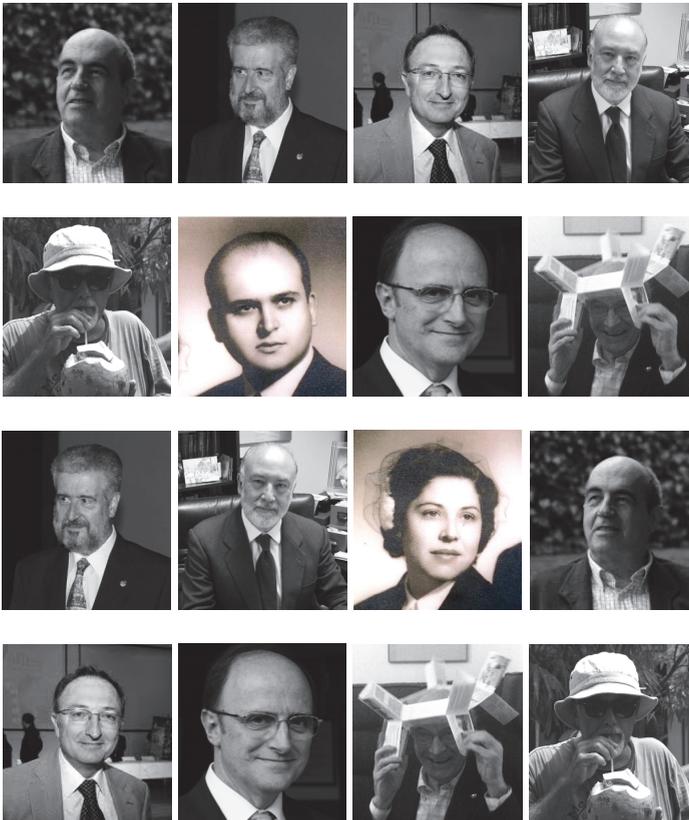


TEORÍA UNIFICADA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES ESBELTOS

SALVADOR MONLEÓN CREMADES |



**TEORÍA UNIFICADA DE
ELEMENTOS ESTRUCTURALES
ESBELTOS**

Aplicación a vigas, arcos, placas y láminas

SALVADOR MONLEÓN CREMADES

**EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Colección UPV[Scientia]; serie Ingeniería Civil

Los contenidos de esta publicación han sido evaluados mediante el sistema doble ciego, siguiendo el procedimiento que se recoge en: <http://www.upv.es/entidades/AEUPV/info/891747normalc.html>

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: MONLEÓN CREMADES, S. (2017). Teoría unificada de elementos estructurales esbeltos. Valencia: Universitat Politècnica de València

© Salvador Monleón Cremades

© 2017, Editorial Universitat Politècnica de València

distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0577_07_01_01

ISBN: 978-84-9048-584-2

Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es.

ÍNDICE

PRÓLOGOS
PRESENTACIÓN
LISTA DE FIGURAS
LISTA DE TABLAS

PARTE I: PIEZAS ALARGADAS

CAPÍTULO 1. Modelado geométrico de piezas alargadas

- 1.1** Triedro de Frenêt-Serret de una curva orientada
- 1.2** Geometría del sólido: el *espacio tubular*
- 1.3** El problema de la selección del sistema de referencia
 - 1.3.1 *Piezas de sección constante y conformado natural*
 - 1.3.2 *Piezas de sección constante y conformado oblicuo*
 - 1.3.3 *Piezas de sección variable*
 - 1.3.4 *Conclusiones de la sección 1.3*

CAPÍTULO 2. Modelado mecánico de piezas alargadas

- 2.1** El cambio de configuración
- 2.2** Teoría unificada de piezas alargadas: estática
 - 2.2.1 *Introducción*
 - 2.2.2 *Los pasos de la formulación unificada*
 - 2.2.2 (a) *Hipótesis fundamental*
 - 2.2.2 (b) *Matrices de deformación*
 - 2.2.2 (c) *Ecuaciones constitutivas*
 - 2.2.2 (d) *Esfuerzos generalizados*

- 2.2.2 (e) *Energía potencial de la pieza alargada*
- 2.2.2 (f) *Propiedades de la densidad lineal de energía potencial*
- 2.2.2 (g) *Ecuaciones diferenciales de la teoría*
- 2.2.3 *Forma Hamiltoniana de las ecuaciones*
- 2.2.4 *Otras factorizaciones útiles para el análisis de piezas alargadas de sección transversal indeformable*
- 2.2.5 *Construcción de la solución*
 - 2.2.5 (a) *Solución general: el operador fundamental del problema de valores iniciales*
 - 2.2.5 (b) *Formulación sistemática del problema de contorno*
 - 2.2.5 (c) *Condiciones de equilibrio global en desplazamientos: la matriz de rigidez*
- 2.2.6 *El modelo hiperviga: hiperestatismo local y pseudo-esfuerzos*
 - 2.2.6 (a) *El modelo "viga estándar" (SBM)*
 - 2.2.6 (b) *Desacoplamiento del problema estático y concepto de "hiperviga"*
 - 2.2.6 (c) *El concepto de hiperestatismo local*
 - 2.2.6 (d) *Los pseudo-esfuerzos en el equilibrio local*
 - 2.2.6 (e) *Predicción de tensiones en el modelo hiperviga*
- 2.2.7 *Conclusiones de la sección 2.2*

2.3

Teoría unificada de piezas alargadas: dinámica

- 2.3.1 *Introducción*
- 2.3.2 *Ecuaciones del movimiento*
- 2.3.3 *Vibraciones libres de las piezas alargadas*
- 2.3.4 *Análisis dinámico de piezas alargadas mediante descomposición modal*
 - 2.3.4 (a) *Ortogonalidad de los modos de vibración*
 - 2.3.4 (b) *Vibraciones forzadas no amortiguadas*
 - 2.3.4 (c) *Matriz de rigidez dinámica y análisis de sistemas de barras*
 - 2.3.4 (d) *Cómputo del amortiguamiento*
- 2.3.5 *Conclusiones de la sección 2.3*

2.4

Teoría unificada de piezas alargadas: comportamiento no-lineal y estabilidad inicial

- 2.4.1 *Introducción*
- 2.4.2 *Validación de la hipótesis fundamental en el marco del análisis geoméricamente no-lineal*
- 2.4.3 *Presentación alternativa de la formulación no-lineal con pequeñas deformaciones: aplicación al MVS*
- 2.4.4 *Equilibrio y estabilidad en teoría de pequeñas deformaciones*
- 2.4.5 *Introducción al cálculo no-lineal de piezas alargadas*
- 2.4.6 *Estabilidad inicial de las piezas alargadas*

2.5

Conclusiones del capítulo 2

CAPÍTULO 3. Aplicaciones de la UBT

- 3.1 El arco y la viga curva**
 - 3.1.1 *Introducción*
 - 3.1.2 *El MVS y el análisis de piezas curvas de directriz plana*
 - 3.1.3 *El arco plano*
 - 3.1.4 *La viga curva*
 - 3.1.5 *Comentarios finales*
- 3.2 Torsión mixta de vigas rectas**
 - 3.2.1 *Introducción*
 - 3.2.2 *Hipótesis fundamental de la torsión mixta*
 - 3.2.3 *Ecuaciones de la torsión mixta según la UBT*
 - 3.2.4 *Determinación del patrón de alabeo*
 - 3.2.5 *Propiedades y conclusiones para el análisis estructural*
- 3.3 Distorsión de vigas rectas**
 - 3.3.1 *Introducción*
 - 3.3.2 *Hipótesis fundamental de la distorsión de vigas rectas*
 - 3.3.3 *Ecuaciones de la teoría de distorsión de vigas según la UBT*
 - 3.3.4 *Resolución de problemas de distorsión*
 - 3.3.5 *Incorporación de la deformación por cortante*
 - 3.3.6 *Acoplamiento torsión-distorsión*
 - 3.3.7 *Propiedades y conclusiones para el análisis estructural*
- 3.4 Vibraciones libres de una viga recta con sección constante**
 - 3.4.1 *Ecuaciones del movimiento plano de flexión*
 - 3.4.2 *Estudio de las vibraciones libres*
 - 3.4.3 *Soluciones particulares*
 - 3.4.4 *Vibraciones libres de torsión*
- 3.5 Vibraciones forzadas de una viga recta con sección constante**
 - 3.5.1 *Vibraciones no amortiguadas inducidas por una carga vibrante*
 - 3.5.2 *Vibraciones amortiguadas inducidas por una carga vibrante*
 - 3.5.3 *Vibraciones amortiguadas inducidas por una carga móvil*
- 3.6 Comportamiento no-lineal y estabilidad inicial con el MVS**
 - 3.6.1 *Operadores generales del cálculo no-lineal*
 - 3.6.2 *Cálculo no-lineal de piezas rectas con sección constante*
 - 3.6.3 *Estabilidad inicial de piezas rectas con sección constante*
 - 3.6.4 *Matriz de rigidez no-lineal y análisis de sistemas de barras*
- 3.7 Introducción al concepto de esbeltez generalizada de las piezas alargadas**
 - 3.7.1 *Esbeltez de las piezas de sección y curvatura constante*
 - 3.7.2 *Conclusiones respecto al concepto de esbeltez generalizada*
- 3.8 Conclusiones del capítulo 3**

PARTE II: LÁMINAS DELGADAS

CAPÍTULO 4. Modelado geométrico de láminas delgadas

- 4.1 Geometría intrínseca de una superficie**
 - 4.1.1 *Vectores naturales de una superficie*
 - 4.1.2 *Curvas sobre una superficie*
 - 4.1.3 *La primera forma fundamental*
 - 4.1.4 *Derivación covariante. El tensor de curvatura de Riemann-Christoffel*
- 4.2 Geometría externa de una superficie**
 - 4.2.1 *El sistema ε y la normal a la superficie*
 - 4.2.2 *La segunda forma fundamental*
 - 4.2.3 *Las fórmulas de Gauss-Weingarten*
 - 4.2.4 *Las ecuaciones de Mainardi-Codazzi y Gauss*
- 4.3 Curvas sobre una superficie**
 - 4.3.1 *Curvatura normal y curvatura y torsión geodésicas*
 - 4.3.2 *Curvaturas principales y líneas de curvatura*
 - 4.3.2 *El teorema de Euler*
- 4.4 El teorema de Gauss**
- 4.5 Geometría del sólido: el espacio laminar**
- 4.6 Geometría de la lámina en líneas de curvatura**

CAPÍTULO 5. Modelado mecánico de láminas delgadas

- 5.1 Teoría unificada láminas delgadas: estática**
 - 5.1.1 *Introducción: el cambio de configuración*
 - 5.1.2 *Los pasos de la formulación unificada*
 - 5.1.2 (a) *Hipótesis fundamental*
 - 5.1.2 (b) *Matrices de deformación*
 - 5.1.2 (c) *Ecuaciones constitutivas*
 - 5.1.2 (d) *Esfuerzos generalizados*
 - 5.1.2 (e) *Cargas generalizadas*
 - 5.1.2 (f) *Densidad superficial de energía potencial*
 - 5.1.2 (g) *Ecuaciones diferenciales de la teoría*
 - 5.1.3 *Forma Hamiltoniana de las ecuaciones*
 - 5.1.4 *Aplicación a las láminas de revolución*
 - 5.1.5 *Placas rectas*
 - 5.1.6 *Dos ejemplos resueltos*
 - 5.1.6 (a) *Comportamiento axisimétrico de la lámina cilíndrica de espesor constante*
 - 5.1.6 (b) *Tablero losa simplemente apoyado*
 - 5.1.7 *Comentarios finales y conclusiones de la sección 5.1*

- 5.2** **Teoría unificada de láminas delgadas: dinámica**
 - 5.2.1 *Introducción*
 - 5.2.2 *Ecuaciones del movimiento*
 - 5.2.3 *Aplicación a las vibraciones libres de las láminas de revolución*
 - 5.2.4 *Vibraciones de placas rectas*
 - 5.2.5 *Conclusiones de la sección 5.2*
- 5.3** **Conclusiones del capítulo 5**

PARTE III: ANEXOS

- ANEXO A. Teoría clásica de la distorsión**
- ANEXO B. Flexión alabeada de vigas rectas**
- ANEXO C. Modelo de Winkler para viga flotante**
- ANEXO D. Interacción longitudinal vía-tablero**
- ANEXO E. Características torsionales de las vigas**

BIBLIOGRAFÍA

PRÓLOGO de Manuel Doblaré

Cuando el profesor Monleón, Salvador o Salva para los amigos, me propuso escribir este prólogo, tengo que confesar que me asaltaron dos pensamientos contradictorios: por un lado, un cierto respeto, pues hace algunos años que mi investigación ha derivado por otros derroteros y escribir algo razonado y con una cierta profesionalidad, me exigía volver a releer trabajos parcialmente olvidados. Por otro, también me generó un enorme agradecimiento. Y ello, no solo por la distinción que me hacía, personal y profesional, al situarme junto a tan insignes compañeros y amigos, sino también por obligarme a recuperar y organizar teorías y aplicaciones que, de forma inconexa, han ido marcando mi vida, desde mi oposición a cátedra, hasta mi paso por la Universidad de Stanford.

