Densidad espectral de potencia de una señal digital PAM multinivel

Mayo de 2017

Apellidos, Nombre:	Flores Asenjo, Santiago J. (sflores@dcom.upv.es)
Departamento:	Dep. de Comunicaciones
Centro:	EPS de Gandia

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Resumen

En este artículo se va a presentar la metodología general para el cálculo de la Densidad Espectral de Potencia de una señal digital PAM (*Pulse Amplitude Modulation* o Modulación de Pulsos en Amplitud) **sin memoria**, es decir, cada una de las amplitudes representará la información de un símbolo transmitido y será independiente del resto de símbolos.

El cálculo se hará considerando que la señal es **multinivel**. Es decir, habrá M símbolos a transmitir, y cada uno de ellos tendrá una amplitud distinta que representará información digital correspondiente a $\log_2 M$ bits.

Se evaluará tanto el caso **polar** (las amplitudes pueden tomar valores positivos y negativos) como el **unipolar** (todas las amplitudes son positivas o nula), y se particularizará para el caso de pulsos conformadores rectangulares, de duración igual al periodo de símbolo T, es decir, sin retorno a cero o **NRZ** (*Non Return to Zero*).

Objetivos y conocimientos previos

Los objetivos de aprendizaje este artículo docente se presentan de forma esquemática en la tabla 1.

Como conocimientos previos, el alumno deberá tener nociones básicas de transmisión digital banda base mediante pulsos PAM (*Pulse Amplitude Modulation*), así como de los códigos de línea más utilizados (polar, unipolar,...).

También es interesante que conozca los fundamentos para el cálculo de las densidades espectrales de potencia de este tipo de señales digitales, aunque se hará un repaso en la siguiente sección.

Se hará referencia a la bibliografía presentada al final del artículo para aquellas demostraciones que queden fuera del ámbito de interés principal.

Tabla 1: Objetivos de aprendizaje

1. Se aprenderá a calcular de forma analítica la densidad espectral de potencia de de una señal digital PAM multinivel
2. Se trabajará con codificación polar (amplitudes de símbolos simétricamente distribuidas en valores positivos y negativos) y unipolar (todas las amplitudes positivas o nula)
3. Se comprobará que, en ambos casos, los anchos de banda que ocuparán son iguales e independientes del número de símbolos
4. En el caso unipolar, se observará claramente el término de componente continua
5. Se propondrá como tareas adicionales la simulación de los distintos casos para verificar los resultados analíticos obtenidos, la particularización para casos sencillos de algunas expresiones y la extensión para códigos de línea con retorno a cero (RZ)

1 Introducción

Una señal digital PAM (*Pulse Amplitude Modulation* o Modulación de Pulsos en Amplitud) no es más que una sucesión de pulsos $g(t)$, enviados cada T segundos, y modulados en amplitud cada uno de ellos por una valor a_k, que es donde realmente reside la información digital (Ziemer 2010):

$$s_{\text{PAM}}(t) = \sum_k a_k g(t - kT) \tag{1}$$

Al no indicar los límites del sumatorio, queremos dar a entender que la sucesión es indefinida, aunque, a efectos de cálculo, se considerará que el índice k variará desde $-\infty$ hasta ∞.

Cada amplitud a_k representará información de un símbolo formado por uno o más bits, y a T se le llamará **periodo de símbolo**. Dependiendo de qué amplitudes se asignen y en qué casos, se tendrá un **código de línea** u otro.

Al pulso $g(t)$ se le llama **pulso conformador** y, aunque no sirve más que de transporte de la información contenida en a_k, determinará en gran parte las características de la señal digital.

Por tanto, la señal digital $s_{\mathrm{PAM}}(t)$ tendrá una parte determinista referida al pulso conformador $g(t)$ utilizado, pero también una parte no determinista, ya que los valores de las amplitudes a_k serán desconocidas *a priori* por el receptor.

Para conocer las características espectrales de este tipo de señales, habrá que recurrir a la Densidad Espectral de Potencia, que puede calcularse de la siguiente forma (Ziemer 2010):

$$S_s(f) = |G(f)|^2 \frac{1}{T} \sum_n R_a(n) e^{-j2\pi nTf} \tag{2}$$

donde $G(f)$ es el espectro del pulso conformador $g(t)$ utilizado, y $R_a(n)$ es la **Función de Autocorrelación** de las amplitudes a_k, que se presentará en la siguiente sección.

