

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR DE GANDIA

Master en Ingeniería Acústica

---



UNIVERSIDAD  
POLITECNICA  
DE VALENCIA



ESCUELA POLITECNICA  
SUPERIOR DE GANDIA

# SIMULACIÓN DE TEJIDOS VEGETALES MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS

***TESIS DE MASTER***

Autor:

**Noé Jiménez González**

Director/es:

***D. Francisco Camarena Femenía***

***D. Javier Redondo Pastor***

***GANDIA, 2009***

# **SIMULACIÓN DE TEJIDOS VEGETALES MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS**

*Autor:* Noé Jiménez González

*Director1:* Francisco Camarena Femenía

*Director2:* Javier Redondo Pastor

## *Resumen*

En los últimos años se han desarrollado múltiples técnicas para la caracterización ultrasónica de productos hortofrutícolas en procesos postcosecha. Todas ellas han detectado parámetros acústicos macroscópicos comunes: una baja velocidad de propagación y una gran absorción. El presente trabajo presenta un modelo numérico para la simulación acústica de tejidos vegetales en dominio temporal. Dicho modelo describe correctamente las especiales características de propagación de las ondas detectadas experimentalmente en estos tejidos biológicos, poniendo de relieve la necesidad de utilizar características elásticas dependientes de la frecuencia, en concreto el módulo de Young dinámico. Por otro lado, el trabajo recopila diferentes métodos numéricos basados en diferencias finitas en dominio temporal para desarrollar simulaciones acústicas en medios heterogéneos, describiendo su implementación en los sistemas de coordenadas cartesianas, polar, cilíndrico y esférico.

## *Abstract*

In recent years many techniques have been developed for ultrasonic characterization of fruit and vegetables in postharvest processes. All have found common macroscopic acoustic parameters: a slow propagation speed and a large absorption. This paper presents a numerical model for simulating acoustic plant tissues in time domain. This model correctly describes the special characteristics of wave propagation experimentally detected in these biological tissues, emphasizing the need for elastic frequency dependent characteristics: the dynamic Young's modulus. In addition, work is a compilation of different numerical methods for acoustic simulations in heterogeneous media, describing its implementation in cartesian, polar, cylindrical and spherical coordinate systems.

Autor: Noé Jiménez González, email: [nojigon@epsg.upv.es](mailto:nojigon@epsg.upv.es)

Fecha de entrega: 04-12-2009

**Índice**

<b>I. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>5</b>
<b>II. CÍTRICOS .....</b>	<b>6</b>
II. 1.    Citricultura: la situación actual .....	6
II. 2.    Morfología del fruto.....	7
II. 3.    Métodos para el control de calidad postcosecha de naranjas .....	8
II. 3. a.    Fisiología postcosecha.....	8
II. 3. b.    Tecnología postcosecha: control de calidad.....	9
<b>III. CARACTERIZACIÓN ULTRASÓNICA DE TEJIDOS VEGETALES.....</b>	<b>13</b>
III. 1.    Dispositivos ultrasónicos para la caracterización de frutas y hortalizas .....	13
III. 2.    Métodos numéricos para la caracterización de frutas y hortalizas .....	16
<b>IV. MODELOS DE PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN MEDIOS HETEROGÉNEOS EN DOMINIO TEMPORAL.....</b>	<b>18</b>
IV. 1.    Modelo lineal de primer orden para fluidos.....	18
IV. 2.    Modelo lineal de primer orden para sólidos .....	18
IV. 3.    Modelos de propagación en medios porosos .....	22
IV. 3. a.    Modelo propuesto por Zwikker-Konsten .....	22
IV. 3. b.    Modelo propuesto por Biot .....	23
IV. 3. c.    Modelo propuesto por Wilson et al. ....	24
IV. 4.    Modelo de atenuación en sólidos.....	25
IV. 4. a.    Primera aproximación .....	25
IV. 4. b.    Perdidas viscoelásticas .....	26
<b>V. DISCRETIZACIÓN DE LOS MODELOS EN DIFERENCIAS FINITAS .....</b>	<b>28</b>
V. 1.    Aproximación de la derivada mediante diferencias finitas .....	28
V. 1. a.    Diferencias finitas centradas de segundo orden .....	28
V. 1. b.    Diferencias finitas centradas de cuarto orden .....	29
V. 1. c.    Cálculo de la segunda derivada (segundo orden).....	30
V. 2.    Introducción al método FDTD .....	31
V. 2. a.    Estructura de un algoritmo FDTD.....	31
V. 2. b.    Notación.....	32
V. 3.    Aplicación del método FDTD al modelo de acústica de fluidos.....	33
V. 3. a.    2D Fluidos, Sistema de coordenadas cartesiano .....	33
V. 3. b.    Estabilidad y dispersión.....	34
V. 4.    Aplicación del método FDTD al modelo de sólidos .....	35
V. 4. a.    2D Sólidos, Sistema de coordenadas cartesiano.....	36
V. 4. b.    Estabilidad y dispersión.....	37
V. 5.    Aplicación del método FDTD al modelo de sólidos con pérdidas.....	38
<b>VI. CONDICIONES DE CONTORNO ABSORBENTES .....</b>	<b>40</b>
VI. 1.    ABC, Metodología analítica .....	40
VI. 2.    PML, perfectly matched layer .....	41
VI. 2. a.    Implementación de las PML para el modelo de fluidos.....	42
VI. 2. b.    Implementación de las PML para el modelo de sólidos.....	45

VI. 2. c.	<i>Implementación de las PML para el modelo de sólidos con pérdidas</i> .....	48
VI. 2. d.	<i>Implementación de las PML en sistemas de coordenadas curvilíneos</i> .....	48
<b>VII. MODELO NUMÉRICO PROPUESTO PARA LA SIMULACIÓN DE TEJIDOS VEGETALES</b>		<b>49</b>
VII. 1.	Simulación con módulos de elasticidad estáticos.....	49
VII. 2.	Simulación con módulos de elasticidad dinámicos .....	49
VII. 3.	Coste computacional .....	51
<b>VIII. RESULTADOS</b> .....		<b>52</b>
<b>IX. CONCLUSIONES</b> .....		<b>57</b>
<b>X. AGRADECIMIENTOS</b> .....		<b>57</b>
<b>XI. REFERENCIAS</b> .....		<b>57</b>
<b>XII. Anexos</b> .....		<b>61</b>
XII. 1.	Implementación del método FDTD en el modelo de fluidos .....	61
XII. 1. a.	<i>3D, Sistema de coordenadas cartesianas</i> .....	61
XII. 1. b.	<i>2D, Sistema de coordenadas polares</i> .....	63
XII. 1. c.	<i>3D, Sistema de coordenadas cilíndrico</i> .....	65
XII. 1. d.	<i>3D, Sistema de coordenadas esférico</i> .....	68
XII. 2.	Implementación del método FDTD en el modelo de sólidos .....	71
XII. 2. a.	<i>3D, Sistema de coordenadas cartesianas</i> .....	71
XII. 2. b.	<i>2D, Sistema de coordenadas polar</i> .....	75
XII. 2. c.	<i>3D, Sistema de coordenadas cilíndrico</i> .....	77
XII. 2. d.	<i>3D, Sistema de coordenadas esférico</i> .....	80

## I. INTRODUCCIÓN

Hasta el momento, la propagación de ondas acústicas en tejidos vegetales ha sido estudiada mediante técnicas experimentales. Así, tan solo conocemos ciertas características macroscópicas de los fenómenos existentes en la dinámica de estos medios heterogéneos a frecuencias ultrasónicas como son la velocidad de propagación y la atenuación de la onda al atravesar un cierto tejido. La solución analítica de estos problemas de propagación en medios heterogéneos es siempre la opción más precisa, pero solo es posible para geometrías sencillas que en la mayoría de casos se alejan de la realidad. Así, la alternativa es optar por una solución aproximada del problema obtenida mediante métodos numéricos.

En este trabajo se pretende diseñar un modelo numérico para la propagación de ondas elásticas en tejidos vegetales que se ajuste a las características de propagación medidas experimentalmente. Así, este modelo puede revelar parte de la naturaleza de los fenómenos acústicos en dichos medios biológicos, ayudando a la comprensión de sus características. Ambos aspectos son necesarios para el desarrollo de nuevas técnicas acústicas de caracterización de medios biológicos en campos como la imagen médica, ensayos no destructivos en ingeniería, procesado de alimentos, etc.

Como último objetivo, este trabajo pretende también hacer una recopilación de los modelos más comunes para la propagación de ondas acústicas y elásticas en medios heterogéneos y su implementación en diferencias finitas en dominio de tiempos. En dicha recopilación se desarrollan los modelos numéricos en coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas con motivo de servir de referencia a trabajos posteriores.

Los métodos numéricos implementados se basan en diferencias finitas en dominio temporal (FDTD). Dichas aplicaciones numéricas serán implementadas para distintos modelos físicos de medios heterogéneos: En medios fluidos, sólidos elásticos, sólidos con pérdidas y descriptivamente en sólidos viscoelásticos y medios porosos.

## II. CÍTRICOS

### II. 1. CITRICULTURA: LA SITUACIÓN ACTUAL

Los cítricos son una parte indispensable de la dieta humana, así como una importante fuente de fibra, vitaminas, minerales y muchos otros componentes importantes para la salud humana (Hui, 2006). Se cultiva por sus frutos, de agradable sabor y sin semillas, que se consumen preferentemente en fresco, aunque también se comercializan en forma de zumo (concentrado, fresco, pasteurizado, etc), mermeladas o jaleas. Así, el cultivo de cítricos tiene un gran impacto comercial, agrícola, económico y social a nivel mundial. Actualmente la citricultura representa la mayor producción agrícola de frutas en cuanto a toneladas de producción (FAO09), (Fig. 1). El cultivo de cítricos mundial está liderado por Brasil, aunque en los últimos años China se presenta como un gran competidor. Después de Estados Unidos, España ocupa el 4º puesto con una producción en 2007 de 5,1 millones de toneladas de cítricos (Fig. 2). El 51% de la producción total en nuestro país es de naranjas, el 38% de clementinas y el 10% de limones.

### PRODUCCIÓN MUNDIAL DE FRUTAS

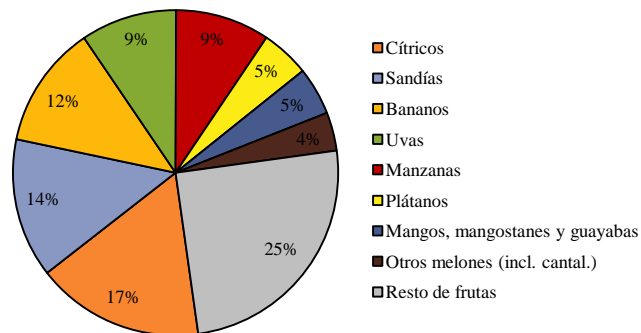


Fig. 1. Comparativa de la producción mundial de frutas,(FAO09)

### PRODUCCIÓN MUNDIAL DE CÍTRICOS

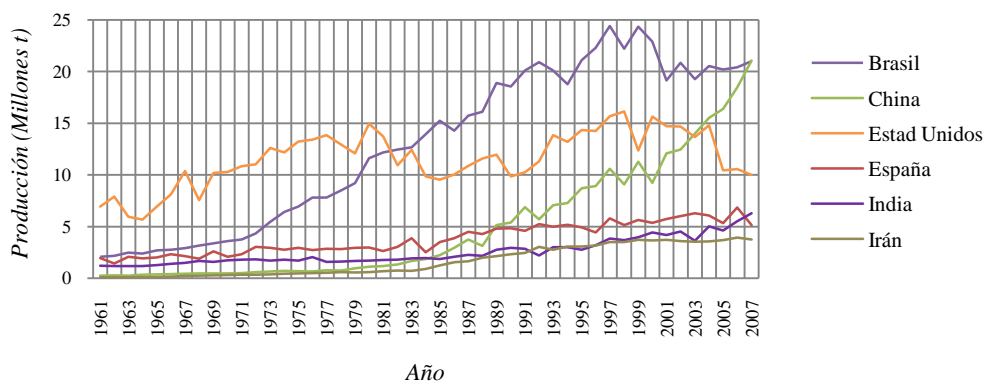


Fig. 2. Principales países productores de cítricos, (FAO09)

La mayor parte de la producción de cítricos se cultiva en la comunidad valenciana, teniendo una indicación geográfica protegida denominada *cítricos valencianos*(Con09). En dicha denominación

se incluyen las variedades más cultivadas así como otras de especial interés tanto por factores históricos, biológicos y culturales. Las tres variedades más cultivadas en 2008 en la comunidad valenciana son las naranjas Navelina y Lane Late y la clementina Clementules. Además, se cultivan muchas otras variedades de cítricos entre las que podemos destacar Valencia Late, Washington Navel, Orogrande, Nova, Marisol, Ortanique, Clemenpons, Hernandina, Salustiana y otras 24 variedades con menos volumen de producción (Con09).

## II. 2. MORFOLOGÍA DEL FRUTO

El análisis de la estructura del fruto es necesario para conocer la distribución de las diferentes zonas heterogéneas en la naranja. Describiremos así las propiedades físicas de los tejidos que la componen como densidad y elasticidad, además de otros parámetros que describen la propagación de ondas mecánicas en dichas frutas. Así, centraremos el estudio de la anatomía y morfología del fruto en la especie vegetal *Citrus Sinensis* (L.) Osb. del género *Citrus*, familia *Rutaceae*, o comúnmente conocida como naranjo dulce.

El fruto de la naranja dulce es una baya que toma el nombre de hesperidio (Fig. 3). En él se distinguen varias zonas claramente diferenciadas por sus funciones biológicas y por su naturaleza física. En la parte más exterior del fruto se encuentra la corteza exterior (exocarpo) llamada flavedo. Dicha capa presenta una estructura sólida con un alto contenido en agua, es del orden de unos pocos milímetros en el fruto maduro y toma el color naranja característico del fruto. Está compuesta por una epidermis de unas pocas filas de células y una hipodermis en cuyo interior existen multitud de vesículas de aceite de unos 0,5 mm de diámetro (Fig. 3). Hacia el interior se encuentra otra capa claramente diferenciada, el mesocarpo, que en la naranja toma el nombre de albedo. Es una estructura sólida porosa de color blanco del orden de unos 5 mm, en cuyo interior se encuentran gases debidos a la respiración del fruto (Fig. 3). La porosidad del flavedo aumenta hacia el interior de la fruta. El endocarpo está compuesto de la pulpa y presenta tricomas con jugo. Dichos gajos se encuentran unidos por una columna central de características mecánicas similares a las del albedo (Fig. 3).

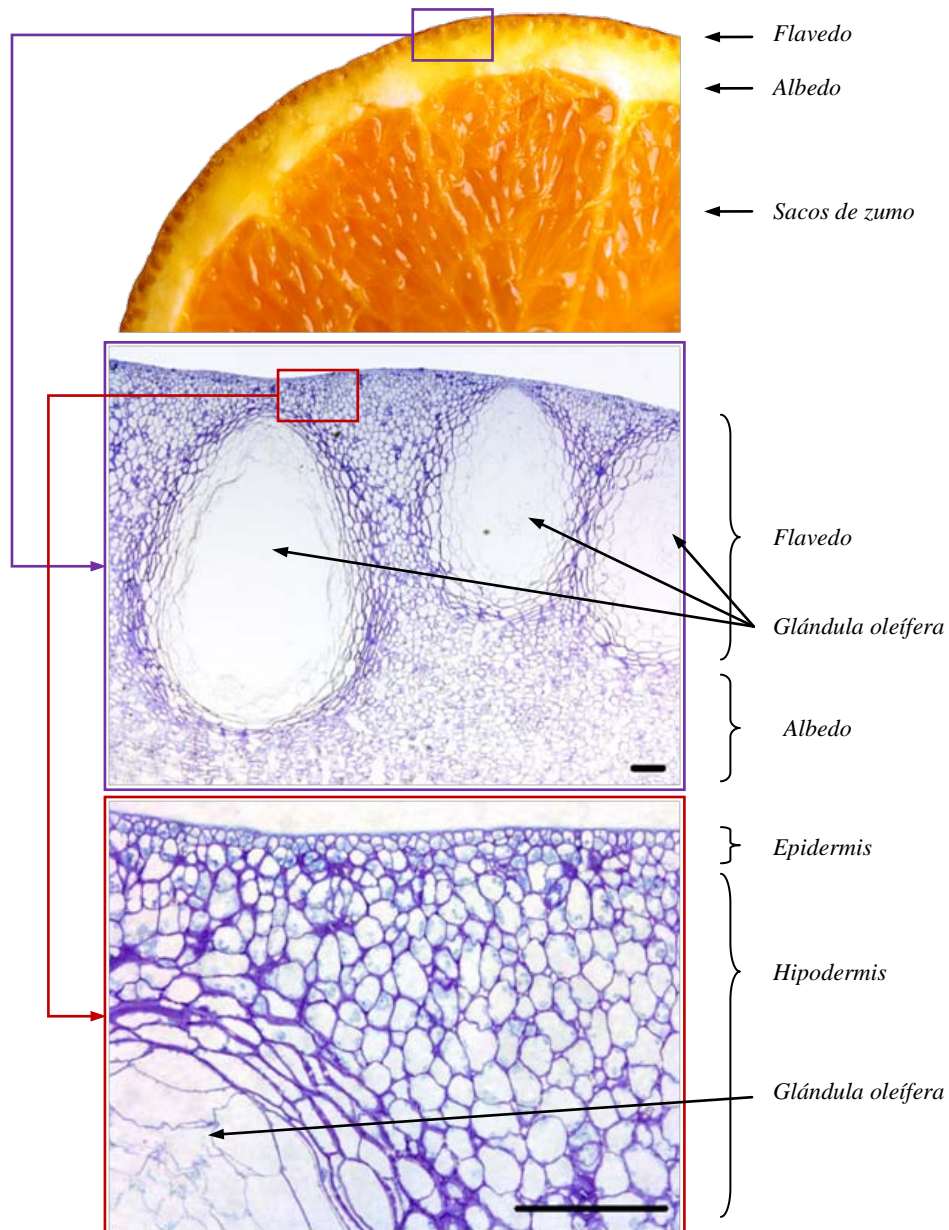


Fig. 3. Anatomía de la corteza de la naranja, variedad Navelina. Fotografías tomadas mediante histología, barras 150  $\mu\text{m}$  (Lindhout, 2007).

Como podemos apreciar, el fruto de la naranja está compuesto por tejidos vegetales de estructura compleja, constituidos principalmente por 80 a 85 % de agua y aceites en glándulas localizadas, existen espacios intercelulares en el que se confinan gases, La composición total de sólidos es de un 12 a 15 %, así como de entre un 5 a 7 % de ácido cítrico dependiendo de la especie.

### II. 3. MÉTODOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD POSTCOSECHA DE NARANJAS

#### II. 3. a. Fisiología postcosecha

Para la descripción de las técnicas de control de calidad postcosecha de productos vegetales es necesario caracterizar la fisiología postcosecha de los frutos. La fisiología describe los procesos



que desarrollan los vegetales después de ser separados de la planta, puesto que estos siguen aún vivos después de ser cosechados. La fruta cosechada continúa respirando, madurando y en algunos casos iniciando procesos de senescencia (sobremadurez), lo que implica cambios fisiológicos, bioquímicos y estructurales que son específicos de cada especie. Asimismo, el producto cosechado está constantemente expuesto a la pérdida de agua debido a la transpiración y a otros fenómenos fisiológicos y ambientales.

Podemos clasificar en función de indicadores físico-químicos los cambios que sufre el fruto como:

- *Firmeza*: cambios en el metabolismo de la pared celular, degradación.
- *Color*: síntesis de carotenoides y otros pigmentos, degradación de clorofilas.
- *Sabor*: aumento de azúcares/hidrólisis de almidón, disminución de ácidos.
- *Aroma*: Síntesis de compuestos volátiles, metabolitos secundarios.
- Respiración y tasa de producción de etileno.

### II. 3. b. *Tecnología postcosecha: control de calidad*

La tecnología postcosecha trata de mantener la calidad del producto vegetal durante todo el proceso de comercialización ya que dichos productos biológicos son perecederos. Así, la tecnología postcosecha tratará por un lado de monitorizar los procesos fisiológicos existentes en el fruto, y por otro de buscar tratamiento a los problemas detectados como pueden ser el prolongar el tiempo de conservación, ralentizar el proceso de maduración post-cosecha, inhibir el crecimiento de agentes patógenos, etc.

Existen múltiples técnicas para la monitorización de la calidad de productos hortofrutícolas y cada una de ellas se basa en la medición de un parámetro físico-químico en busca de encontrar una correlación con algún índice fisiológico como los mostrados anteriormente. Los índices más comunes medidos en la tecnología postcosecha de frutas son:

#### a) *Índices físicos de calidad postcosecha*

- ***Tamaño y volumen***: El calibre de la naranja es el índice más simple de todos por su facilidad de medición en los procesos postcosecha, se tienen en cuenta los diámetros longitudinales y transversales que varían en función de la variedad. Aún es tomado como criterio de calidad, el tamaño de la fruta no es un índice objetivo del estado del fruto ya que guarda una escasa relación con la madurez de la fruta, dependiendo más del estado nutricional de la planta (Ladaniya, 2008).
- ***Masa***: La medida de la masa se mide a intervalos regulares después de la cosecha y es útil sobre todo para estimar la pérdida de humedad de ésta durante el almacenamiento, siendo un indicador del estado del fruto. La masa de la naranja y sus variaciones guardan una relación clara con el porcentaje de zumo (Ladaniya, 2008).

- **Porcentaje de zumo:** A partir de la medida del contenido de zumo al exprimir la fruta se puede obtener el porcentaje de zumo como el cociente entre éste y la masa total de la fruta. El porcentaje disminuye con el tiempo postcosecha y dichas pérdidas están altamente relacionadas con la pérdida de humedad.
- **Espesor de la corteza:** Se suele medir pelando el fruto, no cortándolo. Por supuesto varía en función de la variedad pero es un buen indicador del estado de hidratación del fruto.
- **Firmeza:** La firmeza es un importante índice del estado fisiológico del fruto, además de guardar una estrecha relación con la calidad del producto para el consumo. Se puede medir la resistencia a la penetración, a la compresión, a impacto y por medios acústicos.
  - **Penetrometría:** Cuando el fruto se vuelve blando, la firmeza de este disminuye, por lo que podemos medir la firmeza por medio de la resistencia a la penetración de la piel. El ensayo más empleado es el test de firmeza Magness-Taylor. Así, podemos medir la fuerza necesaria para romper la epidermis y atravesar la glándula de aceite de la corteza de las naranjas. Cuando usamos penetrometría para medir la firmeza necesitamos conocer el tipo de instrumento, las dimensiones y geometría de la sonda, la profundidad de penetración y la tasa o velocidad de carga (Ladaniya, 2008).



Fig. 4. Penetrómetro común empleado para el test Magness-Taylor

- **Ensayos esfuerzo-deformación:** La limitación de la penetrometría viene cuando existe en el fruto una rápida pérdida de humedad debido a condiciones atmosféricas calurosas y secas. Si esto ocurre la piel se seca rápido y se vuelve mucho más firme, por lo que el test de penetración puede ofrecer resultados erróneos, ya que la firmeza disminuye con el tiempo (Ladaniya, 2008). Por ello Abbott (Abbott, 1999) sugirió medir la firmeza por medio de test de compresión. Actualmente existe una recomendación internacional seguida por la mayoría de ensayos recogidos en la bibliografía para productos hortofrutícolas de forma convexa (ASAE Standards, 95). Así, se puede estimar la firmeza de la fruta como la fuerza necesaria para comprimir la fruta una distancia concreta. Así, se sitúa la naranja entre dos placas de metal y sobre una de ellas se carga una fuerza a velocidad constante hasta comprimir unos milímetros la fruta, de manera que la fuerza es proporcional a la firmeza (Singh, y otros, 2006). De la misma manera

también es común realizar ensayos de elasticidad transversal, de relajación y otros ensayos mecánicos similares a los practicados en sólidos elásticos.

- **Métodos acústicos:** Se puede estimar la firmeza de frutas por medios sónicos en función de la detección de resonancias acústicas en el espectro audible, aunque en el caso de las naranjas estos métodos no han sido todavía aplicados (Olmo, y otros, 2000). En el caso de usar frecuencias ultrasónicas, se ha propuesto la medida de la velocidad de propagación y la atenuación de la onda en la corteza de la fruta como indicador de la firmeza de la naranja, aunque este método está en desarrollo (Camarena, y otros, 2007).
- **Colorimetría:** Se realiza por medio de dispositivos ópticos para la medida de color. Los pigmentos de color verde de la naranja (clorofila) van desapareciendo en el proceso de maduración, emergiendo otros denominados carotenoides que le dan al fruto su color naranja característico (Olmo, y otros, 2000). Ya que la naranja es un fruto no climatérico (solo madura en el árbol), la producción de carotenoides se puede acelerar aplicando desverdización en una atmósfera modificada con etileno sin modificar los procesos de maduración interna del fruto (Jiménez-Cuesta, y otros, 1981). También para determinados procesos se realiza colorimetría de los sacos de zumo. Existen en el mercado desde sencillos colorímetros portables hasta instrumentos científicos de alta precisión.
- **Brillo:** La piel de la naranja se distingue por poseer un brillo característico debido a su corteza rugada. Existen instrumentos ópticos para medir esta índice de calidad mediante la reflexión de la luz incidente (Ladaniya, 2008).

b) *Índices químicos de calidad postcosecha*

- **Acidez total titulable:** Se determina mediante medidores de pH. La acidez de la naranja se debe fundamentalmente a los ácidos cítricos, aunque también hay pueden existir cantidades ínfimas de otros ácidos. El contenido de ácido es alto cuando comienza la maduración de los frutos y decrece a medida que ésta avanza (Ladaniya, 2008).
- **Sólidos solubles totales (SST):** En los frutos de los cítricos, entre el 75 y el 85% del total de sólidos solubles son azúcares, además de ácido cítrico y sus sales, compuestos de nitrógeno y demás sustancias solubles. El total de SST se mide en °Brix y normalmente está entre 5 y 15 °Brix. Los SST se miden por medio de un refractómetro que se basa en el principio de la refracción de la luz para la medición de concentraciones de sustancias en soluciones acuosas. Así, el ángulo de refracción muestra la concentración de los sólidos disueltos en el líquido (Ladaniya, 2008).
- **Relación SST/Acidez:** Ya que el sabor de la naranja viene determinado por la relación de SST con la acidez más que por la magnitud de cada uno de ellos, a menudo se usa este cociente como índice de calidad postcosecha. Así, se considera óptima una relación de

10:1 SST/acidez. Este índice se usa también como medida de la madurez en la fase de cosecha.

c) *Índices fisiológicos de calidad postcosecha*

- **Tasa de respiración:** La propia respiración del fruto está relacionada con los procesos metabólicos de este y guarda una estrecha relación con el tiempo de vida útil del fruto. Se puede medir mediante analizadores de infrarrojos en función de los mg de CO<sub>2</sub> producidos por hora y por kg de fruta y es importante su control sobre todo en procesos como atmósferas modificadas (Ladaniya, 2008).
- **Tasa de producción de etileno:** Todas las frutas producen esta hormona vegetal. Los cítricos son frutos no climatéricos y por tanto producen poca cantidad de etileno en la maduración ( $<0.1\mu\text{L}/\text{kg}\cdot\text{h}$  a 20°C) (Ladaniya, 2008). Aún así, pueden ser medidos con mucha precisión mediante cromatografía de gases o con menos pero con una mayor aceptación comercial por medio de detectores electroquímicos o simplemente reactores químicos portátiles.



