

Simulación numérica de inundación de valles fluviales mediante un modelo difusivo implícito

Numerical simulation of valley flood using an implicit diffusion wave model

Fernández-Pato, J.^{a1}, y García-Navarro, P.^{a2}

^a LIFTEC-CSIC, Universidad de Zaragoza. C/ María de Luna, Edif. Torres Quevedo, 50018 Zaragoza (España).
E-mail: ^{a1} jfpato@unizar.es, ^{a2} pigar@unizar.es

Recibido: 13/01/2016

Aceptado: 25/04/2016

Publicado: 29/07/2016

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo difusivo de flujo superficial para la resolución eficiente de problemas de inundación de valles fluviales. La discretización espacial se realiza mediante un esquema *upwind* de volúmenes finitos, aplicado en una malla triangular no estructurada. Para la discretización temporal se ha empleado un esquema implícito, lo que conlleva la generación de un sistema de tantas ecuaciones como celdas de cálculo tenga la malla computacional. Para su resolución, se ha empleado el método del Gradiente Biconjugado Estabilizado (BiCGStab). La eficiencia computacional se mide realizando una comparación de tiempos de CPU de las versiones explícita e implícita del mismo esquema numérico aplicado al modelo de onda difusiva. El estudio demuestra que, en general, el modelo difusivo se beneficia de una discretización temporal implícita, aumentando su eficiencia en gran medida frente al uso de un esquema explícito. Debido al carácter no lineal de la ecuación difusiva, un paso de tiempo mayor no siempre garantiza un menor coste computacional y resulta necesario encontrar el paso de tiempo óptimo para cada problema. Se ha aplicado el modelo difusivo a un caso test de inundación de valle fluvial propuesto por la UK Environmental Agency para evaluar su capacidad predictiva en relación a modelos comerciales. Por último, se han comparado los resultados de calado y nivel de agua proporcionados por el modelo propuesto con los generados por una formulación matemática basada en las ecuaciones completas de aguas poco profundas no encontrándose diferencias relevantes en el ejemplo analizado.

Palabras clave | Flujo superficial; Inundación de valles; Volúmenes finitos; Modelo difusivo; Esquemas implícitos.

ABSTRACT

In this work, a diffusion wave overland flow model is presented for the efficient resolution of valley flood situations. The spatial discretization is done following an upwind finite volume scheme, applied in a non-structured triangular mesh. An implicit scheme is used for the temporal discretization, which involves the generation of a system of equations, one for each computational cell. The BiConjugate Gradient Stabilized (BiCGStab) method is used for the resolution of the system. The computational efficiency is measured by means of a CPU cost comparison between the explicit and implicit versions of the numerical scheme. In general, the diffusive model benefits from an implicit discretization becoming much more efficient than the explicit version. Due to the non-linearity of the diffusive wave equation, larger time steps do not always imply shorter computational times. The optimal time step size must be identified in every new problem. The diffusive wave model has been applied to a valley flooding case proposed by the UK Environmental Agency in order to compare its performance with that provided by commercial models.

Key words | Overland flow; Valley flood; Finite volumes; Diffusion wave model; Implicit schemes.

INTRODUCCIÓN

La hidráulica computacional ha evolucionado enormemente durante las últimas décadas. El incremento de la potencia de cálculo de los ordenadores junto con el desarrollo de nuevas técnicas experimentales capaces de proporcionar datos de campo de gran calidad, como mapas topográficos detallados, ha sido determinante en la mejora de la calidad de los resultados generados por modelos computacionales (Gomez-Pereira y Wicherson, 1999; Rabus *et al.*, 2003; Merwade *et al.*, 2008; Debella-Gilo y Eitzelmüller, 2009; Maguya *et al.*, 2013; Chen *et al.* 2015; Mui *et al.*, 2015).

En concreto, la modelización hidráulica de zonas inundables constituye una herramienta muy valiosa a la hora de predecir los posibles daños ocasionados por avenidas fluviales o tormentas de gran intensidad. La elaboración de planes de riesgos se vuelve mucho más efectiva si se estiman con antelación los niveles de agua que se alcanzarán bajo diferentes eventos (roturas de presa, eventos extraordinarios de lluvia, etc.).

Dentro de los dos grandes grupos de modelos hidráulicos, agregados y distribuidos, son éstos últimos los que proporcionan un cálculo lo suficientemente preciso de la distribución espacial de la inundación, debido a su poder resolutivo a nivel de celda computacional de las variables hidráulicas de interés.

Por otro lado, también es posible elegir el grado de complejidad física del modelo matemático empleado para realizar las simulaciones. Los modelos basados en las ecuaciones de aguas poco profundas (Vreugdenhil, 1994; Murillo y García-Navarro, 2010) proporcionan una resolución detallada y precisa de los frentes de onda. Los modelos simplificados, como las aproximaciones cinemática y difusiva (Ponce, 1986; Neal *et al.*, 2012), desprecian algunos términos convectivos, por lo que no son capaces de resolver de manera adecuada situaciones con transitorios bruscos. Históricamente han sido usadas para calcular el flujo de agua en problemas de superficie libre debido a las ventajas que supuestamente dichas aproximaciones implican en términos de velocidad de cálculo con respecto a los modelos basados en las ecuaciones completas (Mahmood y Yevjevich, 1975; Lal Wasantha, 1998; Moussa y Bocquillon, 2009).

