



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

— **TELECOM** ESCUELA
TÉCNICA **VLC** SUPERIOR
DE **UPV** INGENIEROS
DE TELECOMUNICACIÓN

CARACTERIZACIÓN EFICIENTE DE DISCONTINUIDADES ENTRE GUÍAS MULTICONDUCTOR ARBITRARIAS Y APLICACIÓN A DISPOSITIVOS DE MICROONDAS

Autor: Pablo González Santatecla

Tutor: Dr. Pablo Soto Pacheco
Cotutor: Dr. Vicente Enrique Boria Esbert

Trabajo Fin de Grado presentado en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación de la Universitat Politècnica de València, para la obtención del Título de Graduado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Curso 2015-16

Valencia, 28 de junio de 2016

Resumen

En este Trabajo de Final de Grado (TFG), se ha obtenido un método eficiente para el cálculo de integrales de acoplamiento en discontinuidades de guías de onda arbitrarias y con múltiples conductores. En primer lugar se ha realizado el desarrollo teórico que ha permitido reescribir estas ecuaciones como integrales de línea. Posteriormente, utilizando una técnica de obtención de modos basada en el Método de los Momentos (MoM), se ha aplicado la nueva metodología y comparado con los métodos actualmente existentes.

En resumen, con el desarrollo que se expone en las siguientes páginas, se ha logrado obtener un método nuevo para el cálculo de las integrales de acoplamiento, que evidentemente, a la vista de los resultados que en el presente trabajo se exponen, es notablemente más eficiente que la técnica utilizada hasta la fecha por algunos programas de simulación.

Resum

A aquest Treball de Fi de Grau (TFG), s'ha obtingut un mètode eficient per al càlcul d'integrals d'acoblament en discontinuïtats de guies d'ona amb geometria arbitrària i múltiples conductors. En primer lloc, s'ha realitzat el desenvolupament teòric que ha permet reescriure aquestes equacions com a integrals de línia. Posteriorment, utilitzant una tècnica d'obtenció de modes basada en el Mètode dels Moments (MoM), s'ha aplicat la nova metodologia y comparat amb els mètodes anteriors.

En resum, amb el desenvolupament que s'exposa a les següents pàgines, s'ha aconseguit obtindre un mètode nou per al càlcul de les integrals d'acoblament, que evidentment, a la vista dels resultats que al present treball s'exposen, es notablement més eficient que la tècnica utilitzada fins a hui en dia per alguns programes de simulació.

Abstract

In this Degree Thesis (TFG), an efficient method has been obtained to calculate coupling integrals for discontinuities of arbitrarily shaped waveguides with multiple conductors. Firstly, a theoretical formulation has been performed in order to rewrite those equations as line integrals. Next, and after using a numerical technique based on the Method of

Moments (MoM) for computing the modal chart of arbitrarily shaped waveguides, the new technique has been applied to compute such coupling coefficients and compare it with the techniques currently available.

In summary, with the technique proposed in the following pages, a new method for coupling integrals calculation has been developed. As it is shown in the results of this Project, the resulting method is noticeably more efficient and accurate than the techniques used nowadays by commercial simulation programmes based on modal analysis methods.

Contenidos

1	Introducción	7
2	Obtención de las ecuaciones de los modos	8
2.1	Modos TE	11
2.2	Modos TM	12
2.3	Modos TEM	14
3	Obtención de las constantes de normalización	18
3.1	Modos TE	18
3.2	Modos TM	19
4	Integrales de acoplo entre los modos	21
5	Relación entre potenciales y cargas y corrientes superficiales	26
5.1	Modos TE	27
5.2	Modos TM	27
5.3	Modos TEM	28
6	Validación práctica mediante el cálculo de la integral de acoplo TEM-TEM en una guía coaxial	29
6.1	Introducción	29
6.2	Resolución analítica	30
6.3	Resolución numérica	31
6.3.1	Resolución del problema TEM mediante el Método de los Momentos	31
6.3.2	Cálculo de la integral de acoplo mediante proyecciones	33
6.3.3	Cálculo de la integral de acoplo mediante integrales de línea	35
6.4	Verificación práctica	37
7	Conclusión	40
7.1	Grado de consecución de los objetivos	40
7.2	Ampliaciones futuras	40
	Apéndices	41

A	Identidades matemáticas	41
A.1	Identidades de Green 2D	41
A.1.1	Primera identidad de Green	41
A.1.2	Segunda identidad de Green	42
A.2	Otras identidades	42
	Bibliografía	43

Capítulo 1

Introducción

El presente Trabajo de Final de Grado trata de exponer un método eficiente que permita una precisa obtención de las integrales de acoplo en líneas de transmisión con geometría arbitraria.

Este trabajo se enmarca dentro del área del análisis electromagnético de estructuras de microondas. Las técnicas de análisis electromagnético actuales se pueden clasificar en dos grandes grupos: discretización y modales [Pablo]. Ambas opciones presentan tanto inconvenientes como ventajas que se describen brevemente a continuación.

En primer lugar, las técnicas de discretización tratan, como su nombre indica, de discretizar las ecuaciones de Maxwell para posteriormente resolverlas. Estas técnicas son aplicables a prácticamente cualquier estructura que se desee analizar, pero a su vez tienen la desventaja de necesitar gran cantidad de recursos de computación, puesto que son unas técnicas que requieren de mallas exhaustivas de las geometrías, lo que hace que sean lentas, consuman mucha memoria y sus resultados no son muy precisos.

En el extremo opuesto se encuentran los métodos modales. Estos se basan en descomponer la estructura en bloques más básicos y caracterizarlos mediante los modos que por ellos se propagan. Estas técnicas son mucho más rápidas que las anteriores, pero también presentan una desventaja, y es que solo son válidas para ciertas estructuras muy concretas de las cuales se pueden hallar los modos de manera eficiente (de forma numérica o analítica).

De los dos procedimientos descritos anteriormente, en este TFG nos centraremos en los métodos modales, ya que desde el punto de vista de su precisión y velocidad, son los más interesantes.

El objetivo de este trabajo es ampliar el rango de aplicación de las técnicas modales, implementando un método que permita calcular de forma eficiente las integrales de acoplo entre dos guías de sección transversal arbitraria, ya que con los métodos actuales su cálculo es aún muy lento.

Capítulo 2

Obtención de las ecuaciones de los modos

El análisis de onda completa de dispositivos pasivos de microondas mediante el uso de técnicas modales, como es natural, requiere determinar previamente los modos de los distintos elementos que forman la estructura. Uno de los elementos más habituales en los componentes de microondas son los tramos uniformes de guía de ondas. Consideremos uno de estos tramos de guía, cerrado por paredes conductoras perfectas, con dieléctrico homogéneo (de permitividad eléctrica ϵ y permeabilidad magnética μ) y sección transversal arbitraria como el mostrado en la figura 2.1.

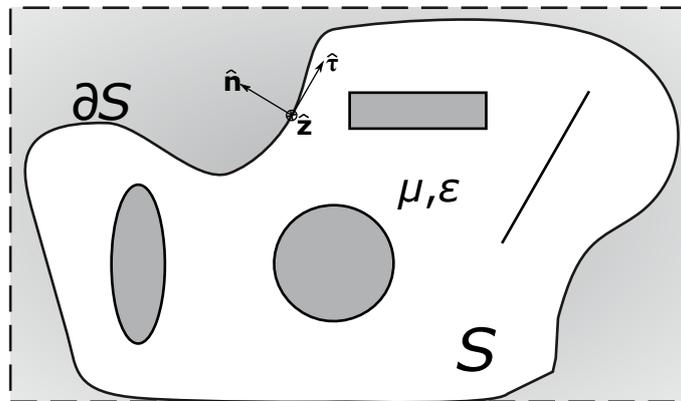


Fig. 2.1: Guía homogénea de sección transversal arbitraria S y con contorno ∂S , que está compuesta por varios conductores. También se representa el sistema de coordenadas utilizado, donde el vector \hat{z} apunta hacia el interior del papel.

Para determinar las expresiones de los modos de este tipo de guías bajo estudio, partiremos

de las ecuaciones de Maxwell en un medio lineal, isotrópico y sin fuentes [Poazar]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.1d)$$

desarrollando ahora los rotacionales en (2.1a) y (2.1b)

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{n}} & \hat{\boldsymbol{\tau}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial n} & \frac{\partial}{\partial \tau} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_n & E_\tau & E_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{n}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \tau} - \frac{\partial E_\tau}{\partial z} \right) - \hat{\boldsymbol{\tau}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial n} - \frac{\partial E_n}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial E_\tau}{\partial n} - \frac{\partial E_n}{\partial \tau} \right)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{n}} & \hat{\boldsymbol{\tau}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial n} & \frac{\partial}{\partial \tau} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_n & H_\tau & H_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{n}} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \tau} - \frac{\partial H_\tau}{\partial z} \right) - \hat{\boldsymbol{\tau}} \left(\frac{\partial H_z}{\partial n} - \frac{\partial H_n}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial H_\tau}{\partial n} - \frac{\partial H_n}{\partial \tau} \right)$$

se deducen las siguientes relaciones entre las diferentes componentes de los campos electromagnéticos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial \tau} - \frac{\partial E_\tau}{\partial z} &= -j\omega\mu H_n & \frac{\partial H_z}{\partial \tau} - \frac{\partial H_\tau}{\partial z} &= j\omega\epsilon E_n \\ -\frac{\partial E_z}{\partial n} + \frac{\partial E_n}{\partial z} &= -j\omega\mu H_\tau & -\frac{\partial H_z}{\partial n} + \frac{\partial H_n}{\partial z} &= j\omega\epsilon E_\tau \\ \frac{\partial E_\tau}{\partial n} - \frac{\partial E_n}{\partial \tau} &= -j\omega\mu H_z & \frac{\partial H_\tau}{\partial n} - \frac{\partial H_n}{\partial \tau} &= j\omega\epsilon E_z \end{aligned}$$

Teniendo además en cuenta que se trata de una guía uniforme en z , la dependencia con dicha variable será en general de la forma $e^{\mp\gamma z}$ (siendo γ el denominado exponente lineal de propagación, donde el signo superior respresenta una onda que se propaga por la guía según $+z$ y el signo inferior, una propagación según el eje $-z$). Este hecho nos permite reescribir las expresiones anteriores en la forma:

$$\frac{\partial E_z}{\partial \tau} \pm \gamma E_\tau = -j\omega\mu H_n \quad (2.2a)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial n} \mp \gamma E_n = -j\omega\mu H_\tau \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial E_\tau}{\partial n} - \frac{\partial E_n}{\partial \tau} = -j\omega\mu H_z \quad (2.2c)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial \tau} \pm \gamma H_\tau = j\omega\epsilon E_n \quad (2.2d)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial n} \mp \gamma H_n = j\omega\epsilon E_\tau \quad (2.2e)$$

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial n} - \frac{\partial H_n}{\partial \tau} = j\omega\epsilon E_z \quad (2.2f)$$

Combinando a continuación las expresiones (2.2a) y (2.2e) podemos expresar E_τ y H_n en función únicamente de las componentes axiales de los campos

$$E_\tau = \frac{1}{\gamma^2 + k^2} \left(\mp \gamma \frac{\partial E_z}{\partial \tau} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial n} \right) \quad H_n = \frac{1}{\gamma^2 + k^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \tau} \mp \gamma \frac{\partial H_z}{\partial n} \right)$$

y actuando de forma análoga con (2.2b) y (2.2d) se deduce para E_n y H_τ

$$E_n = \frac{1}{\gamma^2 + k^2} \left(\mp \gamma \frac{\partial E_z}{\partial n} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \tau} \right) \quad H_\tau = \frac{1}{\gamma^2 + k^2} \left(-j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial n} \mp \gamma \frac{\partial H_z}{\partial \tau} \right)$$

donde $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ es el número de onda. Por lo tanto, hemos obtenido como resultado la expresión general de los campos eléctricos transversales en función de las componentes axiales, que se pueden expresar de forma más compacta como

$$\mathbf{E}_t = E_n \hat{\mathbf{n}} + E_\tau \hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\gamma^2 + k^2} (\mp \gamma \nabla_t E_z + j\omega\mu (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t H_z)) \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{H}_t = H_n \hat{\mathbf{n}} + H_\tau \hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\gamma^2 + k^2} (\mp \gamma \nabla_t H_z - j\omega\epsilon (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z)) \quad (2.3b)$$

siendo $\nabla_t = \hat{\mathbf{n}}\partial/\partial n + \hat{\boldsymbol{\tau}}\partial/\partial \tau$, es decir, la parte del operador ∇ que afecta a las componentes transversales.

