

Análisis del golpe de ariete en un sistema de distribución de agua

Water hammer analysis in a water distribution system

Twyman, J.

Twyman Ingenieros Consultores, Dirección: Pasaje Dos, No. 362, Rancagua, Región de O'Higgins, Chile
E-mail: john@twyman.cl

Recibido: 20/07/2016

Aceptado: 03/04/2017

Publicado: 28/04/2017

Citar como: Twyman, J. 2017. Water hammer analysis in a water distribution system. *Ingeniería del agua*, 21(2), 87-102.
<https://doi.org/10.4995/la.2017.6389>

RESUMEN

Se analiza el golpe de ariete en un sistema de distribución de agua (SDA) mediante tres métodos híbridos (MH) basados en el Esquema de la Caja, Método de McCormack y Esquema Difusivo. Se revisa la formulación de cada MH junto con sus ventajas y desventajas relativas. El SDA analizado se compone de tuberías con diferentes longitudes, diámetros y velocidades de onda, siendo el número de Courant distinto en cada tubería según la discretización adoptada. Los resultados de los MH son comparados con los obtenidos por el Método de las Características (MC). Al revisar la atenuación numérica, la conclusión es que los métodos basados en el Esquema de la Caja y McCormack (ambos de 2.º orden) presentan resultados más conservadores desde el punto de vista numérico, siendo recomendable su aplicación para el análisis del golpe de ariete en sistemas de distribución de agua.

Palabras clave | golpe de ariete; esquema difusivo; método de las características; método híbrido; método de McCormack; red de tuberías.

ABSTRACT

The solution to water hammer in a water distribution system (WDS) is shown by applying three hybrid methods (HM) based on the Box's scheme, McCormack's method and Diffusive Scheme. Each HM formulation in conjunction with their relative advantages and disadvantages are reviewed. The analyzed WDS has pipes with different lengths, diameters and wave speeds, being the Courant number different in each pipe according to the adopted discretization. The HM results are compared with the results obtained by the Method of Characteristics (MOC). In reviewing the numerical attenuation, second order schemes based on Box and McCormack are more conservative from a numerical point of view, being recommendable their application in the analysis of water hammer in water distribution systems.

Key words | *diffusive scheme; hybrid method; McCormack's method; method of characteristics; water distribution system; water hammer.*

INTRODUCCIÓN

El análisis numérico del golpe de ariete en los sistemas de distribución de agua (SDA) tiene una larga data desde los primeros aportes de Streeter (1966), quien presentó los resultados de un programa computacional apto para resolver el golpe de ariete mediante el Método de las Características (MC) en una red simple compuesta por 45 tramos. Más tarde vinieron los aportes de diversos autores en el contexto del MC y/o del Método de la Onda Característica MOC (antes llamada Método de la Onda Plana MOP), donde se mostraban los resultados obtenidos en distintos SDAs, como en Watters (1984); Boulos *et al.* (1990); Karney (1984); Karney y McInnis (1992); Simpson y Wu (1997); Boulos *et al.* (2005); Wood *et al.* (2005); Jung *et al.* (2007, 2009a, 2009b); Mansour-Rezaei *et al.* (2013); etc. Sin embargo, es bien conocido que el MC posee restricciones numéricas que limitan su ámbito de aplicación, especialmente en lo referido al número de Courant (C_n), cuyo valor debe ser obligatoriamente igual a 1.0 para garantizar la estabilidad y precisión de los resultados. En los SDAs grandes y complejos, donde dadas las distintas características de las tuberías, principalmente en lo relativo a los parámetros que determinan la magnitud de la velocidad de la onda (material constituyente, diámetro, espesor y condición de apoyo), es muy difícil, por no decir imposible, conseguir que el número de Courant sea igual a 1.0 en todos los tramos, debiéndose recurrir a atajos relacionados con la modificación del valor de la velocidad de la onda y/o la alteración de las longitudes de las tuberías conflictivas, incluso adoptando su eliminación del modelo computacional o su reemplazo por expresiones matemáticas (Karney y McInnis, 1992). Otro camino es dejar todo como está y aplicar interpolaciones numéricas que de todas formas introducen errores en la solución (Goldberg y Wylie, 1983). El MOC se caracteriza por ser rápido y preciso, sin dependencia del C_n . Su formulación se enfoca en el análisis físico del problema (Izquierdo *et al.*, 2004), por lo que requiere calcular los efectos de las ondas de presión que inciden sobre componentes tales como válvulas, bombas, uniones y elementos de control. El MOC tiene dos desventajas principales: (i) en principio sólo resuelve el transitorio en los nodos de borde, y (ii) requiere hacer adecuaciones frente a las tuberías que son relativamente cortas. Además, su proceso de discretización puede ser un tanto engorroso debido a que el valor del paso de tiempo debe ser lo suficientemente pequeño de forma de poder representar, en forma precisa, las funciones que representan las perturbaciones en las presiones, caudales y ondas de presión. Además, debe realizar los cálculos con una cantidad entera de pasos de tiempo. Estas situaciones, que afectan al MC y al MOC, hacen pertinente conocer las ventajas, desventajas y campo de aplicabilidad de métodos alternativos cuyo desempeño numérico dependa en menor medida de C_n y de la forma que tenga la red, especialmente cuando se requiere resolver el golpe de ariete en sistemas grandes y complejos desde el punto de vista de la conectividad tramo–nudo–condición de borde. En los párrafos siguientes se describirán y aplicarán cuatro métodos, uno de ellos basado en el MC tradicional y los tres restantes de tipo híbrido basados en una combinación entre el MC y el Esquema de la Caja (o Esquema de Preissman), el Método de McCormack y el Esquema Difusivo (o Esquema de Lax), todos los cuales serán utilizados para resolver el golpe de ariete en un SDA compuesto por 43 tuberías con distintas características. Se describen las ecuaciones de cada método y se discuten sus ventajas y desventajas relativas.

ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL FLUJO TRANSITORIO

Cuando se analiza un volumen de control es posible obtener las siguientes ecuaciones diferenciales parciales no–lineales de tipo hiperbólico, válidas para describir el flujo transitorio unidimensional (1–D) en tuberías con sección transversal circular (Chaudhry, 1979; Abreu *et al.*, 1995):

$$\frac{\alpha^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (2)$$

Donde (1) y (2) corresponden a las ecuaciones de continuidad y momentum (dinámica), respectivamente. Además, ∂ = derivada parcial, H = cota piezométrica, α = velocidad de la onda, g = constante de gravedad, A = sección transversal de la tubería, Q = caudal, f = factor de fricción (Darcy–Weisbach) y D = diámetro de la tubería. Los subíndices x y t denotan las dimensiones espacial y temporal, respectivamente. Las ecuaciones (1) y (2), junto con aquellas relativas a las condiciones de borde que representan dispositivos hidráulicos específicos, describen el fenómeno de propagación de ondas de un evento de golpe de ariete.