En este trabajo, se estudia la aplicabilidad y la eficiencia de la aproximación difusiva de las ecuaciones bidimensionales de aguas poco profundas en situaciones transitorias lentas, como la inundación de un valle fluvial. La discretización explícita de este modelo resulta muy ineficiente por razones de estabilidad numérica (Cea *et al.*, 2010; López-Barrera *et al.*, 2012; Neal *et al.*, 2012), por lo que se ha elegido un esquema temporal implícito. Para la discretización espacial se ha empleado un esquema *upwind* de primer orden, en el marco de los volúmenes finitos. Esta metodología implica la construcción y resolución de un sistema de ecuaciones con tantas incógnitas como celdas tenga la malla de cálculo elegida.

La ecuación del modelo difusivo tiene carácter no lineal, por lo que es necesaria una linealización previa al paso de resolución del sistema de ecuaciones. En este trabajo, este paso se realiza mediante el método de las iteraciones de Picard (Burden y Faires, 2010). Una vez que el sistema se considera linealizado, se emplea el método iterativo del Gradiente Biconjugado Estabilizado (BiCGStab) (van der Vorst, 1992; Guennebaud y Jacob, 2010) junto con un preconditionador de tipo ILU (Saad, 1994) para obtener la solución numérica.

La eficiencia del modelo se mide comparando el tiempo computacional de las versiones implícita y explícita del modelo difusivo considerado. Adicionalmente, se presenta una comparación con el modelo comercial RiverFlow2D, basado en las ecuaciones de aguas poco profundas.

MODELO MATEMÁTICO

Las ecuaciones de aguas poco profundas en 2D (Vreugdenhil, 1994; Murillo y García-Navarro, 2010) representan la conservación de la masa y la cantidad de movimiento promediados en la vertical:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = R \quad (1)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_x q_y}{h} \right) = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x q_y}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \right) = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (3)$$

donde las variables conservadas h , $q_x=hu$ y $q_y=hv$ representan el calado y el caudal en las direcciones x e y , respectivamente, siendo u y v las dos componentes del vector velocidad. La aceleración de la gravedad está representada por g . A la derecha de las ecuaciones están presentes los términos fuente correspondientes a la intensidad de lluvia R y las pendientes del nivel de fondo z en las direcciones x e y , S_{0x} y S_{0y} , respectivamente:

$$S_{0x} = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad S_{0y} = -\frac{\partial z}{\partial y} \quad (4)$$

Los términos S_{fx} y S_{fy} representan las pérdidas por fricción, escritas en función del coeficiente de rugosidad de Manning :

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (5)$$

Una de las posibles estrategias que se emplea habitualmente para simplificar este modelo e intentar reducir el tiempo de cálculo es la de despreciar todas las aceleraciones que no sean la de la gravedad en (2) y (3). Esta simplificación recibe el nombre de Modelo Difusivo o Cero-Inercia (Ponce, 1986):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = R \quad (6)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = S_{0x} - S_{fx} \quad (7)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = S_{0y} - S_{fy} \quad (8)$$

El sistema anterior se puede reescribir de manera más compacta en función de las pendientes de la superficie libre del agua en las direcciones x e y , definidas como:

$$S_x = \frac{\partial(h+z)}{\partial x} \quad S_y = \frac{\partial(h+z)}{\partial y} \quad (9)$$

Combinando las ecuaciones (7), (8) y (9):

$$S_x = S_{fx} \quad S_y = S_{fy} \quad (10)$$

Por último, reemplazando las pendientes de fricción (5) en (10), es posible escribir los caudales unitarios en las direcciones x e y de la siguiente manera:

$$q_x = \frac{h^{5/3}}{n\sqrt{|S|}} S_x \quad q_y = \frac{h^{5/3}}{n\sqrt{|S|}} S_y \quad (11)$$

donde S es el vector gradiente de la superficie libre del agua:

$$S = (S_x, S_y) = -\left(\frac{\partial(h+z)}{\partial x}, \frac{\partial(h+z)}{\partial y} \right) = -\nabla(h+z) \quad (12)$$

La ecuación final del modelo difusivo se obtiene reemplazando los caudales unitarios (11) en la ecuación de continuidad (6):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = R \quad \mathbf{q} = (q_x, q_y) \quad (13)$$

MODELO NUMÉRICO

En este trabajo, la ecuación del Modelo Difusivo (13) se discretiza mediante un esquema implícito de volúmenes finitos de tipo *upwind*. Por simplicidad en la notación, definamos:

$$\alpha(h) = \frac{h^{5/3}}{n\sqrt{|S|}} \rightarrow \mathbf{q} = \alpha(h)\mathbf{S} = -\alpha(h)\nabla(h+z) \quad (14)$$

Entonces, la ecuación (13) se transforma en:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \nabla[\alpha(h)\nabla(h+z)] = R \quad (15)$$

Considerando cada celda como un volumen de control Ω y aplicando una discretización temporal implícita de primer orden, se obtiene:

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \Omega = \int_{\partial\Omega} [\alpha^{n+\theta}(h)\nabla(h^{n+\theta} + z) \cdot \mathbf{n}] \partial\Omega + R^{n+\theta} \Omega \quad (16)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a la superficie $\partial\Omega$, el superíndice n representa el paso de tiempo actual y el coeficiente θ es el grado de implicitud del esquema, de forma que $\theta=1$ proporciona un esquema completamente implícito y $\theta=0$ un esquema explícito.