Las expresiones en (2.3) nos indican claramente que, una vez se determinan las componentes axiales E_z y H_z , es posible obtener el resto de componentes de los campos electromagnéticos. De hecho, los modos de una guía uniforme se clasifican en general atendiendo a sus componentes axiales:

- Modos TM. Verifican $E_z \neq 0$ y $H_z = 0$, y por tanto su campo magnético es transversal.
- Modos TE. Aquellos que cumplen $E_z = 0$ y $H_z \neq 0$, es decir, cuyo campo eléctrico es sólo transversal.
- Modos TEM. Simultáneamente cumplen que $E_z = 0$ y $H_z = 0$, de modo que el campo electromagnético es transversal.
- Modos híbridos. Cuando existen las dos componentes axiales ($E_z \neq 0$ y $H_z \neq 0$).

En el caso de una guía uniforme con dieléctrico homogéneo, se puede demostrar que la solución modal completa que verifica las condiciones de contorno de la guía no requiere de los modos híbridos (y por tanto, está compuesta por modos TM, TE y tantos modos TEM como conductores eléctricos distintos formen la guía sin contar el exterior).

Pasamos a continuación a desarrollar las soluciones para cada una de las familias de modos que por tanto están involucradas en nuestro problema.

2.1 Modos TE

Los modos TE son aquellos cuya componente eléctrica axial es cero y la magnética es no nula. Por tanto, para poder determinarlos es necesario obtener inicialmente la componente axial del campo magnético. El primer paso consiste en aplicar rotacionales a un lado y otro de (2.1b):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = j\omega\epsilon \nabla \times \mathbf{E}$$

y como $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$, tras aplicación de las ecuaciones de Maxwell (2.1c) y (2.1d), se obtiene directamente la ecuación de ondas para el vector de campo magnético \mathbf{H}

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (2.4)$$

De toda esta ecuación de ondas, consideramos únicamente la parte asociada a la componente axial:

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0$$

teniendo además en cuenta que la estructura es invariante en la dirección del eje z , y por tanto es separable en esta variable, es fácil verificar que la dependencia según dicha coordenada es en general de la forma $e^{\mp\gamma z}$, siendo $\gamma = \alpha + j\beta$ el exponente lineal de propagación. Esta propiedad nos permite reescribir la expresión (2.5) como:

$$\nabla_t^2 H_z + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = \nabla_t^2 H_z + \gamma^2 H_z + k^2 H_z = \nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (2.5)$$

donde k_c es un parámetro denominado como número de onda de corte (y viene dado por $k_c^2 = \gamma^2 + k^2$).

Como resultado, hemos obtenido la ecuación de ondas para la componente axial del campo magnético. A esta componente se le suele denominar potencial de los modos TE, ya que a partir de cada solución no nula de (2.5) se derivan todas las componentes de los campos de un modo TE. Utilizando notación de potenciales, por tanto, el p -ésimo modo TE se corresponderá con la p -ésima solución no nula (ordenadas de menor a mayor número de onda de corte k_c) del problema bidimensional en la sección transversal de la guía:

$$\nabla_t^2 \varphi_p^{\text{TE}} + k_{c,p}^{\text{TE}^2} \varphi_p^{\text{TE}} = 0 \quad \text{en } S \quad (2.6)$$

siendo las condiciones de contorno a verificar en el contorno ∂S de la guía las siguientes:

$$\left. \frac{\partial \varphi_p^{\text{TE}}}{\partial n} \right|_{\text{PE}} = 0 \quad (2.7)$$

$$\left. \varphi_p^{\text{TE}} \right|_{\text{PM}} = 0 \quad (2.8)$$

en función de que dicho contorno sea una pared eléctrica (PE) o magnética (PM), ya que en el segundo caso las componentes de campo magnético tangenciales a la pared (como sería H_z) deben anularse, mientras que para una pared eléctrica las que se deben desvanecer son las componentes tangenciales de campo eléctrico (que, atendiendo a (2.3a) son proporcionales a $(\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t H_z) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = \partial H_z / \partial n$ para un modo TE).

Una vez determinado dicho potencial, las expresiones de los campos axiales asociado al p -ésimo modo TE con potencial $\varphi_p^{\text{TE}}(n, \tau)$ y número de onda de corte $k_{c,p}^{\text{TE}}$ serán en general

$$E_z^{\text{TE}} = 0 \quad , \quad H_z^{\text{TE}} = A_p^{\text{TE}} \varphi_p^{\text{TE}}(n, \tau) e^{\mp \gamma_p^{\text{TE}} z} \quad (2.9a)$$

donde A_p^{TE} es una constante compleja (asociada a la fase y la amplitud del fasor del modo), y el signo de la exponencial se corresponde con la dirección en la que se propaga la onda del modo. Por último, y mediante la aplicación de (2.3) es inmediato construir las componentes tangenciales de los modos:

$$\mathbf{E}_t^{\text{TE}} = A_p^{\text{TE}} \frac{j\omega\mu}{k_{c,p}^{\text{TE}2}} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_p^{\text{TE}}) e^{\mp \gamma_p^{\text{TE}} z} = A_p^{\text{TE}} \frac{j\omega\mu}{k_{c,p}^{\text{TE}2}} \left(\frac{\partial \varphi_p^{\text{TE}}}{\partial n} \hat{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\partial \varphi_p^{\text{TE}}}{\partial \tau} \hat{\mathbf{n}} \right) e^{\mp \gamma_p^{\text{TE}} z} \quad (2.9b)$$

$$\mathbf{H}_t^{\text{TE}} = \mp A_p^{\text{TE}} \frac{\gamma_p^{\text{TE}}}{k_{c,p}^{\text{TE}2}} \nabla_t \varphi_p^{\text{TE}} e^{\mp \gamma_p^{\text{TE}} z} = \mp A_p^{\text{TE}} \frac{\gamma_p^{\text{TE}}}{k_{c,p}^{\text{TE}2}} \left(\frac{\partial \varphi_p^{\text{TE}}}{\partial n} \hat{\mathbf{n}} + \frac{\partial \varphi_p^{\text{TE}}}{\partial \tau} \hat{\boldsymbol{\tau}} \right) e^{\mp \gamma_p^{\text{TE}} z} \quad (2.9c)$$

ya que $k_{c,p}^{\text{TE}2} = k^2 + \gamma_p^{\text{TE}2}$. Obsérvese además como las componentes tangenciales de los campos eléctricos y magnéticos están relacionadas, en el caso TE, mediante:

$$\mathbf{E}_{t,p}^{\text{TE}} = Z_p^{\text{TE}} (\mathbf{H}_{t,p}^{\text{TE}} \times (\pm \hat{\mathbf{z}})) \quad , \quad \mathbf{H}_{t,p}^{\text{TE}} = \frac{(\pm \hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{E}_{t,p}^{\text{TE}}}{Z_p^{\text{TE}}} \quad (2.10)$$

siendo $Z_p^{\text{TE}} = j\omega\mu/\gamma_p^{\text{TE}}$ la impedancia de onda del p -ésimo modo TE de la guía.

2.2 Modos TM

Los modos TM son los contrarios a los TE, es decir, aquellos cuya componente magnética axial es nula y la eléctrica no lo es. Por lo tanto, para poder determinarlos se sigue un esquema similar al de los modos TE, y es necesario obtener en primer lugar la componente axial del campo eléctrico. Si aplicamos rotacionales a ambos lados de (2.1a):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H}$$

sabiendo además que $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ y aplicando las ecuaciones de Maxwell (2.1c) y (2.1d), se obtiene la ecuación de ondas para el campo eléctrico \mathbf{E}

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (2.11)$$

De esta ecuación de ondas vectorial únicamente consideraremos la parte relacionada con la componente axial, es decir:

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$$

Si tenemos en cuenta que la guía mantiene su sección a lo largo del eje z , igual que en el caso TE, se puede verificar que la dependencia en esa coordenada es de la forma $e^{\mp\gamma z}$, siendo $\gamma = \alpha + j\beta$ el exponente lineal de propagación. Utilizando esta dependencia, podemos escribir la (2.12) de la siguiente forma:

$$\nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = \nabla_t^2 E_z + \gamma^2 E_z + k^2 E_z = \nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad (2.12)$$

Finalmente hemos obtenido la ecuación de ondas para la componente axial del campo eléctrico. Esta componente, de forma análoga a lo que ocurría en los modos TE, también se le denomina potencial de los modos TM. Utilizando la notación de potenciales ya empleada en el apartado anterior, podemos determinar la siguiente expresión para el potencial TM en la guía de sección arbitraria:

$$\nabla_t^2 \psi_p^{\text{TM}} + k_{c,p}^{\text{TM}2} \psi_p^{\text{TM}} = 0 \quad \text{en } S \quad (2.13)$$

siendo las condiciones de contorno a verificar en el contorno ∂S de la guía las siguientes:

$$\psi_p^{\text{TM}} \Big|_{\text{PE}} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \psi_p^{\text{TM}}}{\partial n} \Big|_{\text{PM}} = 0 \quad (2.15)$$

en función de que dicho contorno sea una pared eléctrica (PE) o magnética (PM), ya que en el primer caso las componentes tangenciales a la pared de campo eléctrico (como sería E_z) deben anularse en la superficie de una pared eléctrica, mientras que para una pared magnética las que se deben desvanecer son las componentes tangenciales de campo magnético (que, atendiendo a (2.3b) son proporcionales a $(\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = \partial E_z / \partial n$ para un modo TM).

Una vez conocida la forma de este potencial, se pueden deducir las expresiones de los campos axiales asociados a cada modo TM con potencial $\psi_p^{\text{TM}}(n, \tau)$ y número de onda de corte $k_{c,p}^{\text{TM}}$, que resultan de la siguiente manera:

$$H_z^{\text{TM}} = 0 \quad , \quad E_z^{\text{TM}} = A_p^{\text{TM}} \psi_p^{\text{TM}}(n, \tau) e^{\mp\gamma_p^{\text{TM}} z} \quad (2.16a)$$

donde A_p^{TM} es una constante compleja que tiene en cuenta la amplitud y la fase del fasor del modo y el signo de la exponencial se determina según la dirección de propagación de la onda del modo, igual que en el caso de los modos TE. Finalmente, tras aplicar (2.3), se pueden obtener todas las componentes de los modos:

$$\mathbf{E}_t^{\text{TM}} = \mp A_p^{\text{TM}} \frac{\gamma_p^{\text{TM}}}{k_{c,p}^{\text{TM}2}} \nabla_t \psi_p^{\text{TM}} e^{\mp\gamma_p^{\text{TM}} z} = \mp A_p^{\text{TM}} \frac{\gamma_p^{\text{TM}}}{k_{c,p}^{\text{TM}2}} \left(\frac{\partial \psi_p^{\text{TM}}}{\partial n} \hat{\mathbf{n}} + \frac{\partial \psi_p^{\text{TM}}}{\partial \tau} \hat{\boldsymbol{\tau}} \right) e^{\mp\gamma_p^{\text{TM}} z} \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{H}_t^{\text{TM}} = \frac{-A_p^{\text{TM}} j \omega \epsilon}{k_{c,p}^{\text{TM}2}} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \psi_p^{\text{TM}}) e^{\mp\gamma_p^{\text{TM}} z} = \frac{-A_p^{\text{TM}} j \omega \epsilon}{k_{c,p}^{\text{TM}2}} \left(\frac{\partial \psi_p^{\text{TM}}}{\partial n} \hat{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\partial \psi_p^{\text{TM}}}{\partial \tau} \hat{\mathbf{n}} \right) e^{\mp\gamma_p^{\text{TM}} z} \quad (2.16c)$$

tomando $k_{c,p}^{\text{TM}^2} = k^2 + \gamma_p^{\text{TM}^2}$. Definiendo la impedancia de onda del p -ésimo modo $Z_p^{\text{TM}} = \gamma_p^{\text{TM}}/j\omega\epsilon$, podemos reescribir estas expresiones como:

$$\mathbf{E}_{t,p}^{\text{TM}} = Z_p^{\text{TM}} (\mathbf{H}_{t,p}^{\text{TM}} \times (\pm\hat{\mathbf{z}})) \quad , \quad \mathbf{H}_{t,p}^{\text{TM}} = \frac{(\pm\hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{E}_{t,p}^{\text{TM}}}{Z_p^{\text{TM}}} \quad (2.17)$$

2.3 Modos TEM

Los modos TEM son aquellos cuyas componentes axiales tanto del campo magnético como del campo eléctrico son nulas ($E_z = H_z = 0$). Si observamos las expresiones (2.3a) y (2.3b), la única manera de que puedan existir campos transversales no nulos es que $\gamma^2 + k^2 = 0$, es decir, que $k_c = 0$ y por tanto $k = j\gamma$. Para poder determinarlos se parte, igual que en el caso anterior, de la ecuación (2.1a). Separando el rotacional en transversal y axial obtenemos las siguientes expresiones:

- Para la componente axial obtenemos que: $\nabla_z \times \mathbf{E}_t = \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}_t = -j\omega\mu\mathbf{H}_t$. La variación a lo largo del eje z volverá a ser nuevamente de la forma $e^{\mp\gamma z}$, que en el caso TEM se puede particularizar como $e^{\mp jkz}$, lo que permite expresar la componente transversal de campo magnético en función del campo eléctrico en la forma:

$$\mathbf{H}_t^{\text{TEM}} = \frac{(\pm\hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{E}_t^{\text{TEM}}}{\eta} \quad (2.18)$$

lo que indica que la impedancia de onda de cualquier modo TEM viene dada por $Z^{\text{TEM}} = \eta$.