Dice el autor en su prólogo personal que este libro no era indispensable y ni siquiera necesario. Puede que, en la vorágine actual de información sobreaundante y segmentada en piezas de 140 caracteres, un nuevo libro de revisión y unificación se vea como algo redundante y quizás superfluo. No opino así, al margen de la más que respetable justificación sentimental y artística que nos traslada el propio autor, este libro cumple una función, cada vez más arriesgada, difícil, pero también imprescindible, la de sintetizar, organizar y cohesionar la información disponible.

La teoría unificada de piezas esbeltas que plantea el libro bebe de múltiples fuentes, tanto clásicas como más modernas, que, en la mayoría de los casos, se han venido desarrollando separadamente, con particularidades que responden a aplicaciones específicas, algunas de las cuáles se exponen en el capítulo 3. Es por ello aún más resaltable el esfuerzo realizado por unificar la notación, planteamiento y formulación tal como se realiza en los capítulos 1 y 2. Es también destacable el uso de la formulación variacional como la estructura base de esta unificación. Ello no solo permite utilizar un único esquema de trabajo, generalizable a cualquier tipología estructural, sino que deja sentadas las bases para su resolución mediante métodos numéricos, a lo cual contribuye también la notación matricial utilizada. Con todo ello, Salvador consigue una coherencia y simplicidad que permiten al lector seguir fácilmente las hipótesis

simplificativas subyacentes en cada tipo estructural, las similitudes entre ellas y los desarrollos y resultados finales.

Todo ello hace de este libro una referencia necesaria tanto para el lector involucrado en el cálculo de estructuras de barras y láminas, como para el estudioso de la mecánica de sólidos deformables en su concepción más básica. Para mí, en particular, además del placer de su lectura, me ha permitido cumplir, si bien de una forma inesperada, uno de mis objetivos siempre demorados ya que, un libro como este, bien que seguro sin tanta profundidad y rigor, ha estado siempre entre aquellos a cumplir en ese momento que nunca llega: “cuando tenga tiempo”. Salvador, sin embargo, ha sido capaz, no solo de encontrar ese momento, sino de hacerlo mientras que mantiene su vertiginosa y polifacética actividad como ingeniero, profesor, investigador, artista y divulgador. No ha de extrañar, por tanto, la admiración y la envidia sana que le profeso.

Zaragoza, 30 de Enero de 2017

MANUEL DOBLARÉ CASTELLANO
Catedrático de Universidad
Departamento de Ingeniería Mecánica
Escuela de Ingeniería y Arquitectura
Universidad de Zaragoza

PRÓLOGO de Eugenio Oñate

Otro libro de análisis estructural...si, pero en mi opinión no un libro cualquiera. Salvador Monleón (Salva para los amigos), a quien tengo la suerte y el privilegio de conocer desde nuestros tiempos de estudiantes de Ingeniería de Caminos en la Universidad Politécnica de Valencia (UPV) en los primeros años de la década de 1970, plantea en su prólogo sus dudas sobre la conveniencia de publicar este texto. Según él, buena parte de su contenido está ya incluido en una obra suya anterior y en diversos artículos científicos. Justifica, sin embargo, el libro apelando a la motivación sentimental y creadora *“de naturaleza similar a la necesidad que siente el pintor (refiriéndose aquí a su padre) de seguir pintando”*. Anhelos muy propios de la personalidad artística de Salvador, de quien siempre admiramos sus grandes capacidades para el dibujo que plasmó en repetidas ocasiones en extraordinarios dibujos a mano de puentes, incluyendo los mínimos detalles constructivos, en publicaciones de su cátedra en la UPV.

Dice también Salvador que este libro surge porque *“necesitaba volver a ver físicamente plasmadas mis ideas y los avances habidos, con mayor perspectiva y resolución.... darme otra vez tiempo para reflexionar sobre ellas, opinar, hacerme un regalo a mí mismo, tal vez”*.

Pero el regalo nos lo ha hecho Salvador a nosotros. A todos aquellos enamorados del estudio de la mecánica de las estructuras y de su cálculo. A todos los que aprecian el rigor y la profundidad en los planteamientos del estudio de los elementos estructurales (vigas, placas y láminas), tanto desde el punto de vista teórico como desde la perspectiva de los métodos de cálculo de estructuras.

El contenido del libro es un paseo, no exento de tramos intrincados, a través del mundo de los sólidos *“alargados y superficiales”* que luego se concretan en piezas y láminas. Salvador expone con la máxima generalidad la definición geométrica y el comportamiento estructural del sólido en cuestión: los desplazamientos, deformaciones y tensiones a los que está sometido bajo

acciones estáticas o dinámicas. Todo ello en el marco de una formulación matemática general, vertebrada por una formulación variacional, en la que partiendo de las ecuaciones de la mecánica del continuo tridimensional, a las que se van introduciendo las mínimas simplificaciones, obtiene la forma particular de la teoría ajustada a las condiciones geométricas y mecánicas de la estructura bajo estudio, bien las piezas en primer lugar, y después las láminas.

Consigue con ello una nueva versión de la que Salvador denominó hace tiempo “Teoría Unificada de Elementos Estructurales Esbeltos —UBT (Unified Beam Theory)” para las vigas y “UST (Unified Shell Theory)” para las láminas—. Teorías unificadas ambas que beben de muchas ideas de otras formulaciones unificadas motivadas por el cálculo de estructuras por el Método de Elementos Finitos (MEF).

El contenido del libro, de hecho, revisita y amplía las ideas sobre la UBT y la UST contenidas en cuatro trabajos previos de Salvador, publicados en la Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería (RIMNI) respectivamente en 1993, 1995, 2011, y el último más recientemente en 2015. Ambas teorías unificadas se describen también en el libro sobre el tema que publicó en la UPV en 2001. Dice Salvador que *“este segundo libro es más teórico y reflexivo, más conceptual, de segunda lectura”*. Estoy de acuerdo, pero además añadiría que esta obra tiene un grado de formalismo y una coherencia interna superior que facilita al lector la lectura de un texto muy especializado, y logra mantenerlo “pegado” a los conceptos esenciales de la formulación unificada a lo largo de la obra.

Ha sido muy buena idea extender el capítulo de aplicaciones para ilustrar el potencial y generalidad de la UBT al análisis de arcos y vigas curvas, al estudio de la torsión y distorsión de secciones de piezas que clarifica el concepto de “hiperviga” (que junto con el de “hiperlámina” son una contribución original de Salvador, que emana de su teoría unificada), al cálculo de vibraciones libres y forzadas en piezas y al cálculo no lineal de estas estructuras a través de un par de ejemplos. Es muy interesante también la generalización del concepto de esbeltez de los elementos estructurales que cierra este capítulo.

El texto reserva menos espacio para las láminas, por la dificultad de obtener soluciones analíticas para este tipo de estructuras. La formulación de la UST, y del concepto de “hiperlámina”, no obstante, siguen las pautas del proceso seguido para obtener la formulación “hermana” para piezas en los dos primeros capítulos. De hecho, una vez “digerida” la UBT, la lectura del capítulo de láminas se hará relativamente más sencilla al lector. La inclusión de las láminas de revolución dentro del capítulo que describe la UST es también muy adecuado

y da un respiro al lector al ver cómo se particulariza, de forma relativamente fácil, la formulación UST general para el estudio de estructuras laminares de geometría más sencilla, como son las láminas axi-simétricas.

El libro se completa con cinco anexos, que por su extensión (casi 90 páginas) merecen el calificativo de monografía, sobre diversos temas de la mecánica de estructuras. En el primer anexo se presenta la teoría clásica de la distorsión de la sección en piezas, haciéndose una referencia a la mayor generalidad de la UBT para este tipo de estudios. En los cuatro anexos siguientes se particulariza la UBT al estudio de la flexión alabeada, al cálculo de vigas flotantes utilizando un modelo de Winkler, al estudio de la interacción vía-tablero en puentes y al estudio de las características torsionales de las vigas. Temas todos ellos de gran interés práctico.

Parafraseando de nuevo a Salvador, la “ductilidad” de la teoría unificada que él ha propuesto establece un marco formal aplicable al estudio de piezas y láminas, estructuras de geometría completamente diferente, siguiendo un mismo patrón conceptual. Esto por sí mismo, ya tiene un alto valor intrínseco para la formación de los estudiosos de la mecánica estructural y los calculistas de estructuras.

Aunque lo más importante para futuras aplicaciones prácticas, en mi opinión es el paralelismo entre el planteamiento de la teoría unificada y el del cálculo de estructuras por el MEF. Esto abre la puerta a la aplicación inmediata de la UBT y la UST para el cálculo por el MEF de problemas de piezas, placas y láminas en cualquier ámbito de la ingeniería. Este es otro “regalo” que Salvador nos hace a los calculistas de estructuras y que estoy seguro será bien aprovechado por muchos. Muchas gracias Salva.

Barcelona, 2 de Enero de 2017

EUGENIO OÑATE IBÁÑEZ DE NAVARRA

Catedrático de Universidad

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Universidad Politécnica de Cataluña

Director del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería

(CIMNE , www.cimne.com)

PRESENTACIÓN

Otro libro de análisis estructural... ¿Era éste necesario? Indispensable, desde luego no. Necesario, creo que tampoco si se tiene en cuenta que lo esencial de la teoría unificada ya estaba incluido en una obra anterior⁴¹, posteriormente complementada por un par de artículos^{42,43}. Probablemente todavía menos necesario al tratarse de un libro teórico, que no aborda las técnicas de análisis numérico, indispensables hoy en día para proceder de forma eficiente a comprobar la seguridad de nuestras construcciones. Sin embargo, en primera instancia, la única justificación que soy capaz de hallar a este nuevo texto es sentimental y de naturaleza similar a la necesidad que siente el pintor de seguir pintando. Probablemente, ese impulso lo haya compartido con mi padre, quien a sus casi ochenta y cinco años de edad siguió teniendo fuerzas para acudir a su estudio por las mañanas, o para plantar su caballete bajo algún pino conquense, cuando el tiempo lo permitía. Lo echamos mucho de menos...

En definitiva, necesitaba volver a ver físicamente plasmadas mis ideas y los avances habidos, con mayor perspectiva y resolución, aunque probablemente sin la frescura original. Necesitaba darme otra vez tiempo para reflexionar sobre ellas, opinar, hacerme un regalo a mi mismo, tal vez.

