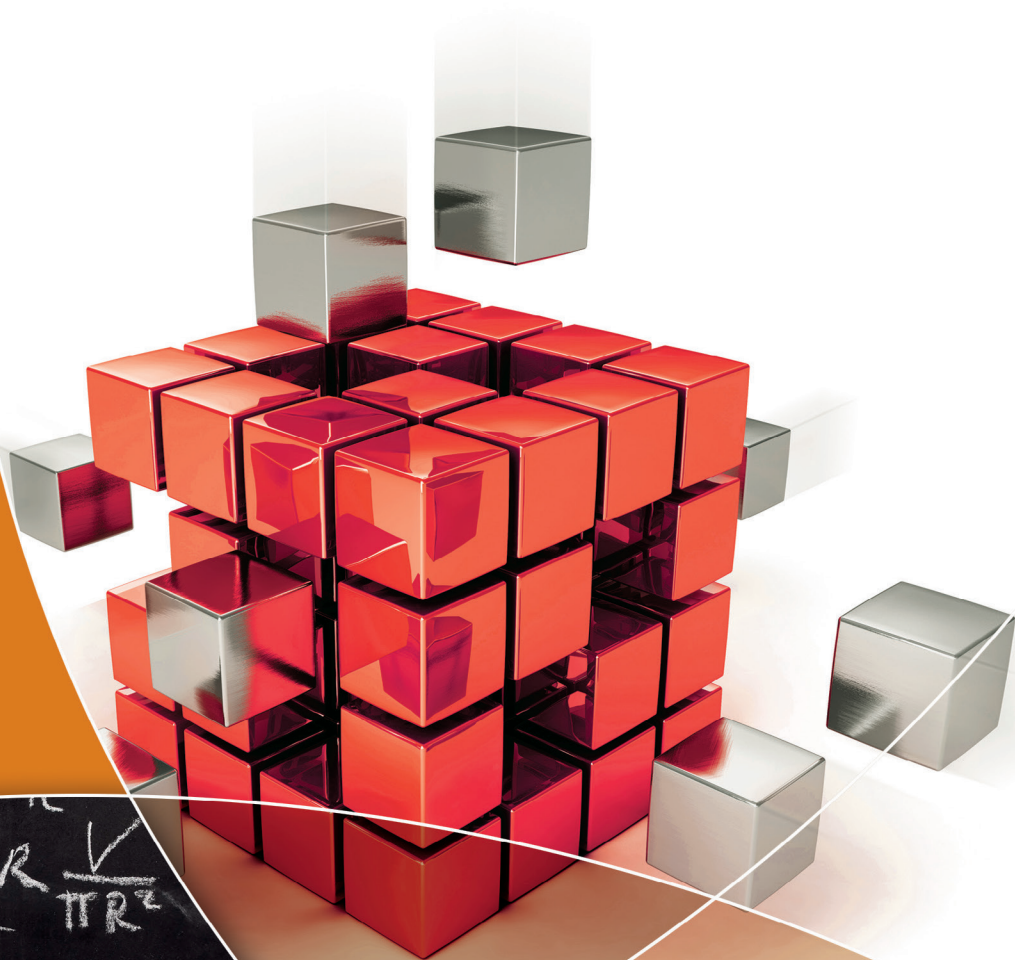




Àlgebra matricial

Vicent Estruch Fuster
Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala



$$2 \times \pi \times R \times \frac{V}{\pi R^2}$$
$$+ \pi R^2$$
$$R = \sqrt[3]{\frac{100}{3,14}} = 3,17$$
$$(a+b)x + (4a^3$$
$$+ 10a^2$$

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Presentación

El presente libro contiene la parte de álgebra que los autores han redactado para la asignatura Álgebra matricial y geometría, del Grado en Tecnologías Interactivas, que se imparte en la Escuela Politécnica Superior de Gandia, por primera vez en el curso 2017-2018.

El libro, como es usual en textos matemáticos, expone los resultados con una continuada argumentación, pero en este caso sin apenas demostraciones. No obstante, en letra pequeña se presentan pruebas abreviadas o extensiones de la teoría que el lector puede obviar en una primera lectura.