Fig. 5. Colorímetro portable, medidor de brillo (glossmeter TRI gloss BYK) y cromatógrafo de gases

d) *Otros ensayos de calidad*

- Se pueden analizar los aspectos internos de los frutos mediante técnicas electromagnéticas, desde el espectro visible (colorimetría común) hasta rayos-X y tomografía (Bellon, 1993), así como por resonancia magnética (Chen, y otros, 1989) para diseñar sistemas de detección y clasificación de naranjas.

### III. CARACTERIZACIÓN ULTRASÓNICA DE TEJIDOS VEGETALES

Como hemos recapitulado en (II. 3. b. ), son numerosos los métodos de monitorización de calidad en frutas y hortalizas, pero la mayoría de ellos precisan de un ensayo destructivo, por lo que no pueden ser aplicados a todas las frutas y hortalizas de una cadena de producción. Tan sólo se aplica comercialmente la selección por tamaño, peso y la colorimetría como ensayos no destructivos. Ante esta necesidad, en los últimos años se vienen desarrollando técnicas acústicas que hacen uso de ondas elásticas en los tejidos vegetales en las que se buscan correlaciones entre un parámetro acústico medido experimentalmente y un índice fisiológico que ofrezca información acerca del estado del fruto.

#### III. 1. DISPOSITIVOS ULTRASÓNICOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE FRUTAS Y HORTALIZAS

Existen múltiples publicaciones que describen ensayos para la generación y detección de ondas ultrasónicas en tejidos vegetales como los propuestos para aguacate y mango (Mizrach, 2000); para manzanas (Bechar, y otros, 2005) y (Kim, y otros, 2006); para patatas (Cheng, y otros, 1994) (Jivanuwong, 1998); en zanahorias (Nielsen, 1997) o en naranjas (Camarena, y otros, 2006) y (Camarena, y otros, 2007). Debido a las especiales características de propagación todos ellos miden tan solo en una banda de frecuencias muy estrecha y no muy elevada, de 37 a 100kHz. Existen intentos de medir en frecuencias del orden de 1MHz, pero debido a la alta atenuación es imposible diseñar una técnica comercialmente aceptable (Mizrach, 2008). Los transductores son por lo general tipo sándwich con focalizador mecánico para poder transferir una mayor potencia al medio vegetal. Así, existen dos configuraciones básicas de los métodos ultrasónicos en tejidos vegetales: Uno es destructivo, y la propagación de la onda se produce a través de una muestra colocada entre los transductores. En la configuración de ensayo no destructivo, los transductores se colocan en la superficie de la fruta sin dañarla (Fig. 6). Así, variando la separación entre transductores se pueden medir parámetros de la señal recibida para posteriormente calcular propiedades acústicas del medio. Debido al estrecho ancho de banda de los transductores y de la baja amplitud de la señal detectada únicamente se miden parámetros como el tiempo de vuelo y la amplitud, por lo que las propiedades del medio calculadas son la velocidad de propagación y la atenuación de la onda.

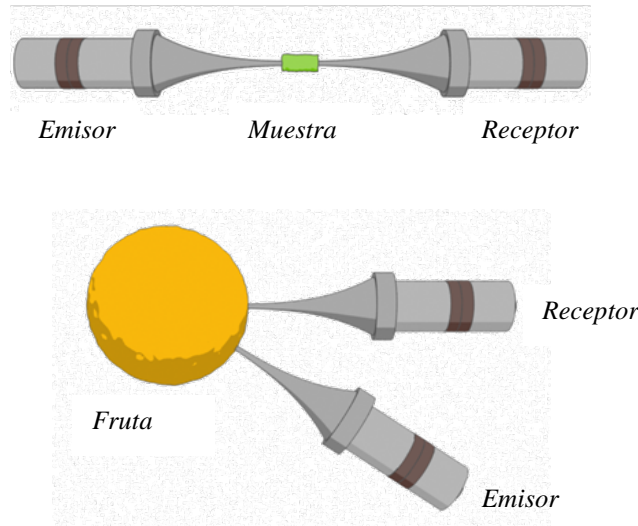


Fig. 6. Arriba, configuración de ensayo destructivo, abajo, ensayo no destructivo

A nivel global, los resultados de dichos ensayos aportan dos conclusiones importantes sobre la propagación de ondas acústicas en medios vegetales. La primera son las bajas velocidades de propagación detectadas en estos tejidos. Estas están por debajo de los 200 m/s para las medidas superficiales y de 300 a 700 m/s para las medidas longitudinales. La segunda conclusión es la alta atenuación de la onda al atravesar estos medios vegetales, que varía entre 1 y 7dB/mm en función del tipo de tejido (Mizrach, 2008).

En el caso concreto de las naranjas, los resultados del ensayo no destructivo se muestran en la

Fig. 7. Las velocidades de propagación no superan en ningún momento los 280 m/s, aumentando ésta en función del tiempo postcosecha transcurrido desde 120 hasta valores finales de 260 m/s.

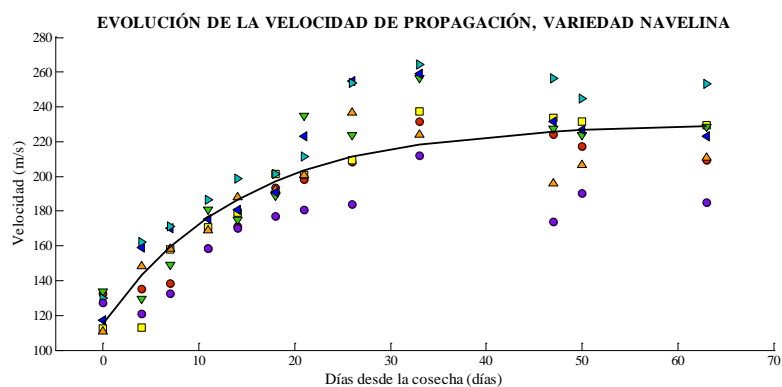


Fig. 7. Evolución de la velocidad de propagación en función del tiempo postcosecha transcurrido para la variedad de naranja Navel. Se tomaron 7 muestras de cada variedad. Cada color indica la evolución de una de las muestras.

Por otro lado, son numerosos los ensayos mecánicos sobre frutas y hortalizas para extraer características elásticas de los tejidos. El objetivo suele ser principalmente para aplicaciones de transporte y almacenaje del producto, aunque también las hay para extraer relaciones entre las

características elásticas de los vegetales y parámetros fisiológicos y de calidad como la firmeza, madurez, SST, acidez, etc. Estos experimentos realizan ensayos de tracción, compresión, torsión, etc. similar a los realizados sobre sólidos elásticos, en los que se le aplica una fuerza al tejido con una velocidad constante, nunca en régimen oscilatorio y menos a frecuencias ultrasónicas. Como resultado de dichos ensayos mecánicos se suele obtener la función esfuerzo-deformación del material biológico en cuestión, a partir de la cual se extraen parámetros que describen la elasticidad del material como módulos de Young o módulos de Poisson.

Presentamos a continuación (Tabla 1) parámetros elásticos no-dinámicos mediados mediante ensayos mecánicos en diversos materiales vegetales así como velocidades de propagación y atenuación de ensayos ultrasónicos.

Medio	Densidad $\rho$ ( $kg/m^3$ )	Módulo de Young $E$ (MPa)	Módulo de Poisson $\nu$	Constante de Lamé $\lambda$ (MPa)	Módulo de cizalladura $\mu$ ó $G$ (MPa)	Velocidad de propagación (m/s)	Atenuación (dB/mm)
Agua 20° (longitudinal)	1000	-	-	$\equiv k$ $2.2 \cdot 10^3$	-	1540	0,0058 (40kHz)
Aire 20° (longitudinal)	1.21	-	-	$\equiv k$ 0.142	-	343	
Aguacate (global)	963	0,48	0,33	0,35	0,32	150-400	2,5-5,0 (50kHz)
Manzana (interior)	789	1,57	0,34	1,24	1,05	-	1,3-2,6 (80-100kHz)
Manzana (piel)	-	3,33	0,17	0,72	1,94	98-183	1,2-1,5 (1-5 MHz)
Melón (piel)	1209	5,54	0,30	3,20	3,60	61-90	2,6-7,1 (50 kHz)
Naranja (interior)	978	0,62	0,45	1,88	0,45	-	-
Naranja (piel)	903	1,57	0,34	1,24	1,05	130-240	2,1-3,8 (40 kHz)
Patata (interior)	1087	7,14	0,25	2,85	4,46	686,89	0,6791 (100 kHz)
Zanahoria (interior)	1021	6,96	0,30	4,02	4,53	341-500	1,02:1,23 (37-50 kHz)

Tabla 1. Características elásticas no-dinámicas de agua y tejidos vegetales: medidas mediante ensayos mecánicos (Singh, y otros, 2006), (Baryeh, 2000)(Grotte, y otros, 2002)(Jindal, y otros, 1985)(Bunyaphlanan, 1973) y características acústicas medidas por medio de ensayos ultrasónicas (Mizrach, 2008).

Sin embargo, es necesario remarcar que dichas funciones esfuerzo-deformación en tejidos vegetales son fuertemente no lineales así como que dichos materiales presentan componentes viscoelásticas. Es por ello que resumir el comportamiento dinámico de los tejidos vegetales mediante un único parámetro medido estáticamente puede no aportar mucha información acerca de cómo vibra este tejido en frecuencias ultrasónicas.

Analizando los ensayos de elasticidad no-dinámicos desde un punto de vista descriptivo podemos comprender parte de la naturaleza del fenómeno. Así, en un experimento de compresión, al aplicar inicialmente una pequeña fuerza de compresión sobre el tejido vegetal este se deforma con mucha facilidad. La fuerza necesaria para continuar deformando el vegetal irá en aumento de manera no lineal, no acorde a la Ley de Hooke (Fig. 8).

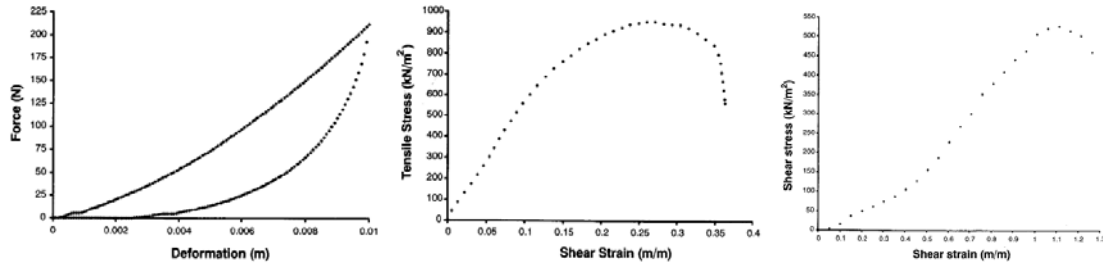


Fig. 8. Ensayos mecánicos típicos en la corteza de la naranja, variedad "Valencia". Derecha: ensayo de compresión; centro ensayo de punción; izquierda: deformación transversal (Fidelibus, y otros, 2002).

Podemos encontrar una simple explicación observando que inicialmente al deformar el tejido estamos desplazando el aire contenido en este, por lo que la fuerza necesaria para realizar una deformación será mínima. Pero cuando una onda elástica ultrasónica atraviesa el material las partículas de éste vibran respecto de su posición de equilibrio sin desplazarse, por lo que la elasticidad (dinámica) del material a estas frecuencias puede diferir bastante con la elasticidad (no dinámica) del mismo material medida macroscópicamente mediante estos ensayos.

Por otro lado, las características viscoelásticas de tejidos biológicos blandos (músculos, hígado, etc.) han sido estudiadas más a fondo que las de los vegetales, y en los ensayos sobre aplicaciones ultrasónicas médicas podemos observar una gran similitud con los resultados en tejidos vegetales. En estos tejidos, los módulos de Poisson son del orden de los de los fluidos viscoelásticos ( $\nu=0,490-0,499$ ) (Goss, y otros, 1978), sin embargo, los módulos de compresibilidad solo difieren de los del agua en un 15%, al igual que las densidades de dichos tejidos (Burlew, y otros, 1980).

Es por ello que los ensayos mecánicos sobre tejidos biológicos representan una simplificación sólo válida para muy bajas frecuencias, ya que dichos materiales orgánicos heterogéneos presentan características dinámicas mucho más complejas a frecuencias ultrasónicas como comportamientos viscoelásticos, no lineales y anisotrópicos (Manduca, y otros, 2001).

### III. 2. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE FRUTAS Y HORTALIZAS

A mediados de los setenta apareció un artículo en el que mediante un estudio analítico de la geometría de frutas esféricas se encontró una relación entre las frecuencias de resonancia debidas a los modos propios de la esfera con los parámetros elásticos de estas (Cooke, y otros, 1973). Esta relación ha sido empleada para determinar la firmeza de frutas mediante métodos acústicos, siempre teniendo en cuenta que las frecuencias de resonancia se encuentran en el espectro audible. Así, varias publicaciones recurren a simulación numérica por elementos finitos para determinar dichas resonancias como lo son las propuestas por (Dewulf, 1999) y (Jancsok, y otros, 2001) en peras, (Nourain, y otros, 2005) en melones y (Kim, 2008) en manzanas.

Otros simulaciones también por elementos finitos han intentado describir el comportamiento elástico de tejidos vegetales a escala microscópica, como es el caso de (Wu, y otros, 1999) que implementa un modelo de las células de las manzanas para realizar simulaciones de esfuerzo-deformación, o (Loodts, 2006) en el modelado de la mecánica en células de la epidermis de la



cebolla. Posteriormente (Mebatsion, 2008) recoge múltiples técnicas y ensayos para la modelación de la microestructura de tejidos vegetales. La conclusión más importante de estos estudios es que aunque la onda elástica que atraviesa dichos tejidos posea una longitud de onda muy superior al tamaño de las células de éste, su microestructura afecta en una gran medida a las características de la propagación de la onda (Mebatsion, 2008).

Aún así, no se han encontrado publicaciones acerca de simulación numérica de vegetales que empleen métodos de diferencias finitas, ni tampoco alguna simulación con otro método para el caso de la propagación de ondas elásticas a frecuencias ultrasónicas en este tipo de tejidos.

#### IV. MODELOS DE PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN MEDIOS HETEROGÉNEOS EN DOMINIO TEMPORAL

Debido a las especiales características de los tejidos vegetales se implementarán diferentes modelos para simular así tanto su comportamiento heterogéneo como su comportamiento viscoelástico. En un extremo, conocemos los modelos directamente aplicables a fluidos, como pueden ser el agua o el aire. En el otro extremo, son bien conocidos los modelos para describir el comportamiento de sólidos elásticos. Los fluidos viscosos estudiados por la Reología, están a caballo entre el modelo de los fluidos Newtonianos y los sólidos deformables. En lo que respecta a este trabajo, los tejidos vegetales debido a su compleja estructura poseen características comunes con los fluidos viscosos, aunque también presentan semejanzas al comportamiento dinámico de un sólido elástico. Por otro lado, dicha estructura se podría también modelizar desde el punto de vista acústico como un material poroso. Es por ello que se tratará de analizar diferentes modelos de propagación de ondas mecánicas.

##### IV. 1. MODELO LINEAL DE PRIMER ORDEN PARA FLUIDOS

Considerando un fluido homogéneo de densidad  $\rho$  y módulo de compresibilidad  $k$ , a partir de las ecuaciones de conservación del momento y de conservación de la masa, podemos obtener las expresiones que rigen la dinámica de dicho fluido:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -k \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

Siendo  $P$  la magnitud escalar presión acústica y  $\mathbf{v}$  la magnitud vectorial velocidad. La onda acústica descrita por este modelo es de naturaleza longitudinal y posee una velocidad de propagación  $c_p$  que depende de las propiedades del medio, de manera que:

$$c_p = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (3)$$

La introducción de heterogeneidades en este fluido se implementa mediante la variación en función del espacio de la densidad y el módulo de compresibilidad del medio. Ello implica que la onda sufrirá cambios en la velocidad de propagación al atravesar zonas heterogéneas, por lo que se podrán observar los diferentes fenómenos de reflexión, difracción, refracción, etc.

##### IV. 2. MODELO LINEAL DE PRIMER ORDEN PARA SÓLIDOS

El modelo propuesto para la propagación de ondas elásticas en sólidos viene gobernado por la segunda ley de Newton y la ley de Hooke, en función de las constantes de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$ , y la

densidad  $\rho$  de dicho sólido. Así, la deformación en función del esfuerzo viene dada por la ley de Hooke (Auld, 1973):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

Donde  $\boldsymbol{\tau}$  el tensor de tensiones esfuerzo,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  el tensor de deformaciones y  $\mathbf{c}$  el tensor de coeficientes elásticos. Así mismo, a partir de la definición de velocidad de partícula como la derivada temporal del desplazamiento, podemos expresar la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en función de la velocidad  $\mathbf{v}$  como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) podemos obtener el esfuerzo en función de la velocidad de partícula como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = \frac{\mathbf{c}}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) \quad (6)$$

Simplificando el modelo para sólidos isotrópicos en base ortogonal, podemos expresar el tensor de constantes elásticas  $\mathbf{c}$  como:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (7)$$

De esta manera, reescribiendo (7), y a partir de la segunda ley de Newton, podemos expresar las ecuaciones constitutivas de la dinámica de nuestro modelo de sólidos en forma vectorial como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = \lambda \bar{\mathbf{I}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) \quad (8)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (9)$$

Siendo  $\mathbf{v} \nabla$  la traspuesta de  $\nabla \mathbf{v}$ . De manera análoga al caso de fluidos, podemos sustituir operador gradiente y la divergencia en el sistema de coordenadas más adecuado a nuestro problema para deducir las expresiones de forma escalar.

Este modelo describe la propagación en un sólido elástico, linear, isotrópico y sin pérdidas. Dicha propagación se caracteriza principalmente por presentar en el interior del sólido un comportamiento ondulatorio caracterizado por dos tipos de ondas. La primera es una onda longitudinal o de compresión (*p-wave*), análoga a la existente en los fluidos. Dicho movimiento se caracteriza por que las partículas vibran en la dirección de propagación de la onda (Fig. 9).

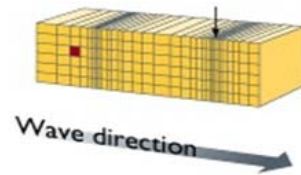


Fig. 9 Representación de la posición de partícula para una onda longitudinal

La velocidad de propagación  $c_P$  de esta onda se puede calcular en función como:

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (10)$$

La segunda es una onda transversal o de cizalla (*s-wave*), y como consecuencia las partículas vibran en la dirección perpendicular a la velocidad de propagación (Fig. 10).

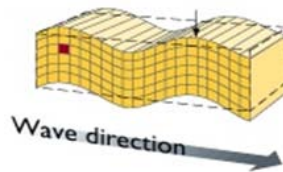


Fig. 10 Representación de la posición de partícula para una onda transversal

Dicha velocidad de propagación  $c_S$  en un sólido viene dada como:

$$c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (11)$$

Se pueden introducir heterogeneidades en este modelo variando los parámetros elásticos y la densidad en función del espacio. Así, es importante señalar que un material cuyo segundo parámetro de Lamé  $\mu$  (o módulo de cizalla) sea nulo se comportará en su interior de la misma manera que un fluido de módulo de compresibilidad  $k=-\lambda$ .

Por otro lado, si existen heterogeneidades pueden aparecer fenómenos ondulatorios más complejos que las ondas  $p$  y  $s$ . Así, si una perturbación se encuentra con una discontinuidad entre un sólido y un medio fluido aparece una onda en la superficie del sólido denominada onda de Rayleigh (Rayleigh, 1887). Las partículas que son perturbadas por una onda de Rayleigh vibran con una polarización elíptica en el plano sagital con respecto de la velocidad de propagación; es decir trazan elipses respecto de su posición de equilibrio.

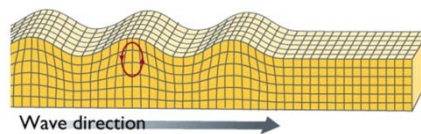


Fig. 11 Representación de la posición de partícula para una onda Rayleigh

Dichas elipses en la superficie se trazan en el sentido contrario a las agujas del reloj, a una profundidad de entorno a  $0,2\lambda$  las partículas vibran en la dirección vertical ( $u_x=0$ ; ver Fig. 12) y por debajo las elipses se trazan en sentido contrario. La amplitud del desplazamiento de las partículas decrece exponencialmente con la profundidad y lo hace más rápidamente a longitudes de onda

pequeñas, por ello, la onda queda confinada en la superficie la perturbación solo alcanza unas pocas longitudes de onda (Fig. 12). Por otro lado, la amplitud decrece con la distancia a la fuente  $r$  con un factor de  $1/r$ , en comparación con el factor de atenuación por divergencia de las ondas longitudinales y transversales que es  $1/r^2$ . Además, una fuente impulsiva localizada en la superficie tiende a transmitir mucha más energía por medio de ondas de Rayleigh que por medio de otro tipo de ondas (Seth Stein, 2003), por lo que las vibraciones de mayor amplitud detectadas en la superficie suelen ser debidas a ondulaciones tipo Rayleigh (Foti, 2000).

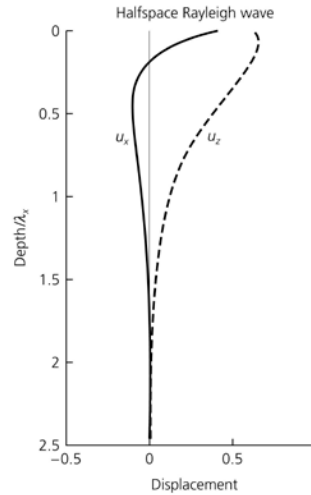


Fig. 12. Amplitud de las componentes del desplazamiento de partícula para una onda Rayleigh en función de la profundidad normalizada a la longitud de onda (Seth Stein, 2003).

La velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh  $c_R$  depende de las constantes elásticas pero también de la geometría de la discontinuidad, por lo que para una discontinuidad plana (Foti, 2000) y asumiendo un módulo de Poisson igual a 0,25:

$$c_R \approx 0,92 \cdot c_S \quad (12)$$

Sin embargo, en el caso de existir discontinuidad curvada esta relación puede variar en función del radio de curvatura del contorno (Jin, 2005). La velocidad de la onda Rayleigh aumenta en función del módulo de Poisson  $\nu$  del sólido, así podemos tomar como aproximación la expresión propuesta en (Malischewsky, 2005):

$$c_R = c_S (0,874 + 0,196\nu - 0,043\nu^2 - 0,055\nu^3) \quad (13)$$

Si el módulo de Poisson se mantiene en el rango  $\nu = [0;0,5]$ , la velocidad de la onda de Rayleigh varía aproximadamente entre  $c_R \approx [0,85;0,95]c_S$ .

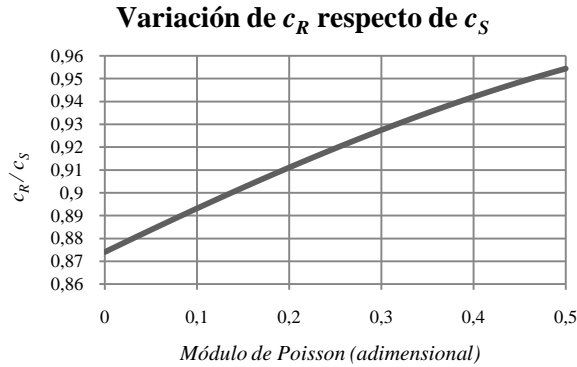


Fig. 13. Variación de la velocidad de propagación de una onda superficial de Rayleigh en función de la velocidad de propagación de una onda transversal y el módulo de Poisson.

Por otro lado, aunque teóricamente en un subespacio homogéneos las ondas Rayleigh no son dispersivas, si existen heterogeneidades cada componente frecuencial viajará entonces a una velocidad concreta (Seth Stein, 2003).

Otro tipo de ondas superficiales son las denominadas ondas Love. Este fenómeno ondulatorio aparece solo cuando existe en el material una capa superficial de velocidad de propagación inferior a la de la capa subyacente. Dichas ondas están polarizadas horizontalmente, es decir las partículas vibran en la dirección horizontal respecto de la velocidad de propagación.