Es innegable que existe una profunda motivación estética en este segundo libro. Lo evidencia —creo— su exposición ordenada y coherente, así como la selección de una notación adecuada, con el fin de conseguir la máxima generalidad: una formulación única, válida para cualquier materialización del modelo que sea consistente con la forma del sólido, alargado o superficial, y las acciones a las que este se vea sometido, estáticas o dinámicas. En esta actitud tuvo enorme influencia la lectura de dos libros que adquirí en París durante las navidades de 1978, en la librería Dunod de la calle Bonaparte: "*La méthode des éléments finis*" de O.C. Zienkiewicz⁶⁵, primera edición en francés de este clásico

del análisis de estructuras, y "*Buckling of Bars, Plates and Shells*" de D.O. Brush y B.O. Almroth⁸, este último por recomendación de Jesús Ortiz Herrera, por entonces profesor de Estructuras Mixtas en la ETSICCP-UPV. Con ellos fue adquiriendo forma, consolidándose, la idea de producir una formulación única para la mecánica de los elementos estructurales esbeltos, vertebrada por la formulación variacional. En definitiva, si ya existía una formulación unificada para el análisis discreto, el MEF, ¿Por qué no para el análisis continuo? Este último aspecto nos conduce a un segundo nivel de motivación, la motivación ética, o de máxima economía, inherente al cálculo de variaciones. El entusiasmo por estas ideas se percibe nítidamente en la introducción que Cornelius Lanczos realiza en su libro *The Variational Principles of Mechanics*³⁰.

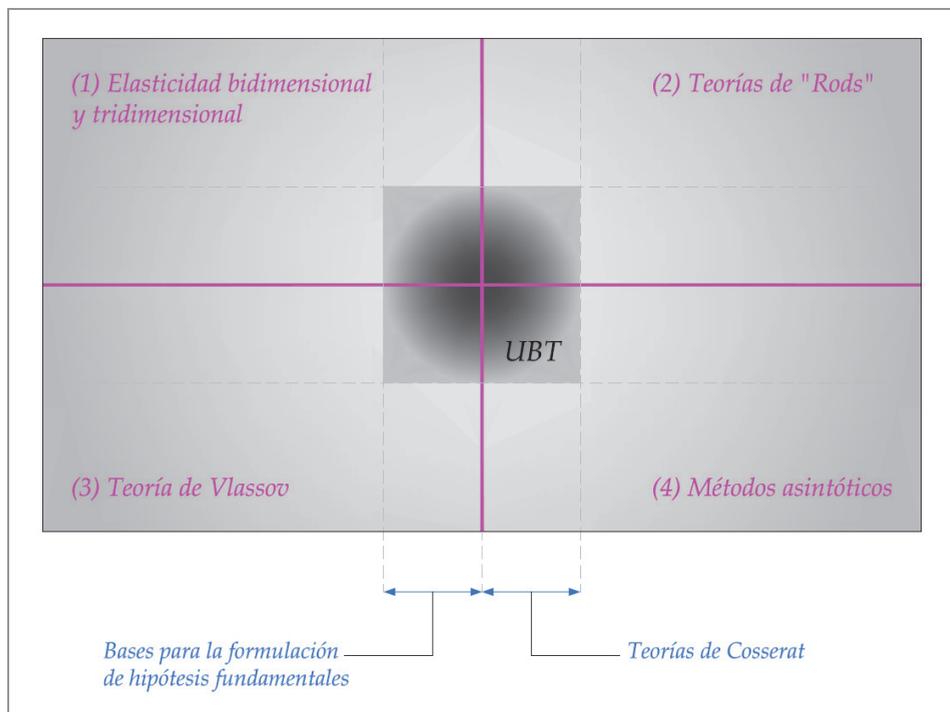


Figura P.1 Las teorías de vigas y, en general, de elementos estructurales esbeltos, su interacción y su relación con la UBT

A continuación intentaré enmarcar la teoría presentada en este trabajo, que he denominado *Teoría Unificada de Elementos Estructurales Esbeltos* —UBT (*Unified Beam Theory*) para las vigas y UST (*Unified Shell Theory*) para las láminas—, en el contexto actual de las teorías de vigas, dejando provisionalmente al margen los elementos laminares. Con la Figura P.1 como apoyo, distingo claramente cuatro líneas de trabajo, tanto por su formulación como por sus objetivos.

(1) *Las soluciones basadas en la elasticidad tridimensional.* Aunque aquí no debemos hablar de modelos, puesto que el problema se formula sobre el propio sólido, cabe citar los trabajos de Saint Venant, Airy, Somigliana, Duggall, Papkovitch, Neuber (ver L.H. Donnell¹⁹ pp. 90 a 95), Mitchell y Courbon¹³, entre otros. En el contexto actual, su único interés radica en la posibilidad de diseñar modelos de comportamiento a nivel de sección transversal, con los que armar teorías 1D.

(2) *Las teorías de “rods” de Euler-Kirchhoff-Reissner-Simó-Antman².* Estos modelos geoméricamente exactos, que consideran desplazamientos y rotaciones finitas, suelen formularse directamente sobre la materialización 1D del sólido, introduciendo relaciones constitutivas ad hoc, como en los cuerpos de Cosserat (ver Rubin⁵² y Villaggio⁶¹ capítulo tercero), aunque este último aspecto reviste poca importancia dadas las características morfológicas de sus aplicaciones, en las que domina la gran esbeltez de los elementos. Poseen una formulación matemática compleja y requieren técnicas de integración sofisticadas. Su ámbito es el de la biomecánica y los dispositivos aeroespaciales o mecánicos en general, en los que la elevada flexibilidad de las piezas precisa de una formulación cinemática exacta.

(3) *Vlassov⁶² y las teorías “especiales” de láminas plegadas.* En este apartado incluimos, además del trabajo seminal de Vlassov, los métodos aproximados de cálculo manual de láminas plegadas de la década de los 50, propuestos por Gaafar, Simpson o Yitzhaki. Más próxima en el tiempo se encuentra la *Generalized Beam Theory (GBT)* de Schardt et al., aunque como él mismo reconoce, esta formulación ya se intuía en la obra de Vlassov y seguramente hubiera sido publicada por este brillante ingeniero de no ser por su prematuro fallecimiento. Estas teorías enfocan el comportamiento de la pieza a nivel de sección transversal, desarrollando una formulación básicamente ingenieril-intuitiva apta para el análisis estructural de las construcciones de pared delgada de sección arbitraria en régimen lineal, contemplando tanto el alabeo como la distorsión de la sección debida a la flexión transversal de las paredes, junto con alguna comprobación de estabilidad elástica del tipo abolladura local.

(4) *Las teorías asintóticas.* Citaremos los trabajos de Viaño y Ciarlet, de Naghdi⁴⁴ y Dikmen¹⁸ y la obra de Vekua⁶⁰, todos ellos orientados —parcialmente algunos^{18,44}— hacia la forma matemática de producir teorías 1D o 2D a partir del sólido original. Son de escasa aplicación práctica.

De todas estas aproximaciones al problema de la modelización mecánica, las de mayor interés son la segunda y la tercera. Sin embargo, en su formulación tanto como en sus aplicaciones, ambas ocupan extremos opuestos. En (2), la forma de la sección es prácticamente marginal, mientras que en (3) es la protagonista.

Cuando la distribución del material se optimiza, buscando rigidez suficiente para que en servicio la pieza se comporte adecuadamente, el modelo ha de captar e integrar estas propiedades, caracterizándolas adecuadamente mediante parámetros estáticos específicos. En cambio, el tipo de respuesta esperado sólo suele requerir una validación del diseño mediante análisis lineal, es decir con desplazamientos y deformaciones muy reducidas. En cambio, en las primeras su función exige en general gran flexibilidad, adaptarse en servicio a nuevas formas muy diferentes de la inicial, y ello sólo puede controlarse con modelos exactos, geoméricamente no-lineales.

La Teoría Unificada de Vigas (*UBT*, por contraste con la *GBT* de Schardt), tiene vocación de síntesis de todas ellas, pero esencialmente de (2) y (3), al liberarse en su formulación de la clasificación morfológica de la sección transversal y orientarse esencialmente a problemas lineales, estáticos y dinámicos, aunque con alguna incursión en el campo del comportamiento no-lineal y la estabilidad. Las mejores mesas son las de tres patas, y las suyas han sido la *hipótesis fundamental*, las ecuaciones de Euler-Lagrange y la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (*EDO*), todo ello *bien envuelto* —cuestiones formales o de presentación— en la formulación del *MEF*. La organización de la obra es muy clara y sencilla, primero se tratan las piezas alargadas y después las láminas delgadas. En un segundo nivel, dentro de cada uno de estos bloques, se mantiene el mismo esquema: modelado geométrico seguido de modelado mecánico, y dentro de este último, primero la estática y luego la dinámica del modelo. De hecho, el contenido del segundo bloque (láminas) se definió con mayor precisión una vez se finalizó el primero, con el fin de proponer una selección de tópicos (bastaría decir tipologías) basada en poder ofrecer también desarrollos completos de las soluciones analíticas.

¿En qué se diferencia este texto del primer libro⁴¹? En el primero hice más énfasis en las aplicaciones de la teoría unificada. Su extenso capítulo sexto unía diversidad de ejemplos con soluciones completas de estos, en algunos casos nuevas. Este segundo libro es más teórico y reflexivo, más conceptual, de segunda lectura. En particular, el capítulo de aplicaciones, ahora el tercero, tiene una organización muy diferente con la que se apunta a un objetivo bien preciso: ilustrar con claridad la versatilidad de la formulación. Por ello se abordan dos ejemplos de pieza curva (arco y viga curva), dos ejemplos de *hiperviga* (torsión y distorsión), dos ejemplos de cálculo dinámico (vibraciones libres y vibraciones forzadas) y dos ejemplos de cálculo no-lineal (respuesta no-lineal y estabilidad inicial). La última sección de ese capítulo introduce una idea unitaria, presente en todos los ejemplos citados: la generalización del concepto de esbeltez de los elementos estructurales. También se ha reservado menos espacio para las láminas, ya que en estos cuerpos la producción de soluciones analíticas, formuladas como en las piezas alargadas, se enfrenta a drásticas limitaciones de forma. Por ello, las aplicaciones de la *UST* no han sido recogidas

en un capítulo específico: se han incorporado al capítulo de modelado mecánico de las láminas, a continuación del desarrollo teórico y como extensión natural del mismo. En definitiva, creo que este segundo libro complementa al anterior, al ampliar su calado teórico y presentar aplicaciones de distinto perfil.

Es hora de hablar de las personas que se han involucrado, de una manera u otra, en esta producción, por sus reflexiones, debates o nuevos impulsos aportados, comenzando por Pedro Fuster, mi profesor y sobre todo mi amigo. Entre todas las anécdotas que hemos compartido a lo largo de los últimos cuarenta años, está la del “*telesilla*”. A ella debo en gran medida el desarrollo del concepto de hiperestatismo local aquí presentado, ya que aprovechando los tiempos muertos del telesilla de Baqueira-Beret, sometía a Pedro a un tercer grado feroz al que plantaba cara con la perspicacia y madurez que siempre ha demostrado. En aquella época nacieron las primeras ponencias y alguna tesis doctoral en las que ya se mostraba cómo los conceptos vertebradores del *MEF* tenían su prolongación natural en la formulación continua. También asomé el problema de Sturm-Liouville y la dualidad vibraciones-estabilidad. Eran otros tiempos. Estábamos llenos de energía, de ganas de vivir y de construir.

También están Pepe Casanova y Carlos Lázaro, mis compañeros, los que siempre he tenido a mi lado desde hace mucho, mucho tiempo. Con Pepe debatí largas horas sobre los límites de la formulación y la validación de los resultados, y con Carlos, a raíz de su brillante tesis doctoral —de la que tiene todo el mérito—, sobre la forma Hamiltoniana de la formulación, entre otras muchas cuestiones que han ido quedando aparcadas por los rincones de mi memoria. Por su proximidad física, ambos han recibido estoicamente y sistemáticamente el primer impacto de cualquier “*movimiento*” de la teoría, y en algunas ocasiones les ha debido costar soportarme...