- Por otro lado, para la componente transversal, obtenemos: $\nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0$. Por lo tanto el campo eléctrico transversal deriva de potencial, es decir:

$$\mathbf{E}_t^{\text{TEM}} = -\nabla_t \phi^{\text{TEM}} \quad (2.19)$$

A continuación buscamos la ecuación diferencial para el potencial eléctrico ϕ^{TEM} . Como se debe cumplir la ecuación de Maxwell (2.1c), podemos decir que:

$$(\nabla_t + \nabla_z) \cdot \mathbf{E}_t^{\text{TEM}} = \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t^{\text{TEM}} + \nabla_z \cdot \mathbf{E}_t^{\text{TEM}} = 0 \quad (2.20)$$

y como el vector ∇_z es axial, y por tanto ortogonal a $\mathbf{E}_t^{\text{TEM}}$, tenemos:

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t^{\text{TEM}} = \nabla_t \cdot (-\nabla_t \phi^{\text{TEM}}) = 0 \rightarrow \nabla_t^2 \phi^{\text{TEM}} = 0 \quad (2.21)$$

siendo el operador $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial n^2 + \partial^2/\partial \tau^2$, es decir, la parte del operador laplaciano que actúa sobre las variables transversales.

Las condiciones iniciales de este caso se pueden encontrar a partir de las condiciones de contorno que deben verificar el campo eléctrico tangencial y el campo magnético tangencial a una pared eléctrica y magnética, respectivamente:

■ Pared eléctrica: $E_\tau = -\nabla_t \phi^{\text{TEM}} \hat{\tau} = -\partial \phi^{\text{TEM}} / \partial \tau = 0$

$$\phi^{\text{TEM}} \Big|_{\text{PE}} = cte. \quad (2.22)$$

■ Pared magnética: $H_\tau = (\pm \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t / \eta) \cdot \hat{\tau} = \pm E_n / \eta = 0 \rightarrow E_n = -\partial \phi / \partial n = 0$:

$$\frac{\partial \phi^{\text{TEM}}}{\partial n} \Big|_{\text{PM}} = 0 \quad (2.23)$$

Por lo tanto, los modos TEM se obtienen a partir de las soluciones no nulas del siguiente problema asociado al potencial eléctrico:

$$\nabla_t^2 \phi^{\text{TEM}} = 0 \quad \text{en } S \quad (2.24a)$$

con las siguientes condiciones de contorno:

$$\phi^{\text{TEM}} \Big|_{\text{PE}_i} = K_i \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N_{\text{cep}} \quad (2.24b)$$

$$\frac{\partial \phi^{\text{TEM}}}{\partial n} \Big|_{\text{PM}} = 0 \quad (2.24c)$$

siendo N_{cep} el número de conductores eléctricos perfectos que hay en la guía.

A partir de la solución de (2.24a), es inmediato obtener las expresiones de los campos:

$$\mathbf{E}^{\text{TEM}} = \mathbf{E}_t^{\text{TEM}} = -\nabla_t \phi^{\text{TEM}} e^{\mp jkz} = \left(-\frac{\partial \phi^{\text{TEM}}}{\partial n} \hat{\mathbf{n}} - \frac{\partial \phi^{\text{TEM}}}{\partial \tau} \hat{\tau} \right) e^{\mp jkz} \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{H}^{\text{TEM}} = \mathbf{H}_t^{\text{TEM}} = \frac{1}{\eta} (\pm \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t^{\text{TEM}}) e^{\mp jkz} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \phi^{\text{TEM}}}{\partial \tau} \hat{\mathbf{n}} - \frac{\partial \phi^{\text{TEM}}}{\partial n} \hat{\tau} \right) e^{\mp jkz} \quad (2.25b)$$

Desde un punto de vista práctico, como los campos se obtienen a partir del gradiente del potencial, lo realmente relevante es la diferencia de potencial entre los conductores más que su valor concreto. Por lo tanto, podemos tomar un conductor como referencia (que denotaremos como 0, y que normalmente es el conductor exterior que encierra la guía), de forma que el problema a resolver es:

$$\nabla_t^2 \phi^{\text{TEM}} = 0 \quad \text{en } S \quad (2.26a)$$

$$\phi^{\text{TEM}} \Big|_{\text{PE}_i} - \phi^{\text{TEM}} \Big|_{\text{PE}_0} = \Delta \phi_{i,0} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N_{\text{cep}} - 1 \quad (2.26b)$$

$$\frac{\partial \phi^{\text{TEM}}}{\partial n} \Big|_{\text{PM}} = 0 \quad (2.26c)$$

donde lo lógico es que el conductor de referencia tenga una tensión igual a cero, es decir, que este conectado a masa.

El problema (2.26) tiene $N_{\text{cep}} - 1$ grados de libertad, y por tanto hay $N_{\text{cep}} - 1$ soluciones TEM linealmente independientes entre sí. Una posible forma de generar una base del espacio que definen los modos TEM es mediante la solución de los siguientes problemas:

$$\nabla_t^2 \tilde{\phi}_j^{\text{TEM}} = 0 \quad \text{en } S \quad (2.27a)$$

$$\tilde{\phi}_j^{\text{TEM}}|_{\text{PE}_i} - \tilde{\phi}_j^{\text{TEM}}|_{\text{PE}_0} = \delta_{i,j} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, N_{\text{cep}} - 1 \quad (2.27b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\phi}_j^{\text{TEM}}}{\partial n} \right|_{\text{PM}} = 0 \quad (2.27c)$$

que darán lugar a $N_{\text{cep}} - 1$ soluciones linealmente independientes (ya que cualquiera de ellas no se puede poner en términos de las restantes, al no poder recuperar con estas últimas el potencial en los conductores de la primera). No obstante, el conjunto de soluciones TEM $\{\tilde{\phi}_1^{\text{TEM}}, \tilde{\phi}_2^{\text{TEM}}, \dots, \tilde{\phi}_{N_{\text{cep}}-1}^{\text{TEM}}\}$ recién obtenidas no serán ortonormales entre sí. Por dicho motivo, se les debe aplicar un proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para generar una base ortonormal $\{\phi_1^{\text{TEM}}, \phi_2^{\text{TEM}}, \dots, \phi_{N_{\text{cep}}-1}^{\text{TEM}}\}$, que dan lugar a los $N_{\text{cep}} - 1$ modos TEM que caracterizarán la guía, y cuyos campos se determinarán finalmente por (2.25).

El proceso de ortonormalización requiere definir previamente el producto interior entre dos soluciones TEM cualesquiera. Sean $\hat{\phi}_1^{\text{TEM}}$ y $\hat{\phi}_2^{\text{TEM}}$ dos soluciones TEM arbitrarias del problema (2.26), con campos eléctricos $\hat{\mathbf{E}}_1^{\text{TEM}} = -\nabla_t \hat{\phi}_1^{\text{TEM}}$ y $\hat{\mathbf{E}}_2^{\text{TEM}} = -\nabla_t \hat{\phi}_2^{\text{TEM}}$. Definimos el producto interior como:

$$\iint_S \hat{\mathbf{E}}_1^{\text{TEM}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_2^{\text{TEM}} dS = \iint_S \nabla_t \hat{\phi}_1^{\text{TEM}} \cdot \nabla_t \hat{\phi}_2^{\text{TEM}} dS \quad (2.28)$$

aprovechando la identidad de Green (A.3) recogida en el Anexo A, y el hecho de que los potenciales cumplen la ecuación de Laplace (2.21) en la sección transversal de la guía, este producto se puede expresar como:

$$\iint_S \hat{\mathbf{E}}_1^{\text{TEM}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_2^{\text{TEM}} dS = \oint_{\partial S} \hat{\phi}_1^{\text{TEM}} \frac{\hat{\phi}_2^{\text{TEM}}}{\partial n} dl - \iint_S \hat{\phi}_1^{\text{TEM}} \nabla_t^2 \hat{\phi}_2^{\text{TEM}} dS = \oint_{\partial S} \hat{\phi}_1^{\text{TEM}} \frac{\hat{\phi}_2^{\text{TEM}}}{\partial n} dl$$

La parte del contorno de ∂S que sea conductor magnético perfecto no contribuirá a la integral anterior en virtud de (2.23). Igualmente, en el conductor exterior (cuyo potencial se ha fijado a cero para cualquier solución TEM) dicha integral también será nula. Por tanto, la expresión se puede simplificar a:

$$\iint_S \hat{\mathbf{E}}_1^{\text{TEM}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_2^{\text{TEM}} dS = \sum_{i=1}^{N_{\text{cep}}-1} \int_{\partial S_i} \hat{\phi}_1^{\text{TEM}} \frac{\hat{\phi}_2^{\text{TEM}}}{\partial n} dl = \sum_{i=1}^{N_{\text{cep}}-1} \hat{\phi}_{1,i}^{\text{TEM}} \int_{\partial S_i} \frac{\hat{\phi}_2^{\text{TEM}}}{\partial n} dl$$

donde $\hat{\phi}_{1,i}^{\text{TEM}}$ denota el potencial en el conductor eléctrico i -ésimo de la solución TEM con campo $\hat{\mathbf{E}}_1^{\text{TEM}}$, y que se puede sacar fuera de la integral al ser un valor constante en el contorno ∂S_i de dicho conductor de la guía.

La expresión se puede simplificar aún más si tenemos en cuenta que el término dentro del integrando está asociado con la distribución lineal de carga que produce la solución TEM con potencial $\hat{\phi}_2^{\text{TEM}}$, ya que

$$\frac{\hat{\phi}_2^{\text{TEM}}}{\partial n} = \nabla_{\text{t}} \hat{\phi}_2^{\text{TEM}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\hat{E}_{\text{n},2}^{\text{TEM}} = \frac{\lambda_2^{\text{TEM}}}{\epsilon}$$

por aplicación de la condición de contorno del campo eléctrico normal a la separación entre un medio dieléctrico y un conductor perfecto [Balanis]. Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\iint_S \hat{\mathbf{E}}_1^{\text{TEM}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_2^{\text{TEM}} dS = \sum_{i=1}^{N_{\text{cep}}-1} \hat{\phi}_{1,i}^{\text{TEM}} \int_{\partial S_i} \frac{\lambda_2^{\text{TEM}}}{\epsilon} dl = \sum_{i=1}^{N_{\text{cep}}-1} \hat{\phi}_{1,i}^{\text{TEM}} \frac{\hat{Q}_{2,i}^{\text{TEM}}}{\epsilon} \quad (2.29)$$

lo que indica que el producto interior entre dos soluciones TEM se obtiene sumando, a lo largo de todos los conductores eléctricos perfectos interiores, el producto entre el potencial creado por una de las soluciones TEM y la carga (dividida por ϵ) que induce la otra solución en el conductor.

Tras aplicar una técnica de ortonormalización a una base de $N_{\text{cep}} - 1$ soluciones TEM linealmente independientes, haciendo uso del producto interior (2.28) (que se evalúa fácilmente mediante la aplicación de (2.29)), se obtendrá como resultado un conjunto de modos TEM $\{\phi_1^{\text{TEM}}, \phi_2^{\text{TEM}}, \dots, \phi_{N_{\text{cep}}-1}^{\text{TEM}}\}$ cuyos campos eléctricos (transversales) serán ortonormales entre sí al verificar

$$\iint_S \mathbf{E}_i^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{E}_j^{\text{TEM}} dS = \iint_S \nabla_{\text{t}} \phi_i^{\text{TEM}} \cdot \nabla_{\text{t}} \phi_j^{\text{TEM}} dS = \delta_{i,j} \quad (2.30)$$

hecho por el que también pasan a denotarse por \mathbf{e}^{TEM} , al ser versores (es decir, vectores unitarios o con norma 1) transversales. De hecho, por ser más específico, tendremos:

$$\mathbf{e}_i^{\text{TEM}} = -\nabla_{\text{t}} \phi_i^{\text{TEM}} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N_{\text{cep}} - 1 \quad (2.31)$$

dando lugar a la base de versores modales de campo eléctrico transversal en el caso TEM.

