



# Simulación del motor de corriente continua en “*Matlab-Simulink*” a partir de las ecuaciones diferenciales que modelizan su comportamiento.

<b>Apellidos, nombre</b>	Autor (correo@die.upv.es)
<b>Departamento</b>	Ingeniería eléctrica
<b>Centro</b>	Universitat Politècnica de València



## 1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se va presentar el procedimiento necesario para simular el comportamiento de un motor de corriente continua a partir de las ecuaciones diferenciales que rigen su funcionamiento. En este caso, para modelizar el comportamiento del motor de corriente continua se utilizan dos ecuaciones diferenciales ligadas entre sí. Una referida más propiamente al circuito eléctrico equivalente del motor mientras que otra se va encargar del comportamiento mecánico del mismo. No obstante, estas ecuaciones no son independientes entre sí, sino que existe un importante vínculo entre ellas tal como se verá en los puntos posteriores quedando patente el fuerte nexo de unión entre el sistema eléctrico y el mecánico.

## 2 Introducción

La simulación de máquinas eléctricas es esencial en el entorno industrial ya que permite comprobar que su funcionamiento se va a adecuar a las exigencias de la aplicación donde vayan a quedar instalados. Por tanto, una correcta simulación va a permitir seleccionar la máquina más apropiada en cada caso. Por otro lado, adicionalmente, permite comprobar el comportamiento que va a tener el sistema ante cualquier tipo de avería o fallo, permitiendo determinar las acciones necesarias no sólo para su detección sino también las acciones a realizar en el caso que aparezcan de modo que no se produzca ninguna situación de riesgo en la instalación.

## 3 Objetivos

Una vez que el alumno se lea con detenimiento este documento, será capaz de:

- Construir el diagrama de bloques en "Simulink" a partir del sistema de ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento del motor eléctrico de corriente continua.
- Recopilar e ilustrar la evolución de las principales magnitudes de la máquina simulada a lo largo de la simulación.
- Modificar el diagrama de bloques creado para incluir elementos externos como, por ejemplo, la existencia de un par resistente externo que debe vencer la máquina.

## 4 Desarrollo

- Conocimientos previos: para el correcto aprovechamiento de este artículo docente es necesario que el alumno cuente con nociones básicas de ecuaciones diferenciales, sepa interactuar, de manera básica, con la herramienta Matlab y tenga conocimientos acerca del comportamiento del motor eléctrico de corriente continua.
- La estructura que se va a seguir es la siguiente. En primer lugar, se planteará el sistema de ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del motor de corriente continua comprobando el nexo de unión entre el sistema



eléctrico y el mecánico. Seguidamente se procederá al diseño del diagrama de bloques de función con el cuál simular su comportamiento. Posteriormente se introducirán algunos bloques utilizados para la visualización de las magnitudes más relevantes del sistema tales como, corriente, velocidad, par electromagnético generado, par resistente, etc. Finalmente, se darán las directrices necesarias para incluir elementos externos al sistema, como, por ejemplo, la presencia de un par resistente externo.

## 4.1 Punto de partida – Sistema de ecuaciones diferenciales

En primer lugar, se van a exponer los parámetros de un motor de corriente continua, para poder proceder a su simulación se le asignarán valores que habría que sustituir en función de la máquina que se desee simular.

Parámetros de la máquina:

$J$  – Momento de inercia:  $0,015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$b$  – Coeficiente de fricción rotor:  $0,09 \text{ n} \cdot \text{m/s}$

$k_e$  – Constante fuerza electromotriz:  $0,01 \text{ V/rad/s}$ .

$k_t$  – Constante de proporcionalidad del par:  $0,01 \text{ N} \cdot \text{m/A}$ .

$R$  – Resistencia eléctrica:  $1.2 \Omega$ .

$L$  – Inductancia:  $0,55 \text{ H}$ .

$V$  – Tensión aplicada:  $24 \text{ V}$ .

El comportamiento de un motor de corriente continua queda definido por dos ecuaciones diferenciales, la primera considerada como la eléctrica:

$$V = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + e \quad (1)$$

Siendo  $e$  la fuerza electromotriz e  $i$  la corriente.

Y la segunda mecánica:

$$T_g - T_f = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = J \cdot \alpha \quad (2)$$

Donde  $T_g$  es el par electromecánico generado por la máquina,  $T_f$  es el par resistente debido a la fricción del rotor y  $\alpha$  es la aceleración angular.