Velocidad de la onda

Para el flujo de agua (sin aire), la ecuación más general válida para calcular la magnitud de la velocidad de la onda en flujos unidimensionales está dada por (Wylie y Streeter, 1978):

$$a = \frac{\sqrt{K/\rho}}{\sqrt{1 + \left[\frac{K D}{E e}\right] c_1}} \quad (3)$$

Donde: K = modulo de compresibilidad volumétrica del fluido $\approx 2.07 \cdot 10^9$ (k/ms²) para el caso del agua, ρ = densidad del fluido ≈ 1000 (k/m³) para el caso del agua; E = modulo de elasticidad del material constituyente de la tubería (aproximadamente igual a $2.08 \cdot 10^{11}$ k/ms²; $1.10 \cdot 10^{11}$ k/ms² y $2.76 \cdot 10^9$ k/ms² para el acero, cobre y PVC, respectivamente); e = espesor de la pared de la tubería; y c_1 = factor relacionado con la condición de apoyo de la tubería y que puede tomar los valores: $c_1 = 1 - \mu/2$; $c_1 = 1 - \mu^2$ o $c_1 = 1$, dependiendo de si la tubería está apoyada sólo en su extremo aguas arriba; está apoyada en ambos extremos; o está apoyada según ésta última opción considerando además juntas de expansión, respectivamente, siendo μ = módulo de Poisson (Wylie y Streeter, 1978), con valores iguales a 0.30 (acero); 0.36 (cobre) y 0.45 (PVC).

MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (EXPLÍCITO, 1.º ORDEN)

El Método de las Características (MC) es un esquema de tipo Euleriano (Jung *et al.*, 2009a) muy usado para resolver las ecuaciones que gobiernan el flujo transitorio debido a que funciona con “ a ” constante, y, a diferencia de otras metodologías basadas en diferencias finitas o elementos finitos, puede modelar fácilmente los frentes de onda generados por transitorios muy rápidos. El MC es útil para modelar el fenómeno de propagación de las ondas en sistemas de distribución de agua debido a su facilidad de introducción de diferentes dispositivos hidráulicos, tales como bombas, válvulas, estanques hidroneumáticos (o calderines), etc. (Salgado, 1992). El MC es fácil de usar, rápido y explícito, lo cual permite calcular las variables de estado Q y H directamente a partir de valores previamente conocidos en el paso de tiempo anterior (Watters, 1984). El MC funciona en una malla (o cuadrículado) computacional espacio (x) – tiempo (t) cuya forma queda supeditada al criterio de estabilidad de Courant–Friedrichs–Lewy (conocido como criterio CFL o sólo como número de Courant C_n), que establece lo siguiente (Wylie y Streeter, 1978):

$$C_n = \frac{(V + a) \cdot \Delta t}{\Delta x} \quad (4)$$

Con V = velocidad de flujo (generalmente mucho menor que a cuando los efectos convectivos son pequeños), Δt = paso de tiempo y Δx = longitud del sub-tramo (igual a L/N , con L = longitud de la tubería y N = cantidad de sub-tramos). En general, el MC entrega un resultado numérico exacto cuando $C_n = a \cdot \Delta t / \Delta x = 1.0$; de otra forma, genera resultados en la forma de atenuaciones (cuando $C_n = a \cdot \Delta t / \Delta x < 1.0$) o inestabilidad numérica (cuando $C_n = a \cdot \Delta t / \Delta x > 1.0$). Es difícil satisfacer la ecuación (4) en sistemas complejos, lo cual puede limitar la magnitud del paso de tiempo computacional (Δt) común para toda la red de tuberías, por lo que algunas veces es común: (i) recurrir a la modificación de L hasta un límite típico de 6 m (Wood, 2005); y/o (ii) modificar a en un rango máximo de $\pm 15\%$ (Wylie y Streeter, 1978). Otro camino de solución es mantener inalteradas las condiciones iniciales y aplicar interpolación numérica con el riesgo de generar errores en la solución debido a la disipación y dispersión numérica (Goldberg y Wylie, 1983).

MC: solución aproximada

El MC trabaja con “líneas características” proyectadas en un plano posición–tiempo, logrando con esto conseguir un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Al despreciar los términos convectivos, se obtiene la siguiente solución aproximada (Salgado, 1992):

$$\frac{dQ}{dt} \pm \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (5)$$

La ecuación (5) es válida sobre las “líneas características”:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) representan exactamente al sistema formado por las ecuaciones básicas, aunque limitadas al sub-espacio definido por las líneas características. Cuando el signo es positivo (+), se obtiene la ecuación característica positiva C^+ ; con el signo negativo se obtiene la ecuación característica negativa C^- . Las líneas C^+ y C^- son aquellas en las cuales se propagan las ondas de presión en dirección aguas arriba y aguas abajo, respectivamente, según (adaptado de Chaudhry, 1979):

$$C^+: Q_P^{t+\Delta t} - Q_L^t + \frac{gA}{a} (H_P^{t+\Delta t} - H_L^t) + \frac{f\Delta t}{2DA} Q_L^t |Q_L^t| = 0 \quad (7)$$

$$C^-: Q_P^{t+\Delta t} - Q_R^t - \frac{gA}{a} (H_P^{t+\Delta t} - H_R^t) + \frac{f\Delta t}{2DA} Q_R^t |Q_R^t| = 0 \quad (8)$$

Con $Q_P^{t+\Delta t}$ = caudal en el nodo P e instante $t + \Delta t$; $H_P^{t+\Delta t}$ = cota piezométrica en el nodo P e instante $t + \Delta t$ y H_L^t , Q_L^t , H_R^t y Q_R^t = variables de estado conocidas en los nodos L y R , respectivamente, en el instante anterior t (ver Figura 1). En las secciones de borde 1 y $(N+1)$ se requiere una condición de borde adicional que debe ser resuelta junto con las ecuaciones características negativa o positiva según se trate del primer o último sub-tramo de la discretización, respectivamente.

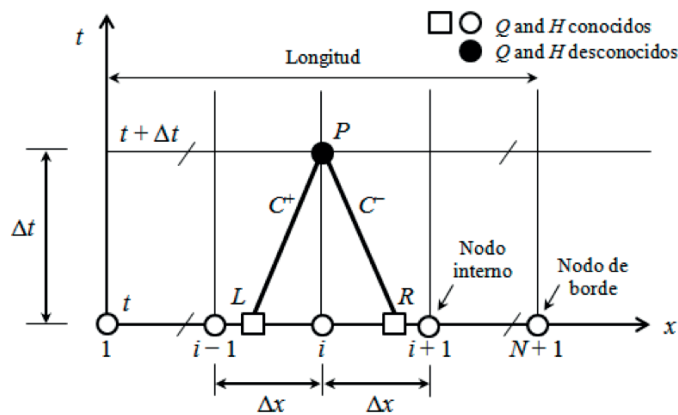


Figura 1 | Malla espacio-tiempo (Δx , Δt) con las líneas características (C^+ y C^-).