El libro se ha estructurado en capítulos que contienen varias secciones, y en cada uno de ellos los resultados se ilustran con ejemplos apropiados. Al final de cada capítulo aparece una lista de ejercicios resueltos que podrán poner a prueba la comprensión y adquisición de conocimientos por parte del lector. Estos ejercicios, en ocasiones, complementan la teoría.

Los capítulos que conforman la obra son, en este orden: Teoría de conjuntos, Funciones e interpolación, Sistemas de Numeración, Espacios vectoriales, Matrices, Aplicaciones lineales, Determinantes, Sistemas de ecuaciones lineales y Diagonalización de matrices.

Para la comprensión del texto se requieren conocimientos de álgebra elemental. Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones posteriores.

Los autores

NOTACIÓN

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

\forall	Cuantificador universal. Se lee “para todo” o “para cada”
\exists	Cuantificador existencial. Se lee “existe”
\iff	Equivalencia proposicional. Se lee “si y sólo si”
sii	Abreviatura de “si y sólo si”
\Rightarrow	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee “implica”
	Se lee “tal (tales) que”
:	Se lee “tal (tales) que”
i.e.	En latín <i>id est</i> y se lee “es decir”
\in	Símbolo de pertenencia
\subset	Símbolo de inclusión
\cup	Símbolo de unión
\cap	Símbolo de intersección
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
\mathbb{N}^*	El conjunto \mathbb{N} sin el cero
\mathbb{Z}	El anillo de los números enteros
\mathbb{Q}	El cuerpo de los números racionales
\mathbb{R}	El cuerpo de los números reales
\mathbb{C}	El cuerpo de los números complejos

Índice

1	TEORÍA DE CONJUNTOS	13
1.1	EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS	13
1.1.1	Conjuntos	13
1.1.2	Ejemplos	14
1.1.3	Representaciones gráficas	14
1.1.4	Unión, intersección y complementación de conjuntos	15
1.1.5	Conjunto complementario y diferencia de conjuntos	16
1.1.6	Ejemplo	16
1.1.7	El álgebra de Boole de la teoría de conjuntos	17
1.2	CARDINALIDAD DE CONJUNTOS	17
1.2.1	Partición	17
1.2.2	Cardinal de un conjunto	17
1.2.3	Ejemplo	18
1.2.4	Producto cartesiano	18
1.2.5	Ejemplos	19
1.2.6	Variaciones con repetición	19
1.2.7	Ejemplo	19
1.3	COMBINATORIA ELEMENTAL	20
1.3.1	Variaciones ordinarias	20
1.3.2	Ejemplo	20
1.3.3	Permutaciones ordinarias	20
1.3.4	Ejemplo	21
1.3.5	Combinaciones ordinarias. Números combinatorios	21
1.3.6	Ejemplo	21
1.4	UN POCO DE HISTORIA	21
1.5	EJERCICIOS RESUELTOS	22
2	FUNCIONES E INTERPOLACIÓN	27
2.1	APLICACIONES	27
2.1.1	Aplicación	27

2.1.2	Ejemplos	28
2.1.3	Clases de aplicaciones	28
2.1.4	Ejemplos	28
2.1.5	Composición de aplicaciones	29
2.1.6	La aplicación identidad I	29
2.1.7	Correspondencia inversa	30
2.1.8	Ejemplo	30
2.1.9	Nota	30
2.1.10	Ejemplo	30
2.1.11	Caracterización de la aplicación inversa	31
2.2	FUNCIONES	31
2.2.1	Función	31
2.2.2	Ejemplo	31
2.2.3	Nota	32
2.2.4	Ejemplo	32
2.2.5	Dominio o campo de existencia de una función	32
2.2.6	Ejemplo	33
2.2.7	Función inversa	33
2.2.8	Ejemplo	33
2.2.9	Composición n -ésima de funciones	34
2.3	REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES	34
2.3.1	Gráfica de funciones continuas	34
2.3.2	Ejemplo	35
2.3.3	Función definida a trozos	35
2.3.4	Ejemplo	35
2.3.5	Funciones discretas	36
2.3.6	Ejemplo	36
2.4	INTERPOLACIÓN	37
2.4.1	Discretización e interpolación	37
2.4.2	Interpolación lineal	37
2.4.3	Ejemplo	38
2.4.4	Interpolación polinómica	38
2.4.5	Ejemplo	39
2.5	REGRESIÓN Y CORRELACIÓN	39
2.5.1	Nube de puntos	39
2.5.2	Ejemplo	40
2.5.3	Líneas de regresión	41
2.5.4	Recta de regresión	41
2.5.5	Ejemplo	42
2.5.6	Cálculo de las rectas de regresión con conceptos estadísticos	43
2.5.7	Ejemplo	44