Además, se considera que la fuerza electromotriz ( $e$ ) es proporcional a la velocidad de la máquina

$$e = k_e \cdot \frac{d\theta}{dt} = k_e \cdot \omega \quad (3)$$

que el Par generado  $T_g$  es proporcional a la corriente del motor

$$T_g = k_t \cdot i \quad (4)$$

Y que el par de fricción  $T_f$  es proporcional a la velocidad de la máquina

$$T_f = b \cdot \frac{d\theta}{dt} = b \cdot \omega \quad (5)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en (1) y las ecuaciones (4) y (5) en (2) queda el sistema de ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de la máquina que se

puede ver a continuación y en la que se han mantenido la forma diferencial (en lugar de utilizar las abreviaturas  $\omega$  y  $\alpha$  para la velocidad y aceleración angular respectivamente) con el objetivo de facilitar al alumno el procedimiento a seguir para generar el diagrama de bloques:

$$\begin{aligned} V &= R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + k_e \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ k_t \cdot i - b \cdot \frac{d\theta}{dt} &= J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Tal como puede verse en (6) existe un vínculo entre la parte eléctrica y la mecánica, de este modo, la fuerza electromotriz depende de la velocidad de la máquina y, por otro lado, el par generado depende de la corriente.

El siguiente paso consiste en despejar el término diferencial de mayor grado en cada una de sendas ecuaciones quedando del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{1}{L} \cdot \left( V - R \cdot i - k_e \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{1}{J} \cdot \left( k_t \cdot i - b \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Seguidamente se procede a crear el diagrama de bloques correspondiente en la herramienta simulink dentro del entorno de Matlab. Se va a empezar por genera el diagrama de bloques correspondiente a la ecuación eléctrica en el sistema de ecuaciones mostrado en (7). Para ello, en primer lugar se implementan los bloques necesarios para resolver las operaciones existentes dentro del paréntesis, tal como puede verse en la Figura 1. Tal como puede observarse, por el momento quedan dos señales por conectar que son la corriente  $i$  y la velocidad. No obstante, el origen de las mismas se verá a medida que se vaya generando el diagrama de bloques.

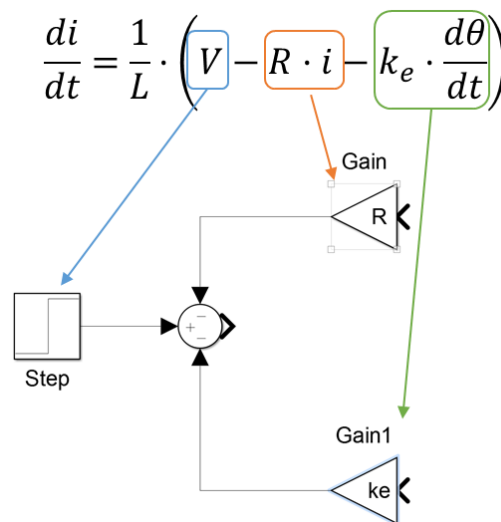


Figura 1: Diagrama de bloques para resolver las ecuaciones del paréntesis en la ecuación eléctrica de la máquina.

Si se observa, a la salida del bloque que realiza el sumatorio, si a dicho resultado se multiplicase por el factor  $1/L$  y tal como puede observarse en la primera ecuación del sistema de ecuaciones mostrado en (7) se obtendría la derivada de la corriente con respecto al tiempo. Si se aplicase, por tanto, la integrada, se obtendría la corriente, y la primera ecuación quedaría resuelta, tal como puede verse en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, a falta de conectar con la señal

correspondiente a la velocidad y que se obtendrá del diagrama de bloques correspondiente a la solución de la segunda ecuación en el sistema planteado en (7).

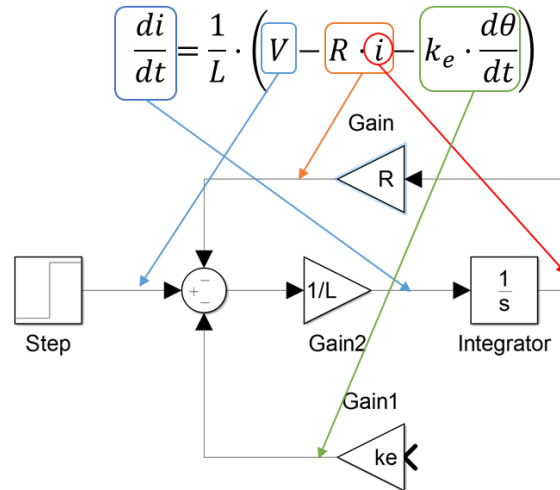


Figura 2: Diagrama de bloques para resolver la ecuación eléctrica de la máquina.

En un segundo término, se procede a resolver la ecuación que rige el comportamiento mecánico de la máquina. Procediendo de igual modo, se introducen los bloques correspondientes para poder resolver las operaciones pertinentes existentes dentro del paréntesis tal como se muestra en la Figura 3.