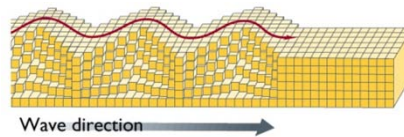


Fig. 14 Representación de la posición de partícula para una onda Love

Las ondas Love son dispersivas, y generalizando, podemos afirmar que la velocidad de propagación de una onda de Love  $c_L$  será (Seth Stein, 2003):

$$c_p \gg c_s > c_L > c_R \quad (14)$$

#### IV. 3. MODELOS DE PROPAGACIÓN EN MEDIOS POROSOS

Puesto que los tejidos vegetales están compuestos en una muy alta proporción de agua inmersa en estructuras celulares sólidas, podemos aproximar el comportamiento elástico de los productos hortofrutícolas como un material poroso. Dichos modelos se caracterizan además por llevar la heterogeneidad integrada en las ecuaciones, por lo que los parámetros elásticos de los materiales no varían necesariamente en el espacio.

##### IV. 3. a. Modelo propuesto por Zwikker-Konsten

Existen numerosos métodos para la descripción del comportamiento dinámico de los materiales porosos. Si consideramos una estructura porosa y rígida (no vibratoria) totalmente inmersa en un fluido podemos describir la relación entre la presión en el fluido y la velocidad de partícula como (Zwikker, y otros, 1949):

$$\nabla P + \rho_p \frac{\partial v}{\partial t} + Rv = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho_p c_p^2 \nabla v = 0 \quad (16)$$

Siendo  $R$  la resistencia al flujo,  $\phi$  la porosidad y  $k_s$  la constante de estructura del material poroso;  $\rho_p$  la densidad equivalente,  $c_p$  la velocidad de propagación equivalente que se calculan en función de la densidad y la velocidad de propagación en el fluido  $\rho_0$ ,  $c_0$  como:

$$\rho_p = \rho_0 k_s / \phi \quad (17)$$

$$c_p = c_0 / \sqrt{k_s} \quad (18)$$

Dicho modelo describe la propagación de ondas longitudinales de velocidad de propagación  $c_p$  y con un coeficiente de atenuación que depende de la resistencia al flujo  $R$ . Aunque a la hora de implementarlo este modelo es computacionalmente muy eficiente, para obtener ondas con una velocidad de propagación similar a la obtenida en las mediciones  $c_p = [120:280] \text{ m/s}$  y tomando la velocidad del fluido acuoso como  $c_0 = 1500 \text{ m/s}$ ; la constante de estructura ha de tomar valores en el rango  $k_s = [156:29]$  que son valores extremadamente altos comparados con los existentes en la bibliografía. Por ello, con este modelo no se podrán simular las ondas medidas experimentalmente en los tejidos vegetales.

#### IV. 3. b. Modelo propuesto por Biot

Otro modelo recurrente en la bibliografía para la simulación de tejidos biológicos porosos (Hosokawa, 2005) es el propuesto por M. A. Biot. Así, este modelo describe la dinámica de un material poroso de estructura elástica inmerso en un fluido viscoso. Dichas ecuaciones determinan la aparición de dos tipos de ondas longitudinales, una rápida  $c_{pI}$  y otra lenta  $c_{pII}$ , y por otro lado, una onda transversal  $c_s$ . La explicación de la existencia de la onda rápida se suele atribuir a la vibración en fase de la estructura elástica y el fluido, y la onda lenta a la vibración de estos en contrafase. La onda transversal se explica debido a la vibración de la estructura elástica (Biot, 1956). Ya que la velocidad de propagación medida experimentalmente en tejidos vegetales es muy baja, la longitud de onda a la frecuencia de trabajo ( $40 \text{ kHz}$ ) es del orden de  $5 \text{ mm}$ , que es muy superior al tamaño del poro en estos tejidos. Por tanto, la aproximación para el modelo de baja frecuencia de (Biot, 1956), predice velocidades de propagación que podemos resumir como (Foresta, y otros, 1998):

$$c_{pI} \cong \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \cong \sqrt{\frac{\left( K_g + \frac{4}{3} \mu_g \right) + \frac{K_f}{\phi}}{\rho}} \quad (19)$$

$$c_{pII} \cong 0 \quad (20)$$

$$c_s \cong \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \cong \sqrt{\frac{\mu_g}{\rho}} \quad (21)$$

Donde  $K_s$ ,  $K_f$ ,  $K_g$ , son respectivamente el módulo de Bulk del sólido, el del fluido, y el de la estructura,  $\rho$  la densidad promedio,  $\phi$  la porosidad y  $\mu_g$  el módulo de cizalla o segunda constante de Lamé de la estructura. La densidad promedio  $\rho$  se puede calcular en función de la densidad del sólido  $\rho_s$  y la del fluido  $\rho_f$  como:

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f \quad (22)$$

Así, y como mostramos en la Tabla 1, la densidad promedio de los tejidos vegetales está entre  $\rho \approx [800:1000] \text{ kg/m}^3$ , por lo que tomando la compresibilidad del fluido similar a la del agua ( $K_f = 2,2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ ) y valores de porosidad de  $\phi = [0,5:1]$ , los valores de velocidad de propagación de la primera onda longitudinal será  $c_{pl} = [1400:2500] \text{ m/s}$  que son valores superiores a los medidos experimentalmente. Debido a la aproximación de baja frecuencia de la teoría de Biot, la segunda onda longitudinal de velocidad  $c_{plI}$  será muy atenuada y no será medible experimentalmente (Foresta, y otros, 1998). Debido a que no se conocen con certeza los valores del módulo de cizalla  $\mu_g$  dinámicos, en las muestras de vegetales habitualmente comercializadas, plantaremos el problema de la onda transversal a la inversa. Así, para que la onda transversal  $c_s$  descrita por Biot tome valores similares a los medidos en la corteza de naranja, el módulo de cizalla dinámico ha de estar en el rango  $\mu_g = [12:50] \text{ MPa}$ , muy superior al módulo de cizalla estático  $[666:745] \text{ kPa}$  expresado en (Fidelibus, y otros, 2002).

#### IV. 3. c. Modelo propuesto por Wilson et al.

Otro ejemplo de modelo teórico para la descripción del comportamiento de los materiales porosos es el propuesto en (Wilson, 2004):

$$\beta_\infty \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\beta_\infty(\gamma - 1)}{\sqrt{\pi\tau_{ent}}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-t'}} \frac{\partial P(x,t')}{\partial t'} e^{\left(-\frac{t-t'}{\tau_{ent}}\right)} dt' = -\nabla v(x,t) \quad (23)$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -V_\infty \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{V_\infty}{\sqrt{\pi\tau_{vor}}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-t'}} \frac{\partial P(x,t')}{\partial x} e^{\left(-\frac{t-t'}{\tau_{vor}}\right)} dt' \quad (24)$$

Donde  $\beta_\infty$  es la compresibilidad compleja,  $V_\infty$  es el volumen complejo para altas frecuencias y  $\tau_{ent}$  y  $\tau_{vor}$  son las constantes de relajación procesos de entropía y vorticidad. Dicho modelo, al igual que el propuesto por Zwikker, considera la estructura sólida rígida, por lo que la velocidad de propagación de la onda longitudinal descrita viene gobernada principalmente por las características del fluido en la que el material está inmersa. Es por ello que si consideramos el fluido como agua, la velocidad de propagación no alcanzará valores tan bajos como los medidos experimentalmente.



Además, la discretización del término convolutivo de las ecuaciones mediante diferencias finitas implica realizar un buffer de memoria para las variables de presión y velocidad, lo que en 3D dimensiones resulta computacionalmente inaceptable.

#### IV. 4. MODELO DE ATENUACIÓN EN SÓLIDOS

##### IV. 4. a. Primera aproximación

Un modelo sencillo para describir la atenuación de la onda mecánica en un sólido es la analogía con el atenuador mecánico aplicado a la ley de Hooke (Auld, 1973). De esta manera, podemos añadiendo un término proporcional a la velocidad que modele la amortiguación. Así, en una dimensión:

$$F = ku + k' \frac{\partial u}{\partial t} \quad (25)$$

Siendo  $F$  la fuerza aplicada,  $u$  el desplazamiento,  $k$  la constante elástica y  $k'$  el factor de amortiguamiento. Siguiendo la analogía propuesta por (Auld, 1973) podemos expresar el esfuerzo en función de la deformación como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}:\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\eta} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \quad (26)$$

Donde  $\boldsymbol{\eta}$  es la viscosidad. Dicha modelización de pérdidas ha sido implementada en diferencias finitas para la simulación de tejidos humanos en (Hosokawa, 2008). Así, en una primera aproximación para sólidos isotrópicos viscoelásticos, las 9 ecuaciones que relacionan la velocidad de partícula y esfuerzo serán:

$$\rho \frac{\partial v_{\xi}}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\psi\xi}}{\partial \psi} + \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial \zeta} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \tau_{\xi\xi}}{\partial t} + \gamma_{\xi\xi} \tau_{\xi\xi} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial v_{\psi}}{\partial \psi} + \lambda \frac{\partial v_{\zeta}}{\partial \zeta} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \tau_{\xi\psi}}{\partial t} + \gamma_{\xi\psi} \tau_{\xi\psi} = \mu \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \psi} + \lambda \frac{\partial v_{\psi}}{\partial \xi} \quad (29)$$

Donde  $(\xi, \psi, \zeta = x, y, z)$   $\rho$ ,  $\lambda$  y  $\mu$  la densidad y las constantes de Lamé respectivamente, y  $\gamma_{\xi\xi}$ ,  $\gamma_{\xi\psi}$  los coeficientes de resistencia longitudinal y transversal. Estos últimos coeficientes son proporcionales al coeficiente de atenuación de la onda (Hosokawa, 2008). Este modelo representa una aproximación eficiente a la hora de implementarlo numéricamente, ya que como veremos en la sección VI, la inclusión de condiciones de contorno absorbente del tipo PML tienen la misma forma que los coeficientes de resistencia  $\gamma_{\xi\xi}$ ,  $\gamma_{\xi\psi}$ .

#### IV. 4. b. *Perdidas viscoelásticas*

El modelo anterior representa una primera aproximación al fenómeno de absorción por pérdidas viscoelásticas. Podemos describir un modelo más completo para la propagación de ondas elásticas en un medio viscoelástico, linear e isotrópico como el descrito en (Bastard, y otros, 2009):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{T} + \boldsymbol{\tau}) \quad (30)$$

Donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad,  $\mathbf{T}$  es el tensor de esfuerzos elásticos y  $\boldsymbol{\tau}$  el tensor de esfuerzos viscoelásticos. Podemos describir  $\mathbf{T}$  de manera análoga al modelo de sólidos elásticos como:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (31)$$

Siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}$  la deformación definida en función del desplazamiento  $\mathbf{u}$  como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \quad (32)$$

De entre los modelos existentes para modelar la viscosidad de un sólido podemos escoger el de Voigt (Auld, 1973) para introducir el comportamiento viscoelástico en nuestras ecuaciones. Así, podemos definir el tensor de esfuerzo viscoso como:

$$\boldsymbol{\tau} = \eta_p \operatorname{tr}(S')\mathbf{I} + 2\eta_s S' \quad (33)$$

Siendo  $\eta_p$  el segundo coeficiente de viscosidad,  $\eta_s$  la viscosidad transversal y  $S'$  el tensor de tasa de deformación. El segundo coeficiente de viscosidad  $\eta_p$  puede ser calculado a partir de la viscosidad volumétrica  $\eta_v$  como:

$$\eta_p = \eta_v - \frac{2}{3}\eta_s \quad (34)$$

Además, el tensor de tasa de deformación  $S'$  está directamente relacionado con la velocidad de partícula mediante:

$$S' = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) \quad (35)$$

Así, y a modo de ejemplo, podemos obtener para un sistema de coordenadas cartesiano 3D las siguientes expresiones:

$$\rho \frac{\partial v_\xi}{\partial t} = \frac{\partial(T_{\xi\xi} + \tau_{\xi\xi})}{\partial \xi} + \frac{\partial(T_{\psi\psi} + \tau_{\psi\psi})}{\partial \psi} + \frac{\partial(T_{\zeta\zeta} + \tau_{\zeta\zeta})}{\partial \zeta} \quad (36)$$

Para las tres componentes de velocidad de partícula  $v$  ( $\xi, \psi, \zeta = x, y, z$ );

$$\frac{\partial T_{\xi\xi}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \lambda \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} \quad (37)$$

Para las tres componentes de esfuerzo elástico normal  $T$  ( $\xi, \psi, \zeta = x, y, z$ );

$$\frac{\partial T_{\xi\psi}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \psi} + \frac{\partial v_{\psi}}{\partial \xi} \right) \quad (38)$$

Para las tres componentes de esfuerzo elástico de cizalla  $T(\xi, \psi, \zeta = x, y, z)$ ;

$$\frac{\partial \tau_{\xi\xi}}{\partial t} = (\eta_p + 2\eta_s) \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} + \eta_p \frac{\partial v_{\psi}}{\partial \psi} + \eta_p \frac{\partial v_{\zeta}}{\partial \zeta} \quad (39)$$

Para las tres componentes de esfuerzo viscoelástico normal  $T(\xi, \psi, \zeta = x, y, z)$  y

$$\frac{\partial T_{\xi\psi}}{\partial t} = \eta_s \left( \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \psi} + \frac{\partial v_{\psi}}{\partial \xi} \right) \quad (40)$$

Para las tres componentes de esfuerzo viscoelástico de cizalla  $T(\xi, \psi, \zeta = x, y, z)$ .

## V. DISCRETIZACIÓN DE LOS MODELOS EN DIFERENCIAS FINITAS

Con el objetivo de obtener una solución numérica de las ecuaciones propuestas anteriormente se describen a continuación los métodos numéricos empleados. Todos ellos están basados en diferencias finitas en dominio de tiempos o comúnmente denominados FDTD (*Finite Difference Time Domain*). El principal interés del uso de este método en este trabajo es que al trabajar en el dominio temporal la obtención de resultados se realiza con un mínimo procesado. Así, la determinación de las velocidades de propagación de las diferentes ondas en los vegetales simulados así como su atenuación es directa a partir de los resultados de la simulación.

### V. 1. APROXIMACIÓN DE LA DERIVADA MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS

Los métodos numéricos basados en diferencias finitas tratan de resolver de forma numérica problemas en forma diferencial. Por ello, la aproximación de las derivadas mediante diferencias finitas será el principal factor que afecte a la precisión del método. La aproximación de una derivada se puede aproximar de diferentes formas entre las que están la anterior, la posterior y la central. En concreto, el método FDTD utiliza la aproximación central de las derivadas, tanto en tiempo como en espacio.

#### V. 1. a. Diferencias finitas centradas de segundo orden

Para la obtención de las diferencias finitas centradas haremos uso del desarrollo en serie de Taylor; de manera que podemos aproximar la función  $f(x)$  en un punto  $x_i$  como:

$$f(x_i) = f|_{x_i} + (x - x_i) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_i} + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_i} + \dots \quad (41)$$

Así, la aproximación de la función  $f(x)$  en un punto  $(x_0 + \Delta x/2)$  vendrá dada por:

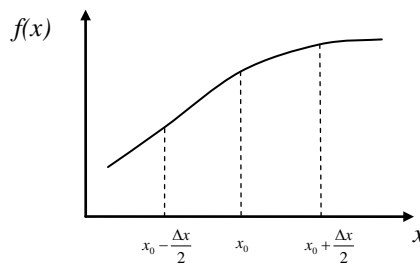


Fig. 15. Función  $f(x)$  evaluada en  $x_0$ ,  $(x_0 + \Delta x)$  y  $(x_0 + \Delta x)$ .

$$f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = f|_{x_0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots \quad (42)$$

Y análogamente, la aproximación en el punto  $(x_0 - \Delta x)$  vendrá dada por:

$$f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) = f|_{x_0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots \quad (43)$$

Con el objetivo de obtener la diferencia centrada restaremos (42) y (43):

$$f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) = \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} + \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{x_0} + \dots \quad (44)$$

Como podemos observar los términos impares del desarrollo en serie de Taylor se anulan, con lo dividiendo ambos términos por  $\Delta x$  podemos obtener:

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{x_0} + \dots \quad (45)$$

Apreciamos aquí como podemos aproximar la derivada de una función mediante el uso de diferencias finitas centradas, teniendo como error el cuarto término así como el resto de términos pares del desarrollo en serie de Taylor que decrecen en amplitud. Es por ello que el error cometido (expresado con el símbolo  $O$ ) es proporcional al cuadrado del equiespaciado  $\Delta x$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (46)$$

Ello implica que si reducimos el equiespaciado  $\Delta x$  en un factor 10, el error de la aproximación de la derivada se reducirá en un factor 100. A continuación, la aproximación de los términos diferenciales en espacio se expresarán como:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \quad (47)$$

Y análogamente para las diferenciales temporales con un error proporcional a  $(\Delta t)^2$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t_0} \approx \frac{f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) - f\left(t_0 - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \quad (48)$$

Es importante observar cómo esta aproximación de la derivada por medio de la diferencia centrada está evaluada en el punto  $x_0$ , mientras que la función está evaluada en los puntos  $x_0 \pm \Delta x$ , por lo que no será posible calcular la derivada de una función en los puntos donde evaluamos la función. Como consecuencia, los métodos FDTD realizan una discretización de los campos al tresbolillo.

#### V. 1. b. Diferencias finitas centradas de cuarto orden

Procediendo de igual manera, podemos incrementar la precisión en el cálculo de la derivada si despreciamos menos términos en el desarrollo en serie de Taylor, por lo que fácilmente podemos obtener:

$$f\left(x_0 + \frac{3\Delta x}{2}\right) = f|_{x_0} + \frac{3\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0} + \frac{1}{2!} \left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{x_0} + \frac{1}{3!} \left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_{x_0} + \dots \quad (49)$$

$$f\left(x_0 - \frac{3\Delta x}{2}\right) = f|_{x_0} - \frac{3\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0} + \frac{1}{2!} \left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{x_0} - \frac{1}{3!} \left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_{x_0} + \dots \quad (50)$$

Restando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$f\left(x_0 + \frac{3\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{3\Delta x}{2}\right) = \frac{3\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0} + \frac{2}{3!} \left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_{x_0} + \dots \quad (51)$$

Y con el objetivo de obtener la derivada multiplicaremos la ecuación (51) por un factor 27:

$$27f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - 27f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 + \frac{3\Delta x}{2}\right) + f\left(x_0 - \frac{3\Delta x}{2}\right) = 24\Delta x \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0} + O[(\Delta x)^5] \quad (52)$$

Despejando de aquí la derivada obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0} = \frac{9}{8} \frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} - \frac{1}{24} \frac{f\left(x_0 + \frac{3\Delta x}{2}\right) + f\left(x_0 - \frac{3\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} + O[(\Delta x)^4] \quad (53)$$

Como podemos observar es una aproximación a la derivada con una precisión de cuarto orden, es decir, si disminuimos el equiespaciado  $\Delta x$  en un factor 10, la precisión del resultado aumenta en un factor 10000. El inconveniente de esta aproximación es que hace uso de los 4 puntos cercanos a  $x_0$  lo que aumenta considerablemente el tiempo de procesado y provoca complicaciones a la hora de definir condiciones de contorno, heterogeneidades, etc.

### V. 1. c. Cálculo de la segunda derivada (segundo orden)

Si lo que se pretende es conseguir una aproximación de la segunda derivada, se puede calcular sumando (en lugar de restar) las expresiones (42) y (43):

$$f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) + f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) = 2f|_{x_0} + \frac{2}{2!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{x_0} + \frac{2}{4!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}|_{x_0} + \dots \quad (54)$$

Así despejando la segunda derivada y tomando el resto de términos como el error cometido obtenemos la aproximación de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{x_0} = \frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) + f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) - 2f(x_0)}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (55)$$

Es importante observar como para calcular la segunda derivada en el punto  $x_0$  necesitamos evaluar la función tanto en ese mismo punto  $x_0$  como en los puntos cercanos ( $x_0 + \Delta x$ ) y ( $x_0 - \Delta x$ ), lo que implica complicaciones computacionales ya que en los métodos FDTD los campos están mallados al tresbolillo. Por ello, no conocemos el valor de  $f(x)$  en  $x_0$ , por lo que se aproximará como:

$$f(x_0) = \frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) + f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{2} \quad (56)$$

## V. 2. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO FDTD

El método FDTD fue propuesto por primera vez para la resolución de problemas de propagación electromagnética por Kane Yee (Yee, 1966), y desde la primera aplicación concreta en 1977 por Allen Taflove (Taflove, y otros, 1975) este método ha sufrido un rápido desarrollo. Las primeras aplicaciones de este método FDTD al campo de la acústica en fluidos fueron (Botteldooren, 1995) (LoVetri, 1996) (Wang, 1996) (J. B. Schneider, 1998) y su aplicación a ondas mecánicas en sólidos elásticos lineales y sin pérdidas fue propuesta en sismología por J. Virieux (Virieux, 1986).

Los métodos basados en diferencias finitas son muy intuitivos de implementar y no es necesario hacer complejas transformaciones de las ecuaciones constitutivas. Por otro lado, la introducción de heterogeneidades, anisotropía en el dominio y condiciones de contorno son muy relativamente sencillas de implementar. Además, es mucho más sencillo obtener una respuesta en el dominio de la frecuencia a partir de una señal temporal que viceversa. Como principales inconvenientes de estos métodos numéricos podemos apreciar que, ya que trabajamos en dominio temporal, para obtener un resultado en un tiempo determinado hemos de computar la solución para todos los instantes anteriores, lo que implica en muchos casos largos tiempos de simulación. Al igual que el resto de métodos numéricos volumétricos es necesario mallar todo el dominio por lo que en muchos casos la memoria necesaria puede ser excesiva, aunque para muchos casos de interés no sea prohibitiva. Por otro lado y a diferencia de los métodos FEM las magnitudes son solo conocidas en los nodos de la malla y en instantes de tiempo discretos. También, debido a que las mallas tienen una forma concreta (rectangular si trabajamos en coordenadas cartesianas, etc.) las reflexiones en elementos no alineados con las mallas (como superficies curvas) pueden no ser demasiado precisas.

### V. 2. a. Estructura de un algoritmo FDTD

Podemos resumir la estructura de un algoritmo FDTD como:

#### 1. Preprocesado

- a. Reemplazar las derivadas de las ecuaciones constitutivas con las diferencias finitas.
- b. Discretizar los campos mediante mallas al tresbolillo, tanto en espacio como en tiempo.

#### 2. Procesado

- a. Evaluar las ecuaciones resultantes (denominadas ecuaciones de actualización) para los campos futuros que son desconocidos a partir de los valores de los campos

actuales. Así, primero resolveremos un campo futuro desconocido avanzando un intervalo de tiempo, con lo que este campo se convierte en pasado conocido. Después, evaluar el otro campo futuro desconocido avanzando de nuevo otro intervalo de tiempo, con lo que nuevamente este campo se convierte en pasado conocido.

- b. Repetir los dos pasos anteriores hasta encontrar la solución en el tiempo deseado.

### 3. Postprocesado

- a. Puesto que el método trabaja en dominio de tiempos, podemos obtener señales discretas ( $P(t)$ ,  $v(t)$ ,  $\tau(t)$ , etc.) directamente de la simulación en cualquier punto del espacio discreto. Posteriormente, se procesarán a conveniencia dichas señales temporales.

#### V. 2. b. Notación

En la discretización de las diferentes magnitudes se usará la siguiente notación:

Para la discretización del espacio  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en intervalos  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , en coordenadas cartesianas:

$$x = i \cdot \Delta x; \quad y = j \cdot \Delta y; \quad z = k \cdot \Delta z \quad (57)$$

Para la discretización del espacio  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  en intervalos  $\Delta r$ ,  $\Delta \theta$ ,  $\Delta z$  y en coordenadas cilíndricas:

$$r = i \cdot \Delta r; \quad \theta = j \cdot \Delta \theta; \quad z = k \cdot \Delta z \quad (58)$$

Para la discretización del espacio  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  en intervalos  $\Delta r$ ,  $\Delta \theta$ ,  $\Delta \phi$  y en coordenadas esféricas:

$$r = i \cdot \Delta r; \quad \theta = j \cdot \Delta \theta; \quad \phi = k \cdot \Delta \phi \quad (59)$$

Análogamente, para la discretización del tiempo  $t$  en intervalos discretos  $\Delta t$ :

$$t = n \cdot \Delta t \quad (60)$$

La discretización temporal de una magnitud al tresbolillo con la expresión anterior será:

$$t = \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta t \quad (61)$$

La discretización espacial de una magnitud al tresbolillo dependerá de la geometría y será indicada mediante esquemas para cada caso concreto. De esta manera, expresaremos de forma discreta una magnitud cualquiera  $F(x, y, z, t)$  como:

$$F^n(i, j, k) \quad (62)$$

De igual manera, se adoptará la siguiente convención para otras variables y funciones:

$$r(i) \equiv r(i \cdot \Delta r) \quad (63)$$

$$\sin(j) \equiv \sin(j \cdot \Delta \theta) \quad (64)$$

$$\cot(j) \equiv \cot(j \cdot \Delta \theta) \quad (65)$$



### V. 3. APLICACIÓN DEL MÉTODO FDTD AL MODELO DE ACÚSTICA DE FLUIDOS

Describiremos a continuación la implementación del método FDTD para el modelo de acústica de fluidos en sistema de coordenadas 2D. En los anexos podemos encontrar la implementación del método en los sistemas de coordenadas cartesianas 3D, polar, cilíndrico y esférico.