Sustituyendo el volumen de control Ω por el área V_i de la celda i con 3 lados de longitud l_w , cada una con un vector normal n_w y distancia entre centros de celdas vecinas definida como d_w :

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} V_i = \sum_{w=1}^3 \left[\alpha_w^{n+\theta}(h) \frac{\delta(h^{n+\theta} + z)_w}{d_w} \right] l_w + R V_i \quad (17)$$

donde $\delta(h^{n+\theta} + z)_w$ es la diferencia entre celdas vecinas de la magnitud $h+z$ y el término entre corchetes representa el caudal unitario promediado q_w en la pared w :

$$q_w = \alpha_w^{n+\theta}(h) \frac{\delta(h^{n+\theta} + z)_w}{d_w} \quad (18)$$

Los coeficientes $\alpha_w^{n+\theta}(h)$ son funciones no lineales de h . Cuando se selecciona un esquema implícito ($\theta \neq 0$), es necesario realizar una linealización previa a la resolución del sistema. Para ello, se emplea el método de las iteraciones de Picard, mediante el cual se evalúa α_w en un estado intermedio (iteración), denotado por el superíndice m :

$$h_i^{n+1,m+1} - h_i^n = \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{w=1}^3 \left[\alpha_w^{n+1,m}(h) \frac{\delta(h^{n+1,m+1} + z)_w}{d_w} \right] l_w + R \Delta t \quad (19)$$

Por último, la ecuación (19) se reordena y se escribe en forma de coeficientes. Por simplicidad en la notación, se ocultarán los superíndices temporales: $h^{n+1,m+1} \equiv h^{m+1}$, $\alpha^{n+1,m} \equiv \alpha^m$. Entonces:

$$a_i h_i^{m+1} + \sum_{w=1}^3 b_w h_w^{m+1} = c_i \quad (20)$$

donde

$$a_i = 1 + \theta \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{w=1}^3 \alpha_w^m(h) \frac{l_w}{d_w} \tag{21}$$

$$b_w = -\theta \frac{\Delta t}{V_i} \alpha_w^m(h) \frac{l_w}{d_w} \tag{22}$$

$$c_i = h_i^n + \theta \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{w=1}^3 \alpha_w^m(h) \frac{l_w}{d_w} \delta z_w + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{w=1}^3 \alpha_w^m(h) \frac{l_w}{d_w} \delta (h^n + z)_w + R \Delta t \tag{23}$$

En el sistema anterior, h_w representa el calado de las celdas vecinas asociadas a la pared w . Además, se ha generalizado la integración temporal en términos del parámetro θ .

Condiciones de contorno

Para que el esquema numérico quede completamente definido y sea aplicable a un problema real, resulta necesario establecer una serie de condiciones de contorno. En el caso de una onda de avenida, lo más habitual es imponer valores de caudal en la entrada del dominio. Dado que en la ecuación del modelo difusivo no está presente esta variable, es necesario realizar una ligera modificación en el esquema numérico de las celdas de contorno de este tipo. El caudal total de entrada Q_T^{in} a lo largo de la longitud l_T debe repartirse entre todas las paredes de las celdas iB de contorno que conforman dicha longitud, teniendo en cuenta las distintas longitudes l_{wB} (ver Figura 1). De esta forma, el caudal correspondiente a cada celda de entrada Q_{iB}^{in} queda definido por:

$$Q_{iB}^{in} = Q_T^{in} \frac{l_{wB}}{l_T} \tag{24}$$

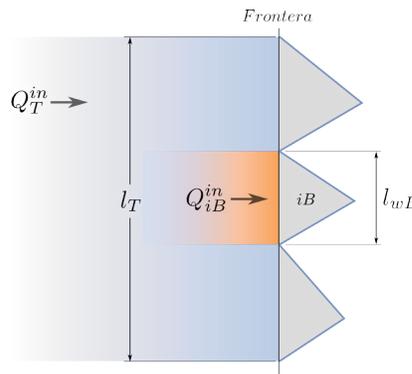


Figura 1 | Reparto del caudal de entrada entre las celdas de contorno.

Para cada celda de contorno de entrada iB , las ecuaciones (20) – (23) se modifican excluyendo la pared de contorno iw de todos los sumatorios y añadiendo la contribución del caudal de entrada al término explícito c_{iB} del sistema:

$$a_{iB} h_{iB}^{m+1} + \sum_{w \neq w_B} b_w h_w^{m+1} = c_{iB} \tag{25}$$

donde

$$a_{iB} = 1 + \theta \frac{\Delta t}{V_{iB}} \sum_{w \neq w_B} \alpha_w^m(h) \frac{l_w}{d_w} \tag{26}$$

$$b_w = -\theta \frac{\Delta t}{V_{iB}} \alpha_w^m(h) \frac{l_w}{d_w} \quad (27)$$

$$c_{iB} = h_{iB}^n - \theta \frac{\Delta t}{V_{iB}} \sum_{w \neq w_B} \alpha_w^m(h) \frac{l_w}{d_w} \delta z_w - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{w \neq w_B} \alpha_w^m(h) \frac{l_w}{d_w} \delta(h^n + z)_w + \frac{\Delta t}{V_i} Q_{iB}^{in} \quad (28)$$

De la misma manera, se puede imponer un contorno cerrado sustituyendo $Q_{iB}^{in}=0$ en la ecuación (28).