Luego vienen los *retratados* de la portada. Por orden de aparición tenemos a Javier Manterola, Enrique Alarcón, Manuel Doblaré, Eugenio Oñate, Pedro Fuster, Miguel Ángel Astiz y Avelino Samartín, e intercalados entre ellos, mis padres, que algo tienen que ver en todo esto. Todos ellos tienen una sólida vinculación con este libro y mi admiración y gratitud, y además me enorgullece su amistad. Javier Manterola siempre ha sido un ejemplo para mí, por la solidez de su pensamiento, su fe en el conocimiento de lo estructural como base para un desarrollo riguroso de lo formal, pero también por su aportación a este trabajo a través de su artículo sobre el comportamiento de las secciones de pared delgada³⁷. Enrique Alarcón es otro de los grandes actores de este reparto, con sus acertadas apreciaciones incluidas en su prólogo del primer libro, que le agradezco sinceramente, en particular respecto a la formulación potencial y a algunos aspectos del análisis dinámico, que he pasado a incorporar al texto, ya

que en este segundo trabajo no se han propuesto ejercicios para el lector. Ha participado, a lo largo estas últimas décadas, de nuestra trayectoria académica, a través de tribunales de tesis que nos han mantenido más próximos si cabe. A Manuel Doblaré le agradezco su interés y permanente disposición para leer los manuscritos que le he enviado todos estos años, sus consejos sobre qué hacer con ellos y cómo aprovecharlos al máximo. Desgraciadamente, nunca le hice caso y se quedaron prácticamente todos ellos en el cajón hasta que decidí ponerme a escribir este texto, cuya rentabilidad académica será sin duda alguna infinitamente menor que la que hubiera obtenido de seguir sus consejos. Eugenio Oñate ha estado desde el comienzo apoyando esta línea de investigación, actuando como su *altavoz* a través de la revista RIMNI en las sucesivas etapas que ha vivido este trabajo. Nuestra amistad y relación común con Rafa Ramón-Llin, que siempre recordamos en nuestros encuentros, es otro de los lazos que nos unen. Miguel Ángel Astiz fue uno de los primeros en tener que soportar la exposición *comprimida* de la teoría. Fue en junio de 1997 y desde entonces siempre hemos procurado mantenernos cerca, al menos a través de invitaciones a tribunales de tesis, sobre todo por su parte ya que su capacidad de trabajo me supera ampliamente, en cantidad y calidad. Por último tenemos a Avelino Samartín. Cómo él dijo en una ocasión, comentando su estrecha relación con el grupo de Estructuras de la ETSICCP-UPV, "*Estuve con el padre, luego con el hijo y ahora con el nieto de esta familia*". Se refería a que siempre había estado presente cuando alguno de nosotros, Pedro, Pepe, Carlos o yo, tuvimos que enfrentarnos a alguna prueba académica, ya fuera oposición o tesis doctoral.

Todos ellos han estado vinculados con la *UBT* y han sido tan importantes en mi vida personal como en mi actividad académica y desarrollo profesional. Por ello he querido que formaran parte visible de este trabajo. Además, a Eugenio y a Manuel también les debo el lujo de un doble prólogo a todas luces inmerecido.

Gracias a todos, os llevo conmigo, grabados en mi memoria.

Oliva, 1 de diciembre de 2016

SALVADOR MONLEÓN CREMADES

Catedrático de Universidad

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Universitat Politècnica de València

LISTA DE FIGURAS

Presentación

Figura P.1 Las teorías de vigas y, en general, de elementos estructurales esbeltos, su interacción y su relación con la *UBT*

Capítulo 1

Figura 1.1 Triedro y coordenadas intrínsecas de una curva orientada

Figura 1.2 Sistemas coordenados en sección transversal, asociados a una curva orientada

Figura 1.3 Definición gráfica de las líneas y superficies coordenadas del sistema (s,y,z)

Figura 1.4 Definición del contorno de la pieza alargada

Figura 1.5 Coordenadas superficiales del contorno lateral de la pieza alargada

Figura 1.6 Curva sobre una superficie y triedros móviles asociados

Figura 1.7 Definición de los tres triedros móviles propios de la pieza alargada

Figura 1.8 Ejes en sección transversal, de una pieza con conformado natural

Figura 1.9 Ejes en sección transversal, de una pieza de sección variable

Capítulo 2

- Figura 2.1** El cambio de configuración
- Figura 2.2** Definición gráfica del vector tensión en el problema lineal
- Figura 2.3** Esfuerzos implicados en el equilibrio vectorial de la viga
- Figura 2.4** Equilibrio local de la viga *standard* y solución de los esfuerzos para directriz circular (problema desacoplado)
- Figura 2.5** Equilibrio local de la hiperviga y solución del vector estado para directriz circular y sección constante (problema acoplado)
- Figura 2.6** Funciones dinámicas
- Figura 2.7** Determinación de las tres primeras frecuencias naturales de una viga continua de tres vanos
- Figura 2.8** Grafos sobre *a)* la modelización mecánica y *b)* la predicción del comportamiento estructural del sólido

Capítulo 3

- Figura 3.1** Sistemas de referencia material y principal de la pieza curva con directriz plana, sección por el plano osculador
- Figura 3.2** Pieza curva de sección constante y directriz plana, (*a*) sistema de referencia principal y (*b*) desplazamientos generalizados del MVS
- Figura 3.3** Sistema de referencia intrínseco, desplazamientos y esfuerzos generalizados de un arco circular
- Figura 3.4** Arco de medio punto biempotrado sometido a una fuerza puntual P aplicada en su clave
- Figura 3.5** Sistema de referencia intrínseco, desplazamientos y esfuerzos generalizados de una viga circular
- Figura 3.6** Viga circular biempotrada con abertura $\theta_0 = \pi$, sometido a una fuerza puntual P aplicada en la sección central $\theta = \pi/2$
- Figura 3.7** Descomposición estática de la acción excéntrica y diagramas de cortantes inducidos por la torsión pura y la distorsión de la pieza
- Figura 3.8** Esfuerzos resultantes de las tensiones tangenciales debidas (I) a la flexión y (II) a la torsión de la viga
- Figura 3.9** Torsión de una viga en ménsula de sección celular cuadrada
- Figura 3.10** Torsión de una viga simplemente apoyada sometida a un momento torsor puntual *a) rotaciones b) intensidades de alabeo c) bicortantes y d) bimomentos* para distintos valores de la esbeltez de torsión

- Figura 3.11** Densidad de bicortante en una viga simplemente apoyada para distintos tipos de sollicitación y variación continua de la esbeltez torsional. Definición de los **dominios de la torsión**
- Figura 3.12** Coordenadas para el estudio de la geometría de la sección transversal de una pieza recta y de su contorno
- Figura 3.13** Forma típica y parámetros geométricos de la sección transversal de las vigas en cajón unicelular abordadas en los primeros estudios sobre distorsión
- Figura 3.14** Forma típica de la sección transversal de las vigas en estudio
- Figura 3.15** El modelo lámina plegada (2D) y sus coordenadas naturales
- Figura 3.16** Distorsión de una viga en ménsula de sección celular cuadrada. (a) Acción de distorsión inducida por un momento torsor y cinemática de la sección, (b) patrón de alabeo, (c) y (d) vistas de la deformada del sólido
- Figura 3.17** Alabeos propios del estado membrana, que inducen la flexión de cada pared en su plano
- Figura 3.18** Desplazamientos iniciales del marco, que inducen la flexión transversal tipo placa
- Figura 3.19** (a) Distorsión, (b) Intensidad de alabeo, (c) Bicortantes y (d) Bimomentos de una viga biapoyada para torsor puntual
- Figura 3.20** (a) Distorsión, (b) Intensidad de alabeo, (c) Bicortantes y (d) Bimomentos de una viga biapoyada para torsor repartido
- Figura 3.21** (a) Distorsión, (b) Intensidad de alabeo, (c) Bicortantes y (d) Bimomentos de una viga biempotrada para torsor puntual
- Figura 3.22** (a) Distorsión, (b) Intensidad de alabeo, (c) Bicortantes y (d) Bimomentos de una viga biempotrada para torsor repartido
- Figura 3.23** Distorsión de una viga biapoyada con deformación por bicortante
- Figura 3.24** Geometría de la torsión. Parámetros de la sección en cajón y alabeo unitario
- Figura 3.25** Frecuencias naturales de la pieza recta simplemente apoyada
- Figura 3.26** Frecuencias naturales de la pieza recta biempotrada
- Figura 3.27** Frecuencias naturales de la pieza recta en ménsula
- Figura 3.28** Tres primeros modos de vibración de la ménsula recta de sección constante
- Figura 3.29** Cargas y condiciones de contorno del problema de la carga vibrante
- Figura 3.30** Desplazamiento transversal de la sección central para distintos valores de la frecuencia de excitación, sin amortiguamiento
- Figura 3.31** Desplazamiento transversal de la sección central para distintos valores de la frecuencia de excitación, con amortiguamiento

- Figura 3.32** Cargas y condiciones de contorno del problema de la carga móvil
- Figura 3.33** Desplazamiento transversal de la sección central para valores de la velocidad adimensional de paso $v_0=0.25, 0.5$ y 1
- Figura 3.34** Desplazamiento transversal de la sección central para valores de la velocidad adimensional de paso $v_0=1, 1.5$ y 3
- Figura 3.35** Cargas y condiciones de contorno del problema de la viga columna
- Figura 3.36** Desplazamiento transversal en la viga tirante para distintos valores de la esbeltez
- Figura 3.37** Cortantes en la viga tirante para distintos valores de la esbeltez
- Figura 3.38** Desplazamiento transversal en la viga columna para distintos valores de la esbeltez
- Figura 3.39** Cortantes en la viga columna para distintos valores de la esbeltez
- Figura 3.40** Gráfica del determinante de las condiciones de contorno y localización de sus raíces (viga biapoyada)
- Figura 3.41** Tercer modo de pandeo de la viga biapoyada
- Figura 3.42** Funciones de estabilidad de la viga recta con sección simétrica y constante (caso plano sin deformación por cortante)
- Figura 3.43** Evolución de (I) Bicortantes de torsión-esfuerzos cortantes de la viga tirante y (II) Bicortantes de distorsión-esfuerzos cortantes de la viga flotante

Capítulo 4

- Figura 4.1** Geometría intrínseca de una superficie
- Figura 4.2** Curva trazada sobre una superficie
- Figura 4.3** Coordenadas del espacio laminar
- Figura 4.4** Sección transversal de la lámina y coordenada en el espesor
- Figura 4.5** Contorno de la lámina y dominios asociados
- Figura 4.6** Parámetros geométricos de esbeltez de una lámina
- Figura 4.7** Geometría de una superficie en notación convencional

Capítulo 5

- Figura 5.1** El cambio de configuración
- Figura 5.2** Tensiones sobre el espesor de la lámina
- Figura 5.3** Sistema coordenado de una lámina de revolución

- Figura 5.4** Componentes de los esfuerzos generalizados en una lámina de revolución (problema axisimétrico)
- Figura 5.5** Sistema coordinado y dimensiones de una placa recta
- Figura 5.6** Estado axisimétrico de la lámina cilíndrica, coordenadas, desplazamientos y esfuerzos generalizados
- Figura 5.7** Deformada del cuarto superior del cilindro empotrado en la base, cargado radialmente sobre la arista superior
- Figura 5.8** Cortante Q_s en el cuarto superior del cilindro empotrado en la base
- Figura 5.9** Momento M_{ss} en el cuarto superior del cilindro empotrado en la base
- Figura 5.10** Tablero losa recto simplemente apoyado sometido a un cuchillo de carga longitudinal excéntrico
- Figura 5.11** Deformada de un tablero cuadrado simplemente apoyado sometido a un cuchillo de carga
- Figura 5.12** Momentos flectores longitudinales en un tablero cuadrado simplemente apoyado sometido a un cuchillo de carga
- Figura 5.13** Momentos flectores transversales en un tablero cuadrado simplemente apoyado sometido a un cuchillo de carga
- Figura 5.14** Tres primeras funciones de Rayleigh para tablero losa recto biempotrado
- Figura 5.15** Tres primeras funciones de Rayleigh para tablero losa recto empotrado-apoyado
- Figura 5.16** Función $\Phi(\vartheta)$
- Figura 5.17** Modos de vibración de la lámina cilíndrica con base empotrada
- Figura 5.18** Determinación de la primera frecuencia natural de la lámina cilíndrica empotrada en la base
- Figura 5.19** Modos de la lámina cilíndrica biempotrada
- Figura 5.20** Determinación de las tres primeras frecuencias naturales y modos de vibración de la placa (I) para el primer modo longitudinal
- Figura 5.21** Determinación de las tres primeras frecuencias naturales y modos de vibración de la placa (II) para el primer modo longitudinal
- Figura 5.22** Determinación de las tres primeras frecuencias naturales y modos de vibración de la placa (III) para el primer modo longitudinal
- Figura 5.23** Matriz de frecuencias y modos de vibración de la placa apoyada en sus cuatro lados
- Figura 5.24** Grafos sobre a) la modelización mecánica y b) la predicción del comportamiento estructural del sólido