Interpolación numérica

Cuando el MC es aplicado con $C_n < 1.0$ se debe aplicar un procedimiento de interpolación numérica para obtener Q y H en cada nodo interno. Los métodos de interpolación más comunes son de tipo lineal, ya sea en el eje espacial o en el eje temporal (Goldberg y Wylie, 1983). Por otro lado, algunos autores tales como Ghidaoui y Karney (1994) han presentado un procedimiento de interpolación flexible, computacionalmente eficiente, que incluye una variedad de técnicas de interpolación que funcionan junto con el método de ajuste de la velocidad de la onda. Cuando se aplica un proceso de interpolación sobre el eje x (Figura 1), es posible obtener algunas expresiones analíticas para las variables Q y H de los nodos internos usando esquemas numéricos de interpolación con distintos grados de interpolación (GI) (Twyman, 2004). Por ejemplo, cuando se aplica el esquema de interpolación de Newton–Gregory con $GI = 1$, se obtienen las siguientes ecuaciones cuando i varía entre los nodos internos 2 y N , y cuando la pendiente de

las curvas características C^+ y C^- pueden ser aproximadas a $\frac{dx}{dt} = +a$ y $\frac{dx}{dt} = -a$, respectivamente, despreciando el efecto de V (Wylie y Streeter, 1978; Twyman, 2004):

$$H_L^t = H_i^t + (H_{i-1}^t - H_i^t) \cdot C_n \quad (9)$$

$$Q_L^t = Q_i^t + (Q_{i-1}^t - Q_i^t) \cdot C_n \quad (10)$$

$$H_R^t = H_i^t + (H_{i+1}^t - H_i^t) \cdot C_n \quad (11)$$

$$Q_R^t = Q_i^t + (Q_{i+1}^t - Q_i^t) \cdot C_n \quad (12)$$

Con H_i^t , Q_i^t , H_{i-1}^t , Q_{i-1}^t , H_{i+1}^t y Q_{i+1}^t igual a las variables de estado en los nodos internos i , $i-1$ e $i+1$ en el tiempo t , respectivamente (Figura 1). Existe una tendencia entre los analistas del golpe de ariete a pensar que la interpolación numérica es una técnica que sólo genera efectos numéricos. En general, todos los algoritmos de interpolación resultan en disipación y dispersión numérica, y distorsionan considerablemente a las ecuaciones originales que gobiernan el flujo transitorio, modificando efectivamente a la velocidad de la onda (Ghidaoui y Karney, 1994). En resumen, la interpolación modifica la física del problema y debe ser vista como una transformación no trivial de las ecuaciones que rigen el fenómeno transitorio.

ESQUEMA DE LA CAJA O DE PREISSMAN (IMPLÍCITO, 2.º ORDEN)

Para resolver Q y H en los nodos internos de cada tubería, el Esquema de la Caja es un método apropiado debido a sus características numéricas (mayor estabilidad) y menor dependencia respecto del paso de tiempo escogido. En este caso, las ecuaciones de la dinámica y continuidad aplicadas a un sub-tramo tienen la siguiente forma (Chaudhry, 1982; Twyman, 2004):

$$d_1 Q_i^{t+\Delta t} + d_2 Q_{i+1}^{t+\Delta t} - d_3 H_i^{t+\Delta t} + d_3 H_{i+1}^{t+\Delta t} + d_4 = 0 \quad (13)$$

$$-c_1 Q_i^{t+\Delta t} + c_1 Q_{i+1}^{t+\Delta t} + c_2 H_i^{t+\Delta t} + c_3 H_{i+1}^{t+\Delta t} + c_4 = 0 \quad (14)$$

Donde:

$$d_1 = 1 - \frac{\Delta t(Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{2A\Delta x} \quad (15)$$

$$d_2 = 1 + \frac{\Delta t(Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{2A\Delta x} \quad (16)$$

$$d_3 = \frac{gA\Delta t}{\Delta x} \quad (17)$$

$$d_4 = \frac{gA\Delta t(H_{i+1}^t - H_i^t)}{\Delta x} - (Q_{i+1}^t + Q_i^t) + \frac{\Delta t}{2A\Delta x}(Q_i^t + Q_{i+1}^t)(Q_{i+1}^t - Q_i^t) + \frac{(f_i + f_{i+1})\Delta t}{8DA}(Q_i^t + Q_{i+1}^t)|Q_i^t + Q_{i+1}^t| \quad (18)$$

$$c_1 = \frac{a^2}{2\Delta x} \quad (19)$$

$$c_2 = \frac{gA}{2\Delta t} - \frac{g(Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{4\Delta x} \quad (20)$$

$$c_3 = \frac{gA}{2\Delta t} + \frac{g(Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{4\Delta x} \quad (21)$$

$$c_4 = \frac{-gA}{2\Delta t} (H_{i+1}^t + H_i^t) + \frac{g}{4\Delta x} (Q_i^t + Q_{i+1}^t)(H_{i+1}^t - H_i^t) + \frac{a^2}{2\Delta x} (Q_{i+1}^t - Q_i^t) \quad (22)$$

MÉTODO DE MCCORMACK (EXPLÍCITO, 2.º ORDEN)

El Método de McCormack se basa en el MC (2.º orden) y ha sido usado para modelar el fenómeno transitorio en muchos tipos de sistemas debido a sus características numéricas y nivel de precisión. Este esquema trabaja aplicando dos etapas que utilizan una aproximación mediante diferencias finitas (hacia adelante y hacia atrás). Dependiendo de la aproximación adoptada para las derivadas parciales, es posible tener dos alternativas (Chaudhry y Hussaini, 1985):

- Alternativa 1: las diferencias finitas son aplicadas hacia adelante (etapa predictiva), y luego, en la etapa correctiva, son aplicadas hacia atrás.
- Alternativa 2: es contraria a la alternativa 1. Primero aplica las diferencias finitas en dirección hacia atrás (etapa predictiva), y luego aplica las diferencias finitas en dirección hacia adelante (etapa correctiva).

En orden a obtener resultados óptimos, se recomienda aplicar la siguiente secuencia: aplicar la alternativa 1 en el primer paso de tiempo Δt , luego la alternativa 2 durante el siguiente paso de tiempo, seguida por la alternativa 1 nuevamente, y así sucesivamente (Chaudhry y Hussaini, 1985). Las ecuaciones correspondientes al esquema de McCormack aplicadas al sistema (1) + (2), y expresadas en la forma de diferencias finitas, son las siguientes (adaptado de Chaudhry y Hussaini, 1985):

Alternativa 1: etapa predictiva ($i = 1, \dots, N+1$):

$$H_i^* = H_i^t - BC_n(Q_{i+1}^t - Q_i^t) \quad (23)$$

$$Q_i^* = Q_i^t - \frac{C_n}{B} [(H_{i+1}^t - H_i^t) - RQ_i^t|Q_i^t|] \quad (24)$$

$$H_{N+2}^t = 2H_{N+1}^t - H_N^t \quad (25)$$

$$Q_{N+2}^t = 2Q_{N+1}^t - Q_N^t \quad (26)$$

Alternativa 1: etapa correctiva ($i = 2, \dots, N+1$):

$$H_i^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} [H_i^t + H_i^* - BC_n(Q_i^* - Q_{i-1}^*)] \quad (27)$$

$$Q_i^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} [Q_i^t + Q_i^* - \frac{C_n}{B} (H_i^* - H_{i-1}^*) - RQ_i^*|Q_i^*|] \quad (28)$$