#### V. 3. a. 2D Fluidos, Sistema de coordenadas cartesiano

Mediante el empleo del gradiente y la divergencia en dos dimensiones ( $x, y$ ) definidos como:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} \quad (66)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (67)$$

Podemos reescribir en coordenadas cartesianas 2D las ecuaciones constitutivas (1) y (2) como:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (68)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (69)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -k \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (70)$$

Siguiendo el flujo de trabajo descrito, discretizaremos los campos de presión y velocidad en intervalos temporales de  $\Delta t$  y espaciales de  $\Delta x$ , y  $\Delta y$ . Así, sustituiremos los términos diferenciales de las expresiones (68-70) por sus aproximaciones en diferencias finitas descritas. Es necesario remarcar como los elementos de velocidad  $v_x, v_y$ , han de estar al tresbolillo con respecto de los elementos discretos de presión  $P$ , tanto en espacio como en tiempo, por lo que espacialmente se distribuirán como:

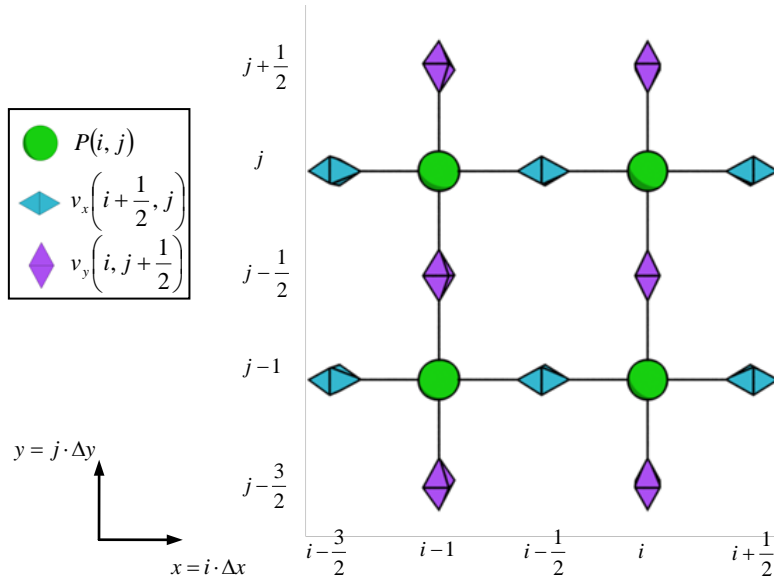


Fig. 16. Mallado del espacio 2D del modelo de fluidos; sistema de coordenadas cartesiano

Así, las ecuaciones (68-70) quedan como:

$$\rho \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta t} = - \frac{P^n(i+1, j) - P^n(i, j)}{\Delta x} \quad (71)$$

$$\rho \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = - \frac{P^n(i, j+1) - P^n(i, j)}{\Delta y} \quad (72)$$

$$\frac{P^{n+1}(i, j) - P^n(i, j)}{\Delta t} = -k \left( \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} + \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right) \quad (73)$$

Reescribiendo las expresiones anteriores despejando la variable desconocida  $P^{n+1}(i, j)$  en función de las magnitudes conocidas podemos escribir las ecuaciones de actualización como:

$$v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^n(i+1, j) - P^n(i, j)) \quad (74)$$

$$v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^n(i, j+1) - P^n(i, j)) \quad (75)$$

$$P^{n+1}(i, j) = P^n(i, j) - k \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right) \right) - k \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right) \right) \quad (76)$$

### V. 3. b. Estabilidad y dispersión

El modelo propuesto es condicionalmente estable, por lo que se debe cumplir en todo el dominio la condición de estabilidad siguiente:

$$S \equiv \frac{c_{\max} \Delta t}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq 1 \quad (77)$$

Para el caso desarrollado que se corresponde al modelo bidimensional, donde  $c_{max}$  es la velocidad de propagación máxima en cualquier punto del dominio,  $\Delta t$  y  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son los equiespaciados temporal y los espaciales respectivamente y  $S$  es el número de Courant. Esta condición se denomina condición de Courant-Friedrichs-Lewy o CFL.

Por otro lado, la dispersión numérica es intrínseca del método e independiente del modelo de ecuaciones físicas escogidas. Ello se debe a que la onda se propaga a diferentes velocidades en función de la dirección: lo hace más rápido en la dirección de la diagonal de la malla que en la dirección ortogonal a esta. Este error implica un error de fase acumulativo a lo largo de la propagación de la onda que se ha de tratar de minimizar lo máximo posible. Por otro lado, este fenómeno también implica una atenuación numérica de la onda, aunque este perjuicio afecta menos a la precisión del método que el error de fase (Taflove, y otros, 2005). Un buen indicador de la dispersión es el número de celdas por longitud de onda, o muestreo espacial  $N_\lambda$ :

$$N_\lambda = \frac{\lambda_{\min}}{\Delta_{\max}} \quad (78)$$

Así, la longitud de onda mínima vendrá determinada por la frecuencia máxima de la onda, así como las zonas del dominio con velocidad de propagación menor:

$$\lambda_{\min} = \frac{c_{\min}}{f_{\max}} \quad (79)$$

A su vez, el incremento espacial  $\Delta_{\max}$  se corresponde con la mayor distancia espacial existente en el dominio, que en sistema cartesiano 2D se corresponde con la diagonal mayor en todo el dominio. El valor del muestreo temporal ha de ser alto para que la velocidad de propagación numérica sea lo más parecida posible en las direcciones, Un valor mínimo para el muestreo espacial, que implica mallas computacionalmente aceptables es un valor de 10 muestras por longitud de onda. Así, podemos sintetizar la condición de dispersión para nuestro mallado como:

$$N_\lambda \equiv \frac{c_{\min}}{f_{\max} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \geq 10 \quad (80)$$

#### V. 4. APLICACIÓN DEL MÉTODO FDTD AL MODELO DE SÓLIDOS

Análogamente al caso de fluidos, describiremos la implementación del método FDTD para el modelo de sólidos lineal, isotrópicos y sin pérdidas en sistema de coordenadas 2D. En los anexos podemos encontrar la implementación del método en los sistemas de coordenadas cartesianas 3D, polar, cilíndrico y esférico.

#### V. 4. a. 2D Sólidos, Sistema de coordenadas cartesiano

En el caso de los sólidos elásticos, y trabajando en dos dimensiones ( $x, y$ ) podemos expresar las ecuaciones que rigen la dinámica de los sólidos elásticos en coordenadas cartesianas 2D para la componente ( $i=x, y$ ) de velocidad de partícula  $v_i$  como:

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \quad (81)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (82)$$

Para la componente ( $i=x, y$ ) de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (83)$$

$$\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (84)$$

Para la componente de esfuerzo de cizalla  $\tau_{xy}$ ;

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (85)$$

La discretización temporal al tresbolillo de los campos de esfuerzo  $\tau$  se realizará análoga a los de presión, escogiendo  $t=n \cdot \Delta t$  para estos y para los campos de velocidad  $t=(n+1/2) \cdot \Delta t$ . Sin embargo, la discretización espacial de las componentes de esfuerzo transversal ha de estar necesariamente al tresbolillo con los elementos de velocidad de manera cruzada debido a los términos  $\partial x/\partial y$  que aparecen en el cálculo de dichos términos de esfuerzo de cizalla. La disposición concreta en el sistema de coordenadas cartesianas 2D se presenta en la siguiente figura:

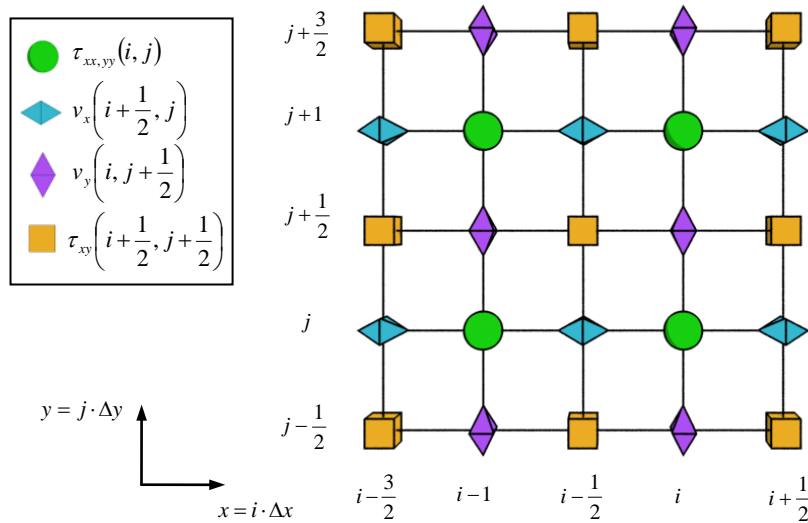


Fig. 17. Mallado del espacio 2D del modelo de sólidos; sistema de coordenadas cartesiano

Así, la discretización en diferencias finitas de las ecuaciones ( ) para la componente ( $i=x, y$ ) de velocidad de partícula  $v_i$  será

$$\rho \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta t} = \frac{\tau_{xx}^n(i+1, j) - \tau_{xx}^n(i, j)}{\Delta x} + \frac{\tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \quad (86)$$

$$\rho \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{\tau_{yy}^n(i, j+1) - \tau_{yy}^n(i, j)}{\Delta y} + \frac{\tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \tau_{xy}^n\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \quad (87)$$

Para la componente ( $i=x, y$ ) de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\frac{\tau_{xx}^{n+1}(i, j) - \tau_{xx}^n(i, j)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} + \lambda \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \quad (88)$$

$$\frac{\tau_{yy}^{n+1}(i, j) - \tau_{yy}^n(i, j)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} + \lambda \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} \quad (89)$$

Para la componente de esfuerzo de cizalla  $\tau_{xy}$ ;

$$\frac{\tau_{xy}^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = +\mu \left[ \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta y} + \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right] \quad (90)$$

De esta manera, las ecuaciones de actualización para sólidos sin pérdidas quedarán como:

$$v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \left( \tau_{xx}^n(i+1, j) - \tau_{xx}^n(i, j) \right) + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \left( \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right) \right) \quad (91)$$

$$v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \left( \tau_{yy}^n(i, j+1) - \tau_{yy}^n(i, j) \right) + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \left( \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \tau_{xy}^n\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) \right) \quad (92)$$

$$\tau_{xx}^{n+1}(i, j) = \tau_{xx}^n(i, j) + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right) \right) + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right) \right) \quad (93)$$

$$\tau_{yy}^{n+1}(i, j) = \tau_{yy}^n(i, j) + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right) \right) + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right) \right) \quad (94)$$

$$\tau_{xy}^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) = \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \mu \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \right) + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \right) \quad (95)$$

#### V. 4. b. Estabilidad y dispersión

Si no tenemos en cuenta la dispersión numérica de las ondas superficiales, podemos demostrar como las ondas longitudinales gobiernan la estabilidad mientras que las transversales rigen la dispersión numérica. Así, de igual manera que para el modelo de fluidos, la condición CFL viene determinada por:

$$S \equiv \frac{c_{l,\max} \Delta t}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq 1 \quad (96)$$

Donde  $c_{l,\max}$  es la velocidad de propagación máxima de la onda longitudinal en cualquier punto del dominio. En medios heterogéneos, la estabilidad del modelo viene condicionada también por las transiciones entre elementos de diferente elasticidad y densidad. Así, se ha de cumplir para todos los elementos del dominio respeten las siguientes expresiones (Schröder, y otros, 2002):

$$\rho_i \equiv \frac{\rho_{i-1} + \rho_{i+1}}{2} \quad (97)$$

$$\frac{1}{\lambda_i} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_{i+1}} + \frac{1}{\lambda_{i-1}} \right) \quad (98)$$

$$\frac{1}{\mu_i} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_{i+1}} + \frac{1}{\mu_{i-1}} \right) \quad (99)$$

Lo que implica que no existan cambios bruscos de impedancia de un elemento a otro.

La dispersión numérica podemos evaluarla igualmente con el muestreo espacial, de manera que obtendremos valores aceptables para:

$$N_\lambda \equiv \frac{c_{s,\min}}{f_{\max} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \geq 10 \quad (100)$$

### V. 5. APLICACIÓN DEL MÉTODO FDTD AL MODELO DE SÓLIDOS CON PÉRDIDAS

La implementación de las pérdidas en sólidos se realizará en FDTD acorde al modelo propuesto en (). Así, y teniendo en cuenta que los campos de esfuerzo en un instante  $t=(n+1/2)\Delta t$  no son conocidos y deben ser aproximados según (56), las ecuaciones (27-29) se reescribirán en coordenadas cartesianas 2D como:

$$\rho \frac{v_x^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n-1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta t} = \frac{\tau_{xx}^n(i+1, j) - \tau_{xx}^n(i, j)}{\Delta x} + \frac{\tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \quad (101)$$

$$\rho \frac{v_y^{n+1/2}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n-1/2}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{\tau_{yy}^n(i, j+1) - \tau_{yy}^n(i, j)}{\Delta y} + \frac{\tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \tau_{xy}^n\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \quad (102)$$

Para la componente ( $i=x, y$ ) de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$  ;

$$\frac{\tau_{xx}^{n+1}(i, j) - \tau_{xx}^n(i, j)}{\Delta t} + \gamma_{xx} \frac{\tau_{xx}^{n+1}(i, j) + \tau_{xx}^n(i, j)}{2} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_x^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n-1/2}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} + \lambda \frac{v_y^{n+1/2}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n+1/2}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \quad (103)$$

$$\frac{\tau_{yy}^{n+1}(i, j) - \tau_{yy}^n(i, j)}{\Delta t} + \gamma_{yy} \frac{\tau_{yy}^{n+1}(i, j) + \tau_{yy}^n(i, j)}{2} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_y^{n+1/2}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n+1/2}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} + \lambda \frac{v_x^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_x^{n+1/2}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} \quad (104)$$

Para la componente de esfuerzo de cizalla  $\tau_{xy}$  ;

$$\frac{\tau_{xy}^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} + \gamma_{xy} \frac{\tau_{xy}^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{2} = +\mu \left( \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) - v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta y} + \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right) \quad (105)$$

Por brevedad, las ecuaciones de actualización para este modelo se exponen en el anexo.

## VI. CONDICIONES DE CONTORNO ABSORBENTES

Debido a que los recursos computacionales son siempre limitados, resulta imprescindible para la implementación de un método numérico volumétrico acotar el dominio a discretizar. Así, muchos de los casos requieren de unas condiciones de contorno sobre los límites del dominio que simulen que éste se extiende hasta el infinito. Ello implica que una onda que atraviese los límites del dominio no sufra reflexiones hacia el interior, por lo que dicha condición de contorno ha de ser totalmente absorbente. El término anglosajón para denominar dichas condiciones es *absorbing boundary conditions* (ABC). Podemos distinguir dos grandes grupos de metodologías para la aplicación de ABC's. El primero lo forman aquellos métodos que tratan las reflexiones aplicando una solución analítica sobre los elementos límite del dominio. El segundo lo forman aquellos métodos que tratan de absorber las ondas ubicando zonas extras de dominio acoplado en impedancia con la región de interés. Dichas zonas se caracterizan por presentar una atenuación numérica que logra atenuar las ondas incidentes como si de una cámara anecoica numérica se tratara.

### VI. 1. ABC, METODOLOGÍA ANALÍTICA

Las condiciones de contorno implementadas en el algoritmo inicial de Yee (Yee, 1966) se basaban en la suposición de que el medio no poseía pérdidas debido a que trataba el dominio como un conductor perfecto (*PEC boundary condition*), lo cual no es cierto para la mayoría de casos. A partir de entonces se desarrollaron numerosos métodos para implementar ABC's como el propuesto por C. Taylor (Taylor, 1969) que simplemente usaba una extrapolación desde los dos nodos interiores para calcular el nodo externo. Dicho método, aunque es muy simple y sólo supone aumentar el dominio total en un nodo en 1D, una fila en 2D o una superficie en 3D por cada contorno, solo es capaz de atenuar las ondas incidentes en la dirección normal al contorno.

Las múltiples técnicas desarrolladas en los años 70-80 en el campo del electromagnetismo son capaces de absorber las ondas incidentes logrando una atenuación de las reflexiones espurias superior al rango dinámico de los métodos FDTD debido a otro tipo de errores. Aún así, esto sólo ocurre para una incidencia normal, viendo su eficiencia degradada en mayor o menor medida en función del ángulo de incidencia. Así, métodos como el propuesto por A. Taflove (Taflove, y otros, 1975) proporcionan una mejora en cuanto a la influencia de la dirección de llegada de la onda EM, pero debido a la naturaleza de la interpolación realizada da lugar reflexiones espurias significativas sin sentido físico. Los operadores propuestos por Bayliss-Turkel (*annihilation operators*) (Bayliss, y otros, 1980) consiguen en un amplio rango de ángulos de incidencia una atenuación con un coeficiente de reflexión inferior a  $10^{-2}$  (Taflove, y otros, 2005). El método se basa en la construcción de operadores que pueden ser usados para estimar los valores de los campos a lo largo del límite del dominio, siendo su principal dificultad el hecho de que las diferencias centrales necesiten de los nodos adyacentes al nodo que está siendo evaluado para obtener dicho operador.



En cuanto a los primeros trabajos sobre implementación de ABC's para ondas acústicas y elásticas podemos destacar los de A. R. Leavander y C. Cerjan(Cerjan, y otros, 1985)(Levander, 1985). En ellos se demuestra cómo construir una ABC introduciendo una capa de material absorbente cerca de los límites del dominio. Dicha capa produce resultados aceptables sólo para grosores elevados, lo que provoca que el método no sea demasiado eficiente.

Volviendo al electromagnetismo, B. Enquist y A. Majda implementaron en FDTD ecuaciones diferenciales parciales que permitían la propagación de la onda electromagnética en una sola dirección (OWWES, *one way equations*)(Engquist, y otros, 1977). La ABC se basa en aplicar estas ecuaciones sobre los límites del dominio de manera que absorban las ondas incidentes en una dirección concreta. En la teoría, el método consigue una absorción total, pero al implementar dicho método en el dominio discreto se ha de aproximar una función no lineal mediante el desarrollo en serie de Taylor. Dicha aproximación es la que provoca la mayor fuente de error del método. La aplicación de este método en tres dimensiones fue propuesta por G. Mur para EM y coordenadas cartesianas (Mur, 1981), que con una aproximación de segundo orden consigue reducir las reflexiones en 35-40dB respecto de un relector perfecto (Yuan, y otros, 1997).

Para ondas elásticas, otro método es el descrito por R. Clayton y B. Enquist, que diseñaron ABC's mediante la extrapolación de los campos en los límites a partir de los campos cercanos al contorno (Clayton, y otros, 1977). Podemos encontrar diferentes formulaciones de este método como la propuesta por (Lindman, 1975), (Higdon, 1986),(Higdon, 1987), (Higdon, 1991), (Randall, 1989) o las realizadas por (Peng, y otros, 1994). Las ABC's propuestas por Z. P. Liao hacen uso de la teoría de multitransmisión (*multitransmitting theory*) (Z. P. Liao, 1984). Mediante este método se obtienen reflexiones de entre 10 y 20dB más atenuadas que las logradas por el método de Mur con una aproximación de segundo orden(Taflove, y otros, 2005). Sin embargo, todas estas soluciones analíticas presentan una debilidad común que se acentúa en el caso de que el medio presente heterogeneidades y/o absorción: el ángulo de incidencia de la onda.

## VI. 2. PML, PERFECTLY MATCHED LAYER

La idea del diseño de una condición de contorno absorbente para ondas electromagnéticas propuesta por J. P. Berenger se basa en la construcción de una capa de material ficticio que extienda el dominio unos pocos nodos hacia el exterior de sus límites. Dicha capa ha de estar acoplada en impedancia de manera que el coeficiente de reflexión entre dicha capa y el dominio sea nulo para todos los ángulos de incidencia. Por otro lado, la capa debe ser diseñada para atenuar numéricamente la onda EM que la atraviese, por lo que no existirán reflexiones significativas al incidir la onda en el límite de la capa con el contorno exterior (Berenger, 1994). Como resultado, escogiendo diferentes parámetros como el equiespaciado de la malla  $\Delta x$ , el incremento temporal  $\Delta t$ , o el número de elementos de la capa PML; el método propuesto atenúa las reflexiones en 70dB, lo que para la mayoría de problemas es más que suficiente. Podemos incrementar la atenuación de la

PML refinando las mallas pero el coste computacional comienza a ser excesivo (Katz, y otros, 1994).

#### VI. 2. a. Implementación de las PML para el modelo de fluidos

La aplicación de las ABC's tipo PML en acústica de fluidos fue presentada por Xiaojuen Yuan realizando una analogía entre las ondas EM y las elásticas en fluidos (Yuan, y otros, 1997). La única complicación es debida a que ya que el campo de presión es escalar, necesitamos expresar la presión en sus componentes ficticias. De esta manera, las ecuaciones constitutivas para un fluido con pérdidas serán:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \alpha' \mathbf{v} = -\nabla P \quad (106)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial P}{\partial t} + \alpha P = -\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (107)$$

Donde  $\alpha$  y  $\alpha'$  son respectivamente la atenuación por compresibilidad y la atenuación asociada a la densidad. Generalmente  $\alpha'$  es cero, pero la introducción de estos coeficientes es muy útil a la hora de implementar las PML. Para que no existan reflexiones debe existir acoplamiento de impedancias, de manera que para incidencia normal:

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (108)$$

Para  $R = 0$ , entonces  $Z_1 = Z_2$ . La complicación aparece cuando existe atenuación en el medio como la mostrada en las ecuaciones (103-104). Para ello es necesario definir el número de onda complejo  $k'$  en el dominio de la frecuencia justo en la interfase entre los dos medios (Yuan, y otros, 1997):

$$k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(1 - i \frac{\alpha'}{\omega \rho}\right) \left(1 - i \frac{\alpha k}{\omega}\right)} \quad (109)$$

Para que no existan reflexiones la velocidad de fase ha de ser independiente del cambio de impedancia entre los dos medios; es decir, la parte imaginaria del número de onda complejo ha de ser independiente de la frecuencia.

Si logramos que la atenuación asociada a la densidad  $\alpha'$  sea:

$$\alpha' = \alpha k \rho \quad (110)$$

El número de onda será entonces:

$$k' = \frac{\omega}{c} - \frac{\alpha k}{c} \quad (111)$$

Ya que  $k = \rho c^2$ , y reescribiendo en función de la impedancia acústica  $z = \rho c$ :

$$k' = \frac{\omega}{c} - iz\alpha \quad (112)$$

Por lo que si cumplimos la condición (107), la atenuación ( $z\alpha$ ) de la onda será independiente de la frecuencia ( $\omega$ ), y con ello podremos cumplir la condición de acoplamiento de impedancia para todas las frecuencias.

Así, simplificando en una dimensión, la solución para una onda armónica en el dominio sin PML ( $\alpha_x=0$ ) será:

$$p(x, t) = p_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (113)$$

Eliminando la dependencia del tiempo, la solución en el espacio  $x$  será:

$$p(x) = p_0 e^{-i(kx)} \quad (114)$$

Y para la onda en el interior de las PML será:

$$p(x, t) = p_0 e^{-i(k'x)} = p_0 e^{-i\left(\left(\frac{\omega}{c} - iz\alpha\right)x\right)} = p_0 e^{-i(kx)} e^{-\alpha z x} \quad (115)$$

Como podemos ver esta solución es una onda armónica que se atenúa exponencialmente en el interior del material ficticio de la PML. En este punto aún tenemos el problema de la incidencia oblicua. Berenger demuestra que si la atenuación de la capa PML se diseña de manera anisotrópica (Fig. 1), el coeficiente de reflexión es independiente del ángulo de incidencia. Así, podemos crear un material ficticio con un alto coeficiente de absorción para atenuar las ondas incidentes siempre que cumplamos las condiciones anteriores.

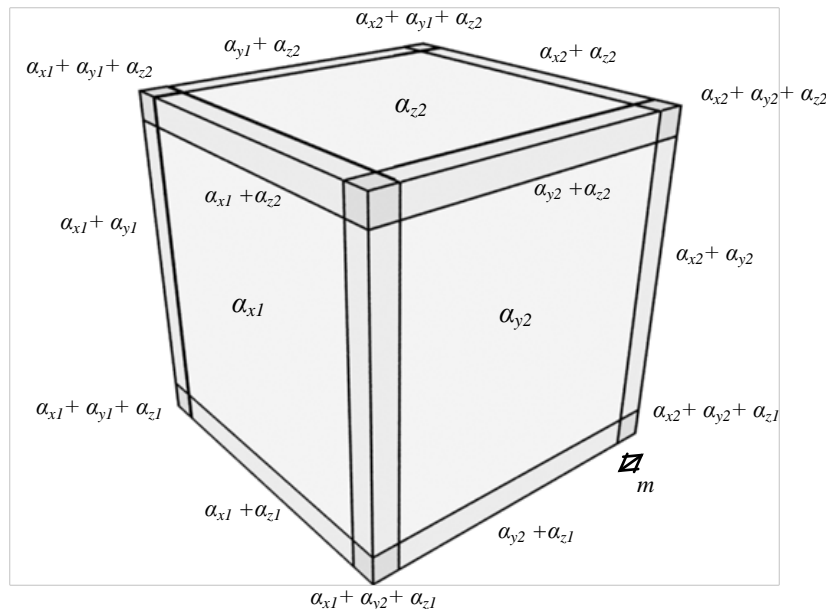


Fig. 18. Implementación de la absorción de manera anisotrópica en coordenadas cartesianas 3D subrayando las distintas intersecciones de estas.

Por ello, es necesario dividir el campo escalar de presión en componentes ficticias, reescribiendo así las ecuaciones (106) y (107) en cartesianas 3D como:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \alpha_x \rho k \cdot v_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (116)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \alpha_y \rho k \cdot v_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (117)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \alpha_z \rho k \cdot v_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad (118)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial P_x}{\partial t} + \alpha_x P_x = -\frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (119)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial P_y}{\partial t} + \alpha_y P_y = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (120)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial P_z}{\partial t} + \alpha_z P_z = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (121)$$

Donde  $P = P_x + P_y + P_z$ .

Es sencillo demostrar como cuando  $\alpha_i = 0$  en todas sus componentes ( $i=x,y,z$ ), las ecuaciones (113-118) coinciden con las del modelo de acústica de fluidos sin pérdidas. Así, podemos escoger altos valores de atenuación en el interior de las capas de contorno absorbente y la onda se atenuará sin producir reflexiones.