Anexo A

- Figura A.1** Forma típica de la sección transversal de las vigas cajón en estudio
- Figura A.2** El modelo lámina plegada (2D) y sus coordenadas naturales
- Figura A.3** Alabeos como desplazamientos iniciales del estado membrana, que inducen flexión de cada pared en su plano
- Figura A.4** Desplazamientos en sección transversal: desplazamientos iniciales del marco que inducen la flexión transversal
- Figura A.5** Acción externa de distorsión originada por una densidad lineal de momentos torsores
- Figura A.6** Forma de la distribución de tensiones normales sobre la fibra media de la sección transversal
- Figura A.7** Forma de las distribuciones del alabeo unitario de distorsión y de su derivada, sobre la fibra media de la sección transversal
- Figura A.8** Distorsión libre de flexiones transversales, geometría deformada de la celda
- Figura A.9** Resultante de las tensiones normales en losa superior
- Figura A.10** Esfuerzos rasantes de membrana en la losa superior y su resultante
- Figura A.11** Distribución de esfuerzos rasantes de membrana y sus resultantes en cada elemento de la sección transversal
- Figura A.12** Descomposición de los desplazamientos nodales de la celda
- Figura A.13** Deformada inicial *efectiva* de la celda
- Figura A.14** Diagrama de sólido libre para la evaluación de la interacción estática de las respuestas membrana y marco
- Figura A.15** Geometría de la sección transversal de una viga mixta en cajón

Anexo B

- Figura B.1** Bicortante de flexión en una pieza simplemente apoyada
- Figura B.2** Bicortante de flexión en una pieza en ménsula
- Figura B.3** Bicortante de flexión en una pieza biempotrada
- Figura B.4** Bicortante de flexión en una pieza en ménsula para distintos valores de la esbeltez λ (carga en el extremo libre)
- Figura B.5** Patrón de alabeo, cinemática y distribución de tensiones tangenciales asociadas al problema de flexión alabeada

Anexo C

- Figura C.1** La viga flotante. Geometría del problema elemental
- Figura C.2** Viga flotante. Geometría del ejemplo procesado: viga apoyada en sus extremos, sometida a una fuerza transversal puntual
- Figura C.3** Esfuerzos cortantes para distintos valores de la esbeltez
- Figura C.4** Momentos flectores para distintos valores de la esbeltez

Anexo E

- Figura E.1** Sección transversal de una viga aligerada de ala ancha múltiplemente conexa. Circulación a lo largo del contorno
- Figura E.2** Analogía de la membrana en una sección múltiplemente conexa (trazado de las curvas de nivel y flujo de tensiones tangenciales)
- Figura E.3** Circulación a lo largo de una curva de nivel de la membrana
- Figura E.4** Sección transversal de una pieza de sección abierta
- Figura E.5** Forma de la membrana y distribución de tensiones tangenciales sobre el espesor en secciones abiertas
- Figura E.6** Sección transversal de una viga unicelular
- Figura E.7** Sección transversal de una viga multicelular
- Figura E.8** Patrón de alabeo del plano medio de la sección transversal de una viga cajón estándar
- Figura E.9** Mallado de la sección transversal de un perfil armado IPE240 y resumen del cálculo de parámetros mecánicos
- Figura E.10** Visualización 3D del patrón de alabeo y representación de sus curvas de nivel
- Figura E.11** Mapa de vectores tensión y envolventes de tensiones tangenciales

LISTA DE TABLAS

Capítulo 2

- Tabla II.1** Resumen de la Transformada del tipo Legendre
- Tabla II.2** Componentes de los sistemas ε^* y ω^*
- Tabla II.3** Variaciones de la densidad volumétrica de energía de deformación en teoría de pequeñas deformaciones
- Tabla II.4** Ecuaciones de la estática geoméricamente no-lineal de piezas alargadas (teoría de pequeñas deformaciones)
- Tabla II.5** Ecuaciones de estabilidad de piezas alargadas (teoría de pequeñas deformaciones)

Capítulo 3

- Tabla III.1** Analogía entre la torsión alabeada pura y la flexión de Timoshenko
- Tabla III.2** Torsión en viga simplemente apoyada sometida a torsor puntual
- Tabla III.3** Fuerzas de empotramiento perfecto \mathbf{f}^0 de torsión para distintas condiciones de carga ($\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e + \mathbf{f}^0$)
- Tabla III.4** Variables análogas entre distorsión y flexión de vigas (rigidez de marco despreciable)

- Tabla III.5** Respuesta a distorsión de la viga simplemente apoyada sometida a torsor puntual
- Tabla III.6** Respuesta a distorsión de la viga simplemente apoyada sometida a torsor repartido
- Tabla III.7** Respuesta a distorsión de la viga biempotrada sometida a torsor puntual
- Tabla III.8** Respuesta a distorsión de la viga biempotrada sometida a torsor repartido
- Tabla III.9** Analogía de primer nivel en problemas de vigas
- Tabla III.10** Analogía de segundo nivel en problemas de vigas
- Tabla III.11** Factor de participación para $\varpi_0=9.8$, sin amortiguamiento
- Tabla III.12** Factor de participación para $\varpi_0=38.3$, sin amortiguamiento
- Tabla III.13** Factor de participación para $\varpi_0=83.12$, sin amortiguamiento
- Tabla III.14** Factor de participación para $\varpi_0=141.1$, sin amortiguamiento
- Tabla III.15** Factor de participación para $\varpi_0=209$, sin amortiguamiento
- Tabla III.16** Factor de participación para $\varpi_0=9.8$, con amortiguamiento
- Tabla III.17** Componentes del vector estado de la viga tirante ($N_0>0$) simplemente apoyada sometida a una fuerza puntual transversal P
- Tabla III.18** Componentes del vector estado de la viga columna ($N_0<0$) simplemente apoyada sometida a una fuerza puntual transversal P
- Tabla III.19** Funciones de estabilidad de la viga recta de sección constante y simétrica. Flexión en el plano de simetría ($z=0$)
- Tabla III.20** Resumen de la analogía torsión mixta-viga columna
- Tabla III.21** Resumen de la analogía distorsión-viga flotante
- Tabla III.22** Analogía de primer nivel en problemas de vigas
- Tabla III.23** Analogía de segundo nivel en problemas de vigas

Capítulo 4

- Tabla IV.1** Símbolos de Christoffel de primera y segunda especie

Capítulo 5

- Tabla V.1** Resumen de la Transformada del tipo Legendre para la lámina
- Tabla V.2** Análisis armónico de placas rectas, definiciones básicas
- Tabla V.3** Respuesta de la lámina cilíndrica

Anexo A

- Tabla A.I** Distribución de axiles y momentos flectores en el plano de las paredes de la viga cajón debidos a la distorsión
- Tabla A.II** Distribución de esfuerzos cortantes en el plano de las paredes de la viga cajón debidos a la distorsión
- Tabla A.III** Características mecánicas del marco
- Tabla A.IV** Distribución de momentos flectores transversales en las paredes de la pieza debidos a la distorsión
- .

Anexo C

- Tabla C.I** Respuesta de la viga flotante simplemente apoyada sometida a una fuerza transversal puntual P en la sección $t=d$
- .

Anexo E

- Tabla E.I** Secuencia de cálculo de las características torsionales de una viga
- Tabla E.II** Secuencia de cálculo de las características torsionales de una viga de pared delgada y sección abierta
- Tabla E.III** Magnitudes de la torsión para algunas secciones transversales

PARTE I
PIEZAS ALARGADAS

1. MODELADO GEOMÉTRICO DE PIEZAS ALARGADAS

El presente capítulo trata de establecer los elementos de geometría necesarios para la adecuada formulación de la mecánica de las piezas alargadas, sin restricciones de forma. Por ello, comenzaremos por describir la geometría intrínseca de una curva orientada en el espacio tridimensional. Posteriormente, extenderemos este sistema natural de coordenadas al espacio próximo a la curva, que denominaremos *espacio tubular*, con el fin de referenciar convenientemente los puntos materiales de la pieza alargada. Concluiremos con la valoración de las propiedades de la familia de sistemas de referencia ligados a la curva orientada, o *curva directriz* del espacio tubular.

1.1 TRIEDRO DE FRENÊT-SERRET DE UNA CURVA ORIENTADA

Sea $\mathcal{I}(s)$ una curva de clase C^1 parametrizada en s , longitud de arco, cuyo vector posición $\mathbf{P}(s)$ tiene por coordenadas cartesianas $X(s)$, $Y(s)$ y $Z(s)$. Estas constituyen entonces las ecuaciones paramétricas de la curva, y las definiciones anteriores permiten escribir:

$$\mathbf{P}(s) = X(s)\mathbf{i}_1 + Y(s)\mathbf{i}_2 + Z(s)\mathbf{i}_3 \quad (1.1)$$

Evaluemos la derivada del vector posición respecto al parámetro longitud de arco, y denominemos $\lambda(s)$ al vector resultante:

$$\lambda = \frac{d\mathbf{P}}{ds} \quad (1.2)$$

2 TEORÍA UNIFICADA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES ESBELTOS

Es sencillo comprobar que este vector es unitario y tangente a $\Gamma(s)$, por lo tanto $\lambda \cdot \lambda = 1$, de donde se deduce, derivando nuevamente:

$$2\lambda \cdot \frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (1.3)$$

Fórmula que demuestra que la derivada del vector unitario tangente a la curva es ortogonal a la misma en el punto considerado. Llamemos $\chi(s)$ a su módulo y $\mathbf{n}(s)$ al vector unitario obtenido de normalizar la derivada de $\lambda(s)$:

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\chi} \frac{d\lambda}{ds} \quad (1.4)$$

Este vector \mathbf{n} está definido salvo si λ es un vector constante, lo cual exige que Γ sea una recta, por lo tanto χ será una medida de la curvatura de Γ .

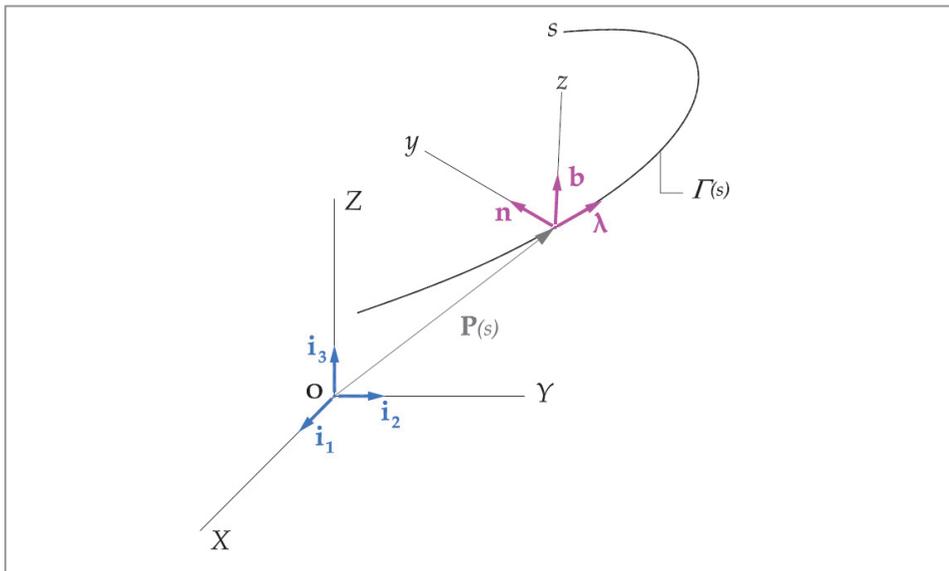


Figura 1.1 Triedro y coordenadas intrínsecas de una curva orientada

Denominaremos *vector normal* al último vector unitario introducido, mientras que $\mathbf{b}(s) = \lambda(s) \times \mathbf{n}(s)$, producto vectorial del vector tangente y del vector normal, se llamará *vector binormal*, completándose de ese modo el *triedro intrínseco* de la curva en todo punto ordinario $\mathbf{P}(s)$: $\{\lambda(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$, que por construcción resulta ortonormal. Admitamos ahora que $\Gamma(s)$ es una curva plana, en tal caso el

vector binormal será constante a lo largo de la misma y su derivada nula. En consecuencia, por un razonamiento análogo al realizado con la derivada del vector tangente, el módulo de la derivada del vector $\mathbf{b}(s)$ medirá la torsión de $\Gamma(s)$. Lo denominaremos en lo sucesivo $\tau(s)$. Con estos resultados y definiciones, es sencillo obtener la variación del triedro intrínseco, o triedro de Frenêt-Serret⁹, a lo largo de la curva $\Gamma(s)$. El resultado es:

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \chi & 0 \\ -\chi & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

Esta fórmula establece una conexión en cada punto de la curva orientada $\Gamma(s)$, la cual también puede expresarse en forma vectorial como:

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\omega}_F \times \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

Con el vector de Darboux $\boldsymbol{\omega}_F = \tau\boldsymbol{\lambda} + \chi\mathbf{b}$. En lo sucesivo, denominaremos $\boldsymbol{\Omega}_F$ a la matriz que caracteriza la conexión (1.5) ligada al triedro intrínseco de la curva Γ .