Alternativa 2: etapa predictiva ($i = 1, \dots, N+1$):

$$H_i^* = H_i^t - BC_n(Q_i^t - Q_{i-1}^t) \quad (29)$$

$$Q_i^* = Q_i^t - \frac{C_n}{B} [(H_i^t - H_{i-1}^t) - RQ_i^t | Q_i^t |] \quad (30)$$

$$H_0^t = 2H_1^t - H_2^t \quad (31)$$

$$Q_0^t = 2Q_1^t - Q_2^t \quad (32)$$

Alternativa 2: etapa correctiva ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$H_i^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} [H_i^t + H_i^* - BC_n(Q_{i+1}^* - Q_i^*)] \quad (33)$$

$$Q_i^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \left[Q_i^t + Q_i^* - \frac{C_n}{B} (H_{i+1}^* - H_i^*) - RQ_i^* | Q_i^* | \right] \quad (34)$$

Siendo $B = a/gA$ y Q^t y H^t conocidos en el instante previo t , con el nodo inicial i y el nodo final $i = N+1$ en el eje espacial x . Ambas alternativas son estables cuando se cumple con la condición de Courant; es decir, cuando se cumple que $a \cdot \Delta t \leq \Delta x$ (Chaudhry y Hussaini, 1985).

ESQUEMA DIFUSIVO O ESQUEMA DE LAX (EXPLÍCITO, 1.º ORDEN)

En este método las derivadas parciales son reemplazadas por aproximaciones en diferencias finitas, por lo que los valores desconocidos al final del paso de tiempo son expresados en términos de valores conocidos al inicio del paso de tiempo. Se supone que los valores en el instante t son conocidos y que se requiere calcular los valores en el instante $t + \Delta t$. Las derivadas parciales deben ser aproximadas como sigue despreciando los términos convectivos; es decir, considerando que $\nu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0$ y $\nu \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0$ (Chaudhry, 2013):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_i^{t+\Delta t} - \bar{H}_i}{\Delta t} \quad (35)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{t+\Delta t} - \bar{Q}_i}{\Delta t} \quad (36)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^t - Q_{i-1}^t}{2\Delta x} \quad (37)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_{i+1}^t - H_{i-1}^t}{2\Delta x} \quad (38)$$

Donde:

$$\bar{H}_i = \frac{1}{2} (H_{i+1}^t + H_{i-1}^t) \quad (39)$$

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{2} (Q_{i+1}^t + Q_{i-1}^t) \quad (40)$$

Sustituyendo las ecuaciones (35) a (40) en (1) y (2) y escribiendo el término friccional en términos de \bar{Q}_i , se obtiene:

$$Q_i^{t+\Delta t} = \frac{1}{2}(Q_{i-1}^t + Q_{i+1}^t) - \frac{1}{2}gA \frac{\Delta t}{\Delta x}(H_{i+1}^t - H_{i-1}^t) - R\Delta t \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| \quad (41)$$

$$H_i^{t+\Delta t} = \frac{1}{2}(H_{i-1}^t + H_{i+1}^t) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gA} (Q_{i+1}^t - Q_{i-1}^t) \quad (42)$$

SOLUCIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE

Es posible aplicar varias aproximaciones útiles para modelar distintas condiciones de borde o dispositivos hidráulicos. Por ejemplo, en el caso de una red con nodos simples, estanques y válvulas, las siguientes ecuaciones pueden ser aplicadas para calcular H_p (Karney, 1984; Karney y McInnis, 1992; Salgado *et al.*, 1993a, 1993b; Twyman *et al.*, 1997; Twyman 2004):

Nodo simple. Es el punto de unión de dos o más tuberías, con o sin demanda nodal. Su expresión general es:

$$H_p^{t+\Delta t} = C_c - B_c \cdot Q_{ext} \quad (43)$$

Donde C_c y B_c son constantes conocidas y Q_{ext} es el consumo nodal o caudal que puede ser constante, función del tiempo o función de la presión presente en el nodo.

Estanque lineal. Puede ser representado por la siguiente expresión general:

$$H_p^{t+\Delta t} = C_c - B_c \cdot \left[\frac{C_c - H_0 - B_0 \cdot Q_e}{B_c + B_0} \right] \quad (44)$$

Donde H_0 = cota piezométrica del estanque; $B_0 = \Delta t/2A_r$, con A_r = sección transversal del estanque y Q_e = caudal externo del paso de tiempo anterior. Se verifica que la ecuación (44) es general, porque cuando $A_r \rightarrow \infty$, $B_0 \rightarrow 0$, con lo cual $H_p^{t+\Delta t} = H_0$, que corresponde a la presión en el estanque de cota constante.

Válvula de cierre gradual. En este caso se considera:

$$H_p^{t+\Delta t} = C_c - B_c \cdot s \cdot \tau \cdot E_s \cdot \sqrt{s(H_p - H_b)} \quad (45)$$

Donde s = signo del caudal externo; τ y E_s = parámetros asociados a la válvula y H_b = cota piezométrica conocida cuando la válvula descarga a la atmósfera o cuando existe un orificio a la entrada de un estanque de cota constante.

La importancia de las ecuaciones (43), (44) y (45) es que hacen posible separar (o desacoplar) las tuberías pertenecientes a un sistema de distribución de agua compuesto por nodos simples, estanques lineales o de cota constante y válvulas, restableciendo la continuidad del caudal y la cota piezométrica en el nodo cuando se desprecia el efecto de almacenamiento o las pérdidas singulares. El cálculo puede realizarse sin importar la cantidad de tuberías que estén descargando hacia (o desde) cada nodo de la red.

MÉTODOS HÍBRIDOS

Un Método Híbrido (MH) es un esquema multidireccional (Radulj, 2010) que combina las mejores características positivas de dos o más esquemas numéricos para producir un nuevo esquema capaz de lograr un efecto sinérgico positivo, tomando lo mejor que tiene cada método por separado. Los esquemas híbridos han sido usados para reducir (o eliminar) algunos problemas asociados con la estabilidad de algunos esquemas numéricos tales como el MC y otros basados en diferencias finitas y elementos finitos. La idea general detrás del MH es usar al MC para calcular las variables de estado Q y H en los nodos de borde (1 y $N+1$) de cada

tubería usando la ecuación (43), (44) o (45) según se trate de un nodo simple, estanque o válvula, respectivamente. La solución de los nodos internos se puede realizar usando el Esquema de la Caja (ecuaciones 13 a 22), el Método McCormack (ecuaciones 23 a 28 y/o ecuaciones 29 a 34), o el Esquema Difusivo (ecuaciones 35 a 42), dependiendo del caso y de la opción escogida por el analista. Por ejemplo, una vez resuelto el estado de flujo permanente (Q_0, H_0) y estando la red de tuberías discretizada ($\Delta t, \Delta x$), el MH1 (Caja) funciona, para cada tubería, como sigue:

i) $t = t + \Delta t$

- Computar $H_p^{t+\Delta t}$ usando: la ecuación (43) para los nodos simples de la red; la ecuación (44) para el estanque de cota constante; y la ecuación (45) para la válvula.
- Construir un sistema de ecuaciones de la forma $A \cdot x = b$ con forma de banda tomando en cuenta las ecuaciones (13) a (22) junto con las ecuaciones (43), (44) o (45) según sea el caso (ver figura 2).
- Tri-diagonalizar el sistema de ecuaciones y resolver usando el algoritmo de Thomas, llamado también de “barrido doble” (Press *et al.*, 1986; Salgado *et al.*, 1993b).
- Calcular $H_i^{t+\Delta t}$ y $Q_i^{t+\Delta t}$ ($i = 1, \dots, N + 1$).
- Volver a i) hasta completar el tiempo de simulación.

Stop.

En el sistema de ecuaciones mostrado en la Figura 2, el superíndice en cada coeficiente de la matriz A denota el número del sub-tramo. En el vector de incógnitas x , el subíndice denota el número del nodo interior del tramo. En el vector de coeficientes b , $H_{P(1)}$ corresponde a la cota piezométrica del nodo interno 1 del tramo, que coincide con el nodo de borde izquierdo de la tubería, y $H_{P(N+1)}$ corresponde a la cota piezométrica del nodo interno $N+1$, que coincide con el nodo de borde derecho de la tubería. Se dispone de tres métodos híbridos para resolver los nodos internos de cada tubería, tal como se muestra en la Tabla 1. Una ventaja de estos métodos es que, excepto por los nodos de borde, no requieren realizar interpolaciones en los nodos interiores cuando $C_n < 1.0$, lo cual conduce a resultados con menos errores con respecto al MC tradicional (1.º orden). En general, se utiliza el arreglo mostrado en la Tabla 1 porque la aplicación del MC según las ecuaciones (43), (44) o (45) permite desacoplar fácilmente la red en sus nodos de borde, permitiendo solucionar cada tramo por separado, y según distintos métodos. Además, la solución de los nodos de borde vía el MC corresponde al camino más fácil de utilizar y programar, tal como ha sido reportado por autores tales como Wylie y Streeter (1978); Chaudhry (1979); Chaudhry y Hussaini, (1985); Karney (1984); Karney y McInnis (1992).

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 d_1^1 & d_2^1 & -d_3^1 & d_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -c_1^1 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d_1^2 & d_2^2 & -d_3^2 & d_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -c_1^2 & c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & d_1^3 & d_2^3 & -d_3^3 & d_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1^3 & c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1^N & d_2^N & -d_3^N & d_3^N \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1^N & c_1^N & c_2^N & c_3^N \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ H_1 \\ Q_2 \\ H_2 \\ Q_3 \\ H_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_N \\ H_N \\ Q_{N+1} \\ H_{N+1} \end{bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} H_{P(1)}^{t+\Delta t} \\ -d_4^1 \\ -c_4^1 \\ -d_4^2 \\ -c_4^2 \\ -d_4^3 \\ -c_4^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -d_4^N \\ -c_4^N \\ H_{P(N+1)}^{t+\Delta t} \end{bmatrix}$$

Figura 2 | Sistema de ecuaciones en forma de banda para una tubería con N sub-tramos.

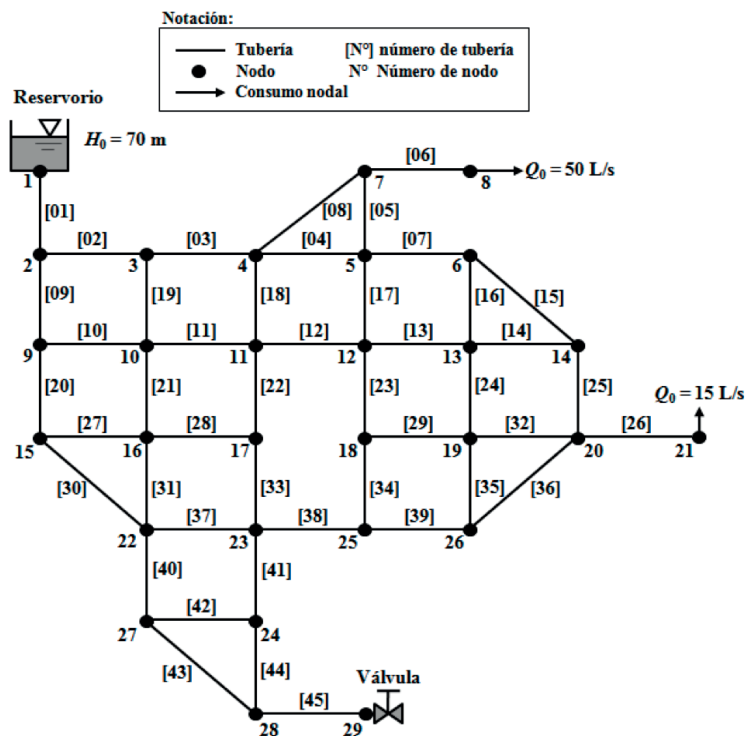
Tabla 1 | Métodos Híbridos (MH): solución de los nodos internos y los de borde.

Método	Solución de...	
	Nodos de Borde	Nodos Internos
MH1	MC	Esquema de la Caja
MH2	MC	Método de McCormack
MH3	MC	Esquema Difusivo (Lax)

En el caso especial del MH1, el desacoplamiento de la red ayuda a reducir significativamente el tamaño del sistema de ecuaciones a un valor proporcional a la cantidad de sub-tramos que tenga cada tubería analizada. De no proceder de esta forma, la aplicación de las ecuaciones (13) y (14) sobre cada sub-tramo de la red generaría un sistema de soluciones excesivamente grande, haciendo que la obtención de la solución sea extremadamente ineficiente en términos de memoria y tiempo de ejecución computacional.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Los métodos antes descritos serán aplicados para resolver el golpe de ariete en el sistema de distribución de agua (SDA) mostrado en la Figura 3, el cual consiste de un estanque (reservorio) de cota constante $H_0 = 70$ (m); 45 tuberías con diferentes longitudes (120 m para las tuberías rectas; 169.7 m para las tuberías diagonales), diferentes diámetros (entre 75 mm y 300 mm), espesores entre 1 y 2 (mm); distintos caudales iniciales (entre 115 L/s y 2 L/s) y distintos materiales constituyentes (acero, cobre y PVC). Además, el sistema tiene 29 nodos de borde con distintos valores de cotas piezométricas iniciales (H_0) y de cotas de terreno, dos nodos con demanda (consumo) constante y una válvula ubicada en el extremo aguas abajo de la tubería 45. El factor de fricción (Darcy) varía entre $f = 0.017$ y $f = 0.030$.