2 Función de autocorrelación de las amplitudes

La función de autocorrelación de las amplitudes se define como el valor medio del producto de dos amplitudes correspondientes a dos símbolos separados n posiciones (es decir, n periodos de símbolo en la señal digital) (Couch 2008):

$$R_a(n) = E[a_k a_{k+n}] \tag{3}$$

Es inmediato comprobar que se trata de una función par, es decir, $R_a(n) = R_a(-n)$. Además, para cualquier código de línea se cumple que:

$$R_a(n=0) = E[a_k a_k] = E[{a_k}^2] = \overline{{a_k}^2} \tag{4}$$

Es decir, en $n = 0$ la función de autocorrelación es igual al valor medio de los cuadrados de las amplitudes del código de línea utilizado.

3 Códigos de línea sin memoria

Se dice que un código de línea es **sin memoria**, cuando para seleccionar la amplitud asociada a cada símbolo no se tiene en cuenta los símbolos anteriores ni posteriores. Por tanto, cada amplitud a_k es independiente de las demás.

Como consecuencia de ello, en estos casos se tendrá que la función de autocorrelación para $n \neq 0$ se podrá calcular de la siguiente forma:

$$R_a(n \neq 0) = E[a_k a_{k-n}] = E[a_k]E[a_{k-n}] = E[a_k]^2 = \overline{a_k}^2 \tag{5}$$

Es decir, para códigos sin memoria se cumple que la función de autocorrelación para $n \neq 0$ es igual al cuadrado del valor medio de las amplitudes.

4 Cálculo de la densidad espectral de potencia para una señal PAM polar multinivel

Para aplicar lo aprendido hasta el momento, se va a proceder a calcular la densidad espectral de potencia para el caso de una señal PAM cuyas amplitudes puedan tomar M valores simétricamente distribuidos en polaridad positiva y negativa.

Por tanto, se van a considerar las siguientes M amplitudes: $\pm A$, $\pm 3A$, ... , $\pm(M-1)A$. Recordemos que M ha de ser potencia de 2 para que cada amplitud represente un número entero de bits igual a $\log_2 M$.

Esto significa que cada uno de los símbolos que se transmita podrá ser uno de los M siguientes:

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= -(M-1)Ag(t) \\
s_2(t) &= -(M-3)Ag(t) \\
&\ldots \\
s_{\frac{M}{2}}(t) &= -Ag(t) \\
s_{\frac{M}{2}+1}(t) &= Ag(t) \\
&\ldots \\
s_{M-1}(t) &= (M-3)Ag(t) \\
s_M(t) &= (M-1)Ag(t)
\end{aligned}$$

Al estar las M amplitudes simétricamente distribuidas respecto a 0, es evidente que su valor medio es nulo. Por tanto, teniendo en cuenta la Ecuación 4 y la Ecuación 5, se tiene que, en este caso, la función de autocorrelación será:

$$R_a(n) = \begin{cases} \overline{a_k^2} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \tag{6}$$

Sólo queda, por tanto, calcular el valor medio de los cuadrados de las amplitudes, $\overline{a_k^2}$. Dejamos para el alumno que haga el cálculo para un valor concreto de M o que obtenga la expresión general para cualquier M (mucho más complejo y fuera del ámbito de este artículo).

Sustituyendo la función de autocorrelación obtenida, en la Ecuación 2, se tiene:

$$S_s(f) = |G(f)|^2 \frac{1}{T} \sum_n R_a(n) e^{-j2\pi nTf} = |G(f)|^2 \frac{\overline{a_k^2}}{T} \tag{7}$$

Como se puede apreciar, en este caso, la densidad espectral de potencia no es más que una versión escalada del módulo al cuadrado del espectro del pulso utilizado, por lo que ocupará exactamente su ancho de banda, con independencia del número de símbolos M que se utilice (Lathi y Ding 2009).

En el caso particular de trabajar con pulsos rectangulares de duración T (es decir, $g(t) = \prod\left(\frac{t}{T}\right)$), cuyo espectro sea $G(f) = T\text{sinc}(fT)$, se obtendrá la siguiente densidad espectral de potencia:

$$S_s(f) = \overline{a_k^2} T \text{sinc}^2(fT) \tag{8}$$

Esta densidad espectral de potencia presenta nulos en frecuencias múltiplos de $1/T$, excepto en $f = 0$.

Como ejercicio, es interesante que el alumno haga una simulación en *Simulink*® de este tipo de codificación, para comprobar que la densidad espectral de potencia que se obtiene es la calculada.

5 Cálculo de la densidad espectral de potencia para una señal PAM unipolar multinivel

Ahora vamos a calcular la densidad espectral de potencia de una señal digital PAM cuyas amplitudes puedan tomar los siguientes M valores: 0, A, $2A$, ... , $(M-1)A$.