APLICACIÓN A LA INUNDACIÓN DE VALLES

En este caso, propuesto en (Néelz y Pender, 2013) para establecer una comparación entre diferentes modelos de simulación de flujo superficial, se presenta un caso práctico de gran interés, como es la inundación de valles fluviales mediante una onda de avenida, provocada por una tormenta muy intensa o una rotura de presa aguas arriba. El mapa de elevaciones del valle considerado junto con la malla de cálculo empleada (7592 celdas) están representados en la Figura 2. La onda de avenida está generada por un hidrograma de entrada con forma trapezoidal y un caudal pico de 3000 m³/s (Figura 3). La entrada de caudal se modela como una condición de contorno aplicada a lo largo de una línea de aproximadamente 260 m de longitud (línea magenta en la Figura 4). Todos los demás contornos están cerrados. El coeficiente de rugosidad de Manning se considera constante en todo el dominio con un valor $n=0.04 \text{ sm}^{-1/3}$). Con el objetivo de realizar una comparación de resultados con otros modelos evaluados en (Néelz y Pender, 2013) y con el modelo comercial RiverFlow2D, basado en las ecuaciones de aguas poco profundas, se han dispuesto siete sondas de medida en lugares específicos (Figura 4) que proporcionan los valores del nivel de agua ($h+z$) en función del tiempo.

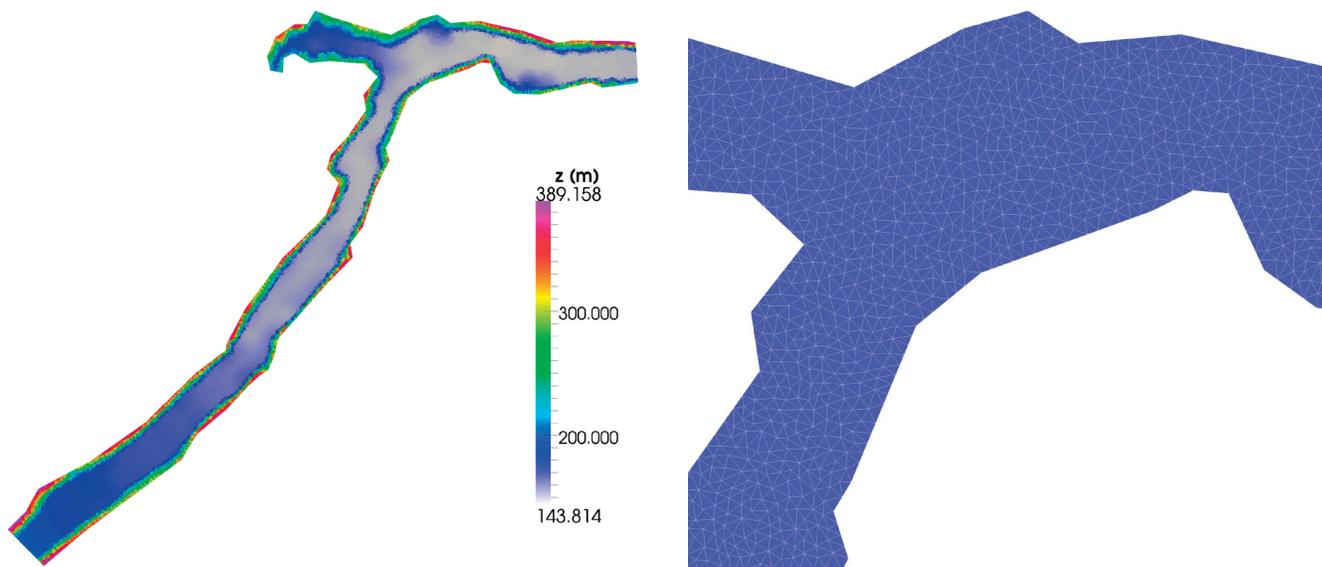


Figura 2 | Mapa hipsométrico del dominio (izquierda) y detalle de la malla de cálculo (derecha).

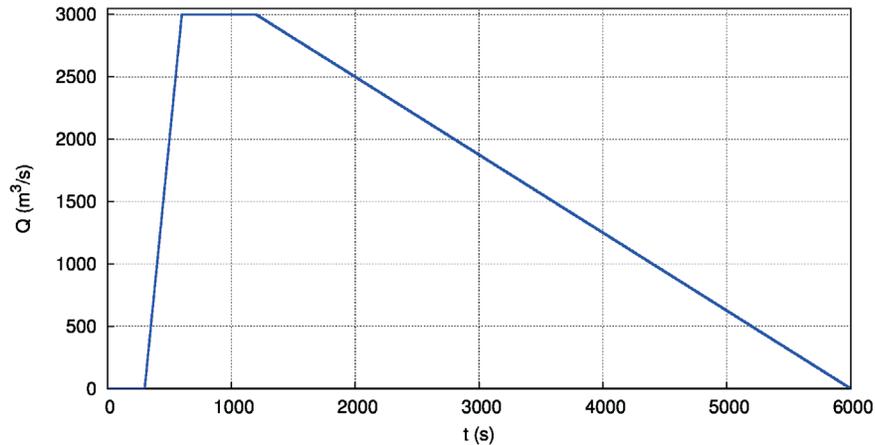


Figura 3 | Hidrograma de entrada.