**Figura 3** | Esquema del sistema de distribución de agua ejemplo.

La discretización de la red consiste en tuberías con distinta cantidad de sub-tramos (N), velocidades de la onda y números de Courant (ver figuras 4, 5 y 6). El paso de tiempo computacional (Δt) es igual a 0.054 (s) y la cantidad total de sub-tramos (N total) de la discretización asciende a 348. El flujo transitorio es generado por el cierre de la válvula en 1 (s). El tiempo máximo de simulación es igual a 60 (s). La longitud total de tubería (L total) es de 5648.55 (m).

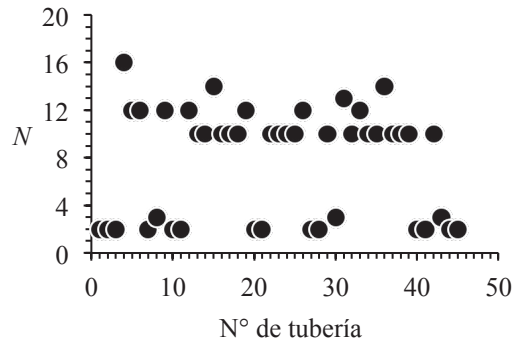


Figura 4 | Número de sub-tramos por cada tramo.

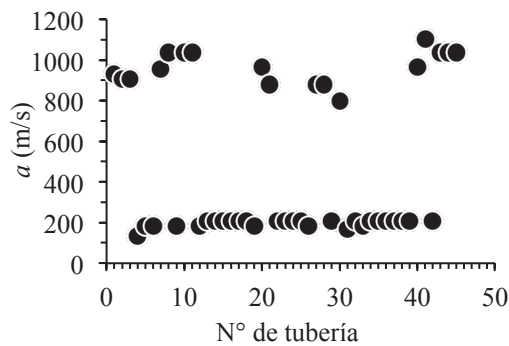


Figura 5 | Velocidades de onda de cada tramo.

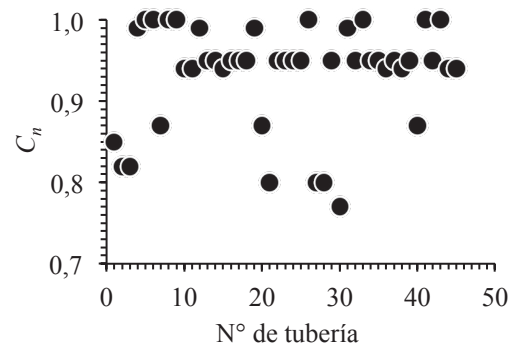


Figura 6 | Números de Courant de cada tramo.

RESULTADOS

Las figuras 7, 8, 9 y 10 muestran la cota piezométrica en la válvula (expresada en mca = metros de columna de agua) cuando el flujo transitorio es resuelto usando el MC (1.º orden), MH1 (2.º orden), MH2 (2.º orden) y MH3 (1.º orden), respectivamente.

Aunque a primera vista las curvas generadas por el MC, MH1, MH2 y MH3 parecen ser similares, registran diferencias, especialmente en la magnitud de las cotas piezométricas máximas y mínimas, esto debido obviamente a la distinta naturaleza y forma de solución que utiliza cada método.

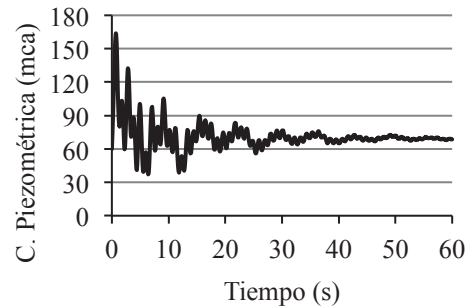


Figura 7 | Cota piezométrica vs. tiempo en la válvula (MC – 1.º orden).

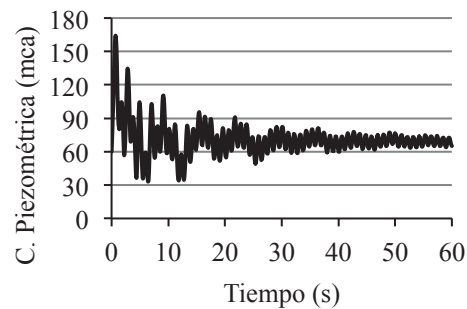


Figura 8 | Cota piezométrica vs. tiempo en la válvula (MH1 – 2.º orden | Caja).

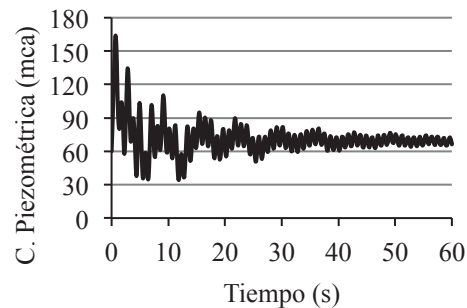


Figura 9 | Cota piezométrica vs. tiempo en la válvula (MH2 – 2.º orden | McCormack).

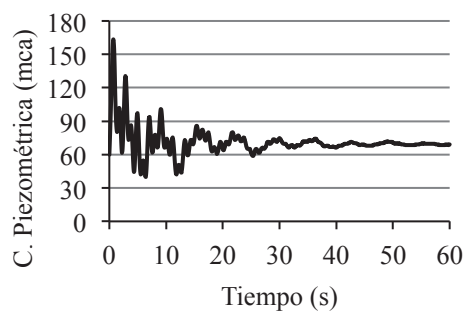


Figura 10 | Cota piezométrica vs. tiempo en la válvula (MH3 – 1.º orden | Difusivo).

Por ejemplo, las tablas 2 y 3 muestran un comparativo entre las cotas piezométricas máximas y mínimas registradas por cada método, junto con su ubicación en el sistema (tramo) e instante de ocurrencia, medida desde el inicio del transiente. Se observa en la Tabla 2 que todos los métodos registran una cota piezométrica extrema máxima en el mismo tramo (45) e instante de ocurrencia (0.7 s). Al analizar las cotas piezométricas máximas, la tabla 2 indica que las diferencias entre uno y otro método no superan 1 (mca). En relación a las cotas piezométricas mínimas (Tabla 3), se observan diferencias más significativas entre los métodos, con rangos de variación de hasta 8 (mca) en algunos casos, siendo el MH1 el que entrega el valor de cota piezométrica mínima más bajo, seguido luego por MH2. En este caso la cota piezométrica mínima se genera en el tramo 42, con tiempo de ocurrencia entre 5.9 y 6.0 (s).

Tabla 2 | Cotas piezométricas (H) máximas, ubicación y tiempo de ocurrencia.

Método	H Máxima (mca)	Ubicación (Nº de Tramo)	Tiempo de Ocurrencia (s)
MC – 1.º orden	163.9	45	0.7
MH1 (Caja) – 2.º orden	164.3	45	0.7
MH2 (McCormack) – 2.º orden	164.1	45	0.7
MH3 (Difusivo) – 1.º orden	163.6	45	0.7

Tabla 3 | Cotas piezométricas (H) mínimas, ubicación y tiempo de ocurrencia.