Teniendo en cuenta lo visto en la sección 2 y en la sección 3, la función de autocorrelación de las amplitudes será:

$$R_a(n) = \begin{cases} \overline{a_k^2} & \text{si } n = 0 \\ \overline{a_k}^2 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \tag{9}$$

Ahora el valor medio $\overline{a_k}$ no será nulo, por lo que en el sumatorio de la Ecuación 2 habrá infinitos sumandos no nulos. Teniendo en cuenta la Relación de Parseval (Wikipedia 2017) y que $\overline{a_k}^2$ y $\overline{a_k^2}$ las podemos relacionar con la varianza mediante $\sigma_{a_k}^2 = \overline{a_k^2} - \overline{a_k}^2$, finalmente quedará la densidad espectral de potencia para el caso unipolar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
S_s(f) &= |G(f)|^2 \frac{1}{T} \sum_n R_a(n) e^{-j2\pi nTf} = \\
&= |G(f)|^2 \frac{1}{T} \left[\overline{a_k^2} - \overline{a_k}^2 + \sum_n \overline{a_k}^2 e^{-j2\pi nTf} \right] = \\
&= |G(f)|^2 \frac{1}{T} \left[\sigma_{a_k}^2 + \overline{a_k}^2 \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right] = \\
&= |G(f)|^2 \frac{\sigma_{a_k}^2}{T} + \frac{\overline{a_k}^2}{T^2} \sum_n \left| G\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

Observamos que aparecen multitud de deltas en frecuencia cada $1/T$, incluyendo una en $f = 0$ que representa el término en continua que claramente tiene este tipo de señales digitales.

No es difícil obtener el valor medio y la varianza de las amplitudes para este caso de codificación unipolar con M símbolos:

$$\begin{aligned}\overline{a_k} &= \frac{M-1}{2}A \\ \sigma_{a_k}^2 &= \frac{M^2-1}{12}A^2\end{aligned}$$

Finalmente, al igual que en el caso polar, podemos obtener la densidad espectral de potencia al utilizar pulsos rectangulares de duración T para el caso unipolar:

$$S_s(f) = \frac{M^2-1}{12}A^2T\mathrm{sinc}^2(fT) + \frac{(M-1)^2}{4}A^2\delta(f) \tag{11}$$

Vemos que la mayor parte de las deltas desaparecen al coincidir con los nulos de la sinc, permaneciendo el término de continua.

Dejamos como ejercicio para el alumno que particularice para los casos más sencillos: $M = 2$ y $M = 4$, así como la implementación de las simulaciones en *Simulink®* que comprueben los resultados obtenidos.

6 Versiones RZ

Todo lo visto en este artículo se refiere a códigos sin retorno a cero (**NRZ**: *Non Return to Zero*). Para obtener las versiones **RZ** (con retorno a cero), bastaría con sustituir los espectros de los pulsos $g(t)$ por sus versiones cuya duración temporal sea la mitad (lo cual repercutirá en un mayor ancho de banda).

Así, en el caso de pulsos rectangulares, ahora se trabajaría con $g(t) = \prod\left(\frac{t}{T/2}\right)$, cuyo espectro es $G(f) = \frac{T}{2}\mathrm{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)$.

Dejamos para el alumno la obtención de las densidades espectrales de las versiones RZ con pulsos rectangulares, tanto para el caso polar como el unipolar, su simulación y la verificación de la posición de los nulos.

Conclusiones

Se ha presentado en este artículo cómo calcular la densidad espectral de potencia de una señal digital PAM multinivel, tanto para el caso polar como el unipolar. Ambas presentan características espectrales similares (su ancho de banda es independiente del número de símbolos utilizado), salvo que en el caso unipolar aparecen adicionalmente componentes discretas en frecuencia (deltas), la más significativa de las cuales está situada en $f = 0$ (componente continua).

Al utilizar pulsos rectangulares de duración igual al periodo de símbolo T, se observan en ambos casos nulos en la densidad espectral de potencia cada $1/T$, salvo en $f = 0$.

Se ha dejado al lector como trabajo adicional, la particularización para valores de M sencillos, la implementación de simulaciones que corroboren lo calculado, y la ampliación al caso RZ (códigos de línea con retorno a cero).

Bibliografía

Couch, Leon W. (2008). *Sistemas de comunicación digitales y analógicos*. Pearson Educación. ISBN: 9789702612162 (vid. pág. 5).

Lathi, B. P. y Zhi Ding (2009). *Modern Digital and Analog Communications Systems*. Oxford University Press Inc. ISBN: 0195384938 (vid. pág. 7).

Wikipedia, Colaboradores de (2017). *Relación de Parseval*. Wikipedia, La enciclopedia libre. [Internet; descargado 1-junio-2017]. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Relaci%C3%B3n_de_Parseval (vid. pág. 8).

Ziemer, Rodger E. (2010). *Principles of Communications: systems, modulation, and noise*. John Wiley & Sons Ltd. ISBN: 9780470398784 (vid. págs. 4, 5).