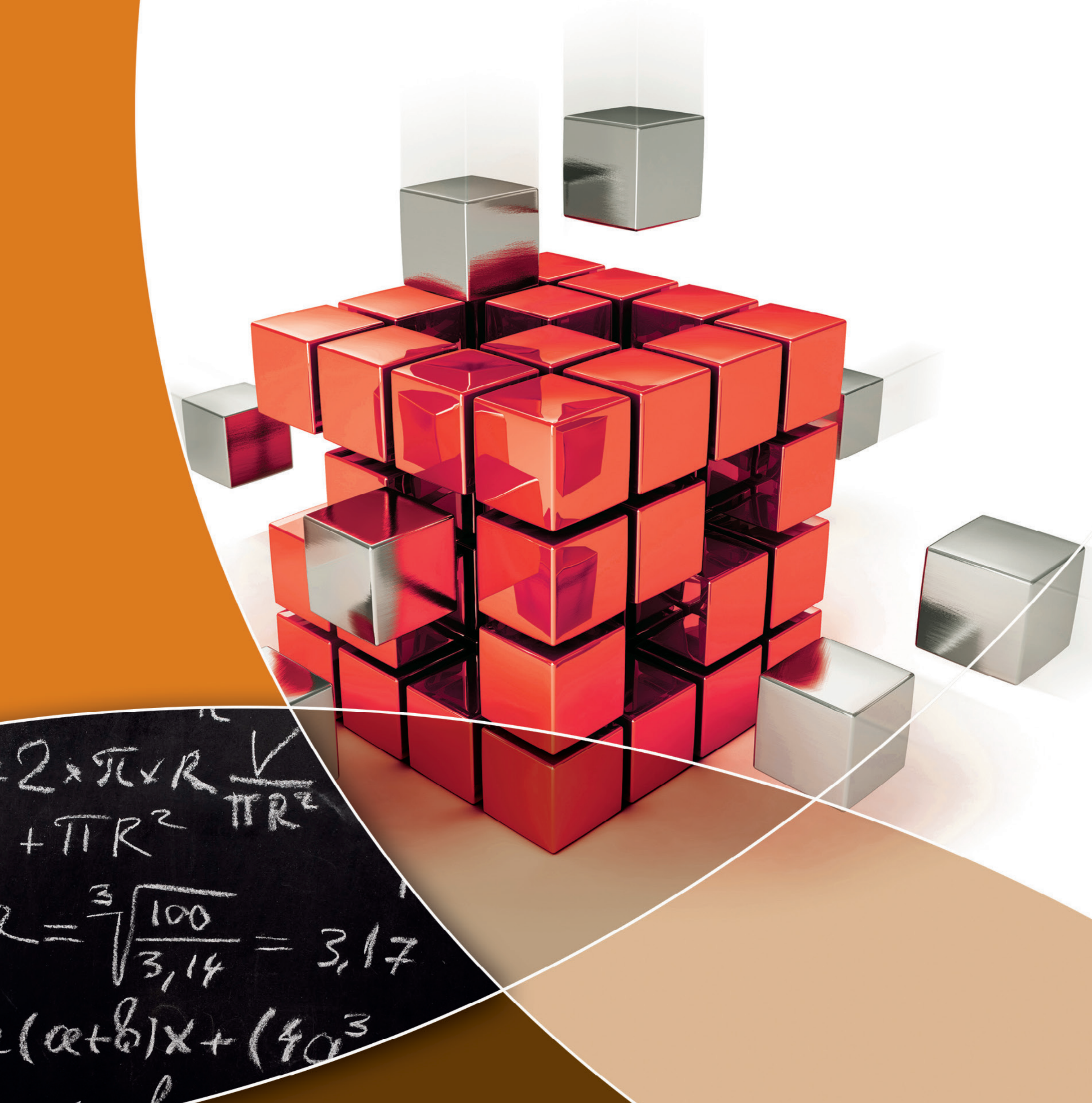
acadèmica

Álgebra matricial

Vicent Estruch Fuster
Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala



EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Presentación

El presente libro contiene la parte de álgebra que los autores han redactado para la asignatura Álgebra matricial y geometría, del Grado en Tecnologías Interactivas, que se imparte en la Escuela Politécnica Superior de Gandia, por primera vez en el curso 2017-2018.

El libro, como es usual en textos matemáticos, expone los resultados con una continuada argumentación, pero en este caso sin apenas demostraciones. No obstante, en letra pequeña se presentan pruebas abreviadas o extensiones de la teoría que el lector puede obviar en una primera lectura.

El libro se ha estructurado en capítulos que contienen varias secciones, y en cada uno de ellos los resultados se ilustran con ejemplos apropiados. Al final de cada capítulo aparece una lista de ejercicios resueltos que podrán poner a prueba la comprensión y adquisición de conocimientos por parte del lector. Estos ejercicios, en ocasiones, complementan la teoría.