Figura 4 | Posición de los puntos de medida en el valle.

La Figura 5 muestra la condición inicial y la evolución temporal del calado de agua en el valle para distintos instantes de tiempo. En la Figura 6 se muestran los registros temporales de nivel de agua proporcionados por las siete sondas. La comparación con los resultados proporcionados por los 19 modelos presentados en (Néelz y Pender, 2013) se realiza solamente en las sondas 1, 3, 5 y 7. Por claridad en la presentación de los resultados, en la Figura 6 solamente se ha representado la envolvente de las 19 curvas. A la vista de los resultados obtenidos, todas las sondas generan curvas contenidas en el interior de la envolvente de los 19 modelos tomados como referencia. Si se comparan los resultados del modelo difusivo con los que proporciona un modelo basado en las ecuaciones completas del flujo de aguas poco profundas como RiverFlow2D, se observan diferencias poco significativas en general. La discrepancia máxima se produce en la sonda 2, donde la diferencia entre los valores pico del calado ronda el 12%. Por lo tanto, es posible concluir que el modelo difusivo implícito considerado en este trabajo proporciona valores satisfactorios del nivel de agua en todos los puntos seleccionados. La Figura 7 muestra las líneas de contorno para valores de calado iguales a 0.5 m. De nuevo la comparación se establece mediante la envolvente de los resultados del resto de modelos. El modelo RiverFlow2D está basado en volúmenes finitos de tipo explícito y se comercializa a través de Hydronia (<http://www.hydronia.com/riverflow2d/>).

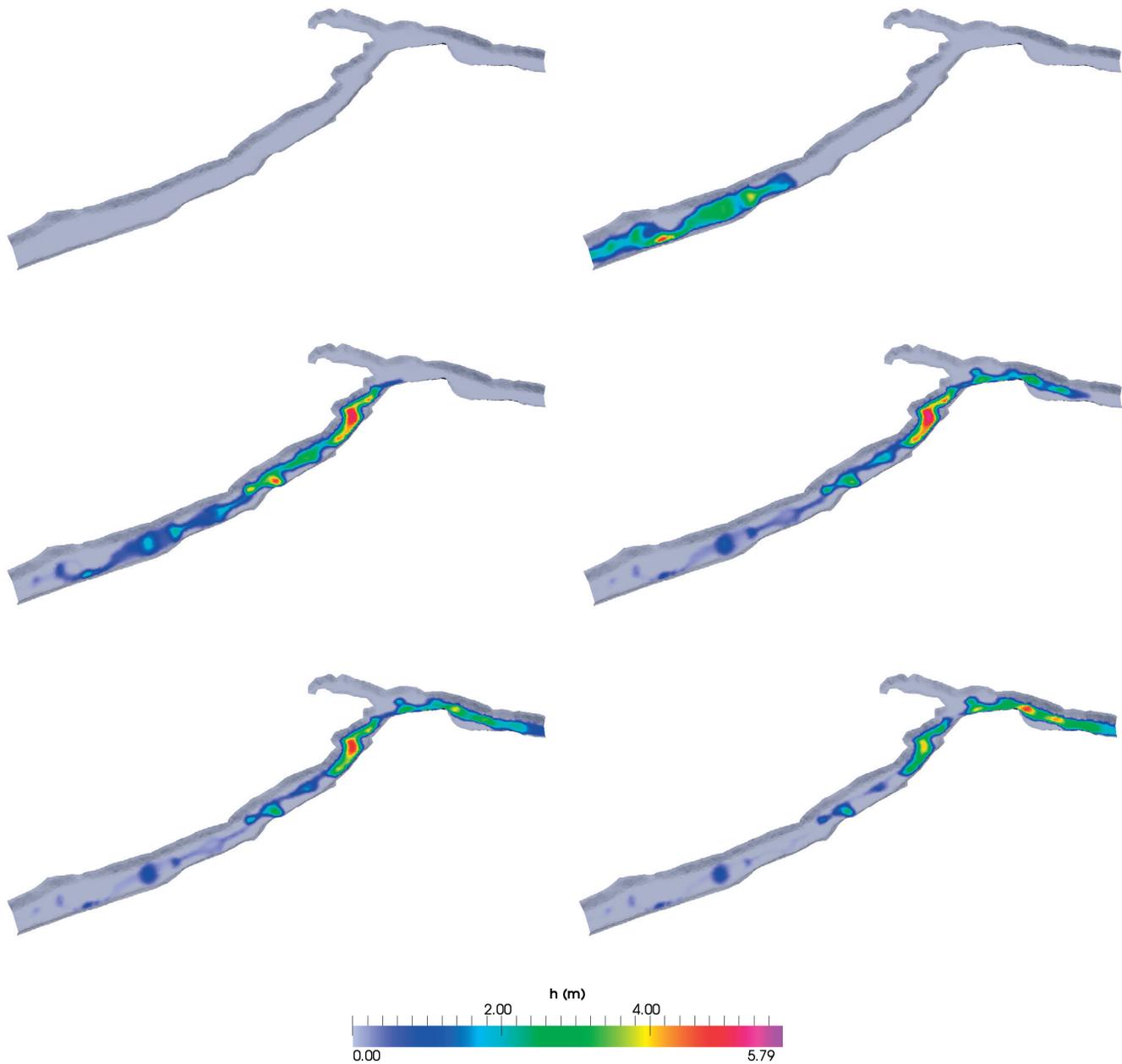


Figura 5 | Valores del calado en el valle fluvial para los instantes de tiempo $t=0$ s, $t=2500$ s, $t=7500$ s, $t=12500$ s, $t=17500$ s y $t=108000$ s.