Por último, obsérvese que cualquier rotación del triedro de Frenêt-Serret de eje $\boldsymbol{\lambda}(s)$ proporciona un nuevo triedro ortonormal $\{\boldsymbol{\lambda}(s), \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s)\}$ ligado a $\Gamma(s)$. Sea $\theta(s)$ al ángulo formado por los vectores $\mathbf{n}(s)$ y $\boldsymbol{\alpha}(s)$, ambos contenidos en el plano normal a la curva orientada, definido este por los vectores normal y binormal. La relación entre ambos sistemas es simplemente:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

mientras que las coordenadas que parametrizan el plano normal, Figura 1.2, deben ahora medirse según las nuevas direcciones $\boldsymbol{\alpha}(s)$ y $\boldsymbol{\beta}(s)$. Podremos por lo tanto definir una familia de conexiones de parámetro $\theta(s)$ como sigue:

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \frac{d}{ds} \left(\mathbf{R}_\theta \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \right) = \frac{d\theta}{ds} \frac{d\mathbf{R}_\theta}{d\theta} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} + \mathbf{R}_\theta \frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}$$

siendo \mathbf{R}_θ la matriz que proporciona el cambio de ejes, rotación de eje $\boldsymbol{\lambda}$.

4 TEORÍA UNIFICADA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES ESBELTOS

Luego

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \left(\theta' \frac{d\mathbf{R}_\theta}{d\theta} + \mathbf{R}_\theta \boldsymbol{\Omega}_F \right) \mathbf{R}_\theta^{-1} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \chi \cos \theta & -\chi \operatorname{sen} \theta \\ -\chi \cos \theta & 0 & \tau + \theta' \\ \chi \operatorname{sen} \theta & -(\tau + \theta') & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Esta nueva conexión será analizada más adelante, cuando abordemos el problema de la selección del triedro de referencia del sólido.

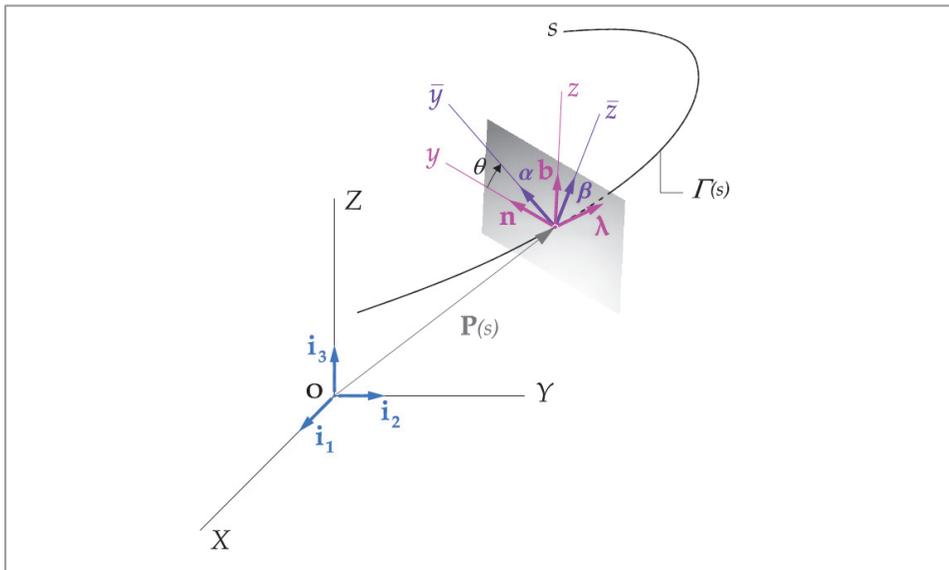


Figura 1.2 Sistemas coordenados en sección transversal, asociados a una curva orientada $\Gamma(s)$

1.2 GEOMETRÍA DEL SÓLIDO: EL ESPACIO TUBULAR

Para conseguir mayor claridad en la exposición, conviene que la definición geométrica de la pieza permita intuir o *visualizar* su materialización física. Por ello, esta se define como el conjunto de puntos materiales \mathcal{B} dados

por $\{A(y,z) \times_{\psi} \Gamma(s), s \in [0,l]\}$. En la expresión anterior, $\Gamma(s)$ es la curva *directriz* de la pieza, de tangente unitaria $\lambda(s)$, $A(y,z)$ su sección transversal, contenida en el plano definido por los vectores $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ y parametrizada en las coordenadas (y,z) medidas según las direcciones normal y binormal de $\Gamma(s)$, y el símbolo \times_{ψ} indica el transporte y rotación de ángulo $\psi(s)$ de $A(y,z)$ a lo largo de $\Gamma(s)$, o transporte con *spin*. Esta rotación relaciona los ejes materiales de la sección transversal (por ejemplo, sus ejes principales de inercia) con los ejes intrínsecos de la curva directriz. El volumen de \mathcal{B} , al que también nos referiremos como *espacio tubular*, queda parametrizado en las coordenadas curvilíneas (s,y,z) , longitud de arco de la directriz y situación dentro de la sección transversal respectivamente. Con ello el vector posición de los puntos de \mathcal{B} puede darse como:

$$\mathbf{P}^*(s, y, z) = \mathbf{P}(s) + y\mathbf{n}(s) + z\mathbf{b}(s) \quad (1.10)$$

El asterisco introducido en la fórmula (1.10) y subsiguientes se asignará a cantidades evaluadas en cualquier punto de la pieza. Denominaremos l a la longitud sobre la cual Γ interseca a \mathcal{B} , o simplemente longitud del elemento estructural y por último, en el caso más general, la sección transversal A podrá variar a lo largo del mismo. Resumiremos la condición de pieza alargada mediante las fórmulas:

$$\left. \begin{aligned} h/l \leq \varepsilon \quad , \quad h = \sqrt{(y_{max} - y_{min})^2 + (z_{max} - z_{min})^2} \\ \chi h \leq \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

En ellas, h aparece por lo tanto como una cota superior de la máxima dimensión de la sección transversal de la pieza. La segunda condición garantiza que el sistema coordenado propuesto es regular en todos los puntos del espacio tubular. Las definiciones anteriores también permiten visualizar el volumen de \mathcal{B} como un *espacio fibrado*. Basta para ello hacer $y=y_M, z=z_M$ con $(y_M, z_M) \in A(y,z)$, entonces el vector $\mathbf{P}_M^*(s) = \mathbf{P}(s) + y_M\mathbf{n}(s) + z_M\mathbf{b}(s)$ recorrerá la curva Γ_M , fibra o línea coordenada que pasa por el punto M , contenida por el tubo \mathcal{B} .

Los vectores naturales del espacio tubular, son directamente:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_1^* &= \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial s} = \mu\lambda - \tau(z\mathbf{n} - y\mathbf{b}) \\ \mathbf{G}_2^* &= \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial y} = \mathbf{n} \\ \mathbf{G}_3^* &= \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial z} = \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

6 TEORÍA UNIFICADA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES ESBELTOS

con la función adimensional $\mu=1-\chi y$, siendo χ la curvatura y τ la torsión de la curva directriz Γ . Las componentes del tensor métrico valen entonces:

$$\begin{aligned} G_{11}^* &= \mathbf{G}_1^* \cdot \mathbf{G}_1^* = \mu^2 + \tau^2 (y^2 + z^2) & G_{12}^* &= \mathbf{G}_1^* \cdot \mathbf{G}_2^* = -\tau z \\ G_{22}^* &= \mathbf{G}_2^* \cdot \mathbf{G}_2^* = 1 & G_{13}^* &= \mathbf{G}_1^* \cdot \mathbf{G}_3^* = \tau y \\ G_{33}^* &= \mathbf{G}_3^* \cdot \mathbf{G}_3^* = 1 & G_{23}^* &= \mathbf{G}_2^* \cdot \mathbf{G}_3^* = 0 \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$[\mathbf{C}_{ij}^*] = \begin{bmatrix} (1-\chi y)^2 + \tau^2 (y^2 + z^2) & -\tau z & \tau y \\ -\tau z & 1 & 0 \\ \tau y & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

El determinante de este tensor $G^*=\mu^2$ proporciona el diferencial de volumen del sólido referido a este sistema coordenado: $dV=\mu ds dy dz \equiv \mu ds dA$. Conviene observar que el espacio tubular ha quedado referido a coordenadas curvilíneas *oblicuas*, con todos los inconvenientes que ello conlleva a la hora de definir componentes físicas de los sistemas que describen la respuesta mecánica de la pieza esbelta, pero esta propiedad se supera si la curva $\Gamma(s)$ es plana ($\tau=0$).

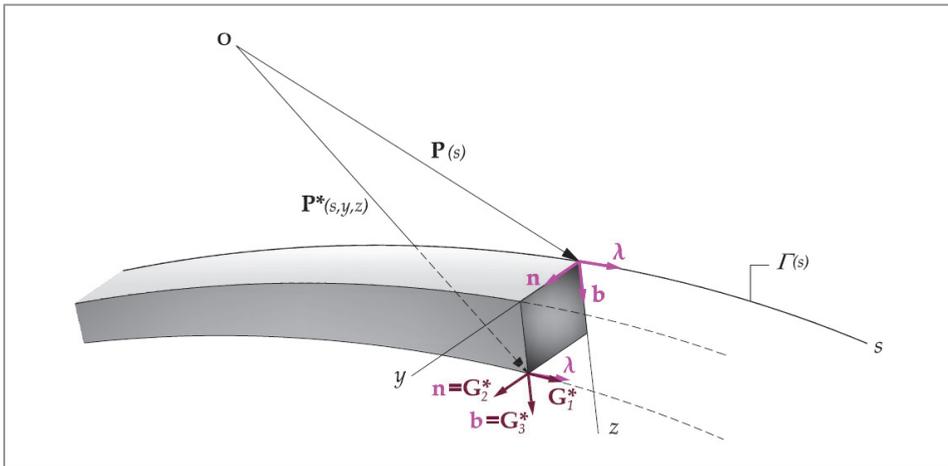


Figura 1.3 Definición gráfica de las líneas y superficies coordenadas del sistema (s, y, z)

Supongamos ahora que escogemos la conexión imponiendo la condición $\tau + \theta' = 0$ en lugar de $\theta = 0$ (condición que corresponde al sistema intrínseco de Frenét-Serret). Entonces, la matriz asociada, que denominaremos Ω_B , es⁷:

$$\Omega_B = \begin{bmatrix} 0 & \chi \cos \theta & -\chi \sin \theta \\ -\chi \cos \theta & 0 & 0 \\ \chi \sin \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

En forma vectorial: $\omega_B = \chi(\sin \theta \alpha + \cos \theta \beta) = \chi \mathbf{b}$. La parametrización del espacio tubular se rige ahora por la relación:

$$\mathbf{P}^*(s, \bar{y}, \bar{z}) = \mathbf{P}(s) + \bar{y} \alpha(s) + \bar{z} \beta(s) \quad (1.15)$$