Los capítulos que conforman la obra son, en este orden: Teoría de conjuntos, Funciones e interpolación, Sistemas de Numeración, Espacios vectoriales, Matrices, Aplicaciones lineales, Determinantes, Sistemas de ecuaciones lineales y Diagonalización de matrices.

Para la comprensión del texto se requieren conocimientos de álgebra elemental. Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones posteriores.

Los autores

NOTACIÓN

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

$\forall$	Cuantificador universal. Se lee "para todo" o "para cada"
$\exists$	Cuantificador existencial. Se lee "existe"
$\Longleftrightarrow$	Equivalencia proposicional. Se lee "si y sólo si"
sii	Abreviatura de "si y sólo si"
$\Rightarrow$	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee "implica"
$\mid$	Se lee "tal (tales) que"
$:$	Se lee "tal (tales) que"
i.e.	En latín *id est* y se lee "es decir"
$\in$	Símbolo de pertenencia
$\subset$	Símbolo de inclusión
$\cup$	Símbolo de unión
$\cap$	Símbolo de intersección
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
$\mathbb{N}^*$	El conjunto $\mathbb{N}$ sin el cero
$\mathbb{Z}$	El anillo de los números enteros
$\mathbb{Q}$	El cuerpo de los números racionales
$\mathbb{R}$	El cuerpo de los números reales
$\mathbb{C}$	El cuerpo de los números complejos

Índice

Capítulo 1

TEORÍA DE CONJUNTOS

En este capítulo se ofrece una (ingenua) introducción a la teoría de conjuntos que es suficiente para establecer y estudiar los conceptos que se definen a lo largo del texto.

1.1 EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1.1 Conjuntos

Un **conjunto** es una colección de elementos. Los conjuntos suelen denotarse con letras mayúsculas. Cuando se explicitan sus elementos, éstos, sin repetirse, se encierran entre llaves separados por comas. En ciertos contextos se utilizan los términos **sistema**, **colección** y **familia** como sinónimos de conjunto. Así se habla de "familia de conjuntos" en vez de "conjunto de conjuntos" y sistema de vectores en vez de conjunto de vectores.

Designaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente. Por ejemplo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Un **conjunto unitario** es aquél que posee un único elemento. Esta terminología se extiende a conjuntos de dos o más elementos, de manera obvia. Para expresar que un elemento a **pertenece** a un conjunto S (o que está en S) se escribe $a \in S$. Si a no está en S se escribe $a \notin S$. Para expresar que un conjunto A está **contenido** (o **incluido**) en otro B (i.e., todo elemento de A está en B) se escribe $A \subset B$ (o $B \supset A$), en tal caso se dice que A es un **subconjunto** de B. Si A no está incluido en B se escribe $A \not\subset B$.

Se designa por $\emptyset$ al conjunto, denominado **vacío**, que no posee elementos. Todo subconjunto no vacío S posee dos subconjuntos **impropios**: $\emptyset$ y S. Los demás subconjuntos de S se llaman **propios**.

Dos conjuntos A y B son **iguales**, y se escribe $A = B$, cuando poseen los mismos elementos, lo cual sucede sii $A \subset B$ y $B \subset A$.

Un conjunto también se describe a través de una expresión caracterizadora de sus elementos dentro de un contexto (conjunto **referencial**). Así, el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ también se puede escribir de las dos formas siguientes:

$$\{x \in \mathbb{N} : x < 5\} \;\text{ o }\; \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 4\}.$$

1.1.2 Ejemplos

(a) El conjunto V de las vocales es $V = \{a, e, i, o, u\}$ (o también $V = \{e, i, a, o, u\}$ pues el orden de aparición de los elementos es irrelevante).

Se tiene que $\{a, e, o\} \subset V$ pero $\{a, m\} \not\subset V$ pues $m \notin V$.

(b) $-2 \in \mathbb{Z}$ pero $-2 \notin \mathbb{N}$.

(c) Se tienen las inclusiones *numéricas* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Sin embargo las inclusiones *contrarias* no se verifican.

(d) El conjunto *binario* $\{-1, 1\}$ se puede escribir $\{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x^2 \leq 2\}$.

(e) Se tiene que

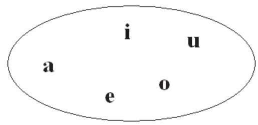
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset.$$

Obsérvese que el conjunto $\emptyset$ viene determinado por una condición imposible de cumplir.

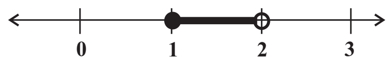
(f) El conjunto $\{0, 2, 4, \dots\}$ que contiene el 0 y los pares es el conjunto $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ por lo que habitualmente se representa por $2\mathbb{N}$. Análogamente si $p \in \mathbb{N}$ y es mayor que 0, $p\mathbb{N}$ representa los naturales múltiples de p, que también suelen denotarse $\dot{p}$.