2.5.8	El coeficiente de correlación lineal	45
2.5.9	Ejemplo	46
2.5.10	Regresión parabólica	46
2.5.11	Regresión exponencial	47
2.6	UN POCO DE HISTORIA	47
2.7	EJERCICIOS RESUELTOS	48
3	SISTEMAS DE NUMERACIÓN	57
3.1	SISTEMA DE NUMERACIÓN	57
3.1.1	Teorema fundamental de la numeración	58
3.1.2	Ejemplo	58
3.1.3	Nota	59
3.1.4	Algoritmo para escribir un número en base b	59
3.1.5	Ejemplo	59
3.1.6	Aritmética con números en base b	59
3.1.7	Ejemplo	60
3.1.8	Regla del producto por la unidad seguida de ceros	60
3.1.9	Ejemplo	60
3.1.10	Expresión de números racionales en base b	60
3.1.11	Ejemplo	60
3.1.12	Productos con el factor b^k en el sistema base b	61
3.1.13	Ejemplo	61
3.2	SISTEMAS DE NUMERACIÓN USADOS EN COMPUTACIÓN	61
3.2.1	El sistema binario	61
3.2.2	Ejemplo	62
3.2.3	Escritura de un decimal en el sistema binario con k cifras exactas	62
3.2.4	Ejemplo	63
3.2.5	Escritura de un decimal en sistema binario	63
3.2.6	Los sistemas octal y hexadecimal	64
3.2.7	Conversión de un número binario a los sistemas octal o hexadecimal	64
3.2.8	Ejemplo	65
3.3	UN POCO DE HISTORIA	65
3.4	EJERCICIOS RESUELTOS	66
4	ESPACIOS VECTORIALES	71
4.1	ESPACIOS VECTORIALES	71
4.1.1	El espacio vectorial \mathbb{R}^n	71
4.1.2	Representaciones geométricas	72
4.1.3	Subespacios vectoriales	73
4.1.4	Subespacios de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	73
4.1.5	Combinaciones lineales	73

4.1.6	Rectas vectoriales en \mathbb{R}^n	74
4.1.7	Ejemplo	75
4.1.8	Interpretaciones geométricas	75
4.1.9	Dependencia lineal	76
4.1.10	Ejemplos	77
4.1.11	Consecuencias	77
4.2	BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL	77
4.2.1	Base de un espacio vectorial	77
4.2.2	Teorema de la dimensión	78
4.2.3	Bases canónicas	78
4.2.4	Teorema de la base incompleta	78
4.3	PROCESO DE REDUCCIÓN DE GAUSS	78
4.3.1	Lema	79
4.3.2	Nota	79
4.3.3	Ejemplo	79
4.3.4	Proceso de reducción de Gauss	80
4.3.5	Ejemplo	80
4.3.6	Suma de subespacios	81
4.3.7	Nota	81
4.3.8	Ejemplo	81
4.4	UN POCO DE HISTORIA	82
4.5	EJERCICIOS RESUELTOS	82
5	MATRICES	87
5.1	EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES	87
5.1.1	Matriz	87
5.1.2	Ejemplos	88
5.1.3	El grupo abeliano $(\mathcal{M}_{m \times n}, +)$	88
5.1.4	El espacio vectorial $\mathcal{M}_{m \times n}$	89
5.1.5	Ejemplos	89
5.1.6	Base de $\mathcal{M}_{m \times n}$	89
5.1.7	Ejemplo	89
5.2	EL ANILLO DE LAS MATRICES CUADRADAS	90
5.2.1	El producto de matrices	90
5.2.2	Ejemplo	90
5.2.3	El anillo de las matrices cuadradas $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$	91
5.3	TIPOS ESPECIALES DE MATRICES	91
5.3.1	Matriz inversible	91
5.3.2	Ejemplos	92
5.3.3	Matrices triangulares	92
5.3.4	Ejemplo	93