Capítulo 3

Obtención de las constantes de normalización

En los modos TEM, el proceso de ortonormalización recién descrito proporciona directamente los potenciales TEM, ϕ_i^{TEM} , cuyos vectores de campo eléctrico transversal asociados están ya normalizados ($\mathbf{e}_i^{TEM} = -\nabla_t \phi_i^{TEM}$), o lo que es lo mismo, verifican:

$$\iint_S \mathbf{e}_i^{TEM} \cdot \mathbf{e}_i^{TEM} dS = 1$$

Es importante que los vectores de campo eléctrico transversal de los modos cumplan esta condición, de cara a su posterior utilización en herramientas de análisis modal de estructuras electromagnéticas. Sin embargo, en el caso de los modos TE y TM, los potenciales obtenidos habitualmente están normalizados de acuerdo a la siguiente condición:

$$\iint_S (\varphi_n^{TE})^2 dS = \iint_S (\psi_n^{TM})^2 dS = 1 \quad (3.2)$$

y sus campos eléctricos transversales asociados, según (2.9b) y (2.16b), no estarán adecuadamente normalizados. Por dicho motivo, se deberán determinar las constantes que permitan, a partir de los potenciales TE y TM normalizados, obtener los versores \mathbf{e}^{TE} y \mathbf{e}^{TM} de campo eléctrico transversal.

3.1 Modos TE

En primer lugar se hallará la constante de normalización de los modos TE. Para ello forzaremos inicialmente que la proyección del versor de campo eléctrico transversal del n -ésimo modo TE consigo mismo sea igual a la unidad:

$$\iint_S \mathbf{e}_n^{TE} \cdot \mathbf{e}_n^{TE} dS = 1$$

A continuación, y en virtud de (2.9b), expresaremos dicho versor como $\mathbf{e}_n^{\text{TE}} = (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_n^{\text{TE}}) / c_n^{\text{TE}}$ donde c_n^{TE} es la constante de normalización a determinar:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{e}_n^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TE}} dS &= \iint_S \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_n^{\text{TE}}}{c_n^{\text{TE}}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_n^{\text{TE}}}{c_n^{\text{TE}}} dS \\ &= \frac{1}{c_n^{\text{TE}^2}} \iint_S \nabla_t \varphi_n^{\text{TE}} \nabla_t \varphi_n^{\text{TE}} dS \end{aligned}$$

Utilizando (A.3) y teniendo en cuenta (2.6), es posible reescribir la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{e}_n^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TE}} dS &= -\frac{1}{c_n^{\text{TE}^2}} \iint_S \varphi_n^{\text{TE}} \nabla_t^2 \varphi_n^{\text{TE}} dS + \frac{1}{c_n^{\text{TE}^2}} \oint_{\partial S} \varphi_n^{\text{TE}} \frac{\partial \varphi_n^{\text{TE}}}{\partial n} dl \\ &= \frac{1}{c_n^{\text{TE}^2}} \iint_S \varphi_n^{\text{TE}} k_{c,n}^2 \varphi_n^{\text{TE}} dS + \frac{1}{c_n^{\text{TE}^2}} \oint_{\partial S} \varphi_n^{\text{TE}} \frac{\partial \varphi_n^{\text{TE}}}{\partial n} dl \\ &= \frac{k_{c,n}^2}{c_n^{\text{TE}^2}} \iint_S (\varphi_n^{\text{TE}})^2 dS + \frac{1}{c_n^{\text{TE}^2}} \oint_{\partial S} \varphi_n^{\text{TE}} \frac{\partial \varphi_n^{\text{TE}}}{\partial n} dl \end{aligned}$$

Como el contorno ∂S de la guía está formado por paredes eléctricas y magnéticas perfectas, la segunda integral en la parte derecha de la expresión anterior será siempre nula gracias a la condición de contorno (2.7). Por tanto, y tras aplicar la condición de normalización de los potenciales (3.2), podemos decir:

$$\iint_S \mathbf{e}_n^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TE}} dS = \frac{k_{c,n}^2}{c_n^{\text{TE}^2}} = 1$$

Como resultado de este procedimiento de normalización, finalmente se deduce que el valor de la constante buscada es justamente el número de onda de corte del modo ($c_n^{\text{TE}} = k_{c,n}$), deduciéndose finalmente la siguiente expresión para el n -ésimo versor de campo eléctrico transversal de un modo TE:

$$\mathbf{e}_n^{\text{TE}} = (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_n^{\text{TE}}) / k_{c,n}. \quad (3.3)$$

3.2 Modos TM

En segundo lugar, se calculará la constante de normalización para los modos TM. Para ello se partirá, igual que en el caso anterior, forzando que el producto interior del versor de campo eléctrico transversal del n -ésimo modo TM sea igual a la unidad:

$$\iint_S \mathbf{e}_n^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS = 1$$

Atendiendo ahora a la relación entre el campo eléctrico transversal de un modo TM y su función potencial (ver (2.16b)), podemos decir que $\mathbf{e}_n^{\text{TM}} = -\nabla_t \psi_n^{\text{TM}} / c_n^{\text{TM}}$. Nos queda por determinar c_n^{TM} para cumplir la condición de normalización:

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{e}_n^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS &= \iint_S \frac{\nabla_t \psi_n^{\text{TM}}}{c_n^{\text{TM}}} \cdot \frac{\nabla_t \psi_n^{\text{TM}}}{c_n^{\text{TM}}} dS \\
&= \frac{1}{c_n^{\text{TM}^2}} \iint_S \nabla_t \psi_n^{\text{TM}} \nabla_t \psi_n^{\text{TM}} dS
\end{aligned}$$

Acto seguido, podemos emplear la identidad de Green (A.3) y, además, teniendo en cuenta (2.13), se puede volver a escribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{e}_n^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS &= -\frac{1}{c_n^{\text{TM}^2}} \iint_S \psi_n^{\text{TM}} \nabla_t^2 \psi_n^{\text{TM}} dS + \frac{1}{c_n^{\text{TM}^2}} \oint_{\partial S} \psi_n^{\text{TM}} \frac{\partial \psi_n^{\text{TM}}}{\partial n} dl \\
&= \frac{1}{c_n^{\text{TM}^2}} \iint_S \psi_n^{\text{TM}} k_{c,n}^2 \psi_n^{\text{TM}} dS + \frac{1}{c_n^{\text{TM}^2}} \oint_{\partial S} \psi_n^{\text{TM}} \frac{\partial \psi_n^{\text{TM}}}{\partial n} dl \\
&= \frac{k_{c,n}^2}{c_n^{\text{TM}^2}} \iint_S (\psi_n^{\text{TM}})^2 dS + \frac{1}{c_n^{\text{TM}^2}} \oint_{\partial S} \psi_n^{\text{TM}} \frac{\partial \psi_n^{\text{TM}}}{\partial n} dl
\end{aligned}$$

Por último, podemos simplificar la expresión empleando la condición de normalización de los potenciales (3.2) y la condición de contorno de los modos TM en conductores perfectos (2.14):

$$\iint_S \mathbf{e}_n^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM}} dS = \frac{k_{c,n}^2}{c_n^{\text{TM}^2}} = 1$$

de donde obtenemos nuevamente que el valor de la constante para los modos TM vuelve a ser su número de onda de corte ($c_n^{\text{TM}} = k_{c,n}$), y por tanto:

$$\mathbf{e}_n^{\text{TM}} = -\nabla_t \psi_n^{\text{TM}} / k_{c,n}. \quad (3.4)$$

Capítulo 4

Integrales de acoplo entre los modos

En este apartado se calcularán las integrales de acoplo entre los distintos modos en la unión de dos guías de sección arbitraria. Dicha integral sólo se deberá realizar en la sección de la guía más pequeña de la unión, que es donde ninguno de los campos (es decir, ni el versor del modo de la guía grande ni el de la guía pequeña) son idénticamente nulos. A la superficie de dicha guía la denotaremos en este apartado por S y su contorno será ∂S . Asumiremos además que dicho contorno estará formado exclusivamente por conductores eléctricos perfectos, al ser éste el caso que se encuentra en la práctica. Finalmente, con los subíndices b y s haremos referencia a los modos de la guía grande y la guía pequeña, respectivamente.

Teniendo en cuenta que existen 3 familias de modos en cada guía arbitraria homogénea (TE, TM y TEM), deberemos hallar la solución analítica de nueve integrales que representen todas las posibles combinaciones de modos entre dos guías de onda.

■ $TE_b - TM_s$

En primer lugar expresamos el campo eléctrico normalizado en función de los potenciales, a partir de la expresión (3.3) para los modos TE y (3.4) para los TM.

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TM}} dS = \frac{-1}{k_b k_s} \iint_S \nabla_t \psi_s^{\text{TM}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_b^{\text{TE}}) dS$$

A continuación, utilizamos (A.4) para simplificar la expresión, obteniendo:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TM}} dS = \frac{1}{k_b k_s} \oint_{\partial S} \psi_s^{\text{TM}} \frac{\partial \varphi_b^{\text{TE}}}{\partial \tau} dl = 0 \quad (4.1)$$

ya que el potencial ψ_s^{TM} se anula en ∂S por las condiciones de contorno del modo TM recogidas en la expresión (2.14).

■ $TM_b - TE_s$

En este caso el procedimiento será similar a la integral de acoplo calculada con anterioridad, es decir, en primer lugar expresaremos los campos eléctricos normalizados

en función de los potenciales, utilizando para ello las expresiones (3.3) y (3.4):

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TE}} dS &= \frac{-1}{k_b k_s} \iint_S \nabla_t \psi_b^{\text{TM}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_s^{\text{TE}}) dS \\ &= \frac{1}{k_b k_s} \iint_S \nabla_t \varphi_s^{\text{TE}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \psi_b^{\text{TM}}) dS\end{aligned}$$

donde se ha aplicado la identidad $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ para obtener la última igualdad. Este hecho permite obtener dos representaciones diferentes para la integral a utilizar. Si ahora empleamos (A.4) para simplificar las expresiones anteriores, podemos concluir que:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TE}} dS = \frac{1}{k_b k_s} \oint_{\partial S} \psi_b^{\text{TM}} \frac{\partial \varphi_s^{\text{TE}}}{\partial \tau} dl = \frac{-1}{k_b k_s} \oint_{\partial S} \varphi_s^{\text{TE}} \frac{\partial \psi_b^{\text{TM}}}{\partial \tau} dl \quad (4.2)$$

lo que nos da dos formas diferentes de expresar la integral de acoplo, con el fin de poder escoger la más sencilla de calcular en una posible futura implementación.

■ $TE_b - TE_s$

Siguiendo el mismo procedimiento descrito en casos anteriores, se pueden expresar los campos eléctricos transversales normalizados en función de sus potenciales y las constantes de normalización atendiendo a (3.3):

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TE}} dS &= \iint_S \frac{(\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_b^{\text{TE}})}{k_b} \cdot \frac{(\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_s^{\text{TE}})}{k_s} dS \\ &= \frac{1}{k_b k_s} \iint_S \nabla_t \varphi_b^{\text{TE}} \cdot \nabla_t \varphi_s^{\text{TE}} dS\end{aligned}$$

En este punto podemos utilizar (A.3) para reescribir la expresión y, tras la aplicación de las relaciones (2.6) y (2.7) asociadas al caso TE, es posible obtener:

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TE}} dS &= \frac{-1}{k_b k_s} \iint_S \varphi_b^{\text{TE}} \cdot \nabla_t^2 \varphi_s^{\text{TE}} dS + \frac{1}{k_b k_s} \oint_{\partial S} \varphi_b^{\text{TE}} \frac{\partial \varphi_s^{\text{TE}}}{\partial n} dl \\ &= \frac{k_s^2}{k_b k_s} \iint_S \varphi_b^{\text{TE}} \cdot \varphi_s^{\text{TE}} dS\end{aligned}$$

Finalmente tras emplear (A.9) y volver a hacer uso de la condición de contorno (2.7), podemos simplificar la expresión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TE}} dS &= \frac{k_s}{k_b} \frac{1}{k_b^2 - k_s^2} \oint_{\partial S} \left(\varphi_b^{\text{TE}} \frac{\partial \varphi_s^{\text{TE}}}{\partial n} - \varphi_s^{\text{TE}} \frac{\partial \varphi_b^{\text{TE}}}{\partial n} \right) dl \\ &= \frac{k_s/k_b}{k_s^2 - k_b^2} \oint_{\partial S} \varphi_s^{\text{TE}} \frac{\partial \varphi_b^{\text{TE}}}{\partial n} dl\end{aligned} \quad (4.3)$$

■ $TM_b - TM_s$

El procedimiento de resolución será similar al utilizado anteriormente, pero con

las expresiones de los campos normalizados de los modos TM en función de sus potenciales y constantes de normalización (3.4).

