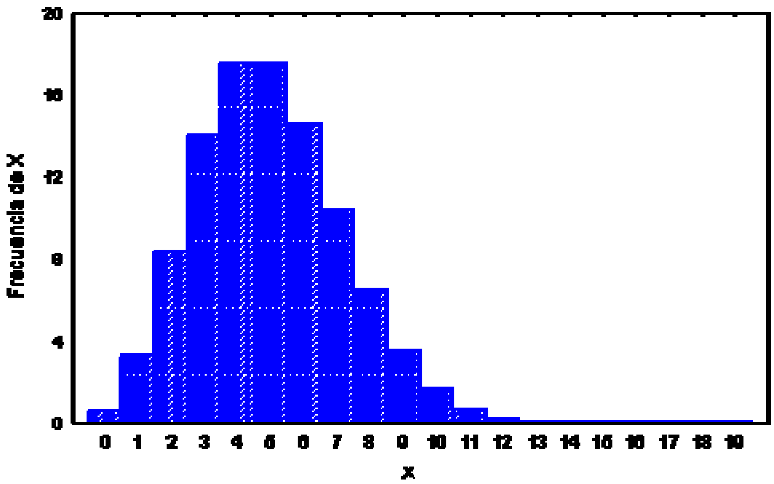

Imagen 2. *La figura representa la gráfica de la función de probabilidad de variables Poisson*

*Fuente:*http://www.google.es/imgres?imgurl=http://prof.usb.ve/ejmarque/cursos/ea2181/core/figs/figdesp04.gif&imgrefurl=http://prof.usb.ve/ejmarque/cursos/ea2181/core/desp04.html&h=299&w=480&sz=4&tbnid=0DrUw_upFQvrWM:&tbnh=80&tbnw=129&prev=/images%3Fq%3Ddistribucion%2B%2Bpoisson&hl=es&usg=__jyhDrPjuyLN7mQYXrab213eHH4U=&ei=BBP4SqTLJob7_AbBtpmyAw&sa=X&oi=image_result&resnum=6&ct=image&ved=0CBgQ9QEwBQ

Veamos algunos ejemplos:

- **Ejemplo 1.**

Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día, ¿cuáles son las probabilidades de que reciba, a) cuatro cheques sin fondo en un día dado, b) 10 cheques sin fondos en cualquiera de dos días consecutivos?

Solución:

a) x = variable que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en un día cualquiera = 0, 1, 2, 3, ..., etc, etc.

λ = 6 cheques sin fondo por día

ε = 2.718

$$p(x=4,\lambda=6)=\frac{(6)^4(2.718)^{-6}}{4!}=\frac{(1296)(0.00248)}{24}=0.13392$$

b) X= variable que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en dos días consecutivos = 0, 1, 2, 3, ..., etc., etc.

λ = 6 x 2 = 12 cheques sin fondo en promedio que llegan al banco en dos días consecutivos

$$p(x=10,\lambda=12)=\frac{(12)^{10}(2.718)^{-12}}{10!}=\frac{(6.1917364\text{E}10)(0.000006151)}{3628800}=0.104953$$

- **Ejemplo 2.**

En la inspección de hojalata producida por un proceso electrolítico continuo, se identifican 0.2 imperfecciones en promedio por minuto. Determine las probabilidades de identificar a) una imperfección en 3 minutos, b) al menos dos imperfecciones en 5 minutos, c) cuando más una imperfección en 15 minutos.

Solución:

a) X= variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 3 minutos = 0, 1, 2, 3, ..., etc., etc.

λ = 0.2 x 3 =0.6 imperfecciones en promedio por cada 3 minutos en la hojalata

$$p(x=1,\lambda=0.6)=\frac{(0.6)^1(2.718)^{-0.6}}{1!}=\frac{(0.6)(0.548845)}{1}=0.329307$$

b) X= variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 5 minutos = 0, 1, 2, 3, ..., etc., etc.

λ = 0.2 x 5 =1 imperfección en promedio por cada 5 minutos en la hojalata

$$p(x=2,3,4,etc....\lambda=1)=1-p(x=0,1,\lambda=1)=1-\left(\frac{(1)^{0}(2.718)^{-1}}{0!}+\frac{(1)(2.718)^{-1}}{1!}\right)=$$

=1-(0.367918+0.367918) = 0.26416

c) X = variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 15 minutos = 0, 1, 2, 3, ..., etc., etc.