5.3.5	Traspuesta de una matriz	93
5.3.6	Ejemplos	93
5.3.7	Nota	93
5.3.8	Propiedades de la matriz traspuesta	94
5.3.9	Otros tipos de matrices	94
5.4	RANGO DE UNA MATRIZ	94
5.4.1	Definición	94
5.4.2	Teorema	94
5.4.3	Ejemplo	94
5.5	MATRICES ELEMENTALES	95
5.5.1	Matrices elementales	95
5.5.2	Ejemplos	95
5.5.3	Cálculo de la inversa de una matriz mediante matrices elementales	96
5.5.4	Ejemplo	96
5.5.5	Teorema	97
5.5.6	Inversas de matrices triangulares	97
5.5.7	Ejemplo	97
5.5.8	Descomposición LU	97
5.5.9	Ejemplo	98
5.5.10	Matrices escalonadas. Descomposición LS	98
5.5.11	Ejemplo	99
5.6	MATRICES POR BLOQUES	100
5.6.1	Matrices por bloques	100
5.6.2	Ejemplo	101
5.7	UN POCO DE HISTORIA	102
5.8	EJERCICIOS RESUELTOS	102
6	APLICACIONES LINEALES	109
6.1	APLICACIONES LINEALES	109
6.1.1	Aplicaciones lineales	109
6.1.2	Propiedades	110
6.1.3	Ejemplos	110
6.1.4	Ejemplo	110
6.1.5	Núcleo	110
6.1.6	Teorema (caracterización de aplicaciones inyectivas)	111
6.1.7	Nota	111
6.1.8	Ejemplo	111
6.1.9	Proposición	112
6.1.10	Proposición	112
6.1.11	Teorema de la dimensión (de aplicaciones lineales)	112
6.1.12	Corolario (idoneidad de las aplicaciones lineales)	112

6.2	MATRICES Y APLICACIONES LINEALES	112
6.2.1	Matriz asociada a una aplicación lineal	112
6.2.2	Ejemplo	114
6.2.3	Rango de una aplicación lineal	114
6.2.4	Ejemplo	114
6.2.5	Matriz de la aplicación identidad I	116
6.2.6	Isomorfismo entre aplicaciones lineales y matrices	116
6.2.7	Nota	117
6.2.8	Proposición	117
6.3	APLICACIONES LINEALES Y MATRICES INVERSIBLES	117
6.3.1	Proposición	117
6.3.2	Nota	117
6.3.3	Proposición	117
6.3.4	Composición de aplicaciones lineales	118
6.3.5	Ejemplo	118
6.3.6	Proposición	118
6.3.7	Teorema	118
6.3.8	Corolario	119
6.4	CAMBIOS DE BASE	119
6.4.1	Expresión matricial del cambio de base en un espacio vectorial	119
6.4.2	Ejemplo	120
6.4.3	Matrices asociadas a una aplicación lineal	121
6.4.4	Nota	122
6.5	UN POCO DE HISTORIA	123
6.6	EJERCICIOS RESUELTOS	123
7	DETERMINANTES	129
7.1	DETERMINANTE DE ORDEN n	129
7.1.1	Signatura de una permutación	129
7.1.2	Determinante de orden n	130
7.1.3	Determinante de orden 3 y de orden 2	131
7.1.4	Ejemplos	131
7.1.5	Propiedades de los determinantes de orden n	132
7.1.6	Ejemplos	133
7.2	DESARROLLO DE UN DETERMINANTE	134
7.2.1	Menor complementario y adjunto	134
7.2.2	Ejemplo	135
7.2.3	Proposición	135
7.2.4	Proposición (desarrollo de un determinante)	135
7.2.5	Proposición (determinante de una matriz triangular)	136
7.2.6	Cálculo práctico de determinantes	136