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TM}} dS = \frac{1}{k_b k_s} \iint_S \nabla_t \psi_b^{\text{TM}} \cdot \nabla_t \psi_s^{\text{TM}} dS$$

Como la expresión resultante es idéntica a la del caso $\text{TE}_b - \text{TE}_s$ pero las condiciones de contorno TM son las duales al caso TE, hemos de emplear (A.3) tomando los potenciales intercambiados, de forma que tras utilizar las condiciones de contorno de los modos TM (2.14) se vuelve a anular la integral de línea:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TM}} dS &= \frac{-1}{k_b k_s} \iint_S \psi_s^{\text{TM}} \cdot \nabla_t^2 \psi_b^{\text{TM}} dS + \frac{1}{k_b k_s} \oint_{\partial S} \psi_s^{\text{TM}} \frac{\partial \psi_b^{\text{TM}}}{\partial n} dl \\ &= \frac{k_b^2}{k_b k_s} \iint_S \psi_s^{\text{TM}} \cdot \psi_b^{\text{TM}} dS \end{aligned}$$

Por último, es posible emplear (A.9) y a continuación hacer uso de nuevo de (2.14), reduciendo la expresión a una única integral:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TM}} dS &= \frac{k_b}{k_s} \frac{1}{k_s^2 - k_b^2} \oint_{\partial S} \left(\psi_s^{\text{TM}} \frac{\partial \psi_b^{\text{TM}}}{\partial n} - \psi_b^{\text{TM}} \frac{\partial \psi_s^{\text{TM}}}{\partial n} \right) dl \\ &= \frac{k_b/k_s}{k_b^2 - k_s^2} \oint_{\partial S} \psi_b^{\text{TM}} \frac{\partial \psi_s^{\text{TM}}}{\partial n} dl \end{aligned} \quad (4.4)$$

■ $\text{TEM}_b - \text{TEM}_s$

Siguiendo el mismo esquema de resolución descrito, escribimos de nuevo los campos eléctricos normalizados en función de sus potenciales (2.31):

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \iint_S \nabla_t \phi_b^{\text{TEM}} \cdot \nabla_t \phi_s^{\text{TEM}} dS$$

Igual que en los casos anteriores, podemos utilizar (A.3) para reescribir la expresión como suma de dos integrales:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = - \iint_S \phi_s^{\text{TEM}} \cdot \nabla_t^2 \phi_b^{\text{TEM}} dS + \oint_{\partial S} \phi_s^{\text{TEM}} \frac{\partial \phi_b^{\text{TEM}}}{\partial n} dl$$

donde la primera de ellas se anula por aplicación de (2.24a). Hay que tener presente que intercambiando los vectores ϕ_b^{TEM} y ϕ_s^{TEM} hubieramos obtenido un resultado análogo, ya que ambos verifican la condición de Laplace en la sección transversal S de la guía más pequeña. Este hecho nos permite escribir la expresión final de la integral de acoplo de dos formas distintas:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \oint_{\partial S} \phi_s^{\text{TEM}} \frac{\partial \phi_b^{\text{TEM}}}{\partial n} dl = \oint_{\partial S} \phi_b^{\text{TEM}} \frac{\partial \phi_s^{\text{TEM}}}{\partial n} dl \quad (4.5)$$

para que en una implementación práctica podamos escoger la que más sencilla sea de resolver.

■ $TEM_b - TM_s$

Nuevamente, empezamos por reescribir las expresiones de los campos eléctricos normalizados en función de sus potenciales ((2.31) para el modo TEM, y (3.4) para el modo TM):

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TM}} dS = \frac{1}{k_s} \iint_S \nabla_t \phi_b^{\text{TEM}} \cdot \nabla_t \psi_s^{\text{TM}} dS$$

A continuación, es posible utilizar la primera identidad de Green (A.3) para escribir la expresión como suma de dos integrales:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TM}} dS = -\frac{1}{k_s} \iint_S \psi_s^{\text{TM}} \cdot \nabla_t^2 \phi_b^{\text{TEM}} dS + \frac{1}{k_s} \oint_{\partial S} \psi_s^{\text{TM}} \frac{\partial \phi_b^{\text{TEM}}}{\partial n} dl = 0 \quad (4.6)$$

que en este caso se anulan, teniendo en cuenta que el potencial de un modo TEM verifica (2.24a) y por otro lado, el potencial del modo TM de la guía pequeña se anula en ∂S en virtud de (2.14), al estar este contorno formado exclusivamente por paredes eléctricas perfectas. Por tanto, el resultado de esta integral de acoplamiento será siempre cero.

■ $TE_b - TEM_s$

En primer lugar, y al igual que en los casos anteriores, procedemos a expresar los campos eléctricos normalizados en función de los potenciales. Para ello empleamos (3.3) y (2.31) para los modos TE y TEM, respectivamente:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS &= -\frac{1}{k_b} \iint_S \nabla_t \phi_s^{\text{TEM}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_b^{\text{TE}}) dS \\ &= \frac{1}{k_b} \iint_S \nabla_t \varphi_b^{\text{TE}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \phi_s^{\text{TEM}}) dS \end{aligned}$$

donde de nuevo se ha aplicado la identidad $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ para obtener la última integral. Siendo así posible reescribir la expresión por medio de (A.4) y decir:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TE}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \frac{-1}{k_b} \oint_{\partial S} \frac{\partial \phi_s^{\text{TEM}}}{\partial \tau} \varphi_b^{\text{TE}} dl = 0 \quad (4.7)$$

Dicha integral se anula, ya que el potencial de un modo TEM es constante a lo largo del contorno de los conductores eléctricos perfectos que limitan la guía en la que se define.

■ $TEM_b - TE_s$

Partimos otra vez expresando los campos transversales normalizados en función de sus potenciales, (2.31) para el modo TEM y (3.3), para el modo TE. De esta forma, y utilizando la relación $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$, podemos expresar la integral de acoplo buscada de dos formas diferentes:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TE}} dS &= \frac{-1}{k_s} \iint_S \nabla_t \phi_b^{\text{TEM}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_s^{\text{TE}}) dS \\ &= \frac{1}{k_s} \iint_S \nabla_t \varphi_s^{\text{TE}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \phi_b^{\text{TEM}}) dS \end{aligned}$$

A continuación, se puede emplear (A.4) para volver a escribir cada una de las dos expresiones anteriores en función de una integral de línea. Como ya se ha visto en caso anteriores, eso hace que la integral de acoplo a calcular se pueda escribir de dos formas equivalentes, con el propósito de facilitar una futura implementación práctica de la misma:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TE}} dS = \frac{1}{k_s} \oint_{\partial S} \phi_b^{\text{TEM}} \frac{\partial \varphi_s^{\text{TE}}}{\partial \tau} dl = \frac{-1}{k_s} \oint_{\partial S} \varphi_s^{\text{TE}} \frac{\partial \phi_b^{\text{TEM}}}{\partial \tau} dl \quad (4.8)$$

■ $TM_b - TEM_s$

En este último caso seguiremos también el procedimiento empleado anteriormente, es decir, en primer lugar escribiremos las expresiones de los campos eléctricos normalizados en función de sus potenciales y sus constantes de normalización correspondientes. En el caso del modo TM utilizaremos (3.4), mientras que para los TEM se empleará (2.31):

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \frac{1}{k_b} \iint_S \nabla_t \phi_s^{\text{TEM}} \cdot \nabla_t \psi_b^{\text{TM}} dS$$

nuevamente podemos utilizar (A.3) para reescribir la expresión como suma de una integral de superficie y otra de línea:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \frac{-1}{k_b} \iint_S \psi_b^{\text{TM}} \cdot \nabla_t^2 \phi_s^{\text{TEM}} dS + \frac{1}{k_b} \oint_{\partial S} \psi_b^{\text{TM}} \frac{\partial \phi_s^{\text{TEM}}}{\partial n} dl$$

De estas dos integrales, la de superficie se anula puesto que el potencial TEM verifica la ecuación de Laplace (2.24a) en S , quedando finalmente la integral de acoplo en forma de una integral de línea sobre el contorno de la guía pequeña:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \frac{1}{k_b} \oint_{\partial S} \psi_b^{\text{TM}} \frac{\partial \phi_s^{\text{TEM}}}{\partial n} dl \quad (4.9)$$

Capítulo 5

Relación entre potenciales y cargas y corrientes superficiales

Las expresiones (4.1)-(4.9) obtenidas en el capítulo anterior permiten reducir el cálculo de las integrales de acoplamiento entre los modos de dos guías arbitrarias a una integral de línea en el contorno ∂S de la guía pequeña, que involucran a los potenciales de los modos (bien directamente, o bien a través de sus derivadas en la dirección normal o tangencial al contorno).

Por otro lado, el valor de los potenciales en el contorno de su guía, o bien alguna de sus derivadas, se pueden relacionar con las cargas y las corrientes que hay en dicho contorno. En este apartado se van a deducir las expresiones más relevantes que pueden ser utilizadas, en el caso de que se conozcan dichas fuentes, para acelerar el cálculo de las integrales de acoplamiento derivadas en el capítulo 4.

Para establecer dicha relación, consideraremos las condiciones de contorno para el campo eléctrico normal y el campo magnético tangencial (al ser los que están asociados a las fuentes) [Balanis]:

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \quad (5.1a)$$

$$\rho = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \quad (5.1b)$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ un vector normal a la interfaz que va desde el medio 1 hacia el medio 2. En el caso de que el medio 2 sea un conductor eléctrico perfecto y que el medio 1 sea lineal, isótropo y homogéneo con permitividad dieléctrica ϵ , la expresión anterior se simplifica a:

$$\mathbf{J} = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} \quad (5.2a)$$

$$\frac{\rho}{\epsilon} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} \quad (5.2b)$$

que serán las que aplicarán en nuestro caso. Veamos ahora la relación entre potenciales y fuentes para cada uno de los tipos de modos.

5.1 Modos TE

Consideremos el caso del n -ésimo modo TE propagando a lo largo del eje z , y cuyo campo eléctrico transversal sea estrictamente el fijado por el versor normalizado \mathbf{e}_n^{TE} . Si tenemos en cuenta que, en virtud de (2.9b), el campo eléctrico transversal que produciría un campo magnético axial H_z^{TE} igual al potencial φ_n^{TE} normalizado según (3.2) sería igual a:

$$\mathbf{E}_{t,n}^{\text{TE}} = \frac{j\omega\mu}{k_{c,n}^{\text{TE}2}} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi_n^{\text{TE}}) e^{\mp\gamma_n^{\text{TE}} z}$$

y que por otro lado, la expresión del versor normalizado viene fijada por (3.3), es evidente que el campo magnético axial que realmente tiene que haber en la guía para que el campo eléctrico transversal coincida con \mathbf{e}_n^{TE} será:

$$H_z^{\text{TE}} = \frac{k_{c,n}}{j\omega\mu} \varphi_n^{\text{TE}}$$

La corriente que generará esta componente de campo magnético, según (5.2a), será:

$$\mathbf{J} = -\hat{\mathbf{n}} \times H_z^{\text{TE}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{k_{c,n}}{j\omega\mu} \varphi_n^{\text{TE}} \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

de donde se deduce que la relación entre el potencial φ_n^{TE} en el contorno y la corriente en dicho contorno asociada a un campo eléctrico igual al versor \mathbf{e}_n^{TE} es:

$$\varphi_n^{\text{TE}}|_{\partial S} = \frac{j\omega\mu}{k_{c,n}} J_{\tau,n}^{\text{TE}} \quad (5.3)$$

5.2 Modos TM

Si excitamos en la guía el n -ésimo modo TM de forma que su campo eléctrico transversal se corresponda con \mathbf{e}_n^{TM} , es fácil deducir ahora la expresión del campo magnético que hay en la guía mediante (2.17):

$$\mathbf{H}_{t,n}^{\text{TM}} = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_n^{\text{TM}}}{Z_n^{\text{TM}}} = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma_n^{\text{TM}} k_{c,n}^{\text{TM}}} (\hat{\mathbf{z}} \times -\nabla_t \psi_n^{\text{TM}})$$

y una vez conocemos todo el campo magnético del modo (al ser un modo TM, no tendrá componente axial), se puede deducir la expresión de la corriente por (5.2a):

$$\mathbf{J} = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_{t,n}^{\text{TM}} = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma_n^{\text{TM}} k_{c,n}^{\text{TM}}} (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \psi_n^{\text{TM}}) = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma_n^{\text{TM}} k_{c,n}^{\text{TM}}} \left(\frac{\partial \psi_n^{\text{TM}}}{\partial n} \hat{\mathbf{z}} \right)$$

lo que permite también deducir la relación entre ψ_n^{TM} en el contorno y la corriente en dicho contorno asociada a un campo eléctrico \mathbf{e}_n^{TM} :

$$\frac{\partial \psi_n^{\text{TM}}}{\partial n} \Big|_{\partial S} = \frac{\gamma_n^{\text{TM}} k_{c,n}^{\text{TM}}}{j\omega\epsilon} J_{z,n}^{\text{TM}} \quad (5.4)$$

5.3 Modos TEM

El último escenario a considerar es el caso en el que el campo eléctrico transversal sea el correspondiente al versor del n -ésimo modo TEM $\mathbf{e}_n^{\text{TEM}}$. Esta situación es sin duda la más simple, ya que por aplicación directa de (5.2b) se deduce:

$$\frac{\rho}{\epsilon} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TEM}} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot (-\nabla_t \phi_n^{\text{TEM}}) = \frac{\partial \phi_n^{\text{TEM}}}{\partial n} \quad (5.5)$$

por la relación (2.31) existente entre el versor de campo eléctrico transversal y el potencial para un modo TEM. De la expresión anterior se deriva directamente la expresión buscada:

$$\left. \frac{\partial \phi_n^{\text{TEM}}}{\partial n} \right|_{\partial S} = \frac{\rho_n^{\text{TEM}}}{\epsilon} \quad (5.6)$$

El motivo para relacionar los modos TEM con la densidad de carga, y los modos TE y TM con la corriente, es por ser éstas las magnitudes habitualmente consideradas en cada tipo de modo.