Las coordenadas (\bar{y}, \bar{z}) siguen describiendo la posición dentro del plano normal, de los puntos materiales de la sección transversal A , pero ahora deben medirse según las direcciones de los vectores $\alpha(s)$ y $\beta(s)$, por lo que:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_1^* &= \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial s} = \mu \lambda \\ \bar{\mathbf{G}}_2^* &= \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \bar{y}} = \alpha \\ \bar{\mathbf{G}}_3^* &= \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \bar{z}} = \beta \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

con $\mu = 1 - \chi(\bar{y} \cos \theta - \bar{z} \sin \theta) \equiv 1 - \chi y$ teniendo en cuenta la relación (1.7), luego:

$$[\bar{\mathbf{G}}_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Confirmándose que el sistema coordenado del espacio tubular, sujeto a la condición $\tau + \theta' = 0$, es ortogonal. Con esta parametrización, todas las fibras resultan paralelas o *semejantes* entre sí, dado que en cualquier sección transversal, los vectores naturales $\bar{\mathbf{G}}_1^*$ tangentes a las mismas son paralelos y proporcionales módulo μ . Por último, la fórmula $dV = \mu ds dA$ resulta válida para todos los sistemas obtenidos mediante cualquier rotación \mathbf{R}_θ del triedro intrínseco. Basta tomar:

$$\mu = 1 - \chi(\bar{y} \cos \theta - \bar{z} \sin \theta) \quad \text{y} \quad dA = d\bar{y} d\bar{z}$$

8 TEORÍA UNIFICADA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES ESBELTOS

En la siguiente sección, valoraremos la selección del sistema de referencia del espacio tubular, pero previamente y con propósitos futuros, pasemos a describir el contorno de la pieza alargada. Denominemos ξ a la coordenada adimensional s/l , tendremos $\xi \in [0,1]$ y $A_0 \equiv A|_{\xi=0}$, $A_1 \equiv A|_{\xi=1}$ serán las secciones inicial y final de la pieza. Por lo tanto, si $\partial\bar{V}$ se refiere al tubo que configura el contorno lateral del cuerpo \mathcal{B} , el contorno de la pieza alargada, cuyo volumen denominaremos V , podrá expresarse como $\partial V = A_0 \cup \partial\bar{V} \cup A_1$.

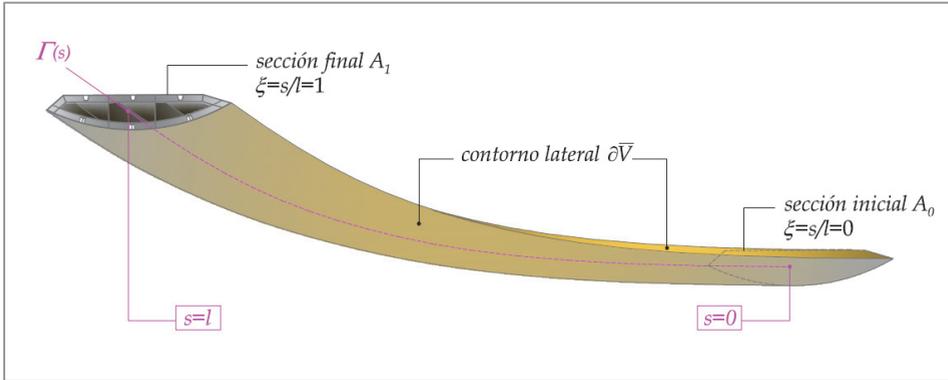


Figura 1.4 Definición del contorno de la pieza alargada

Esta definición llevará asociados unos diferenciales de área $dA = d\bar{y}d\bar{z}$ para las dos caras extremas del sólido, mientras que para obtener el correspondiente al contorno lateral, nos apoyaremos en la Figura 1.5. De ella resulta:

$$\bar{\mathbf{P}}(s, \bar{s}) = \mathbf{P}(s) + \bar{y}\boldsymbol{\alpha} + \bar{z}\boldsymbol{\beta}$$

sobrentendiendo que las coordenadas \bar{y} y \bar{z} se evalúan sobre el contorno lateral de la pieza, es decir que $\bar{y} = \bar{y}(s, \bar{s})$ y $\bar{z} = \bar{z}(s, \bar{s})$, siendo \bar{s} el parámetro de la curva cerrada ∂A , contorno de la sección transversal de la pieza. Los vectores naturales de estas nuevas coordenadas de superficie serán:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}}{\partial s} = \mu \boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial s} \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial s} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}} \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}} \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \right\}$$

particularizando μ en los puntos de $\partial\bar{V}$.

En estas condiciones, el diferencial de área buscado valdrá:

$$d\bar{S} = \|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\| ds d\bar{s} = \bar{\mu} ds d\bar{s} \quad (1.18.a)$$

con el escalar $\bar{\mu}$ igual a:

$$\bar{\mu} = \sqrt{\mu^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial s} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial s} \right)^2} \quad (1.18.b)$$

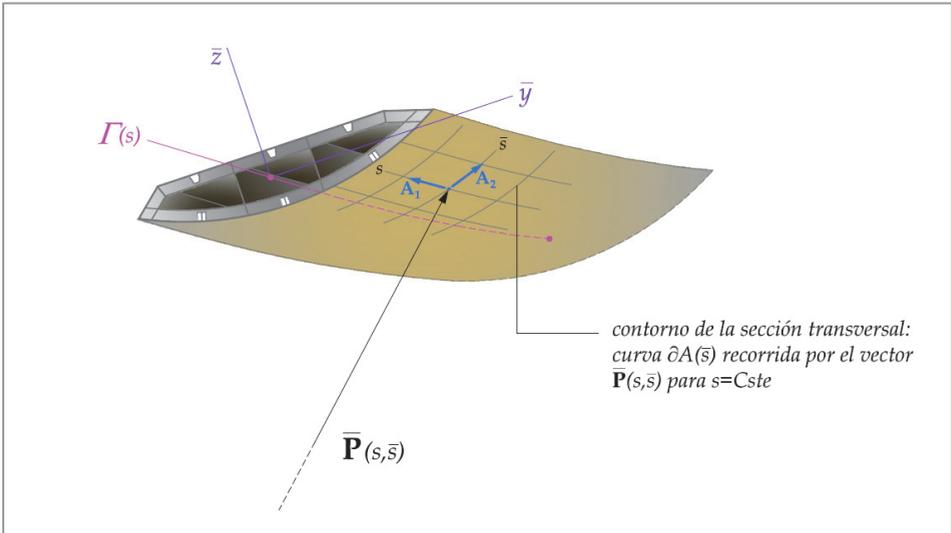


Figura 1.5 Coordenadas superficiales del contorno lateral de la pieza alargada

Un caso particular interesante lo constituyen las piezas con sección constante, ya que esta propiedad permite tomar \bar{s} igual a la longitud de arco de la curva cerrada ∂A , resultando \mathbf{A}_2 unitario, luego:

$$\bar{\mu} = \sqrt{\mu^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial s} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial s} \right)^2}$$

Si además, la orientación de la sección transversal respecto al triedro $\{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$ también es constante, se tiene $\bar{\mu} = 1 - \chi(\bar{y} \cos \theta - \bar{z} \sin \theta)$ ya que entonces $\bar{y} = \bar{y}(\bar{s})$ y $\bar{z} = \bar{z}(\bar{s})$. En la siguiente sección, analizaremos con mayor atención esta familia de piezas alargadas, que denominaremos de conformado natural.

1.3 EL PROBLEMA DE LA SELECCIÓN DEL SISTEMA DE REFERENCIA

A la vista de los últimos resultados de la sección 1.1, se debe reconocer que existe amplia libertad a la hora de escoger el sistema de referencia de la pieza alargada⁷, que se concreta en el valor que se adopte para la rotación de ángulo $\theta(s)$ y eje $\lambda(s)$, impuesta al triedro intrínseco para generar el sistema que se haya seleccionado. La mejor elección de este último debe plantearse con una doble perspectiva: material y mecánica, entendiendo por *perspectiva material* la que contempla únicamente el conformado físico del sólido, por ejemplo a partir de una determinada curva directriz Γ y la orientación de los ejes principales de inercia de su sección transversal, derivada de la configuración espacial de la pieza alargada, mientras que la *perspectiva mecánica* corresponde a seleccionar la mejor parametrización del sólido desde el punto de vista de la formulación matemática del problema. Para progresar en nuestro propósito, analicemos las propiedades de la curva $\Gamma(s)$ trazada sobre la superficie $\Sigma(\theta^1, \theta^2)$, tal y como se representa en la figura siguiente. Si ϕ es el ángulo formado en cada punto de Γ por su vector normal intrínseco \mathbf{n} y $\mathbf{A}_3 \equiv \mathbf{e}_3$, vector unitario perpendicular a la superficie (ver apartado 3.2.1), denominaremos $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \lambda$ al vector unitario tangente a la superficie, ortogonal a la curva Γ . El triedro $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,3}$ así definido se llama triedro de Darboux⁸ de la curva Γ respecto de la superficie Σ , resultando (ver Figura 1.6):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen } \phi & -\text{cos } \phi \\ 0 & \text{cos } \phi & \text{sen } \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

con el vector $\mathbf{e}_1(s) \equiv \lambda(s)$. Observando que $\theta = -(\pi/2 - \phi)$, la conexión del triedro móvil $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,2,3}$ será:

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \chi \text{sen } \phi & \chi \text{cos } \phi \\ -\chi \text{sen } \phi & 0 & \tau + \phi' \\ -\chi \text{cos } \phi & -(\tau + \phi') & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

Definiremos la *curvatura normal*, la *curvatura geodésica* y la *torsión geodésica* de la superficie en un punto ordinario $\mathbf{P}(\theta^1, \theta^2)$ de la misma, según la dirección tangente a la curva $\Gamma(s)$ trazada sobre $\Sigma(\theta^1, \theta^2)$ como:

$$\chi_{(n)} = \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \cdot \mathbf{e}_3 \quad , \quad \chi_{(g)} = \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \cdot \mathbf{e}_2 \quad , \quad \tau_{(g)} = \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} \cdot \mathbf{e}_3 = -\frac{d\mathbf{e}_3}{ds} \cdot \mathbf{e}_2$$

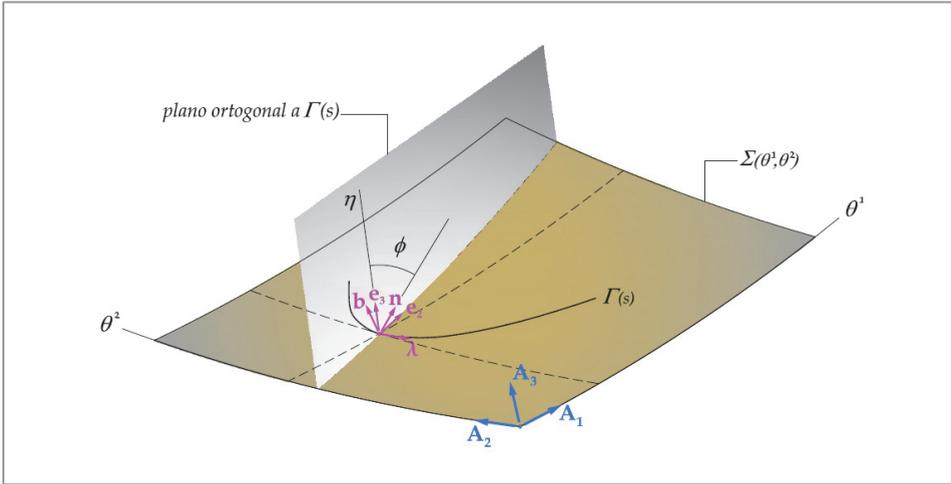


Figura 1.6 Curva sobre una superficie y triédros móviles asociados

luego

$$\left. \begin{aligned} \chi_{(n)} &= \chi \cos \phi \\ \chi_{(g)} &= \chi \operatorname{sen} \phi \\ \tau_{(g)} &= \tau + \phi' \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Alternativamente, en un punto ordinario $\mathbf{P}(\theta^1, \theta^2)$ de la superficie orientada, el sistema $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ puede interpretarse como una familia de triédros intrínsecos de Σ , de parámetro ϕ . Entonces la condición $\tau_{(g)} = \tau + \phi' = 0$ será característica de las líneas de curvatura de la superficie Σ , adelantando con ello algún resultado del apartado 3.3.2. En los dos próximos apartados, para valorar el problema de la elección del sistema de referencia, supondremos que la sección transversal de la pieza alargada, cuya forma o *conformado* viene definida por el transporte con *spin* $\{A(y, z) \times_{\psi} \Gamma(s), s \in [0, l]\}$, es constante.