7.2.7	Ejemplo	136
7.3	MATRIZ INVERSIBLE	137
7.3.1	Proposición	137
7.3.2	Teorema	137
7.3.3	Corolario	138
7.3.4	Nota	138
7.3.5	Proposición	138
7.3.6	Cálculo de la matriz inversa	138
7.3.7	Ejemplo	139
7.3.8	Aplicación al cálculo del rango de una matriz	139
7.3.9	Ejemplo	140
7.4	UN POCO DE HISTORIA	140
7.5	EJERCICIOS RESUELTOS	140
8	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	147
8.1	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	147
8.1.1	Sistemas de ecuaciones lineales	147
8.1.2	Solución de un sistema de ecuaciones lineales	148
8.1.3	Matriz ampliada	149
8.1.4	Proposición	149
8.1.5	Ejemplo	149
8.1.6	Clasificación de sistemas	150
8.1.7	Teorema de Rouché-Fröbenius	150
8.1.8	Ejemplos	151
8.2	RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	153
8.2.1	Regla de Cramer	153
8.2.2	Ejemplos	154
8.2.3	Método de reducción de Gauss	155
8.2.4	Ejemplo	156
8.2.5	Sistema homogéneo	157
8.2.6	Ejemplo	157
8.2.7	Resolución de un sistema de Cramer por descomposición LU	158
8.2.8	Resolución de un sistema por descomposición LS	158
8.2.9	Interpolación polinómica	159
8.2.10	Sistemas sobredeterminados	160
8.3	ECUACIONES DE LOS SUBESPACIOS DE \mathbb{R}^n	161
8.3.1	Ecuaciones vectorial y paramétricas de un subespacio vectorial	161
8.3.2	Nota	161
8.3.3	Ecuaciones de un subespacio vectorial (Eliminación de parámetros)	162
8.3.4	Ejemplo	163
8.4	RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	164

8.4.1	Aproximaciones sucesivas	164
8.4.2	Métodos iterativos. Convergencia	164
8.4.3	Método de Jacobi	165
8.4.4	Método de Gauss-Seidel	166
8.4.5	Nota	166
8.5	UN POCO DE HISTORIA	167
8.6	EJERCICIOS RESUELTOS	168
9	DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES	179
9.1	SUBESPACIOS PROPIOS	179
9.1.1	Introducción	179
9.1.2	Vectores propios	180
9.1.3	Nota	180
9.1.4	Subespacio propio	180
9.1.5	Ejemplo	180
9.1.6	El polinomio característico	180
9.1.7	Unicidad del polinomio característico	181
9.1.8	Ejemplo	182
9.2	DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES	182
9.2.1	Definición	182
9.2.2	Proposición	182
9.2.3	Nota	182
9.2.4	Proposición	183
9.2.5	Ejemplo	183
9.2.6	Teorema (caracterización de los endomorfismos diagonalizables)	184
9.2.7	Ejemplo	184
9.2.8	Nota	184
9.2.9	Matriz de paso	184
9.2.10	Potencia de una matriz	184
9.2.11	Matrices simétricas	185
9.2.12	Nota	185
9.3	UN POCO DE HISTORIA	185
9.4	EJERCICIOS RESUELTOS	185
	BIBLIOGRAFÍA	193
	ÍNDICE DE TÉRMINOS	195

Capítulo 1

TEORÍA DE CONJUNTOS

En este capítulo se ofrece una (ingenua) introducción a la teoría de conjuntos que es suficiente para establecer y estudiar los conceptos que se definen a lo largo del texto.