Debido a los errores de discretización, dichos valores se han introducir progresivamente con una función continua, comúnmente se usa una cuadrática (Taflove, y otros, 2005). El diseño de los valores de  $\alpha$  para una capa de absorción de  $m$  elementos discretos (Fig. 18) se puede calcular como:

Para  $i, j, k$  pertenecientes a la región  $x_1$ ;  $i = 1, \dots, m-1$ ;

$$\alpha_x(i, j, k) = \alpha_{\max} \left( \frac{m-i}{m} \right)^2; \quad \alpha_y(i, j, k) = 0; \quad \alpha_z(i, j, k) = 0; \quad (122)$$

Para  $i, j, k$  pertenecientes a la región  $x_2$ ; donde el perfil de absorción es invertido, la función de absorción se calcula de igual manera pero de manera descendente, es decir  $i = m-1, \dots, 1$ ;

Para  $i, j$  pertenecientes a la región  $y_1$ ;  $j = 1, \dots, m-1$

$$\alpha_x(i, j, k) = 0; \quad \alpha_y(i, j, k) = \alpha_{\max} \left( \frac{m-j}{m} \right)^2; \quad \alpha_z(i, j, k) = 0 \quad (123)$$

Y análogamente, para  $i, j$  pertenecientes a la región  $y_2$ ;  $j = m-1, \dots, 1$ ;

Para  $i, j$  pertenecientes a la región  $z_1$ ;  $k = 1, \dots, m-1$

$$\alpha_x(i, j, k) = 0; \quad \alpha_y(i, j, k) = 0 \quad \alpha_z(i, j, k) = \alpha_{\max} \left( \frac{m-k}{m} \right)^2 \quad (124)$$

Para  $i, j$  pertenecientes a la región  $z_2$ ;  $k = m - 1, \dots, 1$

Es importante remarcar que en las zonas donde existe intersección de las componentes de absorción se usarán ambas simultáneamente y en las esquinas del cubo las tres componentes.

Los resultados de la aplicación de la PML para ondas acústicas muestran que una capa de 8 elementos se obtienen reflexiones atenuadas entre 70-80dB, 40dB más con respecto a la ABC propuesta por Mur (Yuan, y otros, 1997).

#### VI. 2. b. Implementación de las PML para el modelo de sólidos

La aplicación de las PML como ABC's para la atenuación de reflexiones en ondas elásticas en sólidos fue propuesta por primera vez por F. Hastings, y J. B. Schneider (Hastings, y otros, 1996). En este trabajo se aplican las PML de manera análoga al trabajo de Berenger, pero teniendo en cuenta que la existencia de las componentes de esfuerzo transversal complican el proceso. Sin embargo, un año más tarde W. C. Chew y Q. H. Liu (Chew, y otros, 1994) propusieron la formulación de las PML en electromagnetismo mediante el estiramiento de las coordenadas complejas (*complex coordinate stretching*). Este método es computacionalmente equivalente al propuesto por Berenger (Taflove, y otros, 2005) pero la formulación y el desarrollo presentado es directamente aplicable a otros tipos de ondas así como a sistemas de coordenadas no ortogonales de una manera sencilla, robusta y elegante. Así, los mismos autores publicaron en (Chew, y otros, 1996) la generalización del método *complex coordinate stretching* para sólidos elásticos isotrópicos así como la particularización para el sistema de coordenadas cartesianas 2D. Más tarde Q. H. Liu presentó la implementación del método para sistemas de coordenadas curvilíneos (Liu, 1999).

La formulación del método *complex coordinate stretching* se basa en realizar un cambio de variable, de manera que las coordenadas espaciales ( $x$ ) quedan deformadas (*stretch*≡estirar). De esta manera la parte real de las coordenadas posee el sentido físico y la parte imaginaria de las coordenadas complejas se deforma una función determinada. Así, definimos las coordenadas complejas  $\tilde{x}$ :

$$x \rightarrow \tilde{x} = \int_0^x s_x(x') dx' \quad (125)$$

Siendo  $s_x$  una función continua a lo largo de la coordenada  $x$ . Este cambio de variable posee esta forma integral a propósito para que las diferenciales parciales en las nuevas coordenadas  $\tilde{x}$  sean:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \quad (126)$$

Además, elegimos la función  $s_x$  como:

$$s_x = \alpha_x + i \frac{\Omega_x}{\omega} \quad (127)$$

De esta manera, cuando  $\alpha_x=1$  y  $\Omega_x=0$  las coordenadas complejas definidas en (123) no se modifican y una onda que se propague por este dominio no sufrirá transformación alguna. Si escogemos los valores de estos parámetros tal que  $\alpha_x \geq 1$  y  $\Omega_x > 0$  una onda armónica que se propague a través de las coordenadas modificadas se atenúa exponencialmente.

Así, particularizando al modelo de sólidos elásticos 2D, las variables se deben descomponer en sus diferentes componentes. La notación empleada para la descomposición de los campos vectoriales de velocidad y esfuerzo es:

$$v_i = v_i^i + v_i^j \quad (128)$$

$$\tau_{ii} = \tau_{ii}^i + \tau_{ii}^j \quad (129)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^i + \tau_{ij}^j \quad (130)$$

Para cada componente ( $i=x, y$ ), ( $j= y, x$ ). Resumiendo, los subíndices indican las componentes físicas de los campos y los superíndices la descomposición de cada componente.

Así, las 5 ecuaciones del modelo de sólidos 2D se transforman realizando el cambio de variable y descomponiendo sus componentes en 9 expresiones:

Para las componentes ( $i=x, y$ ) de velocidad de partícula  $v_i$ ;

$$\rho \left( \alpha_x \frac{\partial v_x^x}{\partial t} + \Omega_x v_x^x \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \quad (131)$$

$$\rho \left( \alpha_y \frac{\partial v_x^y}{\partial t} + \Omega_y v_x^y \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (132)$$

$$\rho \left( \alpha_x \frac{\partial v_y^x}{\partial t} + \Omega_x v_y^x \right) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \quad (133)$$

$$\rho \left( \alpha_y \frac{\partial v_y^y}{\partial t} + \Omega_y v_y^y \right) = \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (134)$$

Para las componente ( $i=x, y$ ) de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\alpha_x \frac{\partial \tau_{xx}^x}{\partial t} + \Omega_x \tau_{xx}^x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x^x}{\partial x} \quad (135)$$

$$\alpha_y \frac{\partial \tau_{xx}^y}{\partial t} + \Omega_y \tau_{xx}^y = \lambda \frac{\partial v_y^y}{\partial y} \quad (136)$$

$$\alpha_x \frac{\partial \tau_{yy}^x}{\partial t} + \Omega_x \tau_{yy}^x = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (137)$$

$$\alpha_y \frac{\partial \tau_{yy}^y}{\partial t} + \Omega_y \tau_{yy}^y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (138)$$

Para la componente de esfuerzo de cizalla  $\tau_{xy}$  ;

$$\alpha_x \frac{\partial \tau_{xy}^x}{\partial t} + \Omega_x \tau_{xy}^x = \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (139)$$

$$\alpha_y \frac{\partial \tau_{xy}^y}{\partial t} + \Omega_y \tau_{xy}^y = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (140)$$

De esta manera, podemos identificar como afectan los parámetros  $\alpha_i$  y  $\Omega_i$  a una onda que se propague por las PML: el primero es el coeficiente de escalado de la PML y el segundo el de atenuación. Así, si  $\alpha_i \geq 1$  la onda en el interior de este dominio sufre una compresión temporal, es decir su longitud de onda dentro de la PML se divide por un factor  $\alpha_i$ . Así, aumentando este parámetro podemos aumentar el número de longitudes de onda que caben en la PML, es decir estamos disminuyendo la velocidad de propagación de la onda en la PML. El otro parámetro,  $\Omega_i$ , describe cómo de rápido se produce la atenuación de la onda en el interior de la PML.

De igual forma que ocurría en el método de Berenger, los parámetros  $\alpha_i$ ,  $\Omega_i$  se han de implementar como funciones continuas de  $x$  para que no se produzcan reflexiones. Así, podemos usar una función cuadrática para implementar la transición de  $\alpha_i$  desde 0 hasta  $\alpha_{max}$  y  $\Omega_i$  desde 1 hasta  $\Omega_{max}$ . Es muy importante tener en cuenta que, puesto que las mallas están al tresbolillo, la discretización de las funciones  $\alpha_i$  y  $\Omega_i$  se ha de realizar en puntos acorde a la discretización de los campos ( $x=i \cdot \Delta x$ ) o ( $x=i+1/2 \cdot \Delta x$ ) (Fig. 19).

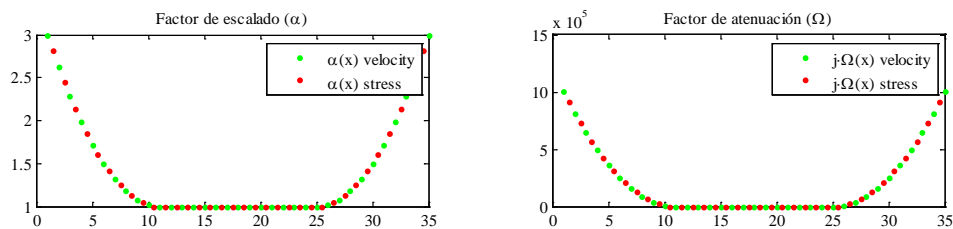


Fig. 19. Ejemplo de implementación de PML. Funciones  $\alpha_i$  y  $\Omega_i$  discretizadas para un dominio de 35 elementos, espesor de la capa 12 elementos,  $\alpha_{max}=3$ ,  $\Omega_{max}=10^6$  rad/s.

En cuanto a los valores máximos, se buscará una combinación de los dos parámetros que optimice la implementación de la capa, tanto en su efectividad (coeficiente de reflexión) como en su eficiencia (número de elementos de la PML). Empíricamente se ha obtenido que con factores del orden de  $\alpha_{max} \sim (2-4)$ ,  $\Omega_{max} \sim \omega_{max}$  de la onda incidente y espesor de la capa  $m \sim (12-20)$  elementos se producen reflexiones de -95dB, consideradas despreciables si se comparan con otras fuentes de error numérico.

Por otro lado, las ecuaciones no requieren un tratamiento especial en cuanto a la estabilidad, por lo que se respetará la condición de estabilidad formulada.

#### VI. 2. c. Implementación de las PML para el modelo de sólidos con pérdidas

La aplicación del método *complex coordinate stretching* para el modelo de sólidos con pérdidas propuesto en el apartado V. 4. a. es trivial, ya que la formulación de las pérdidas mediante los coeficientes de resistencia tiene la misma forma que la variable  $\Omega_i$ . Así implementaremos las PML en este modelo igual que en el apartado anterior, pero en el interior del dominio  $\alpha_i=1$  y  $\Omega_i=\gamma_i$  para todas las componentes  $i$  de nuestro sistema de coordenadas.

#### VI. 2. d. Implementación de las PML en sistemas de coordenadas curvilíneos

El método *complex coordinate stretching* se puede aplicar fácilmente a sistemas de coordenadas curvilíneos siguiendo el mismo procedimiento bajo ciertas consideraciones. Simplemente hemos de tener en cuenta que en el cambio de variable afecta a la dependencia radial que aparece en las ecuaciones de los sistemas polares, cilíndricos y esféricos:

$$r \rightarrow \tilde{r} = \int_0^r s_r(r') dr' = A_r(r) + i \frac{\Omega'_r(r)}{\omega} \quad (141)$$

Para las demás variables ( $\theta$ ,  $\varphi$  ó  $z$  según el sistema) se realizará un cambio de variable análogo al de coordenadas cartesianas visto anteriormente. Además, se realizará la descomposición de las componentes de los campos en función de la dependencia de cada una de ellas con cada coordenada. Concretamente las ecuaciones resultantes y la descomposición necesaria para estos sistemas de coordenadas están recopiladas en el anexo.



## VII. MODELO NUMÉRICO PROPUESTO PARA LA SIMULACIÓN DE TEJIDOS VEGETALES

### VII. 1. SIMULACIÓN CON MÓDULOS DE ELASTICIDAD ESTÁTICOS

Para obtener resultados correctos en un experimento numérico, necesitamos cumplir varios requisitos. El modelo matemático se ha de ajustar a la realidad que queremos describir, al menos en el rango de las variables con las que estemos trabajando. Por otro lado, los métodos numéricos empleados para implementación el modelo matemático han de estar optimizados para minimizar errores, ya que todos los métodos numéricos son siempre una aproximación a la solución analítica de un problema. Por último, los datos de entrada para las variables de nuestro modelo han de ser fieles a la realidad que representan.

Para la simulación numérica preliminar del tejido vegetal de la naranja se ha recurrido al modelo de sólidos con pérdidas en coordenadas cartesianas 3D. Así se han introducido los valores elásticos propuestos en la Tabla 1 y los demás parámetros que se presentan en la Tabla 2. La naranja se ha modelado como una esfera en la que se han dispuesto varias capas. En esta simulación se han utilizado además los siguientes parámetros:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$\rho$ Aire	1.21 kg/m <sup>3</sup>	$\lambda$ Aire	-0.142 MPa	$\mu$ Aire	0
$\rho$ Flavedo	903 kg/m <sup>3</sup>	$\lambda$ Flavedo	1,24 MPa	$\mu$ Flavedo	1,05 MPa
$\rho$ Albedo	820 kg/m <sup>3</sup>	$\lambda$ Albedo	1,88 MPa	$\mu$ Albedo	0,45 MPa
$\rho$ Sacos de zumo	978 kg/m <sup>3</sup>	$\lambda$ Sacos de zumo	-2.2·10 <sup>3</sup> MPa	$\mu$ Sacos de zumo	0
Radio de la naranja	5 cm				
Espesor del flavedo	2 mm				
Espesor del albedo	3 mm				
$\Delta x = \Delta y = \Delta z$	3,025·10 <sup>-5</sup> m	$\Delta t$	4,06·10 <sup>-8</sup> s	Frecuencia	40 kHz
$S_{courant}$	0.8	$N_{\lambda}$ mínima	10.8 n/λ	$N_{\lambda}$ máxima	142.14 n/λ
Espesor PML	12	(PML) $\alpha_{max}$	2	(PML) $\Omega_{max}$	5.02·10 <sup>-5</sup> rad/s
<b>Resultados</b>					
Velocidad de propagación longitudinal	54,62 m/s	Velocidad de propagación transversal	23,68 m/s	Velocidad de propagación Rayleigh	22.44 m/s

Tabla 2. Parámetros introducidos y resultados de la simulación preliminar.

### VII. 2. SIMULACIÓN CON MÓDULOS DE ELASTICIDAD DINÁMICOS

Los resultados obtenidos de esta primera simulación descubren que con este modelo o parámetros usados en él no podemos describir ondas con velocidades de propagación en la corteza de la naranja que se ajusten al menos aproximadamente a las medidas experimentalmente. Para conseguir ondas de tal velocidad de propagación con este modelo podemos seguir el siguiente razonamiento:

Conocemos las velocidades de propagación de las ondas superficiales medidas experimentalmente, así como existen múltiples referencias que demuestran que en tejidos biológicos (acuosos) (Bastard, y otros, 2009) las ondas longitudinales se propagan con velocidades

similares a las del agua. Mediante las dos velocidades de propagación  $c_R$  y  $c_L$  podemos obtener las constantes elásticas del medio sólido en el que se propaga como:

$$\lambda = \rho(c_P^2 + 2c_S^2) \quad \mu = \frac{\rho c_P^2 - \lambda}{2} \quad (142)$$

Si queremos obtener el módulo de Young y el módulo de Poisson:

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (143)$$

Así, considerando que la velocidad de la onda de Rayleigh es muy similar a la velocidad transversal si la comparamos con la velocidad longitudinal, obtenemos valores de las constantes elásticas de la corteza de la naranja:

Parámetro	Valor
Velocidad de propagación longitudinal	1500 m/s
Velocidad de propagación transversal	200 m/s
Velocidad de propagación Rayleigh	197.4 m/s
$\rho$ Flavedo	903 kg/m <sup>3</sup>
$\lambda$ Flavedo	1,95 GPa
$\mu$ Flavedo	36 MPa
$E$ Flavedo	107,3 MPa
$\nu$ Flavedo	0,491

Tabla 3. Parámetros necesarios para la corteza de la naranja

La primera constante de Lamé, aún no teniendo sentido físico, se aproxima al valor del módulo de compresibilidad para valores del módulo de Poisson altos. Así, podemos observar como  $\lambda$  se aproxima al valor de la compresibilidad del agua. Por otro lado, para que en nuestra naranja se produzcan ondas ( $c_R$  y  $c_L$ ) con dichas velocidades, el módulo de Poisson ha de aumentar bastante. Los tejidos biológicos y sólidos viscoelásticos pueden alcanzar módulos de Poisson de entorno ( $\nu=0,490-0,499$ ) (Goss, y otros, 1978) que se ajustan perfectamente a los resultados obtenidos aquí para sólidos elásticos. Por último, las diferencias existentes entre el módulo de Young inicial (estático) y el calculado aquí se explicarán en el apartado conclusiones.

La señal de entrada es una transformada wavelet, obtenida como la segunda derivada un pulso gaussiano. Con ella, aseguramos una transición suave con un mínimo transitorio. En el dominio de la frecuencia esta señal no tiene contenido espectral por encima de 40kHz para no introducir componentes dispersivas en el medio.

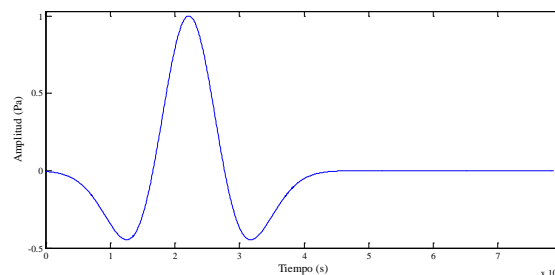


Fig. 20. Señal de entrada en el dominio temporal.

### VII. 3. COSTE COMPUTACIONAL

El coste computacional del algoritmo es muy alto debido a que para la implementación de las PML necesitamos descomponer las componentes de esfuerzo y velocidad según su dependencia con cada coordenada. Así, en 3D, las 3 componentes del campo de velocidad y las 6 del campo de esfuerzo se descomponen en 9 para la velocidad, 9 para el esfuerzo normal y 6 para el esfuerzo de cizalladura. Asimismo, necesitamos otras 3 mallas adicionales para guardar las componentes de velocidad individualmente e igualmente otras 6 mallas para las componentes de esfuerzo sin descomponer.

Por otro lado, ya que simulamos dominios heterogéneos es necesario guardar las características del medio en función del espacio, lo que computacionalmente requiere de otras tres mallas más: una para la densidad y otras 2 para las constantes elásticas.

En total tenemos 31 mallas para los campos y 3 para las constantes del medio.

Así, y sin contar factores minoritarios como las funciones de las PML que se pueden optimizar (aunque ello implique un mayor tiempo de procesado) podemos calcular el coste computacional del algoritmo en cartesianas trabajando en doble precisión como:

$$C \geq 8 \cdot (n_x \cdot n_y \cdot n_z) \cdot 34 \text{Bytes} \quad (144)$$

Así para mallar una naranja completa a 10 muestras por longitud de onda y a 40kHz, necesitaríamos 31,5 GBytes; y si acotamos el dominio en un cubo de 3cm de lado mediante PML necesitamos 800 MBytes de memoria, por lo que el procesado puede ser realizado en cualquier ordenador común.

## VIII. RESULTADOS

De los resultados de las simulaciones se desprende que el método numérico implementado describe los fenómenos ondulatorios descritos por la teoría. Así, las velocidades de propagación de las distintas ondas se ajustan a las predichas mediante el cálculo analítico a partir de sus constantes elásticas Fig. 21.

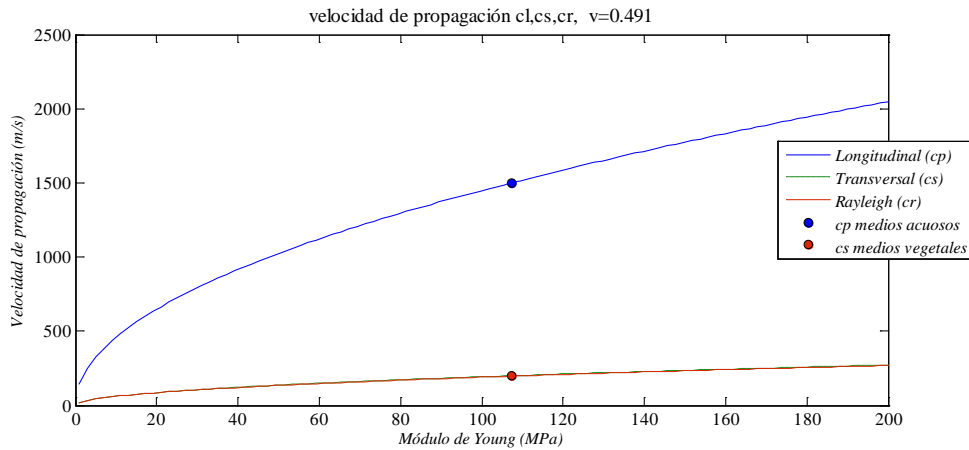


Fig. 21. Velocidades de propagación para ondas en función de la elasticidad del medio y para un módulo de Poisson de  $\nu=0.491$ .

Podemos representar la posición de partícula como la integral discreta de la velocidad de partícula, de manera que podemos apreciar representando en una gráfica como las partículas oscilan alrededor de su posición de equilibrio. Así, si representamos los elementos discretos pertenecientes a la corteza de la naranja podemos observar como estos vibran con el movimiento característica de una onda de superficie, es decir, las componentes longitudinales de la onda tienen una amplitud muy pequeña comparada con las transversales Fig. 22.

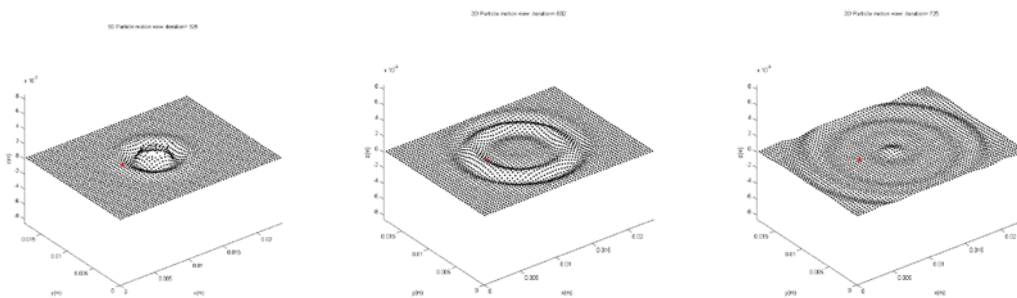


Fig. 22. Posición tridimensional de la posición de partícula en diferentes instantes de tiempo.

Con el objetivo de analizar más a fondo el comportamiento de las ondas superficiales en los medios vegetales, podemos representar la velocidad de partícula en función de la profundidad. Normalizaremos la profundidad a la longitud de onda en el medio vegetal, que es de entorno a 5mm en la superficie del tejido. Podemos apreciar como a pesar de las heterogeneidades del medio y de poseer este una geometría curvilínea se aprecian diferentes aspectos característicos de las ondas superficiales Fig. 23.

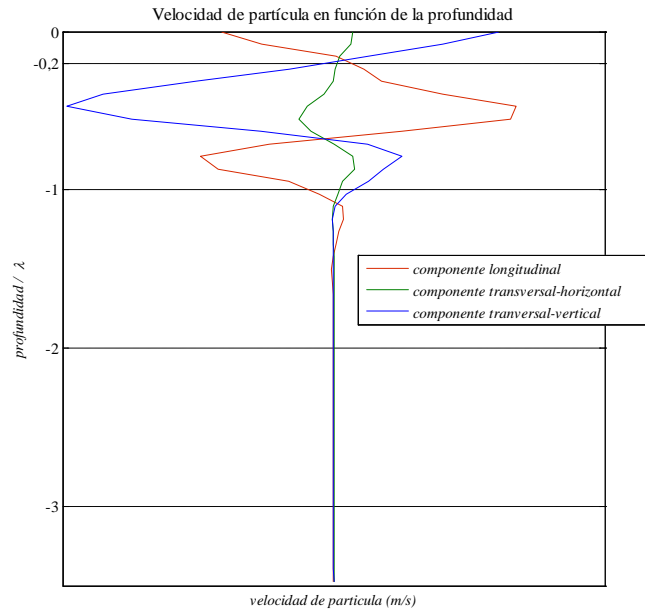


Fig. 23. Velocidad de partícula en el momento de mayor amplitud en el receptor situado en la superficie del sólido

Podemos observar como las componentes de velocidad están desfasadas espacialmente, de manera que la componente longitudinal es máxima cuando la transversal horizontal es mínima. Por otro lado, la onda se atenúa en función de la profundidad, y aún con la geometría curvilínea de nuestro problema, no consigue penetrar a una distancia mayor que  $\lambda$ . Por último, a una profundidad de alrededor de  $0,2\lambda$  las componentes de la velocidad se invierten lo que implica que el movimiento elíptico de las partículas también lo haga; es decir pasan de describir elipses retrógradas en el plano sagital a invertir su movimiento y girar en el sentido contrario.