Capítulo 6

Validación práctica mediante el cálculo de la integral de acoplo TEM-TEM en una guía coaxial

6.1 Introducción

Para realizar la validación práctica del método desarrollado a lo largo de este trabajo, se ha escogido una geometría como la de la figura 6.1 que se muestra a continuación.

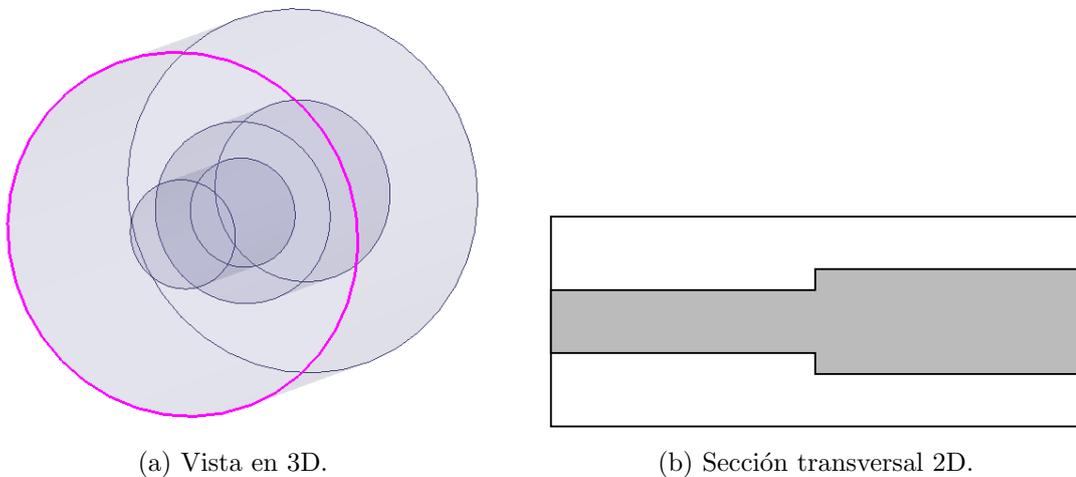


Fig. 6.1: Vistas de la geometría a analizar.

Como se puede observar, la geometría escogida para la comprobación consiste en una intersección de dos guías coaxiales, en las cuales el conductor exterior tiene en mismo radio en los dos casos, mientras que en el conductor interior encontramos un cambio de radio en la discontinuidad. En la primera guía, el radio del conductor interior es inferior al de la segunda y por lo tanto, ésta será considerada la guía grande de la discontinuidad.

La elección de esta geometría concreta no ha sido aleatoria, sino que se ha escogido ya que es una de las pocas estructuras de las cuales podemos calcular su solución teórica. De esta manera, podemos comprobar las mejoras que el nuevo método supone respecto al anterior, ya que conocemos la solución exacta y podemos analizar los errores de las tres soluciones (teórica, método de proyecciones, método de la integral de línea).

A pesar de que este caso en particular tiene una solución analítica sencilla de calcular, se tratará como si esta no fuese posible de hallar y se aplicarán diferentes técnicas numéricas para poder evaluar sus prestaciones, como se detalla en los siguientes apartados de este trabajo.

6.2 Resolución analítica

En una línea coaxial el potencial sigue la siguiente forma:

$$\phi(\rho, \varphi) = \frac{V_0 \ln\left(\frac{b}{\rho}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (6.1)$$

cuya demostración se puede encontrar en [Pozar, ec. 3.153].

Aplicando la expresión (2.31) obtenida previamente, podemos deducir el versor de campo eléctrico transversal para una guía coaxial de radios arbitrarios:

$$\mathbf{e} = -\nabla\phi(\rho, \varphi) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (6.2)$$

donde $V_0 = \sqrt{\ln(b/a)/(2\pi)}$ para que el campo esté convenientemente normalizado.

Consideremos ahora un caso como el considerado en este apartado (ver figura 6.1), donde se tiene un salto entre dos guías coaxiales. Sean $\mathbf{e}_b^{\text{TEM}}$ y $\mathbf{e}_s^{\text{TEM}}$ los versores de campo eléctrico transversal del modo TEM de la guía grande y la guía pequeña de la discontinuidad, respectivamente. A continuación calcularemos la expresión analítica de la integral de acoplamiento entre ambos modos de dos formas diferentes: de forma directa a partir de los versores de campo eléctrico y también a partir de la expresión equivalente con potenciales (4.5). Para el primer caso tendremos:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{e}_b^{\text{TEM}}, \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} \rangle &= \iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \iint_S \frac{V_b V_s}{\ln\left(\frac{b_b}{a_b}\right) \ln\left(\frac{b_s}{a_s}\right)} \frac{1}{\rho^2} dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{a_s}^{b_s} \frac{V_b V_s}{\ln\left(\frac{b_b}{a_b}\right) \ln\left(\frac{b_s}{a_s}\right)} \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\varphi \\
&= \frac{V_b V_s}{\ln\left(\frac{b_b}{a_b}\right) \ln\left(\frac{b_s}{a_s}\right)} \int_{a_s}^{b_s} \frac{1}{\rho} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{V_b V_s}{\ln\left(\frac{b_b}{a_b}\right) \ln\left(\frac{b_s}{a_s}\right)} [\ln(b_s) - \ln(a_s)] 2\pi \\
&= \frac{2\pi V_b V_s}{\ln\left(\frac{b_b}{a_b}\right)} \tag{6.3}
\end{aligned}$$

En el caso de la expresión con los potenciales, el desarrollo sería el siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{e}_b^{\text{TEM}}, \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} \rangle &= \oint_{\partial S} \phi_s(\rho, \varphi) \frac{\partial \phi_b(\rho, \varphi)}{\partial n} dl \\
&= \oint_{\rho=b_s} \phi_s(b_s, \varphi) \frac{\partial \phi_b(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{b_s} b_s d\varphi + \oint_{\rho=a_s} \phi_s(a_s, \varphi) \left(-\frac{\partial \phi_b(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) \Big|_{a_s} a_s d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} V_s \frac{\ln\left(\frac{b_s}{b_s}\right)}{\ln\left(\frac{b_s}{a_s}\right)} \left[-\frac{V_b}{b_s} \frac{1}{\ln\left(\frac{b_b}{a_b}\right)} \right] b_s d\varphi + \int_0^{2\pi} V_s \frac{\ln\left(\frac{b_s}{a_s}\right)}{\ln\left(\frac{b_s}{a_s}\right)} \left[\frac{V_b}{a_s} \frac{1}{\ln\left(\frac{b_b}{a_b}\right)} \right] a_s d\varphi \\
&= \frac{2\pi V_b V_s}{\ln\left(\frac{b_b}{a_b}\right)} \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Como se puede comprobar, (6.3) y (6.4) nos proporcionan el mismo resultado, demostrando que las expresiones calculadas en el apartado 4 son correctas desde un punto de vista teórico.

6.3 Resolución numérica

6.3.1 Resolución del problema TEM mediante el Método de los Momentos

En un caso general con geometría arbitraria, los modos TEM no tendrán una expresión analítica y se deben calcular de forma numérica. Para resolver en estos casos el problema TEM (2.26), se propone seguir la técnica descrita en [Tarin]. Este procedimiento es una técnica de ecuación integral cuya incógnita será la densidad de carga que se expande sobre el contorno σ de todos los conductores que limitan la guía (exceptuando aquellas partes que coincidan con las paredes del *box* donde se defina la función de Green de la ecuación

integral). Dicha densidad de carga incógnita se expandirá en términos de un conjunto de N funciones base linealmente independientes $u_n(l)$ de forma que:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\sigma(l)}{\epsilon} &= \sum_{n=1}^N b_n u_n(l) \\ &= \sum_{n=1}^{N_0} b_n u_n(l) + \sum_{n=N_0+1}^{N_0+N_1} b_n u_n(l) + \dots + \sum_{n=N-N_{N_{cep}-1}+1}^N b_n u_n(l) \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde N_i es el número de funciones base consideradas en σ_i , es decir, la parte del contorno del i -ésimo conductor de la guía que no coincide con el *box*. Las funciones bases han sido elegidas como *splines* parabólicos que satisfacen las condiciones de contorno apropiadas en la parte del contorno σ_i donde han sido definidas. Además, las funciones base están normalizadas de forma que sus integrales a lo largo de este contorno son iguales a la unidad.

Por otro lado, se ha tomado como función de Green la de un box rectangular que encierre a la guía arbitraria, la cual se puede escribir en general como (ver [Collin]):

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_m \frac{\psi_m^{\text{box}}(\mathbf{r}) \psi_m^{\text{box}}(\mathbf{r}')}{k_{c,m}^{\text{box}^2}} \quad (6.6)$$

donde $k_{c,m}^{\text{box}}$ y $\psi_m^{\text{box}}(\mathbf{r})$ representan el número de onda de corte y el potencial del m -ésimo modo TM del *box*, respectivamente. La elección de un *box* de forma rectangular nos permite tener expresiones analíticas para los términos anteriores. Sin embargo, no es conveniente evaluar (6.6) directamente ya que el término general de la serie converge muy lentamente. En su lugar, se calculará de manera muy eficiente en el dominio transformado por medio de la fórmula de la suma de Poisson [Cogollos]. La función de Green (6.6) cumplirá obviamente todas las condiciones de contorno en el *box* rectangular y además tendrá en cuenta el efectos de sus paredes, lo que hace que éstas no tengan que ser consideradas a la hora de expandir la distribución de carga incógnita.

El potencial eléctrico del modo TEM, por tanto, se podrá expresar en términos de la función de Green escalar de Laplace (6.6) y la densidad de carga incógnita (6.5) en σ de la siguiente forma:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(l') dl' \quad (6.7)$$

que tras aplicar el Método de los Momentos, en su variante de Galerkin [Harrington], da lugar al siguiente sistema matricial:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{f} \quad \text{con} \quad L_{i,j} = \iint_{\sigma} u_i(l) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_j(l') dl' dl \quad (6.8)$$

donde \mathbf{f} es un vector que contiene los potenciales eléctricos del conductor en el que se encuentra cada función base, y \mathbf{b} es un vector que contiene la amplitud de cada una de

las funciones base.

Una vez se han calculado las amplitudes b_n de las funciones base en las que se expande la densidad de carga ((6.5)) tras resolver el sistema lineal de ecuaciones en (6.8), el campo eléctrico del modo TEM se puede obtener como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla_t \phi = -\sum_{n=1}^N b_n \int_{\sigma} \nabla_t g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_n(l') dl' \quad (6.9)$$

Es interesante comentar que los elementos $L_{i,i}$ de (6.8) implican una singularidad en la función de Green. Esta singularidad se comporta como:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xrightarrow{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} K \ln R^2 = K \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \quad (6.10)$$

cuyo cálculo para arcos rectos, circulares y elípticos puede realizarse empleando la técnica descrita en [Cogollos].

Esta técnica de resolución se debería aplicar para obtener las $N_{\text{cep}} - 1$ soluciones TEM linealmente independientes asociadas a colocar uno de los conductores interiores con potencial 1, y el resto a cero (2.27). Una vez determinadas estas soluciones, se aplicaría el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt descrito al final del apartado 2.3 para obtener un conjunto de modos TEM ortogonales y cuyos vectores de campo eléctrico transversal están normalizados.