1.3.1 Piezas de sección constante y conformado natural

Considerando la naturaleza de la propiedad $\tau_{(g)} = \tau + \phi' = 0$, podemos afirmar que las últimas coordenadas (s, \bar{y}, \bar{z}) introducidas para parametrizar el

espacio tubular, llevan asociado un triedro móvil $\{\lambda(s), \alpha(s), \beta(s)\}$ libre de torsión⁷, que denominaremos *triedro principal* de la curva directriz, puesto que este se definió a partir de la condición $\tau + \theta' = 0$. Sea ahora $\psi(s)$ al ángulo formado por el vector normal $\mathbf{n}(s)$ y el vector $\mathbf{e}_{II}(s)$, dirección principal de inercia (II), siendo $\mathbf{e}_{III}(s)$ la otra dirección principal de inercia de la sección transversal, tal y como se representa en la Figura 1.7. Dispondremos de tres triedros orientados, dos ligados a la geometría de la curva directriz: el triedro intrínseco o de Frenêt-Serret $\{\lambda, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, cuya orientación viene dada por $\theta(s)=0$, y el principal $\{\lambda, \alpha, \beta\}$, al que corresponde $\tau + \theta' = 0$, y un tercero asociado a Γ y a la geometría de su sección transversal: $\{\lambda, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}\}$, que denominaremos *triedro material* y cuya orientación viene dada por el ángulo $\psi(s)$, que mide la rotación o *spin* de los ejes principales de inercia respecto a los ejes intrínsecos.

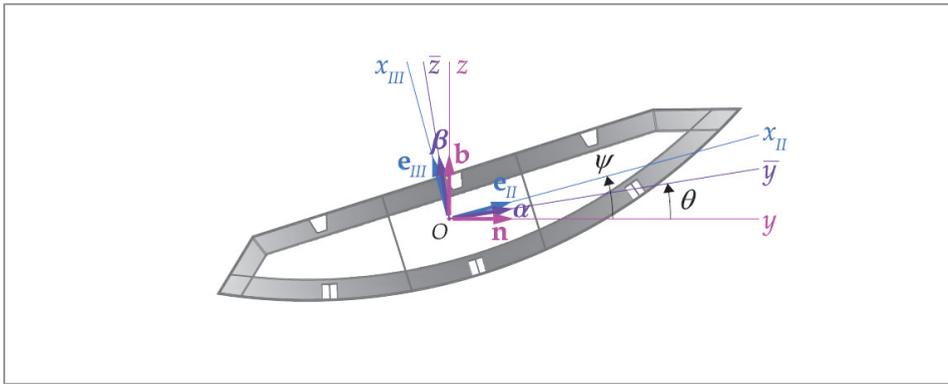


Figura 1.7 Definición de los tres triedros móviles propios de la pieza alargada

En lo sucesivo, admitiremos que la curva orientada $\Gamma(s)$ coincide con la trayectoria del centro de gravedad O de la sección transversal, supuesta constante, y emplearemos las coordenadas (y, z) para parametrizar la sección transversal según las direcciones de los vectores intrínsecos \mathbf{n} y \mathbf{b} , mientras que las coordenadas (\bar{y}, \bar{z}) se reservarán para la parametrización asociada a las direcciones de los vectores α y β del sistema de referencia principal. Por último, las direcciones principales de inercia se asociarán a las coordenadas (x_{II}, x_{III}) y admitiremos que en la sección inicial de la pieza $\psi|_{s=0} = \psi_0$ es dado.

En estas condiciones, el sistema de transporte con *spin* $\{A(x_{II}, x_{III}) \times_{\psi} \Gamma(s), s \in [0, l]\}$ o más brevemente sistema material, proporciona una descripción matemática del conformado físico de la pieza alargada. Sin embargo, entre todas las posibles vías de conformar una pieza alargada de sección constante A , asociada a una curva directriz Γ , y que constituyen una familia de parámetro ψ , existe al

menos una con propiedades especiales, que denominaremos *conformado natural*, que corresponde a imponer:

$$\psi(s) = \psi_0 - \int_{t=0}^s \tau(t) dt \quad (1.22)$$

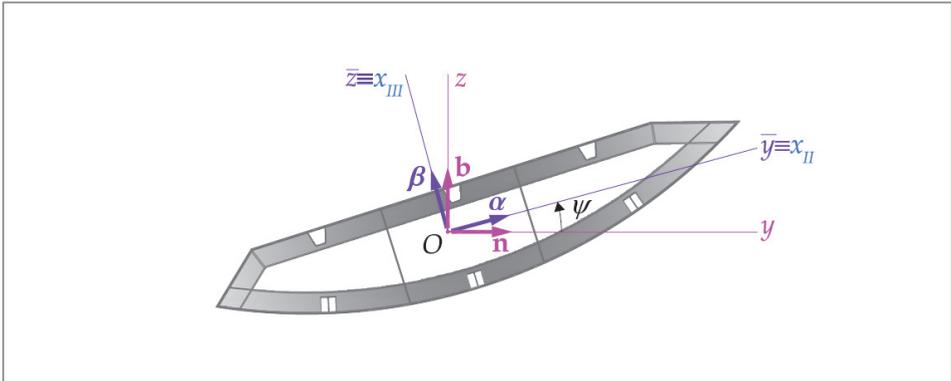


Figura 1.8 Ejes en sección transversal, de una pieza con conformado natural

Este proporciona un *fibrado* de la pieza *libre de torsión*, con todas las ventajas operativas que ello supone. En particular:

- (1) el problema mecánico se formula en un sistema ortogonal, apto para expresar la respuesta de la pieza esbelta mediante componentes físicas.
- (2) Este mismo sistema, al coincidir con el material, proporciona propiedades mecánicas de la sección transversal referidas a sus ejes principales de inercia.

1.3.2 Piezas de sección constante y conformado oblicuo

Si, por motivos funcionales o estéticos, el conformado de la pieza no se ajusta a las condiciones naturales, en cualquier sección interior $0 < s < l$ de \mathcal{B} , el *spin* $\psi(s)$ será diferente del ángulo $\theta(s)$ que forman los vectores $\mathbf{n}(s)$ y $\boldsymbol{\alpha}(s)$, tal y como se representa en la Figura 1.7. Consecuentemente, los ejes principales de inercia exhibirán una rotación de valor $\omega(s) = \psi(s) - \theta(s)$ respecto a los ejes del sistema libre de torsión, de ahí la denominación *conformado oblicuo* adoptada.

14 TEORÍA UNIFICADA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES ESBELTOS

Los correspondientes triedros móviles quedarán relacionados por una matriz de rotación $\mathbf{R}_\omega(s)$ como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mathbf{e}_{II} \\ \mathbf{e}_{III} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \text{sen}\omega \\ 0 & -\text{sen}\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (1.23)$$

El cambio de coordenadas en el plano normal, entre el sistema material y el sistema principal, se regirá entonces por la relación:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\text{sen}\omega \\ 0 & \text{sen}\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_{II} \\ x_{III} \end{Bmatrix} \quad (1.24)$$

O bien $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{R}_\omega^T \tilde{\mathbf{r}}$, con los vectores de coordenadas *homogéneas* $\bar{\mathbf{r}}$ y $\tilde{\mathbf{r}}$ siguientes:

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x_{II} \\ x_{III} \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

luego $\bar{\mathbf{r}}\bar{\mathbf{r}}^T = \mathbf{R}_\omega^T \tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}}^T \mathbf{R}_\omega$. Los parámetros estáticos estándar de la sección (área, momentos estáticos y momentos y productos de inercia) referidos a los ejes (\bar{y}, \bar{z}) , pueden entonces evaluarse mediante la matriz $\bar{\mathbf{m}}$ definida a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}} &= \int_A \bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{r}}^T dA = \begin{bmatrix} A & S_{\bar{z}} & S_{\bar{y}} \\ S_{\bar{z}} & I_{\bar{z}} & I_{\bar{y}\bar{z}} \\ S_{\bar{y}} & I_{\bar{y}\bar{z}} & I_{\bar{y}} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}_\omega^T \int_A \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}}^T dA \mathbf{R}_\omega \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_{III} \cos^2 \omega + I_{II} \text{sen}^2 \omega & \text{sen}\omega \cos\omega (I_{III} - I_{II}) \\ 0 & \text{sen}\omega \cos\omega (I_{III} - I_{II}) & I_{III} \text{sen}^2 \omega + I_{II} \cos^2 \omega \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.26)$$

puesto que la directriz de la pieza coincide con la trayectoria del centro de gravedad de la sección transversal. En consecuencia la matriz $\bar{\mathbf{m}}$ será función de la coordenada s , salvo que ω sea constante. Este caso queda excluido puesto que

corresponde al proceso de conformación natural, tratado en el apartado anterior.

1.3.3 Piezas de sección variable

Por las múltiples posibilidades formales que ofrece la variación de la geometría de la sección transversal, la definición del conformado de las piezas de sección variable resulta más compleja de expresar. En particular, la selección de una curva directriz resulta más abierta, más delicada de intuir. En cualquier caso, lo que ya puede preverse es que todos los parámetros estáticos del modelo serán invariablemente función de s . Para comprobarlo, basta anotar que el cambio de coordenadas dentro del plano normal, entre el sistema material y el nuevo sistema, se rige ahora por la relación:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \bar{y} - \bar{y}_G \\ \bar{z} - \bar{z}_G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\text{sen}\omega \\ 0 & \text{sen}\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_{II} \\ x_{III} \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

luego $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_G + \mathbf{R}_\omega^T \tilde{\mathbf{r}}$ con el vector $\bar{\mathbf{r}}_G = \{0, \bar{y}_G, \bar{z}_G\}^T$ definiendo la posición del centro de gravedad de A en el sistema principal, por lo tanto:

$$\bar{\mathbf{r}}\bar{\mathbf{r}}^T = \bar{\mathbf{r}}_G\bar{\mathbf{r}}_G^T + \mathbf{R}_\omega^T \tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}}^T + \bar{\mathbf{r}}_G\tilde{\mathbf{r}}^T\mathbf{R}_\omega + \mathbf{R}_\omega^T \tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}}^T\mathbf{R}_\omega$$

Operando e integrando sobre la sección transversal, se obtiene entonces la nueva expresión del operador $\bar{\mathbf{m}}(s)$ asociado al caso general. Esta es:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}}(s) &= \int_A \bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{r}}^T dA = \begin{bmatrix} A & S_{\bar{z}} & S_{\bar{y}} \\ S_{\bar{z}} & I_{\bar{z}} & I_{\bar{y}\bar{z}} \\ S_{\bar{y}} & I_{\bar{y}\bar{z}} & I_{\bar{y}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & \bar{y}_G A & \bar{z}_G A \\ \bar{y}_G A & I_{III}\cos^2\omega + I_{II}\text{sen}^2\omega + \bar{y}_G^2 A & \text{sen}\omega\cos\omega(I_{III} - I_{II}) + \bar{y}_G\bar{z}_G A \\ \bar{z}_G A & \text{sen}\omega\cos\omega(I_{III} - I_{II}) + \bar{y}_G\bar{z}_G A & I_{III}\text{sen}^2\omega + I_{II}\cos^2\omega + \bar{z}_G^2 A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.28)$$

En esta fórmula, todos los parámetros de la sección transversal están referidos al sistema principal y varían a lo largo de la curva directriz $\Gamma(s)$ que se haya adoptado, tanto los estáticos (área, momentos estáticos y momentos y

Para seguir leyendo haga click aquí