Para el cálculo de la velocidad de propagación en la superficie del fruto virtual se ha medido la respuesta temporal en función del espacio en puntos de la corteza radialmente distribuidos. La configuración de las medidas es similar al ensayo real, con la diferencia que se ha medido en una cantidad mayor de puntos. Así, podemos representar las señales temporales en función de la distancia al punto de excitación Fig. 24. Los resultados de realizar un ajuste lineal por mínimos cuadrados de los valores de distancia a la excitación y el tiempo de vuelo medido son:

$$x = 183,9782 t - 0.0043$$

La superposición de la curva calculada y el gráfico tiempo espacio se muestran a continuación:

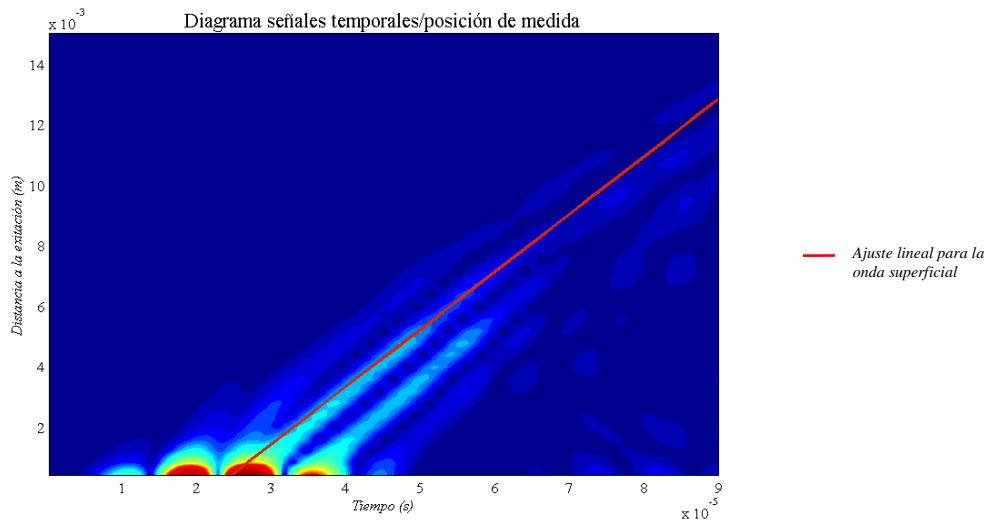


Fig. 24. Diagrama de la amplitud de las señales capturadas en función de la posición de los receptores para calcular las componentes superficiales

La velocidad de propagación es estimada como la pendiente de esta curva, es decir,  $c_{R,numérica}=183,97 \text{ m/s}$  mientras que el término independiente es solo el tiempo transcurrido hasta el primer máximo de señal. Si comparamos con la velocidad de Rayleigh teórica  $c_{R,teórica}=197.42 \text{ m/s}$  calculada para un coeficiente de Poisson de 0.491 obtenemos un error del 6.8%. Aun así debemos de tener en cuenta que la velocidad teórica puede variar si la geometría de la superficie es curvilínea y si existen heterogeneidades.

Es difícil separar en una señal las componentes superficiales y las longitudinales si no existe un retardo temporal entre la llegada de las ondas rápidas (longitudinales) y las más lentas (superficiales y transversales). Una solución a este problema es aumentar bastante el rango dinámico del diagrama espacio-temporal para poder distinguir claramente unas componentes de otras Fig. 25. Así, podemos observar en el gráfico como las trazas con una mayor pendiente se corresponden con las perturbaciones causadas por las ondas longitudinales, mientras que seguimos apreciando las trazas de menor pendiente que se corresponden a las componentes debidas a ondas elásticas lentas.

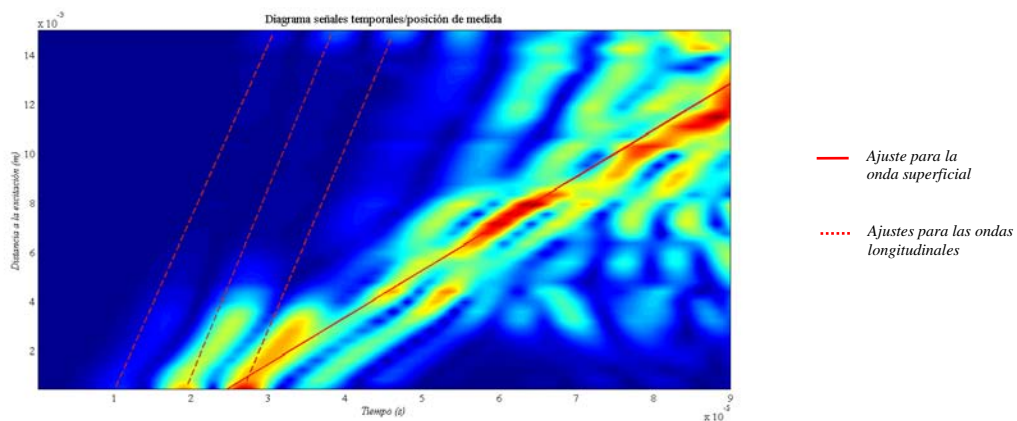


Fig. 25. Diagrama necesario para calcular las componentes longitudinales

Debido a que la amplitud de las trazas de la velocidad de propagación de la onda longitudinal es muy baja se ha optado por hacer varios ajustes para disminuir la incertidumbre. Así, como resultado de estos ajustes se obtiene una velocidad de propagación  $c_L=1357.40 \text{ m/s}$ , lo que supone un error del 9,5 % respecto de la velocidad longitudinal teórica en un medio homogéneo y sin geometría curvilínea.

Otra manera útil de representar la posición de partícula muy utilizada en sismología es la traza. Así, se dibuja un gráfico acumulativo de las posiciones que ha tomado la partícula. En función de la firma se puede detectar qué tipo de onda se está propagando Fig. 26.

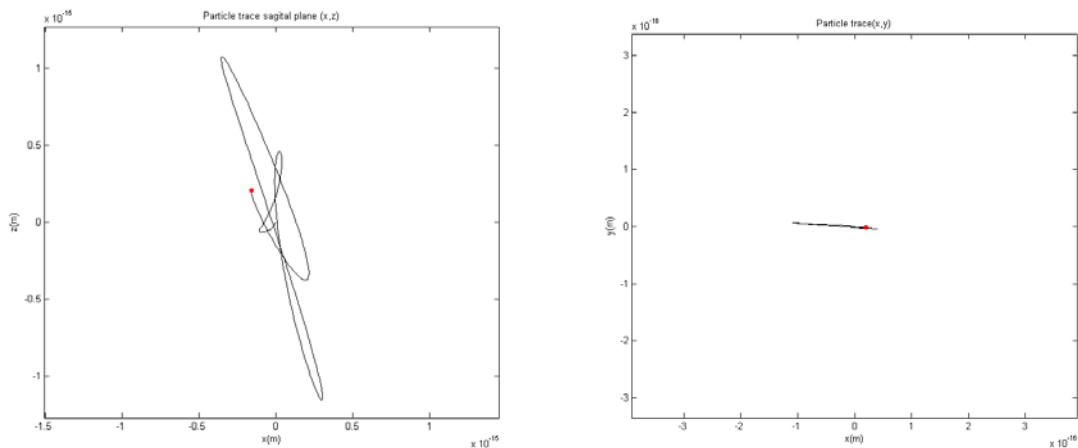


Fig. 26. Izquierda: traza de partícula en el momento de propagarse una onda superficial en la dirección  $-x$ . Derecha: traza en el momento de propagarse una onda longitudinal en la dirección  $-x$ .

Podemos observar como en la traza de la derecha, la partícula describe un movimiento elíptico, mientras que en la traza la de izquierda lo hace en la dirección de propagación de la onda.

A continuación mostramos un gráfico descriptivo en el que se representa el módulo del esfuerzo normal y en el que se aprecian las distintas ondas propagándose por el interior una naranja. Nótese la diferencia entre la longitud de onda y en amplitud de las vibraciones longitudinales y transversales. Fig. 27.

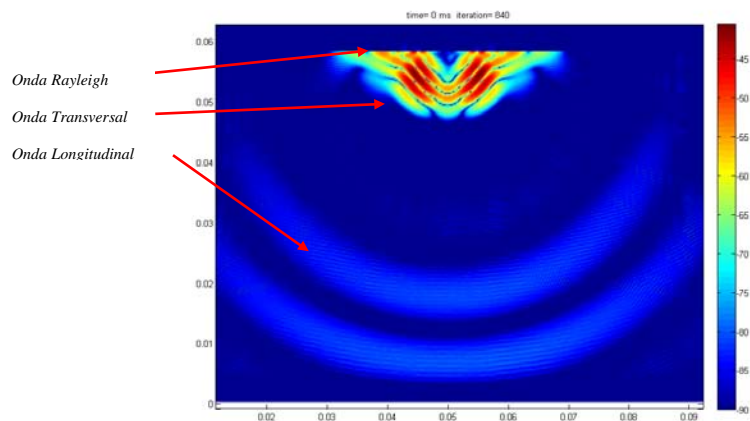


Fig. 27. Módulo del esfuerzo normal en una sección de la naranja mostrando las distintas ondas generadas en la corteza da la naranja.

Si representamos la posición de partícula podemos distinguir claramente la naturaleza de la vibración de los elementos. Nótese que en el aire exterior cercano a la corteza se aprecian ondas evanescentes. La baja amplitud de las ondas longitudinales en el interior de la corteza impide distinguirlos en esta representación.

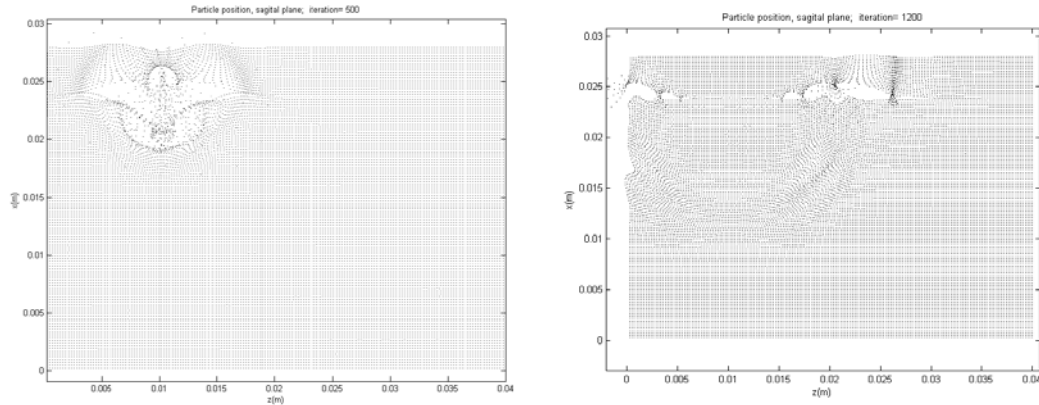


Fig. 28. Posición de partícula en una sección de la naranja en distintos instantes de tiempo.

Por último, mostramos de manera descriptiva como las ondas no llegan a atravesar la naranja debido a la alta absorción del medio y a los bajos coeficientes de transmisión causados por la estratificación en capas de muy diferente impedancia acústica existentes en la corteza de la naranja. Debido a que el dominio a simular en este caso es mucho mayor el muestreo espacial es mucho más bajo, por lo que los resultados de esta simulación son sólo descriptivos. Nótese como las ondas transversales no son capaces de propagarse por el fluido interior.

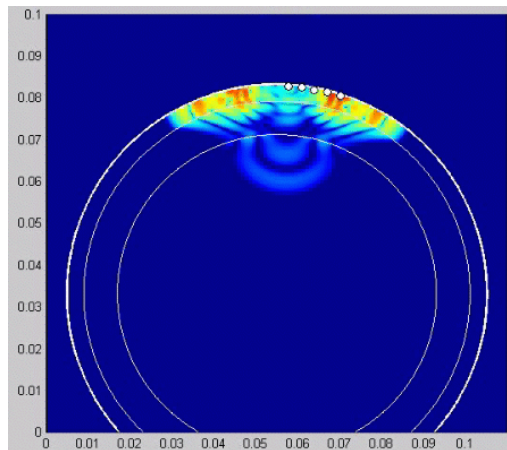


Fig. 29. Módulo del esfuerzo normal en una sección de la naranja mostrando las distintas ondas generadas en la corteza da la naranja en los diferentes estratos.



## IX. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado con éxito un modelo numérico basado en diferencias finitas capaz de describir los fenómenos ondulatorios existentes en los tejidos vegetales. Dicho modelo pone de manifiesto la necesidad de parámetros elásticos dependientes de la frecuencia, por lo que no podrán usarse los medidos mediante los comunes ensayos de esfuerzo-deformación. Este aspecto puede ser de gran interés a la hora de desarrollar técnicas ultrasónicas para la caracterización elástica de tejidos tales como la elastografía.

Respecto de los resultados obtenidos, este trabajo revela que la naturaleza ondulatoria de la superficie de la naranja está gobernada en por ondas de Rayleigh, que han sido caracterizadas y comparadas con las medidas experimentales obteniendo ajustes satisfactorios. Las componentes longitudinales de las ondas en el tejido de la naranja no son detectadas con facilidad en la superficie de esta, al igual que ocurría en el experimento.

Aún así, el modelo presentado es una aproximación muy simple a los fenómenos existentes en los tejidos biológicos, ya que no se han introducido términos que describan las fuertes características viscoelásticas distintivas de los medios biológicos.

## X. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido subvencionado por el Programa de Apoyo a la Investigación y Desarrollo (PAID-06-08) de la Universidad Politécnica de Valencia.

Personalmente quiero dedicar este trabajo a Javier por su incondicional apoyo, así como a Paco y Rubén; gracias por esta oportunidad. También quiero dedicar este trabajo a Mariajo y la I promoción del máster de ingeniería acústica de la EPSG que han sido capaces de soportarme durante este último inolvidable año.

## XI. REFERENCIAS

- Abbott J.A.** Quality measurements of fruits and vegetables. *Postharvest Biol. Technol.* 1999. 15:207–225.
- ASAE Standards 1998** S368.3 - Compression Test of Food Materials of Convex Shape. ASAE . Marzo de 95.
- Auld B.A.** *Acoustic Fields and Elastic Waves in Solids.* New York. Wiley, 1973. Vol. vols. I and II.
- Baryeh E. A.** Strength properties of avocado pear. *Journal of agricultural engineering research.* 2000. 76(4):389.
- Bastard Cécile, Remeniéras Jean-Pierre y Callé Samuel** Simulation of shear wave propagation in a soft medium using a pseudospectral time domain method. *J. Acoust. Soc. Am.* 2009. 126:4 .
- Bayliss A. y Turkel E.** Radiation boundary conditions for wave like equations. *Comm. Pure Appl. Math.* - 1980. 33:707.
- Bayliss A., Gunzburger M. y Turkel E.** Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *J. Appl. Math.* 1982. 42:430-451.
- Bechar A. [y otros]** Determination of mealiness in apples using ultrasonic measurements. *Biosystems engineering.* 2005. 91(3):329.
- Bellon V.** Tools for fruit and vegetable quality control: a review of current trends and perspectives. *Postharvesting operations and quality sensing, Proc. IV Int. Symp. Fruit and Vegetables Product Engineering.* / ed. F. Juste ed. - Valencia, Spain, 1993. 2:1–12.
- Berenger J.-P.** A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetics waves. *J. Comput. Phys.* 1994. 114:185–200.

- Biot M. A.** Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid, II. Higher Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of América*. 1956. 28(2):179-191.
- Biot M. A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range [*J. Acoust. Soc. Am.* 1956. 28:168–178.
- Botteldooren D.** Finite-difference time-domain simulation of low-frequency room acoustic problems *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. 98 (6):3302.
- Bunyaphlanan N.** Pd Thesis - Mechanical propieties of carrots tissues.1973.
- Burlew M.M. [y otros]** A new ultrasound tissue-equivalent material. *Radiology*. 1980. 134(2):517–520.
- Camarena F. y Martínez-Mora J.A.** Potential of ultrasound to evaluate turgidity and hydration of the orange peel. *Journal of food engineering* . 2006. 75(4):503.
- Camarena F., Martínez-Mora J.A. y Ardid M.** Ultrasonic study of the complete dehydration process of orange peel. *Postharvest biology and technology* . 2007. 43(1):115.
- Cerjan C. [y otros]** A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations *Geophysics*. 1985. 50(4):705–708.
- Clayton R. y Engquist B.** Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1977. 67(6):1529–1539.
- Consejo Regulador IGP - Citricos Valencianos - 10 de 10 de 2009. - <http://www.citricosvalencianos.com/>.
- Cooke J.R. y Rand R.H.** A mathematical study of resonance in intact fruits and vegetables using 3 media elastic sphere model. *J. Agric. Eng. Res.* 1973. 18:141–157.
- Chen P., McCarthy M.J. y Kauten R.** NMR for internal evaluation of fruits and vegetables. *Trans. ASAE* . 1989. 32:1747–1753.
- Cheng Y. y Haugh C.G.** Detecting Hollow Heart in Potatoes Using Ultrasound. *Transactions of the ASAE*. - 1994. 37(1):217-222.
- Chew W. C. y Liu Q.** Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition. *J. Comput. Acoust.*. 1996. 4(4):341-359.
- Chew W. C. y Weedon W. H.** A 3d perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave Optical Tech. Letters*. 1994. (7):590–604.
- D. Keith Wilson et al.** Time-domain calculations of sound interactions with outdoor ground surfaces *Applied Acoustics*. 2007. 68:173–200.
- Dewulf W.** Determining the firmness of a pear using finite element modal analysis. *Journal of agricultural engineering research* . 1999. 74(3):217.
- Engquist B. y Majda A.** Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*. 1977. 31:629-651.
- Escolano E. J.** Acoustic Equations in the Presence of Rigid Porous Materials Adapted to the Finite-Difference Time-Domain Method. *Journal of computational acoustics*. - 2007. - pág. 15(2):255.
- F. Chagla P. M. Smith** Stability Considerations for Perfectly Matched Layers in Piezoelectric Crystals . *IEEE Ultrasonics Symposium*. 2005. 0-7803-9383.
- F. Schubert A. Peiffer, B. Kohler** The elastodynamic finite integration technique for waves in cylindrical J. *Acoust. Soc. Am.*. 1998. 104(5):2604.
- FAO/FAOSTAT - The FAO Statistical Database 08 de 10 de 2009. - <http://faostat.fao.org/>.
- Fidelibus M., Teixeira A. A. y Davies F. S.** Mechanical propieties of orange peel and fruit treated pre-harvest with gibberellic acid. *Transactions of the ASAE*. - 2002. 45(4):1057-1062.
- Foresta L., Gibiat V. y Woignier T.** Biot's theory of acoustic propagation in porous media applied to aerogels and alcogels. *Journal of non-crystalline solids*. - 1998 . 225(1-3):287 .
- Foti Sebastiano** Multistation Methods for Geotechnical Characterization using Surface Waves PhD Degree in Geotechnical Engineering, 2000.
- Goss S.A., Johnston R.L. y Shnol S.E.** Comprehensive compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues. *J. Acoust. Soc. Am.*. 1978. 64(2):423–457.
- Grotte M. [y otros]** Young's modulus, Poisson's ratio, and Lamé's coefficients of golden delicious apple *International Journal of Food Properties*. - 2002. 5(2):333-349.
- Hastings F., Schneider J.B. y Broschat S.L.** Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *Acoust. Soc. Am.* - 1996. 100:3061–3069.
- Higdon R. L.** Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation. *Math. Comput.*. - 1986. 47(176):437–459.
- Higdon R. L.** Absorbing boundary conditions for elastic waves. *Geophysics* . - 1991. 56(2)231–241.
- Higdon R. L.** Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation. *Math. Comput.* 1987 . 49(179):65–90.
- Hosokawa A.** Simulation of ultrasound propagation through bovine cancellous bone using elastic and Biot's finite-difference time-domain methods. *J. Acoust. Soc. Am.*. 2005. 118(3):1782.

- Hosokawa Atsushi** Development of a Numerical Cancellous Bone Model for Finite-Difference Time-Domain Simulations of Ultrasound Propagation. *EEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*. 2008. 55(6):1219.
- Hui Y. H.** Handbook of Fruits and Fruit Processing - Ames, Iowa 50014, USA : Blackwell Publishing, 2006
- J. B. Schneider C. L. Wagner, S. L. Broschat** Implementation of transparent sources embedded in acoustic finite-difference time-domain grids . *J. Acoust. Soc. Am.* . - 1998. 103 (1):136.
- J. Redondo R. Picó, J. Alba, J. Ramis** Finite difference time domain methods in staggered grids for porous materials. 12° International Congress on Sound and Vibration, Lisbon. - 2005.
- Jancsok P. T. y al. et.** Investigation of the effect of shape on the acoustic response of conference' pears by finite element modelling. *Postharvest biology and technology* . 2001. 23(1):1.
- Jiménez-Cuesta M, Cuquerella J y Martínez-Javega J.M.** Determination of a color index for citrus degreening. *Proc Int Soc Citriculture* . 1981. 2:750-753.
- Jin F.** Basic properties of Rayleigh surface wave propagation along curved surfaces. *International journal of engineering science* . - 2005. -43.3-4:250..
- Jindal V. K. y Techasena O.** Compression tests for measuring the firmness of potatoes. *ASAE.*, - 1985. 85-1072.
- Jivanuwong Solos** PDThesis - Nondestructive detection of hollow heart in potatoes using ultrasonics Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.
- Katz D. S., Thiele E. T. y Taflove A** Validation and extensión to three dimensions of the Berenger PML absorbing boundary condition for FD-TD meshes. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*. 1994.. 4:268-270.
- Kim G. W.** Determination of the viscoelastic properties of apple flesh under quasi-static compression based on finite element method optimization. *Food Science and Technology Research* . 2008. 14(3):221.
- Kim K. B [y otros]** Determination of apple firmness by ultrasonic measurement [Conferencia] // XVIII IMEKO WORLD CONGRESS, Metrology for a Sustainable Development. - Rio de Janeiro, Brazil, 2006.
- Ladaniya Milind S.** Citrus Fruit - Biology, technology and evaluation: Academic Press, Elsevier, 2008.
- Levander A. R.** 'Use of the telegraphy equation to improve absorbing boundary efficiency for fourth-order acoustic wave finite difference schemes. *Bull. Seismol. Soc. Am.*. - 1985. 75(6):1847-1852.
- Lindhout Katina** Phisiology of chilling-related postharvest rind breakdown of navel oranges (*citrus sinensis* (L.) Osbeck) [Libro]. - Vitoria, Australia : La Trobe University, 2007.
- Lindman E. L.** Free-space' boundary conditions for the time dependent wave equation . *J. Comput. Phys.*. - 1975. 18:66-78.
- Liu Q. H.** A three-dimensional finite difference simulation of sonic logging. *The Journal of the Acoustical Society of America*. - 1996. 100:72.
- Liu Q. H.** Perfectly matched layers for elastic waves in cylindrical and spherical coordinates. *The Journal of the Acoustical Society of America* . - 1999. 105:2075.
- Loodts J., et. al.** Micromechanics: Simulating the elastic behavior of onion epidermis tissue. *Journal of texture studies* . - 2006. 37:16.
- LoVetri J** Modeling of the seat dip effect using the finite-difference time-domain method. *The Journal of the Acoustical Society of America*. - 1996. . 100:2204.
- Malischewsky P.G.** Comparison of approximated solutions for the phase velocity of Rayleigh waves . *Nanotechnology* . - 2005. 16:995-996.
- Manduca A. [y otros]** Magnetic resonance elastography: Non-invasive mapping of tissue . *Medical Image Analysis*. - 2001. 5:237-254.
- Mebatsion H. K.** Modelling fruit (micro) structures, why and how? . *Trends in food science & technology*. 2008. 19(2):59.
- Mizrach A.** Determination of avocado and mango fruit properties by ultrasonic technique. *Ultrasonics* . - 2000. 38 (1-8):717.
- Mizrach A.** Ultrasonic technology for quality evaluation of fresh fruit and vegetables in pre-and postharvest processes. *Postharvest biology and technology*. 2008. 48:315-330.
- Mur G.** Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Trans. Electromagnet. Compat.* 1981. 23:377.
- Nielsen M.** Low frequency ultrasonics for texture measurements in cooked carrots (*Daucus carota* L.) . *Journal of food science*. 1997. 62(6):1167.
- Nourain J. [y otros]** Firmness evaluation of melon using its vibration characteristic and finite element analysis . *Journal of Zhejiang University. Science B.* - 2005. 6B(6):483-490.
- O.M. Ramahi A. Khebir, R. Mittra,** Numerically derived absorbing boundary condition for the solution of open region scattering problems. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 1991. 39:350-353.
- Olmo M., Nadas A. y García J.M.** Nondestructive Methods to Evaluate Maturity Level of Oranges . *Journal Of Food Science* . - 2000. 65(2):365 .

- Ozdenvar T** Algorithms for staggered-grid computations for poroelastic, elastic, acoustic, and scalar wave equations. *Geophysical prospecting*. 1997. 45(3):403.
- Peng C. y Toksöz M. N.** An optimal absorbing boundary condition for finite difference modeling of acoustic and elastic wave propagation. *J. Acoust. Soc. Am.* 1994. 95:733–745.
- Randall C. J.** Absorbing boundary for the elastic wave equation: Velocity–stress formulation. *Geophysics*. - 1989. 54(9):1141–1152.
- Rayleigh L.** On waves propagating along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*. - 1887. 17:4.
- Schröder Christoph T. y Scott Waymond R.** On the Stability of the FDTD Algorithm for Elastic Media at a Material Interface. *IEEE TRANSACTIONS ON GEOSCIENCE AND REMOTE SENSING*. 2002. 40(2):474.
- Seth Stein Michael W.** An Introduction to Seismology, Earthquakes and Earth Structure. Malden, USA : Blackwell Publishing, 2003.
- Singh K.K. y Reddy B.S.** Measurement of mechanical properties of sweet orange. *J. Fd. J. Fd. Sci. Technol.* 2006. 42:442–445.
- Singh Krishna K. y B. Sreenivasula** Post-harvest physico-mechanical properties of orange peel and fruit . *Journal of Food Engineering*. . 006. 73:112–120.
- Taflove A. y Brodwin M. E.** Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time dependent Maxwell’s equations. *IEEE Trans. Microw. Theory Techniques*. - 1975. MTT-23(8):623–630.
- Taflove A. y Hagness S.** Computational electrodynamics. The finite difference time domain method, 3<sup>a</sup> ed. Nort : Artech House Inc., 2005.
- Taylor C** Electromagnetic pulse scattering in time-varying inhomogeneous media. *IEEE transactions on antennas and propagation*. 1969. 17(5):585.
- Teixeira F. L** PML-FDTD in cylindrical and spherical grids. *IEEE microwave and guided wave letters*. 1997. 7(9):285.
- Virieux J** P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method . *Geophysics*. 1986. 51 (4): 889.
- Wang S.** Finite-difference time-domain approach to underwater acoustic scattering problems. *J. Acoust. Soc. Am.* 1996. 99(4):1924–1931.
- Wilson D. K.** Time-domain equations for sound propagation in rigid-frame porous media. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2004. 116:1889.
- Wu N. y Pitts M.J.** Development and validation of a finite element model of an apple fruit cell. *Postharvest Biology and Technology*. 1999. 16:1-8.
- Yee K.S.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antenna Propagat.* 1966. AP-14(5):302-307.
- Yuan Xiaojun y al. et** Formulation and Validation of Berenger’s PML Absorbing Boundary for the FDTD Simulation of Acoustic Scattering. *IEEE TRANSACTIONS ON ULTRASONICS, FERROELECTRICS, AND FREQUENCY CONTROL*. - 1997. 44(4):816.
- Z. P. Liao H.L. Wong, B.P. Yang, Y.F. Yuan** A transmitting boundary for transient wave analysis . *Scientia Sinica*. 1984. 27:1063-1076.
- Zwikker C. y Kosten C. W.** Sound absorbing materials. New York : Elsevier, 1949.