Método	H Mínima (mca)	Ubicación (Nº de Tramo)	Tiempo de Ocurrencia (s)
MC – 1.º orden	23.1	42	5.9
MH1 (Caja) – 2.º orden	18.3	42	5.9
MH2 (McCormack) – 2.º orden	19.6	42	6.0
MH3 (Difusivo) – 1.º orden	26.2	42	6.0

Tiempo de ejecución (runtime)

Como era previsible, los métodos explícitos (MC, MH2 y MH3) fueron más rápidos que el MH1 debido a que no deben crear y resolver un sistema de ecuaciones para cada tubería del sistema. MH2 sorpresivamente resultó ser levemente más rápido que el MC (Tabla 4). Los métodos fueron corridos en un PC estándar CPU N280 @ 1.66 GHz.

Tabla 4 | Tiempo de ejecución (runtime) de cada método.

Método	Tiempo de ejecución (s)
MC	39.9
MH1 (Caja)	140.9
MH2 (McCormack)	38.3
MH3 (Difusivo)	29.3

DISCUSIÓN

El análisis clásico del flujo transitorio tiende a incorporar una serie de simplificaciones y supuestos que, de alguna forma, buscan reducir la complejidad del problema, tales como considerar que el agua no contiene aire; que el factor de fricción es constante (no transiente); que la interacción fluido–estructura es inexistente; o que el consumo en los nodos es independiente de la presión; etc. (Twyman, 2016). Estas simplificaciones y supuestos significan un costo en el sentido de que dejan fuera del análisis algunas situaciones que, en el mundo real, tienden a minimizar el impacto del golpe de ariete. Por ejemplo, basta una pequeña

porción de aire en el agua para reducir significativamente la magnitud de la velocidad de la onda (Wylie y Streeter, 1978; Chaudhry, 1979) y, por ende, de la sobrepresión entendida como un valor que depende directamente de α según la ecuación de Joukowski (Ghidaoui *et al.*, 2005). Esto significa que, en la mayoría de los casos, el análisis transitorio clásico tenderá a entregar, en mayor o menor medida, resultados más conservadores (por el lado de la seguridad) aunque irreales, con un grado de exactitud numérica que dependerá del esquema de solución utilizado y de su nivel de dependencia respecto del número de Courant. En el sistema de distribución analizado es difícil determinar hasta qué punto cada método de solución se acerca o aleja del resultado exacto, esto porque es imposible resolver el sistema con $C_n = 1$ en *todos* los tramos sin antes modificar algún parámetro inicial (generalmente α o L), lo cual puede llevar indefectiblemente a incrementar la cantidad de sub-tramos (N), con todas las implicancias que esto supone desde el punto de vista de la eficiencia numérica (memoria computacional, tiempo de ejecución, etc.) y del hecho que estamos modificando la configuración original del sistema, lo cual puede implicar resolver un problema distinto al originalmente planteado. Por ejemplo, en el caso analizado, el intento de consecución de $C_n = 1$ en todos los tramos del sistema, con un ajuste de α inferior a $\pm 1\%$, significa discretizar la red usando $\Delta t = 0.00256829$ (s) y N total igual a 7716. Esto implica, en comparación con la discretización adoptada originalmente en la red ejemplo, una disminución de 95.2% en el caso de Δt , y un incremento de 2117% en el caso del N total. En otras palabras, en orden a conseguir un mejor resultado, el MC necesariamente debe afinar (reducir) el tamaño de Δx en cada tramo (Wood, 2005), pasando en el ejemplo analizado de $\Delta x = 16.20$ m a $\Delta x = 0.73$ m (ambos valores promedio), con el consiguiente impacto en la cantidad de cálculos a realizar en cada paso de tiempo. Por esta razón resulta menos costoso aplicar metodologías que sean reconocida y probadamente más precisas (y conservadoras) que el MC cuando $C_n < 1$ en la mayoría de los tramos, por lo que desde un punto de vista ingenieril, y siempre por el lado de la seguridad, es conveniente saber cuáles métodos son los que entregan la mayor amplitud de rango entre las cotas piezométricas extremas (positivas y negativas) frente a un mismo evento transitorio. En la red ejemplo analizada, esto correspondería al MH1, seguido de cerca por MH2. Este resultado es coherente con lo expresado por autores tales como Chaudhry y Hussaini (1985), en el sentido que los esquemas de 2.º orden se caracterizan por presentar un mejor desempeño respecto de los métodos tradicionales cuando se requiere modelar ondas de presión. El MH1 es comparativamente más lento que el resto de los métodos debido a su naturaleza implícita que requiere crear y resolver un sistema de ecuaciones para *cada* tubería en *cada* paso de tiempo. Sin embargo, esto constituye una ventaja respecto de otra metodología similar planteada por Chaudhry (1979, 1982), ya que MH1 evita tener que construir y resolver un gran sistema de ecuaciones, representativa de *toda* la red, en *cada* paso de tiempo, la cual tendría, para el caso analizado, una dimensión de 744×744 al aplicar las ecuaciones (13) y (14) en cada sub-tramo de la discretización más el par de ecuaciones correspondiente a los nodos de borde. Debido a su capacidad para desacoplar la red, MH1 debe resolver un sistema de ecuaciones por cada tramo del sistema cuyo tamaño máximo alcanza las dimensiones 34×34 (incluyendo las dos ecuaciones correspondientes a los nodos de borde), reduciendo con esto el gasto de recursos computacionales. El manejo de la topología o complejidad del sistema de distribución de agua analizado se facilita usando las ecuaciones (43), (44) y (45), las cuales permiten resolver fácilmente Q y H en cualquier nodo de borde mediante el MC sin importar la cantidad de tramos conectados a él, al tiempo que desacopla cada tramo para ser resuelto, en cada paso de tiempo, según el esquema escogido por el analista, que en este caso debiera ser MH1 o MH2.

CONCLUSIONES

La modelación del flujo transitorio en los sistemas de distribución de agua constituye un requisito esencial para prever posibles daños generados por presiones extremas, siendo importante que todo Ingeniero proyectista comprenda que las ecuaciones que gobiernan el flujo transitorio contienen limitaciones, siendo este punto importante para juzgar la fiabilidad de los resultados obtenidos y para evitar el mal uso de los modelos numéricos disponibles. Existe una variada oferta de esquemas numéricos válidos para modelar el flujo transitorio, cada uno de ellos con un distinto nivel de uso de los recursos computacionales (memoria computacional), de velocidad de procesamiento y, lo más importante, con distinto nivel de respuesta frente al impacto del número de Courant; es decir, con mayor o menor susceptibilidad frente al efecto de atenuación numérica asociada a un $C_n < 1$. En este punto es relevante conocer las ventajas, desventajas y limitaciones numéricas de cada esquema numérico en orden a utilizar herramientas que permitan modelar en forma más precisa, rápida y eficiente los transitorios, y que además sirvan para verificar y/o estudiar la operación de un sistema sometido a condiciones transientes, o para seleccionar / dimensionar los elementos de protección contra el efecto de las ondas de presión.