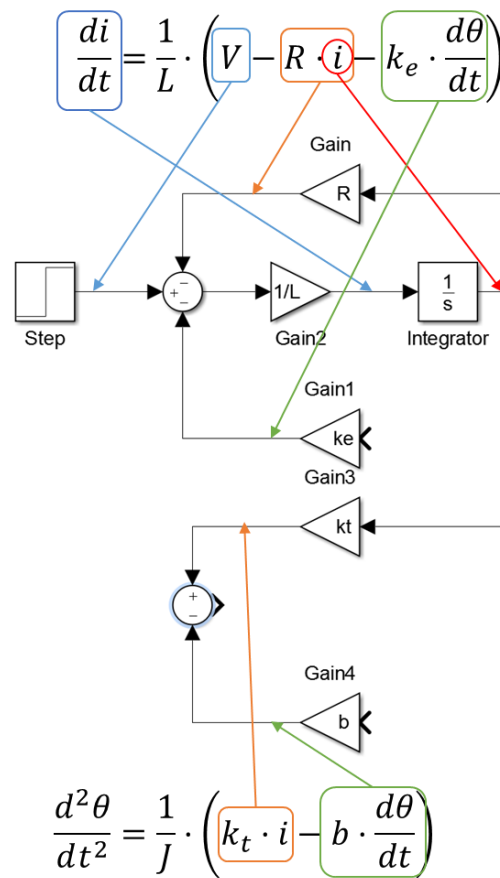


Figura 3: Resolución de las operaciones dentro del paréntesis para la ecuación mecánica de la máquina.

Seguidamente se observa, como a la salida del bloque sumador, si se dividiese por el momento de inercia  $J$ , se obtendría la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo o lo que es lo mismo, a aceleración angular. Si se inserta un bloque integrador se obtendrá el valor de la velocidad angular, que conectándola con los bloques correspondientes completaría el diagrama de bloques pertinentes para poder realizar la simulación del motor de corriente continua tal como se muestra en la

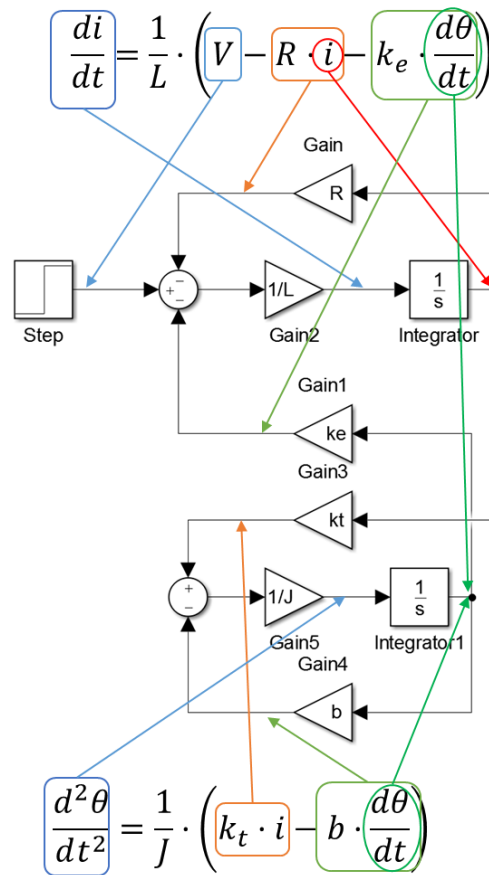


Figura 4: Diagrama de bloques para la simulación del motor de corriente continua.

Además, la herramienta de simulación simulink, ofrece distintos bloques, que permiten conocer la evolución de las distintas señales involucradas. En este caso se va a utilizar el bloque "scope" se puede ver en la Figura 5 que va a permitir trazar la evolución que tienen las distintas variables a lo largo de la simulación.



Figura 5: Bloque "Scope", que permite realizar un gráfico en el que se muestra la evolución temporal de la variable que se conecta a su puerto de entrada.

En el ejemplo que se trata en este artículo docente, las variables más interesantes a monitorizar serían, el par generado, la corriente y la velocidad. No obstante, en el sistema utilizado, la velocidad se obtiene en rad/s por lo que se va a insertar un bloque adicional para poder visualizarla en rpm que es lo más habitual en entornos industriales. De este modo, el resultado obtenido de dicha simulación se puede ver en la Figura 6. Tal como puede verse, el motor se conecta a la fuente de tensión continua al segundo de haber empezado la simulación. Desde este momento existe un transitorio de arranque que dura aproximadamente dos segundos en el que las tres variables (corriente, par generado y velocidad) van aumentando hasta alcanzarse el régimen permanente donde se mantendrían constantes siempre y cuando no existiese una perturbación externa como podría ser cambios en la tensión o modificación del par resistente externo.