## XII. ANEXOS

### XII. 1. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO FDTD EN EL MODELO DE FLUIDOS

#### XII. 1. a. 3D, Sistema de coordenadas cartesianas

El operador diferencial gradiente  $\nabla$  en coordenadas cartesianas 3D  $(x, y, z)$  viene dado por:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (145)$$

Siendo  $\hat{i}$  el vector unitario en la dirección  $i$ . Por otro lado, la divergencia en este sistema de coordenadas utilizando el operador gradiente y la definición de producto escalar:

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (146)$$

De esta manera, en coordenadas cartesianas podemos reescribir las ecuaciones constitutivas del modelo de fluidos como:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (147)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (148)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad (149)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -k \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (150)$$

Donde  $v_i$  ( $i=x, y, z$ ) es la componente ortogonal de velocidad de partícula.

Siguiendo el mismo procedimiento discretizaremos las magnitudes en espacio y tiempo de acorde a la Fig. 28.

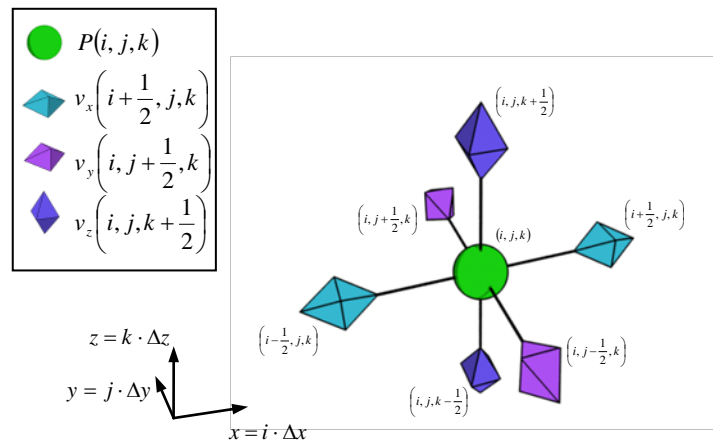


Fig. 30. Mallado del espacio 3D del modelo de fluidos; sistema de coordenadas cartesiano

Consecuentemente, las ecuaciones del modelo de fluidos en coordenadas cartesianas serán:

$$\rho \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta t} = - \frac{P^n(i+1, j, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta x} \quad (151)$$

$$\rho \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta t} = - \frac{P^n(i, j+1, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta y} \quad (152)$$

$$\rho \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = - \frac{P^n(i, j, k+1) - P^n(i, j, k)}{\Delta z} \quad (153)$$

$$\frac{P^{n+1}(i, j, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta t} = -k \left( \begin{array}{l} \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} + \dots \\ \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} + \dots \\ \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \end{array} \right) \quad (154)$$

Por tanto, las ecuaciones de actualización quedarán como:

$$v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) = v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^n(i+1, j, k) - P^n(i, j, k)) \quad (155)$$

$$v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) = v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^n(i, j+1, k) - P^n(i, j, k)) \quad (156)$$

$$v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) = v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta z} (P^n(i, j, k+1) - P^n(i, j, k)) \quad (157)$$

$$P^{n+1}(i, j, k) = P^n(i, j, k) - k \Delta t \left( \begin{array}{l} \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} + \dots \\ \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} + \dots \\ \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \end{array} \right) \quad (158)$$

La implementación de ABC's tipo PML se realizará de forma similar a lo propuesto en el capítulo VI. 2. a. , pero teniendo en cuenta que la descomposición de las componentes de presión ha de realizarse en tres dimensiones. En total aparecen 6 ecuaciones para discretizar.

La condición de estabilidad vendrá dada por:

$$S = \frac{c_{\max} \Delta t}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} \leq 1 \quad (159)$$

La dispersión numérica podemos evaluarla igualmente con el muestreo espacial, de manera que obtendremos valores aceptables para:

$$N_\lambda \equiv \frac{c_{\min}}{f_{\max} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} \geq 10 \quad (160)$$

### XII. 1. b. 2D, Sistema de coordenadas polares

De igual forma, el gradiente y la divergencia suponiendo coordenadas polares ( $r, \theta$ ) serán:

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (161)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (162)$$

Donde  $v_i$  ( $i = r, \theta$ ) es la componente  $i$  de la velocidad de partícula, por lo que para coordenadas polares, las ecuaciones constitutivas del modelo de fluidos se pueden expresar como:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial r} \quad (163)$$

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (164)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -k \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \right) \quad (165)$$

De manera análoga se procederá a discretizar las ecuaciones (163-165), teniendo en cuenta que la componente de velocidad  $v_r$  no existe para las posiciones enteras de  $i$  por estar las mallas al tresbolillo; dicha componente de velocidad ha de ser aproximada como:

$$v_r^{n+\frac{1}{2}}(i, j) = \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j\right)}{2} \quad (166)$$

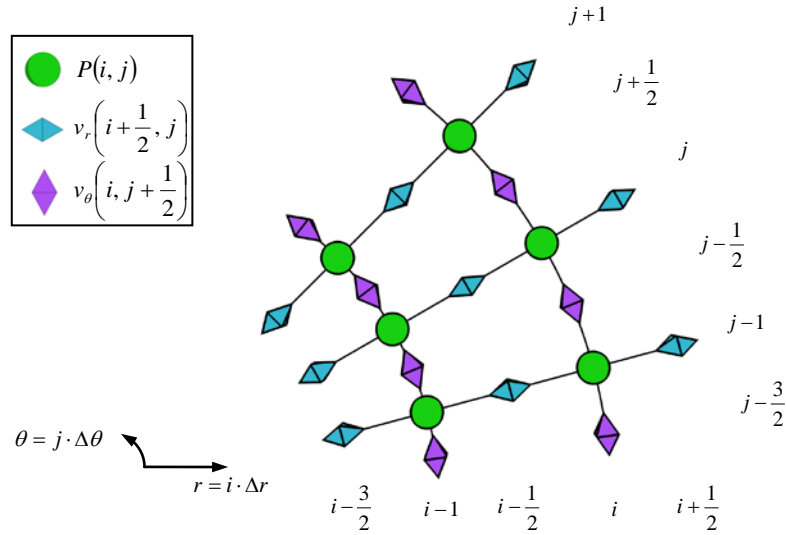


Fig. 31. Mallado del espacio 2D del modelo de fluidos; sistema de coordenadas polar

Así, las ecuaciones quedarán como:

$$\rho \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta t} = - \frac{P^n(i+1, j) - P^n(i, j)}{\Delta r} \quad (167)$$

$$\rho \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = - \frac{1}{r(i)} \frac{P^n(i, j+1) - P^n(i, j)}{\Delta \theta} \quad (168)$$

$$\frac{P^{n+1}(i, j) - P^n(i, j)}{\Delta t} = -k \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta r} + \dots \right) + \frac{1}{r(i)} \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{2} + \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta \theta} \right) \quad (169)$$

Despejando en función del campo desconocido (instante futuro), las ecuaciones de actualización en sistema de coordenadas polar quedan como:

$$v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta r} (P^n(i+1, j) - P^n(i, j)) \quad (170)$$

$$v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\rho \cdot \Delta \theta} \frac{1}{r(i)} (P^n(i, j+1) - P^n(i, j)) \quad (171)$$

$$P^{n+1}(i, j) = P^n(i, j) - k \Delta t \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta r} + \frac{1}{r(i)} \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{2} + \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta \theta} \right) \right) \quad (172)$$



Para la implementación de las PML en este modelo se ha de descomponer el campo escalar de presión en sus componentes ficticias, así implementado las ABC como se describe en VI. 2. a. obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$P = P^r + P^\theta \quad (173)$$

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_r}{\partial t} + \Omega_r v_r \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (174)$$

$$\rho \left( A_r \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \Omega'_r v_\theta \right) = - \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (175)$$

$$\left( \alpha_r \frac{\partial P^r}{\partial t} + \Omega_r P^r \right) = -k \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (176)$$

$$\left( A_r \frac{\partial P^\theta}{\partial t} + \Omega'_r P^\theta \right) = -k \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (177)$$

La condición de estabilidad vendrá dada por:

$$S = \frac{c_{\max} \Delta t}{\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\min})^2}} \leq 1 \quad (178)$$

Donde podemos observar que el término  $\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\min})^2}$  es la diagonal más pequeña que podemos encontrar en las celdas trapezoidales de nuestro dominio.

La dispersión numérica podemos evaluarla igualmente con el muestreo espacial, de manera que obtendremos valores aceptables para:

$$N_\lambda \equiv \frac{c_{\min}}{f_{\max} \sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\max})^2}} \geq 10 \quad (179)$$

Aquí, el término  $\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\max})^2}$  es la diagonal más grande que podemos encontrar en nuestro dominio.

### XII. 1. c. 3D, Sistema de coordenadas cilíndrico

Definiendo el sistema de coordenadas cilíndrico  $(r, \theta, z)$  de manera que  $r$  sea la distancia radial al centro de coordenadas,  $\theta$  se corresponda al ángulo polar y  $z$  la componente de elevación, podemos escribir el operador gradiente  $\nabla$  como:

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (180)$$

Por otro lado, la divergencia de la velocidad  $\mathbf{v}$  será:

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (181)$$

Donde  $v_i$  ( $i = r, \theta, z$ ) es la componente  $i$  de la velocidad de partícula. Así, las expresiones () se pueden reescribir en coordenadas cilíndricas como:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (182)$$

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (183)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (184)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -k \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (185)$$

Utilizando un sistema de coordenadas cilíndrico y discretizando el espacio según a Fig. 30:

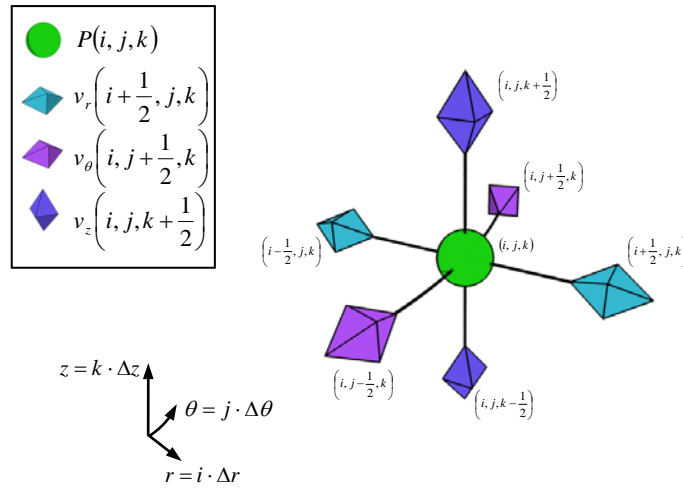


Fig. 32. Mallado del espacio 3D del modelo de fluidos; sistema de coordenadas cilíndrico

$$\rho \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta t} = - \frac{P^n(i+1, j, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta r} \quad (186)$$

$$\rho \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta t} = - \frac{1}{r(i)} \frac{P^n(i, j+1, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta \theta} \quad (187)$$

$$\rho \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) - v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = - \frac{P^n(i, j, k+1) - P^n(i, j, k)}{\Delta z} \quad (188)$$

$$\frac{P^{n+1}(i, j, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta t} = -k \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta r} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{r(i)} \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{2} + \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta \theta} \right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \right) \quad (189)$$

Las ecuaciones de actualización serán entonces:

$$v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) = v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta r} \left( P^n(i+1, j, k) - P^n(i, j, k) \right) \quad (190)$$

$$v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) = v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta \theta} \frac{1}{r(i)} \left( P^n(i, j+1, k) - P^n(i, j, k) \right) \quad (191)$$

$$v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) = v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta z} \left( P^n(i, j, k+1) - P^n(i, j, k) \right) \quad (192)$$

$$P^{n+1}(i, j, k) = P^n(i, j, k) - k \Delta t \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta r} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{r(i)} \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{2} + \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta \theta} \right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \right) \quad (193)$$

Podemos observar como existe una singularidad para  $r=0$  lo que provoca que inestabilidad numérica en el método. Dicha singularidad existe para  $i=0$ , por lo que se puede evitar la inestabilidad terminando la malla con un elemento de presión en  $r=0$  y a continuación los elementos de velocidad  $v_r$  a una distancia  $\Delta r/2$  del centro. En cualquier caso, para el estudio aquí propuesto no es necesario este especial tratamiento ya que debido a la gran atenuación de los tejidos vegetales la onda nunca atraviesa el interior. Por ello, se acotará el dominio tanto radial como angular mediante una PML.

Dicha PML se implementará de la siguiente manera:

$$P = P^r + P^\theta + P^z \quad (194)$$

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_r}{\partial t} + \Omega_r v_r \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} \quad (195)$$

$$\rho \left( A_r \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \Omega'_r v_\theta \right) = -\frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (196)$$

$$\rho \left( \alpha_z \frac{\partial v_z}{\partial t} + \Omega_z v_z \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad (197)$$

$$\left( \alpha_r \frac{\partial P^r}{\partial t} + \Omega_r P^r \right) = -k \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (198)$$

$$\left( A_r \frac{\partial P^\theta}{\partial t} + \Omega'_r P^\theta \right) = -k \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (199)$$

$$\left( \alpha_r \frac{\partial P^z}{\partial t} + \Omega_r P^z \right) = -k \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (200)$$

La condición de estabilidad vendrá dada por:

$$S = \frac{c_{\max} \Delta t}{\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\min})^2 + (\Delta z)^2}} \leq 1 \quad (201)$$

Donde podemos observar que el término  $\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\min})^2 + (\Delta z)^2}$  es la diagonal más pequeña que podemos encontrar en las celdas de nuestro dominio.

La dispersión numérica podemos evaluarla igualmente con el muestreo espacial, de manera que obtendremos valores aceptables para:

$$N_\lambda \equiv \frac{c_{\min}}{f_{\max} \sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\max})^2 + (\Delta z)^2}} \geq 10 \quad (202)$$

Aquí, el término  $\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\max})^2 + (\Delta z)^2}$  es la diagonal más grande que podemos encontrar en nuestro dominio.

### XII. 1. d. 3D, Sistema de coordenadas esférico

Si definimos el sistema de coordenadas esférico  $(r, \theta, \phi)$  de manera que  $r$  es la distancia radial,  $\theta$  se corresponda con el ángulo de azimut o elevación y  $\phi$  con el ángulo polar. De esta manera, podemos definir el gradiente  $\nabla$  como:

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (203)$$

Por otro lado, la divergencia en coordenadas esféricas es:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (204)$$

Donde  $v_i$  ( $i = r, \theta, \phi$ ) es la componente de la magnitud vectorial velocidad de partícula. Así, las expresiones () se pueden reescribir en coordenadas esféricas como:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (205)$$

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (206)$$

$$\rho \frac{\partial v_\phi}{\partial t} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \quad (207)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -k \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( 2v_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \right) \quad (208)$$

Análogamente para obtener un método numérico para la simulación de fluidos en coordenadas esféricas se discretizarán las ecuaciones (205-208) según el esquema Fig. 31.

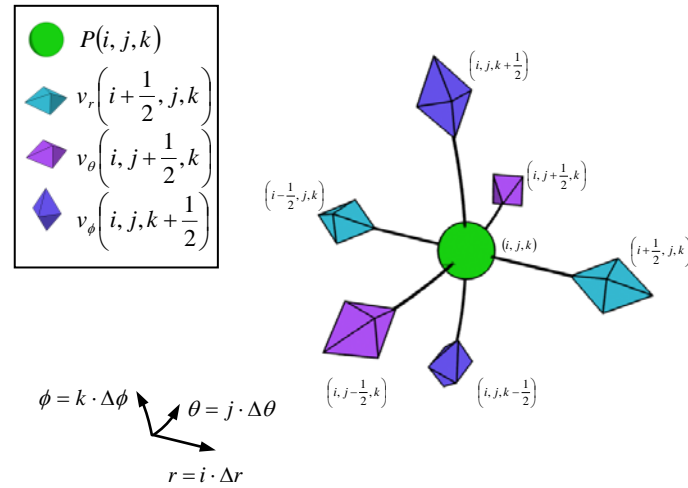


Fig. 33. Mallado del espacio 3D del modelo de fluidos; sistema de coordenadas esférico

$$\rho \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta t} = -\frac{P^n(i+1, j, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta r} \quad (209)$$

$$\rho \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta t} = -\frac{1}{r(i)} \frac{P^n(i, j+1, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta \theta} \quad (210)$$

$$\rho \frac{v_\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_\phi^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta t} = -\frac{1}{r(i) \sin\left(j+\frac{1}{2}\right)} \frac{P^n(i, j+1, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta \phi} \quad (211)$$

$$\frac{P^{n+1}(i, j, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta t} = -k \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta r} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{r(i)} \cot(j) \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta \theta} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin(j)} \frac{v_\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_\phi^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta \phi} \right) \quad (212)$$

Las ecuaciones de actualización serán:

$$v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) = v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta r} \left(P^n(i+1, j, k) - P^n(i, j, k)\right) \quad (213)$$

$$v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) = v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta \theta} \frac{1}{r(i)} \left(P^n(i, j+1, k) - P^n(i, j, k)\right) \quad (214)$$

$$v_\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) = v_\phi^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta \phi} \frac{1}{r(i) \sin\left(j+\frac{1}{2}\right)} \left(P^n(i, j+1, k) - P^n(i, j, k)\right) \quad (215)$$

$$P^{n+1}(i, j, k) = P^n(i, j, k) - k \Delta t \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta r} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{r(i)} \left( + v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right) + \dots \right) \right. \\ \left. + \cot(j) \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta \theta} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin(j)} \frac{v_\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta \phi} \right) \quad (216)$$

En esta discretización existe una singularidad similar a la existente en coordenadas polares cilíndricas para  $r=0$  que puede ser tratada análogamente. Por otro lado, las expresiones ( ) y ( ) tienden a infinito para  $\sin(\theta)=0$  y para  $\cot(\theta)=0$ , es decir, en ambos casos cuando  $\theta=0$ . En el dominio discreto, ello sucede tanto como para  $j=0$  como para  $j+\frac{1}{2}=0$  por lo que el problema no podrá solucionarse mediante la simple colocación de elementos de presión o velocidad. En principio para este trabajo no será necesario tratar esta singularidad ya que trabaja en un dominio acotado y se evitará incluir  $\theta=0$  o su equivalente en coordenadas cartesianas, el propio eje  $z$  ( $x^2+y^2=0$ ).

La implementación de la PML se realizará acorde a, donde el campo de presión solo se ha de descomponer en dos componentes ficticias, por lo que sólo necesitaremos 5 incógnitas en lugar de las 6 necesarias para coordenadas cartesianas:

$$P = P^r + P^{\theta\phi} \quad (217)$$

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_r}{\partial t} + \Omega_r v_r \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (218)$$

$$\rho \left( A_r \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \Omega'_r v_\theta \right) = - \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (219)$$

$$\rho \left( A_r \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \Omega'_r v_\phi \right) = - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \quad (220)$$

$$\left( \alpha_r \frac{\partial P^r}{\partial t} + \Omega_r P^r \right) = -k \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (221)$$

$$\left( A_r \frac{\partial P^{\theta\phi}}{\partial t} + \Omega'_r P^{\theta\phi} \right) = -k \left( 2v_r + \cot \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (222)$$

La condición de estabilidad vendrá dada por:

$$S = \frac{c_{l,\max} \Delta t}{\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\min} \sin \phi_{\min})^2 + (\Delta r \Delta \phi_{\min})^2}} \leq 1 \quad (223)$$

Donde podemos observar que el término  $\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\min} \sin \phi_{\min})^2 + (\Delta r \Delta \phi_{\min})^2}$  es la diagonal más pequeña que podemos encontrar en las celdas de nuestro dominio.

La dispersión numérica podemos evaluarla igualmente con el muestreo espacial, de manera que obtendremos valores aceptables para:

$$N_\lambda \equiv \frac{c_{\min}}{f_{\max} \sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\max} \sin \phi_{\max})^2 + (\Delta r \Delta \phi_{\max})^2}} \geq 10 \quad (224)$$

Aquí, el término  $\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta r \Delta \theta_{\max} \sin \phi_{\max})^2 + (\Delta r \Delta \phi_{\max})^2}$  es la diagonal más grande que podemos encontrar en nuestro dominio.

## XII. 2. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO FDTD EN EL MODELO DE SÓLIDOS

### XII. 2. a. 3D, Sistema de coordenadas cartesianas

Definiendo la velocidad  $\mathbf{v}$  y el esfuerzo  $\boldsymbol{\tau}$  en coordenadas cartesianas como:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (225)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (226)$$

Donde  $\tau_{ii}$  ( $i=x, y, z$ ) son los esfuerzos normales y  $\tau_{ij}$  ( $i=x, y, z; j=x, y, z$ ) son los esfuerzos de cizalla. Es importante señalar que solo existen 6 componentes independientes ya que para sólidos isotrópicos  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  ( $i=x, y, z; j=x, y, z$ ) (Auld, 1973). Utilizando el operador gradiente  $\nabla$  y la divergencia en coordenadas cartesianas 3D las ecuaciones constitutivas se pueden reescribir como:

$$\rho \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{bmatrix} = \nabla \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (227)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} & \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} & \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} & \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} \end{bmatrix} = \lambda \bar{\mathbf{I}} \nabla \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \mu \left( \nabla \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \nabla \right) \quad (228)$$

Así, resolviendo en componentes cartesianas para la componente ( $i=x, y, z$ ) de velocidad de partícula  $v_i$ ;

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (229)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (230)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (231)$$

Para la componente ( $i=x, y, z$ ) de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (232)$$

$$\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (233)$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (234)$$

Para la componente ( $i = x, y, z; j = x, y, z; i \neq j$ ) de esfuerzo de cizalla  $\tau_{ij}$ ;

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (235)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (236)$$



$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (237)$$

Para la implementación de las PML en este sistema de coordenadas se ha de realizar la descomposición de las distintas componentes de los campos. Sin la descomposición tenemos un sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas; al descomponer los campos obtenemos un sistema de 32 ecuaciones con 32 incógnitas:

$$v_x = v_x^x + v_x^y + v_x^z \quad v_y = v_y^x + v_y^y + v_y^z \quad v_z = v_z^x + v_z^y + v_z^z \quad (238)$$

$$\tau_{xx} = \tau_{xx}^x + \tau_{xx}^y + \tau_{xx}^z \quad \tau_{yy} = \tau_{yy}^x + \tau_{yy}^y + \tau_{yy}^z \quad \tau_{zz} = \tau_{zz}^x + \tau_{zz}^y + \tau_{zz}^z \quad (239)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^x + \tau_{xy}^y \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^y + \tau_{yz}^z \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^x + \tau_{xz}^z \quad (240)$$

Para las componentes ( $i=x, y$ ) de velocidad de partícula  $v_i$ ;

$$\rho \left( \alpha_x \frac{\partial v_x^x}{\partial t} + \Omega_x v_x^x \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \quad \rho \left( \alpha_z \frac{\partial v_x^z}{\partial t} + \Omega_z v_x^z \right) = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad \rho \left( \alpha_y \frac{\partial v_x^y}{\partial t} + \Omega_y v_x^y \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (241)$$

$$\rho \left( \alpha_x \frac{\partial v_y^x}{\partial t} + \Omega_x v_y^x \right) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \quad \rho \left( \alpha_y \frac{\partial v_y^y}{\partial t} + \Omega_y v_y^y \right) = \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad \rho \left( \alpha_z \frac{\partial v_y^z}{\partial t} + \Omega_z v_y^z \right) = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (242)$$

$$\rho \left( \alpha_x \frac{\partial v_z^x}{\partial t} + \Omega_x v_z^x \right) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \quad \rho \left( \alpha_y \frac{\partial v_z^y}{\partial t} + \Omega_y v_z^y \right) = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \quad \rho \left( \alpha_z \frac{\partial v_z^z}{\partial t} + \Omega_z v_z^z \right) = \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (243)$$

Para las componente ( $i=x, y$ ) de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\alpha_x \frac{\partial \tau_{xx}^x}{\partial t} + \Omega_x \tau_{xx}^x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x^x}{\partial x} \quad \alpha_y \frac{\partial \tau_{xx}^y}{\partial t} + \Omega_y \tau_{xx}^y = \lambda \frac{\partial v_y^y}{\partial y} \quad \alpha_z \frac{\partial \tau_{xx}^z}{\partial t} + \Omega_z \tau_{xx}^z = \lambda \frac{\partial v_z^z}{\partial z} \quad (244)$$

$$\alpha_x \frac{\partial \tau_{yy}^x}{\partial t} + \Omega_x \tau_{yy}^x = \lambda \frac{\partial v_x^x}{\partial x} \quad \alpha_y \frac{\partial \tau_{yy}^y}{\partial t} + \Omega_y \tau_{yy}^y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y^y}{\partial y} \quad \alpha_z \frac{\partial \tau_{yy}^z}{\partial t} + \Omega_z \tau_{yy}^z = \lambda \frac{\partial v_z^z}{\partial z} \quad (245)$$

$$\alpha_x \frac{\partial \tau_{zz}^x}{\partial t} + \Omega_x \tau_{zz}^x = \lambda \frac{\partial v_x^x}{\partial x} \quad \alpha_y \frac{\partial \tau_{zz}^y}{\partial t} + \Omega_y \tau_{zz}^y = \lambda \frac{\partial v_y^y}{\partial y} \quad \alpha_z \frac{\partial \tau_{zz}^z}{\partial t} + \Omega_z \tau_{zz}^z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z^z}{\partial z} \quad (246)$$

Para la componente de esfuerzo de cizalla  $\tau_{xy}$ ;

$$\alpha_x \frac{\partial \tau_{xy}^x}{\partial t} + \Omega_x \tau_{xy}^x = \mu \frac{\partial v_y^y}{\partial x} \quad \alpha_y \frac{\partial \tau_{xy}^y}{\partial t} + \Omega_y \tau_{xy}^y = \mu \frac{\partial v_x^x}{\partial y} \quad (247)$$

$$\alpha_y \frac{\partial \tau_{yz}^y}{\partial t} + \Omega_y \tau_{yz}^y = \mu \frac{\partial v_z^z}{\partial y} \quad \alpha_z \frac{\partial \tau_{yz}^z}{\partial t} + \Omega_z \tau_{yz}^z = \mu \frac{\partial v_y^y}{\partial z} \quad (248)$$

$$\alpha_x \frac{\partial \tau_{zx}^x}{\partial t} + \Omega_x \tau_{zx}^x = \mu \frac{\partial v_z^z}{\partial x} \quad \alpha_z \frac{\partial \tau_{zx}^z}{\partial t} + \Omega_z \tau_{zx}^z = \mu \frac{\partial v_x^x}{\partial z} \quad (249)$$

La discretización de los campos de velocidad y esfuerzo de las ecuaciones (229-237) se realizará acorde al esquema mostrado en Fig. 32.