La eficiencia del esquema implícito se mide comparando los tiempos de simulación para varias elecciones de paso de tiempo, $t_{CPU}(imp)$, frente al tiempo de cálculo empleado por el esquema explícito utilizando el paso de tiempo máximo que garantiza la estabilidad del esquema numérico, $t_{CPU}(exp, max)$. Se define como “speed-up” el cociente de los dos tiempos de cálculo anteriores:

$$speed - up = \frac{t_{CPU}(exp, max)}{t_{CPU}(imp)}$$

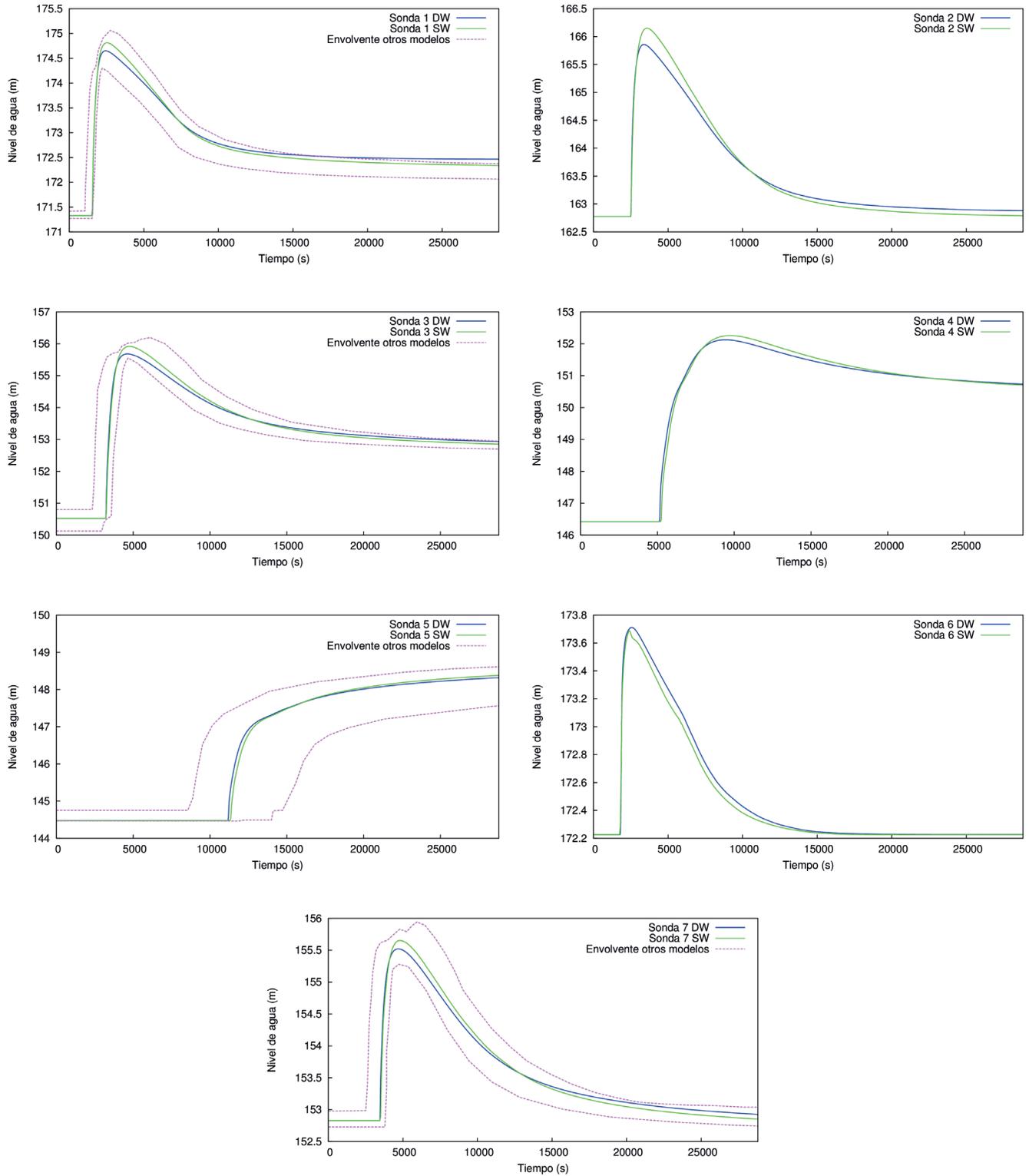


Figura 6 | Niveles de agua registrados por las siete sondas y comparación con los resultados presentados en (Néelz y Pender, 2013).