λ = 0.2 x 15 = 3 imperfecciones en promedio por cada 15 minutos en la hojalata

$$p(x=0,1,\lambda=3)=p(x=0,\lambda=3)+p(x=1,\lambda=3)=\frac{(3)^{0}(2.718)^{-3}}{0!}+\frac{(3)^{1}(2.718)^{-3}}{1!}=$$

= 0.0498026 + 0.149408 = 0.1992106

4 Cierre

El modelo de distribución de Poisson sirve para definir variables aleatorias discretas X,

X ~ Ps (λ)

que representan el número promedio de ocurrencias de un fenómeno durante un periodo de tiempo fijo o une región fija del espacio. Por lo general se asemejan a variables binomiales con un elevado valor de n y un valor muy bajo de p y vendrán caracterizadas un valor promedio, *np*, al que se denomina λ.

En este artículo docente se ha visto el uso de la función de Poisson, la utilización de tablas para el cálculo de probabilidades. Además se han definido los siguientes parámetros

1. La media μ o valor esperado en la distribución de Poisson es igual a λ.
2. La varianza (σ^2) en la distribución de Poisson también es igual a λ.
3. La desviación estándar es la raíz de λ.

La distribución Binomial representada por B (n,p) puede aproximarse a una distribución de Poisson Ps(λ=np), siempre que n ≥ 50 o p ≤ 0,1, facilitando así el cálculo de probabilidades acumuladas, al poder hacer uso del ábaco de Poisson.

Finalmente, cuando se cumpla que λ ≥ 9, podemos, por el Teorema Central del Límite, se puede aproximar la distribución binomial a una distribución normal.

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

5 Bibliografía

5.1 Libros:

[1] DeGroot, M.H. (1988). *Probabilidad y Estadística.* (2ª Ed.). Addison-Wesley Iberoamericana. ISBN 0-201-64405-3.

[2] Martín Pliego, F.J. (2004). *Introducción a la Estadística Económica y Empresarial*. (Ed.) Thomson. Madrid.

[3] Mendenhall, W.; Reinmuth, J.E. (1978). *Estadística para administración y economía*. (Ed.) Grupo Editorial Iberoamericana. ISBN 968-7270-13-6.

[4] Montiel, A.M.; Rius, F.; Barón F.J. (1997*). Elementos básicos de Estadística Económica y Empresarial*. (2ª Ed.) Prentice Hall, Madrid.

[5] Peña, D. (2001). *Fundamentos de Estadística*. (Ed.) Alianza Editorial, S.A. Madrid. ISBN: 84-206-8696-4.

[6] Romero, R y Zúnica, L.R. (2000). *Introducción a la Estadística*. (Ed.) SPUPV 4071.

[7] Uña Juárez, I; Tomero, V; San Martín, J. (2003). *Lecciones de cálculo de probabilidades*. (Ed.) Thomson Editores Spain. ISBN 84-9732-193-6.

5.2 Referencias de fuentes electrónicas:

[8] http://foros.emagister.com/tema-distribucion+de+poisson-12873-395042.htm

[9] http://www.fing.edu.uy/iimpi/academica/grado/ctrlcalidad/ejercicios/EjerciciosDeDistribucionesDeProbabilidad-Final2008.pdf

[10] www1.uprh.edu/.../La%20distribucion%20Poisson/Modulo%20Sobre%20La%20Distribucion%20de%20Poissonl

[11] http://www.google.es/imgres?imgurl=http://prof.usb.ve/ejmarque/cursos/ea2181/core/figs/figdesp04.gif&imgrefurl=http://prof.usb.ve/ejmarque/cursos/ea2181/core/desp04.html&h=299&w=480&sz=4&tbnid=0DrUw_upFQvrWM:&tbnh=80&tbnw=129&prev=/images%3Fq%3Ddistribucion%2B%2Bpoisson&hl=es&usg=__jyhDrPjuyLN7mQYXrab213eHH4U=&ei=BBP4SqTLJob7_AbBtpmyAw&sa=X&oi=image_result&resnum=6&ct=image&ved=0CBgQ9QEwBQ

[12] http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/sabaticorita/_private/05Distr%20Poisson.htm

[13] http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/sabaticorita/_private/05Distr%20Poisson.htm

[14] https://polimedia.upv.es/visor/?id=71b44901-0a4e-3b48-9333-3f7524321f09

[15] www3.uji.es/~porcu/**problemas**.doc