1.1.3 Representaciones gráficas

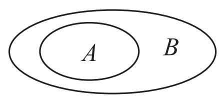
En ocasiones los conjuntos se describen (definen) mediante gráficos. Así, un **diagrama de Venn** es una representación gráfica plana de un conjunto, en la que sus elementos quedan encerrados por una línea, como se muestra en la figura siguiente en la que se representa el conjunto de vocales.



En un **diagrama lineal** los elementos del conjunto son los que resaltan sobre el segmento o la recta donde se representan. Este tipo de representación es interesante cuando se desea entrever un *orden* entre los elementos. En la figura inferior se representa en $\mathbb{R}$ el conjunto I que es el intervalo $[1, 2[$.



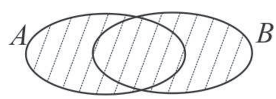
El gráfico siguiente *muestra* que $A \subset B$.



1.1.4 Unión, intersección y complementación de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Se define la **unión** de los conjuntos A y B, y se denota $A \cup B$ (se lee A unión B), como el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

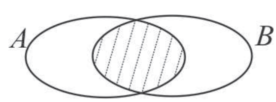


$A \cup B$ es el conjunto rayado.

De esta manera , $A \cup B$ contiene los elementos de A o de B (recordar que la “o” lógica no es excluyente). Este concepto se extiende de forma natural a una familia cualquiera de conjuntos de manera que la unión de éstos está formada por los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos de la familia.

Se define la **intersección** de los conjuntos A y B, que se denota $A \cap B$ (se lee A intersección B), como el conjunto

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



$A \cap B$ es el conjunto rayado.

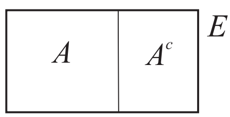
De esta manera, $A \cap B$ contiene los elementos comunes a A y a B. Si A y B no tienen elementos comunes se dice que son **disjuntos**. Al igual que antes este concepto se generaliza a una familia cualquiera de conjuntos.

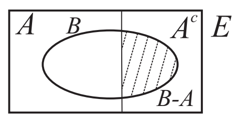
De las definiciones se desprenden las siguientes propiedades inmediatas:

$A \subset A \cup B$,
$A \cap B \subset A$,
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

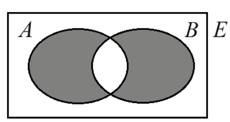
1.1.5 Conjunto complementario y diferencia de conjuntos

Si A y B son conjuntos dentro de un referencial E, se define el **complementario** de A (respecto E), y se denota por A^c (se lee A complementario), como el conjunto formado por los elementos de E que no están en A. De manera más general se define el conjunto $B - A$ (**diferencia** de B y A), como el conjunto de los elementos de B que no están en A. Al hablar de A^c se omite la alusión a E si está implícito en el contexto. Es fácil observar que $B - A = B \cap A^c$. En la siguiente figura $B - A$ es el conjunto rayado.





Se define la **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B, y se denota $A \triangle B$ como $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Este concepto se corresponde con la interpretación de la "o" exclusiva, en lógica. Es obvio que $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.



$A \triangle B$ es la zona sombreada.

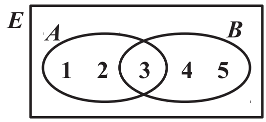
Las siguientes propiedades son inmediatas:

$$E^c = \emptyset, \qquad A^c = B^c \Leftrightarrow A = B, \qquad (A^c)^c = A,$$
$$\emptyset^c = E, \qquad A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c.$$

1.1.6 Ejemplo

Sea el referencial $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ (ver gráfico adjunto).

Entonces: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A^c = \{4, 5, 6\}$, $B^c = \{1, 2, 6\}$, $B - A = \{4, 5\}$ $(= B \cap A^c)$, $A - B = \{1, 2\}$ $(= A \cap B^c)$.



1.1.7 El álgebra de Boole de la teoría de conjuntos

Supongamos que los siguientes conjuntos están definidos en un referencial E. Se verifican las siguientes propiedades (de carácter dual):

Asociativas:
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
Conmutativas:
$A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$.
Distributivas
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $\quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Existencia de neutros:
$A \cup \emptyset = A$, $\quad A \cap E = A$.
Existencia de complementario:
$A \cup A^c = E$, $\quad A \cap A^c = \emptyset$.

Por cumplirse las anteriores propiedades, los conjuntos con las *leyes* de la unión, intersección y complementación constituyen un **álgebra de Boole**.

En un álgebra de Boole se verifican las **leyes de De Morgan** o del complementario:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Puesto que la unión de conjuntos verifica la asociatividad, el uso de paréntesis es innecesario cuando aparece sólo esta operación. Esto mismo ocurre con la intersección.

1.2 CARDINALIDAD DE CONJUNTOS

1.2.1 Partición

Una familia de conjuntos A_1, A_2, …, A_n constituyen una **partición** del conjunto E si dos a dos son disjuntos y, además, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$.

1.2.2 Cardinal de un conjunto

Se denomina **cardinal** del conjunto *finito* A, y se escribe $\mathrm{Cd}\, A$, el número de elementos que contiene A.

Para seguir leyendo haga click aquí