6.3.2 Cálculo de la integral de acoplo mediante proyecciones

Supongamos que ya se han determinado los modos TEM de las dos guías arbitrarias que forman la discontinuidad con la técnica recogida en la sección 6.3.1. A continuación vamos a indicar las dos formas con las que habitualmente se calcularía la integral de acoplo entre dos modos TEM de ambas guías.

Una primera alternativa consistiría en realizar una integración numérica en la superficie de la guía pequeña, evaluando el campo de cada modo mediante la expresión (6.9). Sin embargo, es una alternativa costosa computacionalmente, ya que al tratarse de una integral de superficie, se deben evaluar los campos en una gran cantidad de puntos si se pretenden obtener resultados precisos.

La otra opción se basa en explotar una propiedad de la técnica numérica descrita en la sección 6.3.1, y es que ésta permite obtener las integrales de acoplo de cada modo TEM de la guía arbitraria con los modos TM de su *box* de forma muy eficiente. Veamos cómo. Empezamos aplicando (6.9) en la expresión general de dicha integral de acoplo:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{e}_p^{\text{TEM}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_q^{\text{TM,box}}(\mathbf{r}) dS &= \iint_{S_{\text{box}}} \mathbf{e}_p^{\text{TEM}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_q^{\text{TM,box}}(\mathbf{r}) dS_{\text{box}} \\ &= - \iint_{S_{\text{box}}} \left[\sum_{n=1}^N b_{p,n} \int_{\sigma} \nabla_t g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_n(l') dl' \right] \cdot \mathbf{e}_q^{\text{TM,box}}(\mathbf{r}) dS_{\text{box}} \quad (6.11) \end{aligned}$$

donde se ha extendido la integral en la guía arbitraria a todo el *box* ya que en su interior (6.9) sigue siendo válida. Por otro lado, podemos aprovechar que el gradiente de la función de Green se puede expresar como:

$$\nabla_{\mathbf{t}} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_m \frac{\nabla_{\mathbf{t}} \psi_m^{\text{box}}(\mathbf{r}) \psi_m^{\text{box}}(\mathbf{r}')}{k_{c,m}^{\text{box}^2}} = - \sum_m \frac{\mathbf{e}_m^{\text{TM,box}}(\mathbf{r}) \psi_m^{\text{box}}(\mathbf{r}')}{k_{c,m}^{\text{box}}} \quad (6.12)$$

debido a la relación (3.4) entre los versores de campo eléctrico transversal de los modos TM y sus potenciales. Si ahora introducimos (6.12) en (6.11) y desarrollamos aprovechando que los versores de los modos TM del *box* son ortonormales en su superficie, tenemos:

$$\begin{aligned} & \iint_S \mathbf{e}_p^{\text{TEM}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_q^{\text{TM,box}}(\mathbf{r}) dS \\ &= \sum_{n=1}^N b_{p,n} \int_{\sigma} \left[u_n(l') \sum_m \frac{\psi_m^{\text{box}}(\mathbf{r}')}{k_{c,m}^{\text{box}}} \iint_{S_{\text{box}}} \mathbf{e}_m^{\text{TM,box}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_q^{\text{TM,box}}(\mathbf{r}) dS_{\text{box}} \right] dl' \\ &= \frac{1}{k_{c,q}^{\text{box}}} \sum_{n=1}^N b_{p,n} \int_{\sigma} u_n(l') \psi_q^{\text{box}}(\mathbf{r}') dl' \end{aligned} \quad (6.13)$$

logrando así una expresión simple que permite calcular de una forma eficiente la integral de acoplo entre un modo TEM de la guía arbitraria y cualquier modo TM de su *box*.

Si tenemos en cuenta que las integrales de acoplo entre un modo TEM de una guía pequeña y un modo TE de una guía grande es igual a cero (4.7), las expresión (6.13) permite proyectar un modo TEM de la guía arbitraria en término de los modos de su *box* rectangular como:

$$\mathbf{e}_p^{\text{TEM}} = \sum_{m=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_p^{\text{TEM}}, \mathbf{e}_m^{\text{TM,box}} \rangle \mathbf{e}_m^{\text{TM,box}} \quad (6.14)$$

Por tanto, la integral de acoplamiento entre los versores de campo eléctrico $\mathbf{e}_b^{\text{TEM}}$ y $\mathbf{e}_s^{\text{TEM}}$ correspondientes a modos TEM de una guía grande y una guía pequeña de forma arbitraria, se puede expresar como:

$$\begin{aligned} & \iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \iint_{S_{\text{box}}} \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS_{\text{box}} \\ &= \iint_{S_{\text{box}}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_b^{\text{TEM}}, \mathbf{e}_m^{\text{TM,box}_b} \rangle \mathbf{e}_m^{\text{TM,box}_b} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_s^{\text{TEM}}, \mathbf{e}_n^{\text{TM,box}_s} \rangle \mathbf{e}_n^{\text{TM,box}_s} \right) dS_{\text{box}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_b^{\text{TEM}}, \mathbf{e}_m^{\text{TM,box}_b} \rangle \langle \mathbf{e}_s^{\text{TEM}}, \mathbf{e}_n^{\text{TM,box}_s} \rangle \iint_{S_{\text{box}}} \mathbf{e}_m^{\text{TM,box}_b} \cdot \mathbf{e}_n^{\text{TM,box}_s} dS_{\text{box}} \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde box_b y box_s hacen referencia al *box* empleado a la hora de obtener el modo TEM de la guía grande y la guía pequeña, respectivamente, mientras que *box* en la expresión anterior indica el más grande de ambos. En el caso de que los dos *box* coincidan, es decir,

$box_s = box_b = box$, por ortonormalidad de los versores TM de un guía, (6.15) se puede simplificar a:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \sum_{m=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_b^{\text{TEM}}, \mathbf{e}_m^{\text{TM,box}} \rangle \langle \mathbf{e}_s^{\text{TEM}}, \mathbf{e}_m^{\text{TM,box}} \rangle \quad (6.16)$$

donde la integral entre modos de los box ha desaparecido, y se tiene una única serie en lugar de dos concatenadas, lo que permite acelerar el cálculo.

Aunque los términos incluidos en las expresiones (6.15) y (6.16) se pueden obtener sin mucho coste computacional, el problema principal es que no se puede calcular numéricamente una serie infinita. Las series que aparecen en estas expresiones se tendrán que truncar por tanto a un número finito de términos. Desafortunadamente, para obtener resultados con un nivel alto de precisión, el número de términos que hay que considerar es habitualmente muy alto (especialmente en el caso de modos TEM tratado en esta sección). Esto hace que incluso cuando se tiene el mismo box (6.16), esta forma de calcular las integrales de acoplo entre modos de dos guías arbitrarias pueda resultar también ineficiente.

Por tanto, las técnicas numéricas actualmente disponibles para el cálculo de las integrales de acoplo entre modos TEM de guías arbitrarias no parecen demasiado eficientes, limitando la precisión y rango de aplicación de las técnicas de análisis modal [Conciauro].

6.3.3 Cálculo de la integral de acoplo mediante integrales de línea

A continuación se detallará el nuevo método de la integral de línea desarrollado en este trabajo. Para ello, al igual que en los casos anteriores, partiremos de que ya se han determinado los modos TEM de las dos guías de la discontinuidad, como se ha visto en la sección 6.3.1.

Inicialmente, partiremos de la expresión (4.5) que se ha obtenido previamente. En este caso escogeremos la primera de las dos posibilidades, es decir:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \oint_{\partial S_s} \phi_s^{\text{TEM}} \frac{\partial \phi_b^{\text{TEM}}}{\partial n} dl$$

En este caso, teniendo en cuenta que las guías están formadas por dos conductores, esta integral de línea debería separarse en dos integrales, una para el contorno exterior y otra para el interior:

$$\iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS = \oint_{\partial S_{s_{ext}}} \phi_s^{\text{TEM}} \frac{\partial \phi_b^{\text{TEM}}}{\partial n} dl + \oint_{\partial S_{s_{int}}} \phi_s^{\text{TEM}} \frac{\partial \phi_b^{\text{TEM}}}{\partial n} dl$$

Cada una de estas integrales se deberá tratar por separado. Primero nos centraremos en la resolución de la primera de ellas ya que, puesto que los contornos exteriores de las

guías coincidan, este cálculo es el más sencillo de los dos. Utilizando la expresión (5.6), es posible reescribir la integral de la siguiente manera:

$$I_{exterior} = \oint_{\partial S_s} \phi_s^{\text{TEM}} \frac{\partial \phi_b^{\text{TEM}}}{\partial n} dl = \phi_s^{\text{TEM}} \oint_{\partial S_s} \frac{\rho^{\text{TEM}}}{\epsilon} dl = 0 \quad (6.17)$$

que se anula al tener en consideración (2.24b) y que en este caso el potencial del conductor exterior es $\phi_s^{\text{TEM}} = \phi_b^{\text{TEM}} = 0$

Posteriormente se realiza la integral interior, en esta situación, al no coincidir los conductores, el cálculo se vuelve más complejo, por ello se detallará paso a paso.

$$I_{interior} = \oint_{\partial S_s} \phi_s^{\text{TEM}} \frac{\partial \phi_b^{\text{TEM}}}{\partial n} dl \quad (6.18)$$

Si tenemos en cuenta que, por (2.24b), el potencial en la guía pequeña es constante y utilizamos la definición del gradiente, es posible reescribir la expresión como:

$$I_{interior} = \phi_s^{\text{TEM}} \oint_{\partial S_s} (\nabla_t \phi_b^{\text{TEM}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dl \quad (6.19)$$

Seguidamente, haciendo uso de la ecuación (6.7), es posible relacionar la expresión anterior con la función de Green, de forma que:

$$I_{interior} = \phi_s^{\text{TEM}} \oint_{\partial S_s} \left[\frac{1}{\epsilon} \int_{\sigma} \nabla_t g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(l') dl' \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (6.20)$$

Después, utilizando la expresión (6.5) y teniendo en cuenta que los términos b_n de la serie son constantes, se puede reescribir la expresión nuevamente como:

$$\begin{aligned} I_{interior} &= \phi_s^{\text{TEM}} \oint_{\partial S_s} \left[\frac{1}{\epsilon} \int_{\sigma} \nabla_t g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{n=1}^N b_n u_n(l') dl' \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \\ &= \phi_s^{\text{TEM}} \oint_{\partial S_s} \left[\sum_{n=1}^N b_n \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\sigma} \nabla_t \nabla_t g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_n(l') dl' \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde N representa el número de funciones base.

Una vez hemos calculado las dos integrales, se puede determinar el valor de la integral de acoplamiento de manera completa:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{e}_b^{\text{TEM}} \cdot \mathbf{e}_s^{\text{TEM}} dS &= I_{exterior} + I_{interior} \\ &= \phi_s^{\text{TEM}} \oint_{\partial S_s} \left[\sum_{n=1}^N b_n \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_n(l') dl' \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \end{aligned} \quad (6.22)$$

Se puede comprobar observando la expresión anterior, que todos los valores se pueden obtener con un coste computacional no muy elevado y que si se compara con la ecuación (6.15), la gran diferencia radica en que en la nueva integral no aparecen sumatorios de series infinitas, por lo que a priori, la precisión será mejor y más eficiente.

6.4 Verificación práctica

Para poder realizar la comprobación del funcionamiento de este nuevo método, se ha particularizado la geometría de la sección 6.1, con unos valores concretos para los conductores exteriores (b) y interiores (a), que se muestran en la siguiente gráfica:

a_s	b_s	a_b	b_b
5	10	3	10

Tab. 6.1: Dimensiones de la guía de ejemplo

Como se había mencionado previamente, los conductores exteriores tienen el mismo radio, es decir, $b_s = b_b = b$. Con el fin de obtener una idea más clara de las características de la estructura, se adjunta la siguiente imagen acotada con los diámetros de cada uno de los conductores:

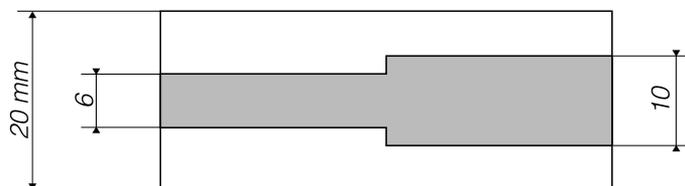


Fig. 6.2: Sección transversal de la estructura a analizar (en mm).

Una vez diseñada la estructura a simular, se ha realizado el cálculo teórico de la integral de acoplamiento cuyo resultado ha sido $I_{TEO} = 0.758759937327640$ y, posteriormente se ha obtenido esta misma integral empleando las dos técnicas expuestas en los puntos anteriores.