La Figura 8 muestra los tiempos de cálculo obtenidos y los factores “speed-up” para una simulación de un evento de 8 horas de duración (28800 s. El paso de tiempo máximo permitido por el esquema explícito es de $\Delta t=0.03$ s, con el cual, el tiempo de cálculo es de 903.15 s. A la vista de los resultados, se observa que el esquema implícito del modelo difusivo es mucho más eficiente que su versión explícita para todos los pasos de tiempo seleccionados. Por otro lado, se observa que un paso de tiempo mayor no siempre garantiza un tiempo de cálculo menor. Esto se debe al carácter no lineal de la ecuación y a la necesidad de un número muy elevado de iteraciones para su linealización cuando se usan pasos de tiempo elevados. En este caso concreto, el paso de tiempo óptimo con el que se obtiene un tiempo de cálculo menor es $\Delta t=22$ s, es decir, 733 veces mayor que el paso de tiempo máximo para la versión explícita del modelo difusivo. Esto supone una ventaja interesante a favor de la formulación implícita del modelo difusivo. Paralelizar el esquema difusivo en su versión explícita podría ser una alternativa para acelerar su implementación pero siempre sería menos eficiente que la formulación implícita propuesta.

Por último, es interesante comentar que el tiempo de cálculo requerido por el modelo completo Riverflow2D para la simulación del evento de 8 horas es de aproximadamente 25 s. Este dato es simplemente orientativo puesto que el presente estudio no está orientado a comparar la eficiencia relativa del modelo difusivo y del modelo completo.

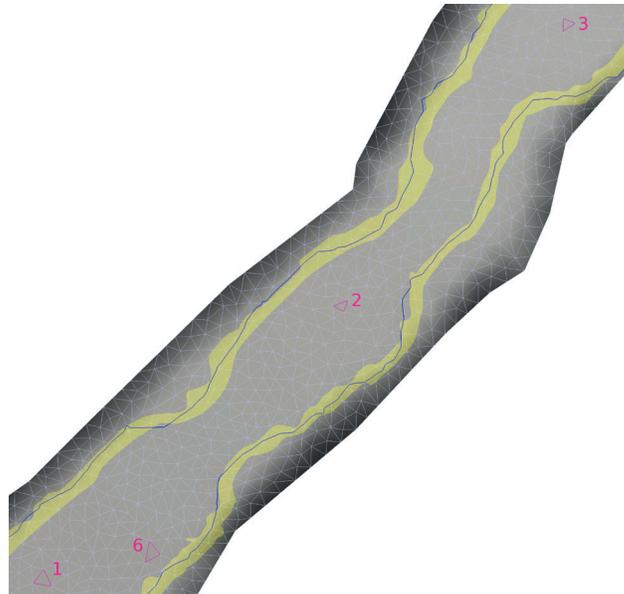


Figura 7 | Contornos correspondientes a valores de calado igual a 0.5 m (azul) y comparación con los resultados presentados en (Néelz y Pender, 2013) (amarillo).

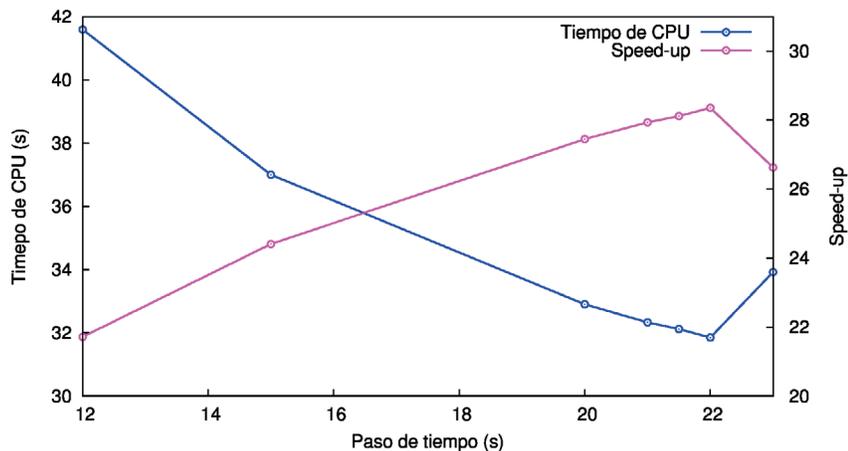


Figura 8 | Tiempo de cálculo y speed-up frente al esquema explícito para diferentes valores de paso de tiempo.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se ha presentado un modelo difusivo implícito aplicado a la simulación de inundación de valles fluviales. A la vista de los resultados obtenidos y de las comparaciones realizadas con otros modelos, se pueden concluir los siguientes aspectos:

- El modelo difusivo se beneficia de una discretización temporal implícita, aumentando su eficiencia en gran medida frente al uso de un esquema explícito. Para el caso presentado, se ha obtenido un valor de “speed-up” ligeramente superior a 28.
- Debido al carácter no lineal de la ecuación difusiva, un paso de tiempo mayor no siempre garantiza un menor coste computacional. Esto se debe al aumento del número de iteraciones necesarias para linealizar el sistema conforme se aumenta el paso de tiempo. Por lo tanto, para maximizar la eficiencia del esquema implícito, resulta necesario encontrar el paso de tiempo óptimo para cada problema.
- En el caso presentado, el modelo difusivo proporciona resultados de calado y nivel de agua similares a otros modelos, incluso aquellos que emplean una formulación matemática basada en las ecuaciones de aguas poco profundas.
- En términos de coste computacional, el modelo difusivo implícito proporciona una eficiencia similar a la del modelo comercial RiverFlow2D, basado en un esquema explícito de las ecuaciones de aguas poco profundas. Las pequeñas diferencias en los tiempos de cálculo se pueden atribuir a las distintas implementaciones de los códigos. Esta similitud en los resultados y tiempos de cálculo dificulta la tarea de elegir uno de los dos modelos para la resolución de problemas transitorios lentos, como el considerado en este trabajo. La aparente simplicidad matemática del modelo difusivo choca con la necesidad de emplear un esquema implícito para una resolución competitiva, lo cual complica en gran medida la resolución numérica. Por otro lado, la aparente complejidad matemática del modelo basado en las ecuaciones de aguas poco profundas se atenúa con la resolución mediante un esquema explícito que, a pesar de poseer una limitación en el paso de tiempo por razones de estabilidad numérica, resulta muy eficiente si se hace un correcto tratamiento de los frentes seco/mojado. También cabe destacar la mejor adaptabilidad al cálculo en paralelo de los esquemas explícitos frente a los implícitos.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de Aragón a través del Fondo Social Europeo.