1.1 EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1.1 Conjuntos

Un **conjunto** es una colección de elementos. Los conjuntos suelen denotarse con letras mayúsculas. Cuando se explicitan sus elementos, éstos, sin repetirse, se encierran entre llaves separados por comas. En ciertos contextos se utilizan los términos **sistema**, **colección** y **familia** como sinónimos de conjunto. Así se habla de “familia de conjuntos” en vez de “conjunto de conjuntos” y sistema de vectores en vez de conjunto de vectores.

Designaremos por \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente. Por ejemplo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \text{ y } \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Un **conjunto unitario** es aquél que posee un único elemento. Esta terminología se extiende a conjuntos de dos o más elementos, de manera obvia. Para expresar que un elemento a **pertenece** a un conjunto S (o que está en S) se escribe $a \in S$. Si a no está en S se escribe $a \notin S$. Para expresar que un conjunto A está **contenido** (o **incluido**) en otro B (i.e., todo elemento de A está en B) se escribe $A \subset B$ (o $B \supset A$), en tal caso se dice que A es un **subconjunto** de B . Si A no está incluido en B se escribe $A \not\subset B$.

Se designa por \emptyset al conjunto, denominado **vacío**, que no posee elementos. Todo subconjunto no vacío S posee dos subconjuntos **impropios**: \emptyset y S . Los demás subconjuntos de S se llaman **propios**.

Dos conjuntos A y B son **iguales**, y se escribe $A = B$, cuando poseen los mismos elementos, lo cual sucede si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Un conjunto también se describe a través de una expresión caracterizadora de sus elementos dentro de un contexto (conjunto **referencial**). Así, el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ también se puede escribir de las dos formas siguientes:

$$\{x \in \mathbb{N} : x < 5\} \quad \text{o} \quad \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 4\}.$$

1.1.2 Ejemplos

- (a) El conjunto V de las vocales es $V = \{a, e, i, o, u\}$ (o también $V = \{e, i, a, o, u\}$ pues el orden de aparición de los elementos es irrelevante).

Se tiene que $\{a, e, o\} \subset V$ pero $\{a, m\} \not\subset V$ pues $m \notin V$.

- (b) $-2 \in \mathbb{Z}$ pero $-2 \notin \mathbb{N}$.

- (c) Se tienen las inclusiones *numéricas* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Sin embargo las inclusiones *contrarias* no se verifican.

- (d) El conjunto *binario* $\{-1, 1\}$ se puede escribir $\{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x^2 \leq 2\}$.

- (e) Se tiene que

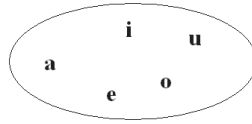
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset.$$

Obsérvese que el conjunto \emptyset viene determinado por una condición imposible de cumplir.

- (f) El conjunto $\{0, 2, 4, \dots\}$ que contiene el 0 y los pares es el conjunto $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ por lo que habitualmente se representa por $2\mathbb{N}$. Análogamente si $p \in \mathbb{N}$ y es mayor que 0, $p\mathbb{N}$ representa los naturales múltiplos de p , que también suelen denotarse $p\dot{\mathbb{N}}$.

1.1.3 Representaciones gráficas

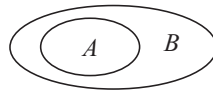
En ocasiones los conjuntos se describen (definen) mediante gráficos. Así, un **diagrama de Venn** es una representación gráfica plana de un conjunto, en la que sus elementos quedan encerrados por una línea, como se muestra en la figura siguiente en la que se representa el conjunto de vocales.



En un **diagrama lineal** los elementos del conjunto son los que resaltan sobre el segmento o la recta donde se representan. Este tipo de representación es interesante cuando se desea entrever un *orden* entre los elementos. En la figura inferior se representa en \mathbb{R} el conjunto I que es el intervalo $[1, 2[$.



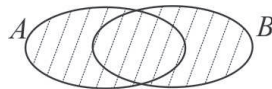
El gráfico siguiente *muestra* que $A \subset B$.