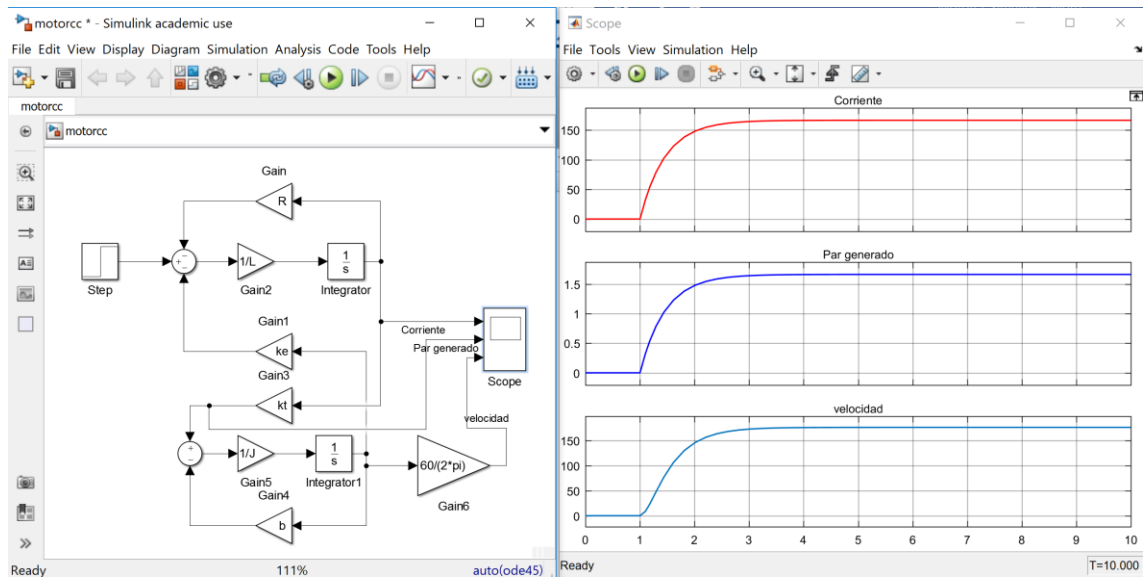


Figura 6: Resultados de la simulación del motor de corriente continua.

## 4.2 Para profundizar – Par resistente externo

En este punto, se propone al alumno que modificase/añadiese los bloques necesarios para incluir en el sistema la presencia de un par resistente externo. Existen distintos tipos de pares resistentes externos que se pueden simular como, por ejemplo, un par resistente constante (el motor siempre arrastra la misma carga), un par resistente que depende de la velocidad del motor (como podría ser el que ofrece una bomba o un ventilador en cuyo caso el par resistente sigue una ecuación cuadrática con la velocidad), un par resistente que varía según unas condiciones prefijadas por la aplicación, etc.

Para ello a continuación se muestra en qué punto de la ecuación diferencial correspondiente a la parte mecánica se insertaría el efecto de un par resistente externo  $T_r$ .

$$T_g - T_f - T_r = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = J \cdot \alpha \quad (8)$$

De la ecuación (8) se puede observar que el par generado menos todos los pares resistentes externos es igual al momento de inercia por la aceleración. De este modo, tal como puede deducirse, mientras el par generado sea mayor que los pares resistentes el motor estará acelerando (transitorio de arranque) mientras que, cuando el par generado sea igual que los pares resistentes la aceleración será nula y por tanto el motor mantendrá una velocidad constante.

## 5 Conclusiones

A lo largo de este objeto de aprendizaje hemos visto como generar el diagrama de bloques necesario para simular el sistema dinámico correspondiente a un motor de corriente continua cuyo comportamiento esta modelizado por un sistema de ecuaciones diferenciales.

Se ha mostrado de manera secuencial como generar el diagrama de bloques necesario para proceder a la simulación del sistema incluyendo objetos para





visualizar las magnitudes más relevantes del motor que, a su vez, permitirían comprobar si el sistema está correctamente modelizado, si los resultados son correctos, coherentes y, lo más importante, permitiría comprobar si el motor cumpliría con las especificaciones de la aplicación donde vaya a ser instalado.

Por último, para profundizar, se ha propuesto la modificación del diagrama de bloques para que incluya la presencia de un par resistente externo. Para ello, se han introducido distintos tipos de pares resistentes presentes en la industria y se ha mostrado como afectaría a la correspondiente ecuación diferencial.

## 6 Bibliografía

### 6.1 Libros:

José Roldán Vilorio: "Motores de corriente continua", Ed. Paraninfo. (2014)

Manuel Cortés Cherta: "Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas – Tomo II Máquinas de corriente continua", Editores técnicos asociados, s.a.

### 6.2 Referencias de fuentes electrónicas:

Mathworks: simulación de sistemas dinámicos:  
<https://es.mathworks.com/discovery/sistemas-dinamicos.html>