En el caso de dobles proyecciones, los resultados se han obtenido directamente ejecutando el método de BI-RME actual, desarrollado por el Grupo de Aplicaciones de las Microondas (GAM) de la Universidad Politécnica de Valencia [Pablo]. Los cálculos se han realizado variando la cantidad de modos en el *box*, es decir, la cantidad de modos que el método tiene en cuenta para realizar las aproximaciones. A continuación se recogen en la tabla 6.2 los resultados de esta ejecución.

Modos	Seg. Grande	Seg. Pequeña	Integral de acoplo	Error ‰
50	68	72	0.738325819472748	26.931
100	84	92	0.760886235686560	2.802
250	108	120	0.737667071046387	27.799
500	144	164	0.736069860685980	29.904
1000	192	216	0.745140580150969	17.949
1500	228	260	0.752479097476845	9.725
2000	260	296	0.752479097476845	8.278
2500	292	332	0.751554751965144	9.496
3000	312	356	0.750184591104940	11.302
3500	336	384	0.752672996136072	8.022
4000	360	408	0.752962316101133	7.641
4500	380	432	0.754465235074597	5.660

Tab. 6.2: Resultados método de dobles proyecciones

Para realizar los cálculos empleando la nueva técnica que en este trabajo se desarrolla, se ha partido de unos datos generados por el mismo método de BI-RME y posteriormente, mediante un programa realizado en MATLAB que implementa la expresión (6.22), se han obtenido los resultados de las integrales de acoplo que se muestran en la siguiente tabla:

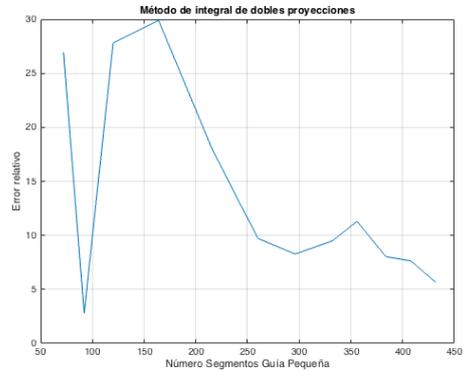
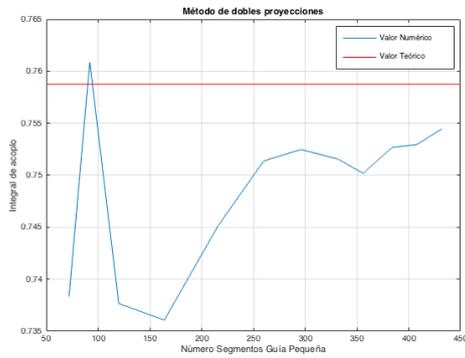
Modos	Seg. Grande	Seg. Pequeña	Integral de acoplo	Error ‰
25	60	60	0.758729056002308	0.041
50	68	72	0.758732336023381	0.036
100	84	92	0.758771448294180	0.015
150	92	104	0.758777101882864	0.023
200	104	116	0.758760189987750	3.330e-04
250	108	120	0.758760331766306	5.198e-04
500	144	164	0.758760649892778	9.391e-04
1000	192	216	0.758759736895170	2.642e-04

Tab. 6.3: Resultados método de integrales de línea

Con el fin de facilitar el análisis de los datos obtenidos se ha realizado una representación gráfica de los mismos. En este caso se han representado en las imágenes de la izquierda los valores de la integral de acoplamiento en función del número de segmentos en los que se ha dividido el contorno de la estructura a la hora de representar la densidad de carga incógnita, además de mostrarse en rojo el valor teórico. En las gráficas de la derecha se han representado los errores relativos en tanto por mil, calculados según $1000 \times |I_{TEO} - I| / I_{TEO}$, donde I es el valor numérico de la integral.

En la figura 6.3, se pueden ver la información relativa al método de dobles proyecciones, donde se puede comprobar que la convergencia del método es muy lento y el error es

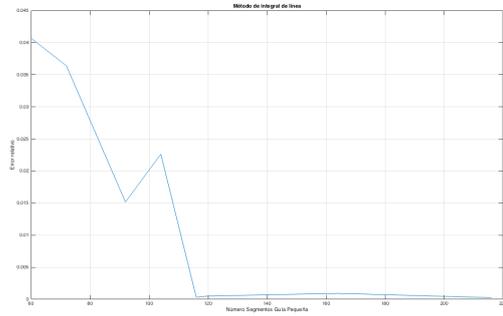
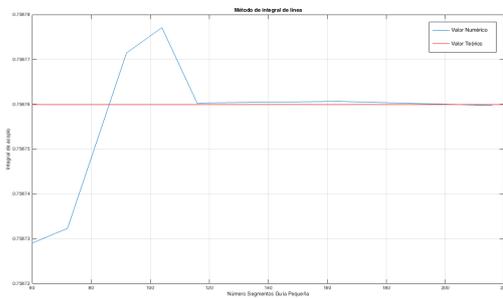
superior al 5% para el número de segmentos más alto que se ha tenido en cuenta en las simulaciones.



(a) Resultados para la integral de acoplo (b) Errores relativos para la integral de acoplo

Fig. 6.3: Método de dobles proyecciones

A continuación, en la figura 6.4 se recoge los resultados obtenidos para el nuevo método, donde se verifica que la convergencia de esta técnica es mucho más rápida y que el error, incluso para el menor número de segmentos que se han tenido en cuenta, se encuentra por debajo del 0.05%.



(a) Resultados para la integral de acoplo (b) Errores relativos para la integral de acoplo

Fig. 6.4: Método nuevo (integral de línea)

Comparando los dos métodos descritos mediante las tablas y figuras anteriores, se puede observar como los resultados que se obtienen son mucho más precisos con la nueva técnica, y todo ello utilizando una menor segmentación de la estructura, lo que repercute en un menor consumo de recursos computacionales y una reducción del tiempo. Se evidencia así que este nuevo método es más eficiente que el empleado actualmente.

Capítulo 7

Conclusión

7.1 Grado de consecución de los objetivos

Este trabajo ha tenido como objetivo el desarrollo e implementación de un método que permitiese caracterizar de manera eficiente y precisa las discontinuidades entre guías de onda de sección arbitraria y con múltiples conductores.

En primer lugar se han obtenido de manera teórica, como se muestra en el apartado 4, unas expresiones que nos permitirán calcular estas integrales de acoplo entre las diferentes familias de modos que nos podemos encontrar en la práctica.

Posteriormente, empleando un ejemplo práctico cuya solución analítica se puede calcular, se han validado estas expresiones por comparación de los resultados de la integral de acoplo más conflictiva, es decir, la de los modos TEM-TEM

Finalmente, y para este mismo ejemplo pero tratando las guías como si fueran arbitrarias, se han comparado los resultados numéricos obtenidos por las técnicas existentes con los calculados empleando la nueva metodología desarrollada en este trabajo, con el fin de verificar la mejora en cuanto a eficiencia y precisión de los resultados de la nueva técnica.

7.2 Ampliaciones futuras

En el presente trabajo se ha implementado tan solo una de las integrales de acoplamiento, el caso más conflictivo (TEM-TEM). En un futuro se debería seguir desarrollado las ocho integrales restantes del capítulo 4 con el fin de poder obtener todas las integrales de acoplo de manera más eficiente.

Una vez completado el desarrollo que se mencionan en este trabajo, se debería integrar en un código como el desarrollado por el Grupo de Aplicaciones de las Microondas (GAM) de la Universidad Politécnica de Valencia que permita extender el rango de aplicación de las técnicas de análisis de estructuras electromagnéticas mediante métodos modales.

A

Identidades matemáticas

A.1 Identidades de Green 2D

Según el conocido teorema de la divergencia en un dominio transversal 2D:

$$\iint_S \nabla_t(\psi \mathbf{A}) dS = \oint_{\partial S} (\psi \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (\text{A.1})$$

Desarrollando la primera parte de la igualdad, podemos llegar a la siguiente expresión más general de la identidad de Green bidimensional:

$$\iint_S [(\nabla_t \psi) \cdot \mathbf{A} + \psi(\nabla_t \cdot \mathbf{A})] dS = \oint_{\partial S} (\psi \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (\text{A.2})$$

A.1.1 Primera identidad de Green

En esta primera identidad se sustituirá la variable \mathbf{A} por funciones vectoriales de diferentes formas, en concreto, $\mathbf{A} = \nabla_t \varphi$ y $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi$, obteniendo por tanto dos variantes (la primera de ellas es la habitualmente denominada como primera identidad de Green, aunque la segunda opción, menos conocida, también es útil en ciertos escenarios):

■ Variante 1 $\rightarrow \mathbf{A} = \nabla_t \varphi$

$$\iint_S [(\nabla_t \psi) \cdot \nabla_t \varphi + \psi(\nabla_t^2 \varphi)] dS = \oint_{\partial S} (\psi \nabla_t \varphi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \oint_{\partial S} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl \quad (\text{A.3})$$

■ Variante 2 $\rightarrow \mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi$

$$\begin{aligned} \iint_S [(\nabla_t \psi) \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi) + \psi \nabla_t \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi)] dS &= \iint_S [(\nabla_t \psi) \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi)] dS \\ &= \oint_{\partial S} \psi (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \varphi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = - \oint_{\partial S} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} dl \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Segunda identidad de Green

Para obtener esta segunda identidad se debe desarrollar la Primera identidad de Green (A.3) dos veces, cambiando los dos potenciales, de forma que obtenemos:

$$\iint_S (\nabla_t \psi \cdot \nabla_t \varphi + \psi \nabla_t^2 \varphi) dS = \oint_{\partial S} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl \quad (\text{A.5a})$$

$$\iint_S (\nabla_t \varphi \cdot \nabla_t \psi + \varphi \nabla_t^2 \psi) dS = \oint_{\partial S} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dl \quad (\text{A.5b})$$

Restamos las expresiones anteriores y obtenemos la denominada Segunda identidad de Green:

$$\iint_S (\psi \nabla_t^2 \varphi - \varphi \nabla_t^2 \psi) dS = \oint_{\partial S} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dl \quad (\text{A.5c})$$

A.2 Otras identidades

Otra identidad que ha resultado de interés para simplificar las integrales de acoplo es la extraída de [Gentili, ec. 33] y cuya obtención generalizada se detalla en este apartado. En primer lugar se definen dos funciones f y g tales que:

$$(\nabla_t^2 + \kappa_f^2) f = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$(\nabla_t^2 + \kappa_g^2) g = 0 \quad (\text{A.7})$$

Como se puede observar, son expresiones con la misma forma que la ecuación de ondas (2.4) y (2.11). A continuación multiplicamos (A.6) por g y (A.7) por f , y restamos las expresiones resultantes. Trás integrar ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$\iint_S (f \cdot g) dS = \frac{1}{\kappa_f^2 - \kappa_g^2} \iint_S (f \nabla_t^2 g - g \nabla_t^2 f) ds \quad (\text{A.8})$$

Aplicamos (A.5c) a la parte derecha de la expresión y finalmente obtenemos que:

$$\iint_S (f \cdot g) dS = \frac{1}{\kappa_f^2 - \kappa_g^2} \oint_{\partial S} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dl \quad (\text{A.9})$$

Bibliografía

- [Balanis] BALANIS, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*. 1^a ed. USA: John Wiley & Sons, 1989.
- [Pozar] POZAR, D. M., *Microwave Engineering*. 3^a ed. USA: John Wiley & Sons, 2005.
- [Tarin] TARÍN, E., *Análisis Modal de Líneas de Transmisión con Múltiples Conductores y Aplicación a Dispositivos de Microondas*. Proyecto Final de Carrera, Gandía, 2005.
- [Gentili] GENTILI, G. G., FIGLIA, G., *On the Line-Integral Formulation of Mode-Matching Technique*. Rep. 0018–9480/02 IEEE, Feb. 2002.
- [Collin] COLLIN, R., *Field Theory of Guided Waves*. New York, NY: IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, 1991.
- [Cogollos] COGOLLOS, S., MARINI, S., BORIA, V., SOTO, P., VIDAL, A., MORRO, B., ESTEBAN, H. Y GIMENO, B., *Efficient modal analysis of arbitrarily shaped waveguides composed of linear, circular and elliptical arcs using the BI- RME method*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 51, no. 12, pp. 2378–2390, 2003.
- [Conciauro] CONCIAURO, G., GUGLIELMI, M. Y SORRENTINO, R., *Advanced Modal Analysis* Chichester: John Wiley & Sons, 2000.
- [Pablo] SOTO, P., *Análisis y Diseño Optimizado de Dispositivos Pasivos de Microondas de Banda Ancha con Guías de Sección Transversal Arbitraria*. Tesis Doctoral, Valencia, 2012.
- [Harrington] HARRINGTON, R.F., *Field Computation by the Method of Moments*. New York, NY: Wiley-IEEE Press, 1993.