1.1.4 Unión, intersección y complementación de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Se define la **unión** de los conjuntos A y B , y se denota $A \cup B$ (se lee A unión B), como el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

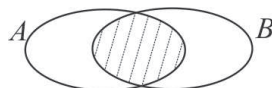


$A \cup B$ es el conjunto rayado.

De esta manera, $A \cup B$ contiene los elementos de A o de B (recordar que la “o” lógica no es excluyente). Este concepto se extiende de forma natural a una familia cualquiera de conjuntos de manera que la unión de éstos está formada por los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos de la familia.

Se define la **intersección** de los conjuntos A y B , que se denota $A \cap B$ (se lee A intersección B), como el conjunto

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



$A \cap B$ es el conjunto rayado.

De esta manera, $A \cap B$ contiene los elementos comunes a A y a B . Si A y B no tienen elementos comunes se dice que son **disjuntos**. Al igual que antes este concepto se generaliza a una familia cualquiera de conjuntos.

De las definiciones se desprenden las siguientes propiedades inmediatas:

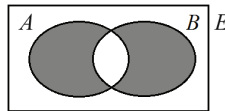
$$\begin{aligned} A &\subset A \cup B, \\ A \cap B &\subset A, \\ A \subset B &\Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \end{aligned}$$

1.1.5 Conjunto complementario y diferencia de conjuntos

Si A y B son conjuntos dentro de un referencial E , se define el **complementario** de A (respecto E), y se denota por A^c (se lee A complementario), como el conjunto formado por los elementos de E que no están en A . De manera más general se define el conjunto $B - A$ (**diferencia** de B y A), como el conjunto de los elementos de B que no están en A . Al hablar de A^c se omite la alusión a E si está implícito en el contexto. Es fácil observar que $B - A = B \cap A^c$. En la siguiente figura $B - A$ es el conjunto rayado.



Se define la **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B , y se denota $A \Delta B$ como $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Este concepto se corresponde con la interpretación de la “o” exclusiva, en lógica. Es obvio que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.



$A \Delta B$ es la zona sombreada.

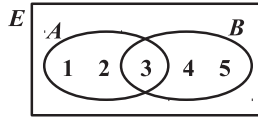
Las siguientes propiedades son inmediatas:

$$\begin{aligned} E^c &= \emptyset, & A^c &= B^c \Leftrightarrow A = B, & (A^c)^c &= A, \\ \emptyset^c &= E, & A \subset B &\Leftrightarrow B^c \subset A^c. \end{aligned}$$

1.1.6 Ejemplo

Sea el referencial $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ (ver gráfico adjunto).

Entonces: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A^c = \{4, 5, 6\}$, $B^c = \{1, 2, 6\}$, $B - A = \{4, 5\}$ ($= B \cap A^c$), $A - B = \{1, 2\}$ ($= A \cap B^c$).



1.1.7 El álgebra de Boole de la teoría de conjuntos

Supongamos que los siguientes conjuntos están definidos en un referencial E . Se verifican las siguientes propiedades (de carácter dual):

Asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Distributivas

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Existencia de neutros:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap E = A.$$

Existencia de complementario:

$$A \cup A^c = E, \quad A \cap A^c = \emptyset.$$

Por cumplirse las anteriores propiedades, los conjuntos con las *leyes* de la unión, intersección y complementación constituyen un **álgebra de Boole**.

En un álgebra de Boole se verifican las **leyes de De Morgan** o del complementario:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Puesto que la unión de conjuntos verifica la asociatividad, el uso de paréntesis es innecesario cuando aparece sólo esta operación. Esto mismo ocurre con la intersección.

1.2 CARDINALIDAD DE CONJUNTOS

1.2.1 Partición

Una familia de conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n constituyen una **partición** del conjunto E si dos a dos son disjuntos y, además, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$.

1.2.2 Cardinal de un conjunto

Se denomina **cardinal** del conjunto *finito* A , y se escribe $\text{Cd}A$, el número de elementos que contiene A .

Para seguir leyendo haga click aquí