REFERENCIAS

- Burden, R.L., Faires, J.D. (2010). *Numerical analysis*. Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Cea, L., Garrido, M. Puertas, J. (2010). Experimental validation of two-dimensional depth-averaged models for forecasting rainfall-runoff from precipitation data in urban áreas. *Journal of Hydrology*, 382(1-4), 88-102. doi:10.1016/j.jhydrol.2009.12.020
- Chen, J., Chen, J., Liao, A., Cao, X., Chen, L., Chen, X., He, C., Han, G., Peng, S. Lu, M., Zhang, W., Tong, X., Mills, J. (2015). Global land cover mapping at 30 m resolution: A POK-based operational approach. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 103, 7-27. doi:10.1016/j.isprsjprs.2014.09.002
- Debella-Gilo, M., Etzelmüller, B. (2009). Spatial prediction of soil classes using digital terrain analysis and multinomial logistic regression modeling integrated in GIS: Examples from Vestfold County, Norway. *Catena*, 77(1), 8-18. doi:10.1016/j.catena.2008.12.001
- Guennebaud, G., Jacob, B. (2010). Eigen v3. <http://eigen.tuxfamily.org>.
- Lal Wasantha, A. (1998). Weighted implicit finite-volume model for overland flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(9), 941-950. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1998)124:9(941)

- López-Barrera, D., García-Navarro, P., Brufau, P., Burguete, J. (2012). Diffusive-wave based hydrologic-hydraulic model with sediment transport I: model development. *Journal of Hydrologic Engineering*, 17(10), 1093-1104. doi:10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000552
- Maguya, A.S., Junttila, V., Kauranne, T. (2013). Adaptive algorithm for large scale DTM interpolation from LIDAR data for forestry applications in steep forested terrain. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 85, 74-83. doi:10.1016/j.isprsjprs.2013.08.005
- Mahmood, K., Yevjevich, V. (1975). *Unsteady flows in open channels*. Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.
- Merwade, V., Cook, A., Coonrod, J. (2008). GIS techniques for creating river terrain models for hydrodynamic and flood inundation mapping. *Environmental Modelling & Software*, 23(10-11), 1300-1311. doi:10.1016/j.envsoft.2008.03.005
- Moussa, R., Bocquillon, C. (2009). On the use of the diffusive wave modelling extreme flood events with overbank flow in floodplain. *Journal of Hydrology*, 374(1-2), 116-135. doi:10.1016/j.jhydrol.2009.06.006
- Mui, A., He, Y., Weng, Q. (2015). An object-based approach to delineate wetlands across landscapes of varied disturbance with high spatial resolution satellite imagery. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 109, 30-46. doi:10.1016/j.isprsjprs.2015.08.005
- Murillo, J., García-Navarro, P. (2010). Weak solutions for partial differential equations with source terms: Application to the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 229(11), 4327-4368. doi:10.1016/j.jcp.2010.02.016
- Neal, J., Villanueva, I., Wright, N., Willis, T., Fewtrell, T., Bates, P. (2012). How much physical complexity is needed to model flood inundation? *Hydrological Processes*, 26(15), 2264-2282. doi:10.1002/hyp.8339
- Néelz, S., Pender, G. (2013). *Benchmarking of 2D hydraulic modelling packages*. UK Environmental Agency.
- Gomez-Pereira, L.M., Wicherson, R.J. (1999). Suitability of laser data for deriving geographical information: A case study in the context of management of fluvial zones. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 54(2-3), 105-114. doi:10.1016/S0924-2716(99)00007-6
- Ponce, V.M. (1986). Diffusion wave modeling of catchment dynamics. *Journal of Hydraulic Engineering*, 112(8), 716-727. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1986)112:8(716)
- Rabus, B., Eineder, M., Roth, A., Bamler, R. (2003). The shuttle radar topography mission – a new class of digital elevation models acquired by spaceborne radar. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 57(4), 241-262. doi:10.1016/S0924-2716(02)00124-7
- Saad, Y. (1994). ILUT: A dual threshold incomplete LU factorization. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 1(4), 387-402. doi:10.1002/nla.1680010405
- van der Vorst, H.A. (1992). BI-CGSTAB – A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear-systems. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 13(2), 631-644. doi:10.1137/0913035
- Vreugdenhill, C.B. (1994). *Numerical Methods for Shallow Water Flow*. Kluwer Academic Publishers. doi:10.1007/978-94-015-8354-1