REFERENCIAS

- Abreu, J.M., Cabrera, E., Iglesias, P.L., Izquierdo, J. 1995. El Golpe de Ariete en Tuberías de Impulsión. Comentarios a las Expresiones de Mendiluce. *Ingeniería del Agua*, 2(2), 37-52. <https://doi.org/10.4995/ia.1995.2676>
- Boulos, P.F., Wood, D.J., Funk, J.E. 1990. A Comparison of Numerical and Exact Solutions for Pressure Surge Analysis. *Proceedings of the 6th International BHRA Conference on Pressure Surges*, A.R.D. Thorley editor, Cambridge, England, 149-159.
- Boulos, P.F., Karney, B.W., Wood, D.J., Lingireddy, S. 2005. Hydraulic Transient Guidelines for Protecting Water Distribution Systems. *Journal AWWA*, 97(5), 111-124.
- Chaudhry, M.H. 1979. *Applied Hydraulic Transients*. Van Nostrand Reinhold, 1st Edition, New York, USA.
- Chaudhry, M.H. 1982. Numerical Solution of Transient-Flow Equations. *Proceedings of Speciality Conf. Hydraulics Division*, ASCE, Jackson, MS, 633-656.
- Chaudhry, M.H., Hussaini, M.Y. 1985. Second-Order Accurate Explicit Finite-Difference Schemes for Waterhammer Analysis. *Journal of Fluids Engineering*, 107(4), 523-529. <https://doi.org/10.1115/1.3242524>
- Chaudhry, M.H. 2013. *Applied Hydraulic Transients*. Springer Science and Business Media. 3rd Edition.
- Ghidaoui, M.S., Karney, B.W. 1994. Equivalent Differential Equations in Fixed-Grid Characteristics Method. *Journal of Hydraulic Engineering*, 120(10), 1159- 1175. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1994\)120:10\(1159\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1994)120:10(1159))
- Ghidaoui, M.S., Zhao, M., McInnis, D.A., Axworthy, D.H. 2005. A Review of Water Hammer Theory and Practice. *Applied Mechanics Reviews*, ASME, 58(1), 49-76. <https://doi.org/10.1115/1.1828050>
- Goldberg, D.E., Wylie, E.B. 1983. Characteristics Method using Time-Line Interpolations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 109(5), 670-683. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1983\)109:5\(670\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1983)109:5(670))
- Izquierdo, J., Pérez, R., Iglesias, P.L. 2004. Mathematical Models and Methods in the Water Industry. *Mathematical and Computer Modelling*, 39, 1353-1374. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2004.06.012>
- Jung, B.S., Boulos, P.F., Wood, D.J. 2007. Pitfalls of Water Distribution Model Skeletonization for Surge Analysis. *Journal AWWA*, 99(12), 87-98.
- Jung, B.S., Boulos, P.F., Wood, D.J., Bros, C.M. 2009a. A Lagrangian Wave Characteristic Method for Simulating Transient Water Column Separation. *Journal AWWA*, 101(6), 64-73.
- Jung, B.S., Boulos, P.F., Wood, D.J. 2009b. Effect of Pressure-Sensitive Demand on Surge Analysis. *Journal AWWA*, 101(4), 100-111.
- Karney, B.W. 1984. *Analysis of Fluids Transients in Large Distribution Networks*. PhD Thesis, University of British Columbia, Canada.
- Karney, B.W., McInnis, D. 1992. Efficient Calculation of Transient Flow in Simple Pipe Networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(7), 1014-1030. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1992\)118:7\(1014\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1992)118:7(1014))
- Mansour-Rezaei, S., Naser, G., Malekpour, A., Karney, B.W. 2013. Contaminant Intrusion in Water Distribution Systems. *Journal AWWA*, E278-E290.
- Press, W.H., Flanery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. 1986. *Numerical Recipes, the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York.
- Radulj, D. 2010. *Assessing the Hydraulic Transient Performance of Water and Wastewater Systems using Field and Numerical Modeling Data*. Master of Science, U. of Toronto.
- Salgado, R.O. 1992. Revisión de los Métodos Numéricos para el Análisis del Escurrimiento Impermanente en Redes de Tuberías a Presión. *XV Congreso Latinoamericano de Hidráulica*, IAHR, AIIIH, Cartagena, Colombia.

- Salgado, R.O., Twyman, J., Twyman, C., Zenteno, J.C. 1993a. Golpe de Ariete en Redes de Agua Potable. Enfoque Numérico de Análisis. *X Congreso Chileno de Ingeniería Sanitaria y Ambiental*, Valdivia, Chile.
- Salgado, R.O., Zenteno, J., Twyman, C., Twyman, J. 1993b. A Hybrid Characteristics–Finite Difference Method for Unsteady Flow in Pipe Networks. *International Conference on Integrated Computer Applications for Water Supply and Distribution*, De Montfort University, Leicester, UK, 139-149.
- Simpson, A.R., Wu, Z.Y. 1997. Computer Modelling of Hydraulic Transients in Pipe Networks and the Associated Design Criteria. *MODSIM 97, International Congress on Modelling and Simulation*, Modelling and Simulation Society of Australia, Hobart, Tasmania, Australia.
- Streeter, V.L. 1966. *Waterhammer Analysis of Distribution Systems*. University of Michigan, IP-748.
- Twyman, J., Twyman, C., Salgado, R.O. 1997. Optimización del Método de las Características para el Análisis del Golpe de Ariete en Redes de Tuberías. *XIII Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica*, Universidad de Santiago de Chile, USACH, Santiago, Chile, pp. 53-62.
- Twyman, J. 2004. *Decoupled Hybrid Methods for Unsteady Flow Analysis in Pipe Networks*. Ed. La Cáfila, 1st Edition, Valparaíso. Chile. ISBN 10: 956-8142-17-7.
- Twyman, 2016. Golpe de Ariete en una Red de Distribución de Agua. *Anales del XXVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica*. IAHR. Lima, Perú, 28 al 30 de Septiembre de 2016.
- Watters, G.Z. 1984. *Analysis and Control of Unsteady Flow in Pipelines*. Butterworth–Heinemann, 2nd Edition, Boston, USA.
- Wood, D.J. 2005. Water Hammer Analysis–Essential and Easy (And Efficient). *Journal of Environmental Engineering*, ASCE, 131(8), 1123-1131. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9372\(2005\)131:8\(1123\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9372(2005)131:8(1123))
- Wood, D.J., Lingireddy, S., Boulos, P.F., Karney, B.W., McPherson, D.L. 2005. Numerical Methods for Modeling Transient Flow in Distribution Systems. *Journal AWWA*, 97(7), 104-115.
- Wylie, B.E., Streeter, V.L. 1978. *Fluid Transients*. McGraw–Hill. International Book Company. 1st Edition. USA.