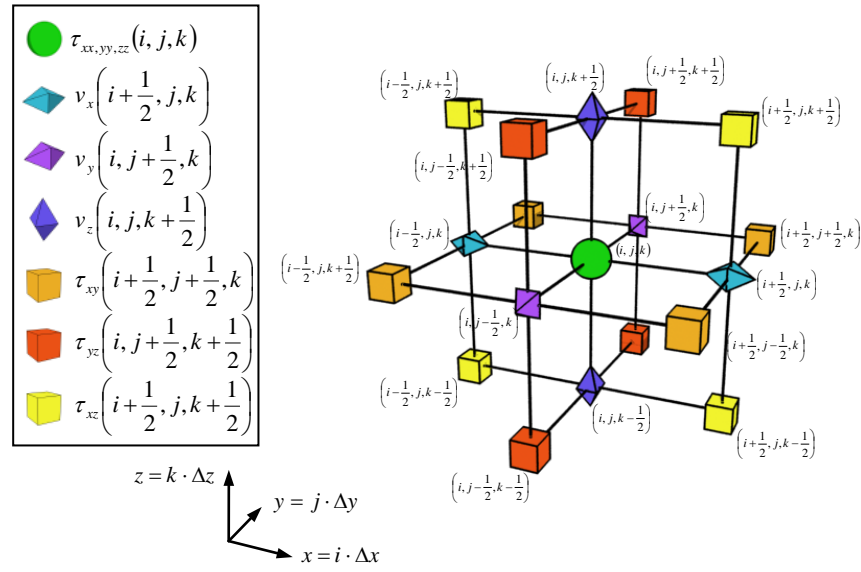


Fig. 34. Mallado del espacio 3D del modelo de sólidos; sistema de coordenadas cartesiano

Así, la discretización de las expresiones sin PML por medio de diferencias finitas será para la componente ( $i=x, y, z$ ) de velocidad de partícula  $v_i$ ;

$$\rho \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta t} = \frac{\tau_{xx}^n(i+1, j, k) - \tau_{xx}^n(i-1, j, k)}{\Delta x} + \frac{\tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} + \frac{\tau_{xz}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - \tau_{xz}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \quad (250)$$

$$\rho \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta t} = \frac{\tau_{yy}^n(i, j+1, k) - \tau_{yy}^n(i, j, k)}{\Delta y} + \frac{\tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - \tau_{xy}^n\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta x} + \frac{\tau_{yz}^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - \tau_{yz}^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \quad (251)$$

$$\rho \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{\tau_{zz}^n(i, j, k+1) - \tau_{zz}^n(i, j, k)}{\Delta z} + \frac{\tau_{xz}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - \tau_{xz}^n\left(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} + \frac{\tau_{yz}^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - \tau_{yz}^n\left(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \quad (252)$$

Para la componente ( $i=x, y, z$ ) de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\frac{\tau_{xx}^{n+1}(i, j, k) - \tau_{xx}^n(i, j, k)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} + \lambda \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} + \lambda \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \quad (253)$$

$$\frac{\tau_{yy}^{n+1}(i, j, k) - \tau_{yy}^n(i, j, k)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} + \lambda \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} + \lambda \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \quad (254)$$

$$\frac{\tau_{zz}^{n+1}(i, j, k) - \tau_{zz}^n(i, j, k)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} + \lambda \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} + \lambda \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} \quad (255)$$

Para la componente ( $i = x, y, z; j = x, y, z; i \neq j$ ) de esfuerzo de cizalla  $\tau_{ij}$ ;

$$\frac{\tau_{xy}^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - \tau_{xy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta t} = +\mu \left( \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta y} + \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta x} \right) \quad (256)$$

$$\frac{\tau_{yz}^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - \tau_{yz}^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = +\mu \left( \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + 1, k + \frac{1}{2}\right) - v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta y} + \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + 1\right) - v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta z} \right) \quad (257)$$

$$\frac{\tau_{zx}^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - \tau_{zx}^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = +\mu \left( \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + 1, j, k + \frac{1}{2}\right) - v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta x} + \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + 1\right) - v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta z} \right) \quad (258)$$

Las condiciones de estabilidad y dispersión se calculará de la misma manera que para el método de fluidos, pero teniendo en cuenta que las velocidades máximas están gobernadas por las ondas longitudinales y las velocidades mínimas por las transversales.

### XII. 2. b. 2D, Sistema de coordenadas polar

En coordenadas polares  $(r, \theta)$  la relación entre esfuerzo y velocidad de partícula será para  $v_i$  ( $i = r, \theta$ ):

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \quad (259)$$

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} \quad (260)$$

Para la componente ( $i = r, \theta$ ) de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (261)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (262)$$

Para la componente de esfuerzo de cizalla  $\tau_{r\theta}$ ;

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (263)$$

La implementación de las PML mediante el método *complex coordinate stretching* será:

$$v_r = v_r^r + v_r^\theta \quad v_\theta = v_\theta^r + v_\theta^\theta \quad (264)$$

$$\tau_{rr} = \tau_{rr}^r + \tau_{rr}^\theta \quad \tau_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta}^r + \tau_{\theta\theta}^\theta \quad (265)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^r + \tau_{r\theta}^\theta \quad (266)$$

Para la componente de velocidad  $v_i$  ( $i = r, \theta$ ):

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_r^r}{\partial t} + \Omega_r v_r^r \right) = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \quad \rho \left( A_r \frac{\partial v_r^\theta}{\partial t} + \Omega_r' v_r^\theta \right) = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} \quad (267)$$

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_\theta^r}{\partial t} + \Omega_r v_\theta^r \right) = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} \quad \rho \left( A_r \frac{\partial v_\theta^\theta}{\partial t} + \Omega_r' v_\theta^\theta \right) = \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} \quad (268)$$

Para la componente ( $i = r, \theta$ ) de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{rr}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{rr}^r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{rr}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \tau_{rr}^\theta = \lambda \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (269)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{\theta\theta}^r = \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \tau_{\theta\theta}^\theta = (\lambda + 2\mu) \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (270)$$

Para la componente de esfuerzo de cizalla  $\tau_{r\theta}$ ;

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{r\theta}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{r\theta}^r = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{r\theta}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \tau_{r\theta}^\theta = \mu \left( v_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (271)$$

La discretización en este sistema de coordenadas se acorde a Fig. 33

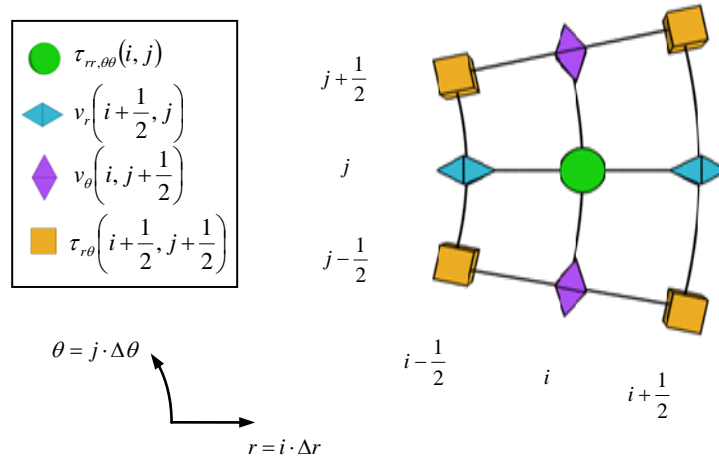


Fig. 35. Mallado del espacio 2D del modelo de sólidos; sistema de coordenadas polar

Para la componente ( $i = r, \theta$ ) de velocidad  $v_i$ ;

$$\rho \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j) - v_r^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j)}{\Delta t} = \frac{\tau_{rr}^n(i+1,j) - \tau_{rr}^n(i,j)}{\Delta r} + \frac{1}{r(i+\frac{1}{2})} \frac{\tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}) - \tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}{\Delta \theta} + \frac{1}{r(i+\frac{1}{2})} \left( \frac{\tau_{rr}^n(i+1,j) + \tau_{rr}^n(i,j)}{2} - \frac{\tau_{\theta\theta}^n(i+1,j) + \tau_{\theta\theta}^n(i,j)}{2} \right) \quad (272)$$

$$\rho \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2}) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{\tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}) - \tau_{r\theta}^n(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}{\Delta r} + \frac{1}{r(i)} \frac{\tau_{\theta\theta}^n(i,j+1) - \tau_{\theta\theta}^n(i,j)}{\Delta \theta} + \frac{2}{r(i)} \left( \frac{\tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}) + \tau_{r\theta}^n(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}{2} \right) \quad (273)$$

Para la componente ( $i = r, \theta$ ) de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\frac{\tau_{rr}^{n+1}(i,j) - \tau_{rr}^n(i,j)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j) - v_r^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j)}{\Delta r} + \lambda \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j) + v_r^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j)}{2 \cdot r(i)} + \frac{1}{r(i)} \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2}) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2})}{\Delta \theta} \right) \quad (274)$$

$$\frac{\tau_{\theta\theta}^{n+1}(i,j) - \tau_{\theta\theta}^n(i,j)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j) + v_r^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j)}{2 \cdot r(i)} + \frac{1}{r(i)} \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2}) - v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2})}{\Delta\theta} \right) + \lambda \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j) - v_r^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j)}{\Delta r} \quad (275)$$

Para la componente de esfuerzo de cizalla  $\tau_{r\theta}$  ;

$$\frac{\tau_{r\theta}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}) - \tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \mu \left( \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j+\frac{1}{2}) - v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2})}{\Delta r} + \frac{1}{r(i+\frac{1}{2})} \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2}) + v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j+\frac{1}{2})}{2} + \frac{1}{r(i+\frac{1}{2})} \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+1) - v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j)}{\Delta\theta} \right) \quad (276)$$

Las condiciones de estabilidad y dispersión se calculará de la misma manera que para el método de fluidos, pero teniendo en cuenta que las velocidades máximas están gobernadas por las ondas longitudinales y las velocidades mínimas por las transversales.

### XII. 2. c. 3D, Sistema de coordenadas cilíndrico

Análogamente al caso de fluidos, para obtener las ecuaciones para el modelo de propagación de ondas elásticas en sólidos en coordenadas cilíndricas haremos uso del operador gradiente y de la divergencia en coordenadas cilíndricas. Así, la relación entre velocidad y esfuerzo se puede expresar en función de  $(r, \theta, z)$  para las componentes de velocidad como:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \quad (277)$$

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \quad (278)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} \quad (279)$$

Para las componentes de esfuerzo normal como:

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (280)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (281)$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (282)$$

Y para las componentes de esfuerzo de cizalla como:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (283)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (284)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial t} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \quad (285)$$

La implementación de las PML vendrá dada como:

$$v_r = v_r^r + v_r^\theta + v_r^z \quad v_\theta = v_\theta^r + v_\theta^\theta + v_\theta^z \quad v_z = v_z^r + v_z^\theta + v_z^z \quad (286)$$

$$\tau_{rr} = \tau_{rr}^r + \tau_{rr}^\theta + \tau_{rr}^z \quad \tau_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta}^r + \tau_{\theta\theta}^\theta + \tau_{\theta\theta}^z \quad \tau_{zz} = \tau_{zz}^r + \tau_{zz}^\theta + \tau_{zz}^z \quad (287)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^r + \tau_{r\theta}^\theta \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^r + \tau_{\theta z}^z \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}^r + \tau_{rz}^z \quad (288)$$

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_r^r}{\partial t} + \Omega_r v_r^r \right) = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \quad \rho \left( A_r \frac{\partial v_r^\theta}{\partial t} + \Omega_r' v_r^\theta \right) = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} \quad \rho \left( \alpha_z \frac{\partial v_r^z}{\partial t} + \Omega_z v_r^z \right) = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \quad (289)$$

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_\theta^r}{\partial t} + \Omega_r v_\theta^r \right) = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} \quad \rho \left( A_r \frac{\partial v_\theta^\theta}{\partial t} + \Omega_r' v_\theta^\theta \right) = \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} \quad \rho \left( \alpha_z \frac{\partial v_\theta^z}{\partial t} + \Omega_z v_\theta^z \right) = \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \quad (290)$$

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_z^r}{\partial t} + \Omega_r v_z^r \right) = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} \quad \rho \left( A_r \frac{\partial v_z^\theta}{\partial t} + \Omega_r' v_z^\theta \right) = \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \tau_{rz} \quad \rho \left( \alpha_z \frac{\partial v_z^z}{\partial t} + \Omega_z v_z^z \right) = \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (291)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{rr}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{rr}^r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{rr}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \tau_{rr}^\theta = \lambda \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad \alpha_z \frac{\partial \tau_{rz}^z}{\partial t} + \Omega_z \tau_{rz}^z = \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (292)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{\theta\theta}^r = \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \tau_{\theta\theta}^\theta = (\lambda + 2\mu) \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad \alpha_z \frac{\partial \tau_{\theta z}^z}{\partial t} + \Omega_z \tau_{\theta z}^z = \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (293)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{zz}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{zz}^r = \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{zz}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \tau_{zz}^\theta = v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad \alpha_z \frac{\partial \tau_{zz}^z}{\partial t} + \Omega_z \tau_{zz}^z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (294)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{r\theta}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{r\theta}^r = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{r\theta}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \tau_{r\theta}^\theta = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \quad (295)$$

$$A_r \frac{\partial \tau_{\theta z}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \tau_{\theta z}^\theta = \mu \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \quad \alpha_z \frac{\partial \tau_{\theta z}^z}{\partial t} + \Omega_z \tau_{\theta z}^z = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \quad (296)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{rz}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{rz}^r = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad \alpha_z \frac{\partial \tau_{rz}^z}{\partial t} + \Omega_z \tau_{rz}^z = \mu \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad (297)$$

Análogamente, podemos discretizar los campos de velocidad y esfuerzo en espacio y tiempo en coordenadas cilíndricas. La discretización espacial se realizará acorde al esquema Fig. 34:

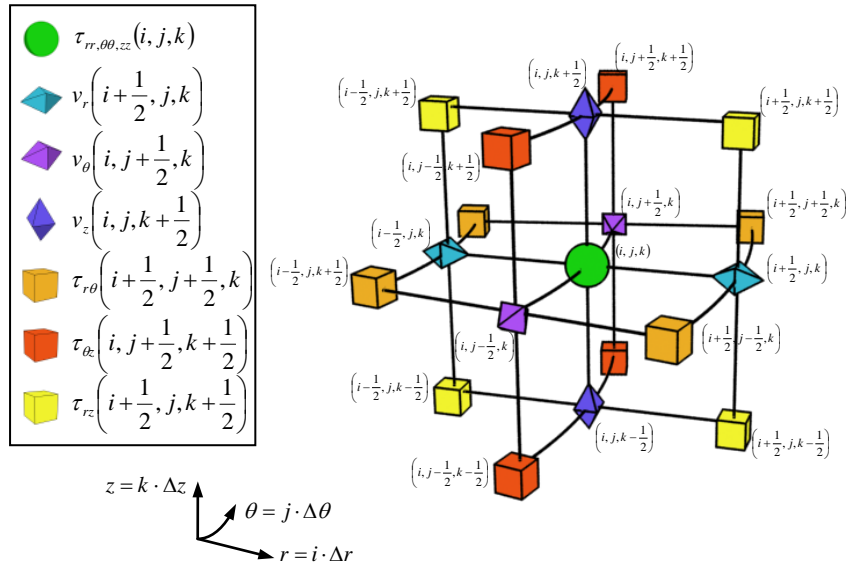


Fig. 36. Mallado del espacio 3D del modelo de sólidos; sistema de coordenadas cilíndrico

Así, las expresiones (277-285) para las componentes de velocidad se pueden discretizar como:

$$\rho \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) - v_r^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k)}{\Delta t} = \frac{\tau_{rr}^n(i+1,j,k) - \tau_{rr}^n(i,j,k)}{\Delta r} + \frac{1}{r(i+\frac{1}{2})} \frac{\tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) - \tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}{\Delta \theta} + \dots \quad (298)$$

$$\frac{\tau_{rz}^n(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - \tau_{rz}^n(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z} + \frac{1}{r(i+\frac{1}{2})} \left( \frac{\tau_{\theta\theta}^n(i+1,j,k) + \tau_{\theta\theta}^n(i,j,k)}{2} - \frac{\tau_{\theta\theta}^n(i+1,j,k) + \tau_{\theta\theta}^n(i,j,k)}{2} \right)$$

$$\rho \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k)}{\Delta t} = \frac{\tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) - \tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}{\Delta r} + \frac{1}{r(i)} \frac{\tau_{\theta\theta}^n(i,j+1,k) - \tau_{\theta\theta}^n(i,j,k)}{\Delta \theta} + \dots \quad (299)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}^n(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \tau_{\theta z}^n(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}{\Delta z} + \frac{2}{r(i)} \left( \frac{\tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) + \tau_{r\theta}^n(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}{2} \right)$$

$$\rho \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2}) - v_z^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{\tau_{rz}^n(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - \tau_{rz}^n(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}{\Delta r} + \frac{1}{r(i)} \frac{\tau_{\theta z}^n(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \tau_{\theta z}^n(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}{\Delta \theta} + \dots \quad (300)$$

$$\frac{\tau_{zz}^n(i,j,k+1) - \tau_{zz}^n(i,j,k)}{\Delta z} + \frac{1}{r(i)} \left( \tau_{rz}^n(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) + \tau_{rz}^n(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \right)$$

Para las componentes de esfuerzo normal como:

$$\frac{\tau_{rr}^{n+1}(i,j,k) - \tau_{rr}^n(i,j,k)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) - v_r^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta r} + \dots \quad (301)$$

$$+ \lambda \left( \frac{1}{r(i)} \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) + v_r^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k)}{2} + \frac{1}{r(i)} \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k) + v_\theta^{n-\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta \theta} + \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2}) + v_z^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right)$$

$$\frac{\tau_{\theta\theta}^{n+1}(i,j,k) - \tau_{\theta\theta}^n(i,j,k)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) + v_r^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k)}{2} + \frac{1}{r(i)} \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k) + v_\theta^{n-\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta \theta} \right) + \dots \quad (302)$$

$$+ \lambda \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) - v_r^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta r} + \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2}) + v_z^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{zz}^{n+1}(i, j, k) - \tau_{zz}^n(i, j, k)}{\Delta t} = & (\lambda + 2\mu) \left( \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) + v_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right) + \dots \\ & + \lambda \left( \frac{1}{r(i)} \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) + v_r^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k)}{2} + \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) - v_r^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta r} + \frac{1}{r(i)} \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) + v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta \theta} \right) \end{aligned} \quad (303)$$

Y para las componentes de esfuerzo de cizalla como:

$$\frac{\tau_{r\theta}^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - \tau_{r\theta}^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \mu \left( \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) - v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta r} + \dots \right) \quad (304)$$

$$\frac{\tau_{rz}^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - \tau_{rz}^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \mu \left( \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - v_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta r} + \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) + v_r^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right) \quad (305)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \tau_{\theta z}^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \mu \left( \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - v_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta \theta} + \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) + v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \right) \quad (306)$$

Las condiciones de estabilidad y dispersión se calculará de la misma manera que para el método de fluidos, pero teniendo en cuenta que las velocidades máximas están gobernadas por las ondas longitudinales y las velocidades mínimas por las transversales.

### XII. 2. d. 3D, Sistema de coordenadas esférico

De igual manera, resolviendo las ecuaciones constitutivas utilizando el gradiente y la divergencia en coordenadas esféricas podemos obtener las expresiones en las componentes  $(r, \theta, \phi)$  de manera que resolviendo para la componente  $(i = r, \theta, \phi)$  de velocidad de partícula  $v_i$ :

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi} + \tau_{r\theta} \cot \theta}{r} \quad (307)$$

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{3\tau_{r\theta} + (\tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi}) \cot \theta}{r} \quad (308)$$

$$\rho \frac{\partial v_\phi}{\partial t} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{3\tau_{r\phi} + 2\tau_{\theta\phi} \cot \theta}{r} \quad (309)$$

Para la componente  $(i = r, \theta, \phi)$  de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (310)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + 2\mu \left( \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (311)$$



$$\frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + 2\mu \left( \frac{v_r}{r} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (312)$$

Para la componente ( $i = r, \theta, \phi; j = r, \theta, \phi; i \neq j$ ) de esfuerzo de cizalla  $\tau_{ij}$ :

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \quad (313)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial t} = \mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) \quad (314)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial t} = \mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r} v_\phi \right) \quad (315)$$

La implementación de las PML en coordenadas esféricas se realiza descomponiendo las componentes de los campos en función de su dependencia de la coordenada  $r$  y el resto, al que denominaremos  $\theta\phi$ :

$$v_r = v_r^r + v_r^{\theta\phi} \quad v_\theta = v_\theta^r + v_\theta^{\theta\phi} \quad v_\phi = v_\phi^r + v_\phi^{\theta\phi} \quad (316)$$

$$\tau_{rr} = \tau_{rr}^r + \tau_{rr}^{\theta\phi} \quad \tau_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta}^r + \tau_{\theta\theta}^{\theta\phi} \quad \tau_{\phi\phi} = \tau_{\phi\phi}^r + \tau_{\phi\phi}^{\theta\phi} \quad (317)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^r + \tau_{r\theta}^{\theta\phi} \quad \tau_{\theta\phi} = \tau_{\theta\phi}^{\theta\phi} \quad \tau_{r\phi} = \tau_{r\phi}^r + \tau_{r\phi}^{\theta\phi} \quad (318)$$

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_r^r}{\partial t} + \Omega_r v_r^r \right) = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \quad \rho \left( A_r \frac{\partial v_r^{\theta\phi}}{\partial t} + \Omega_r v_r^{\theta\phi} \right) = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} + 2\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi} + \tau_{r\theta} \cot \theta \quad (319)$$

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_\theta^r}{\partial t} + \Omega_r v_\theta^r \right) = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} \quad \rho \left( A_r \frac{\partial v_\theta^{\theta\phi}}{\partial t} + \Omega_r v_\theta^{\theta\phi} \right) = \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + 3\tau_{r\theta} + (\tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi}) \cot \theta \quad (320)$$

$$\rho \left( \alpha_r \frac{\partial v_\phi^r}{\partial t} + \Omega_r v_\phi^r \right) = \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial r} \quad \rho \left( A_r \frac{\partial v_\phi^{\theta\phi}}{\partial t} + \Omega_r v_\phi^{\theta\phi} \right) = \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + 3\tau_{r\phi} + 2\tau_{\theta\phi} \cot \theta \quad (321)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{rr}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{rr}^r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{rr}^{\theta\phi}}{\partial t} + \Omega_r \tau_{rr}^{\theta\phi} = \lambda \left( 2v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \cot \theta v_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (322)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{\theta\theta}^r = \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^{\theta\phi}}{\partial t} + \Omega_r \tau_{\theta\theta}^{\theta\phi} = \lambda \left( 2v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \cot \theta v_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + 2\mu \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (323)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{\phi\phi}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{\phi\phi}^r = \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{\phi\phi}^{\theta\phi}}{\partial t} + \Omega_r \tau_{\phi\phi}^{\theta\phi} = \lambda \left( 2v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \cot \theta v_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + 2\mu \left( v_r + \cot \theta v_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (324)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{r\theta}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{r\theta}^r = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{r\theta}^{\theta\phi}}{\partial t} + \Omega_r \tau_{r\theta}^{\theta\phi} = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \quad (325)$$

$$A_r \frac{\partial \tau_{\theta\phi}^{\theta\phi}}{\partial t} + \Omega'_r \tau_{\theta\phi}^{\theta\phi} = \mu \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \cot \theta v_\phi \right) \quad (326)$$

$$\alpha_r \frac{\partial \tau_{r\phi}^r}{\partial t} + \Omega_r \tau_{r\phi}^r = \mu \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \quad A_r \frac{\partial \tau_{r\phi}^{\theta\phi}}{\partial t} + \Omega'_r \tau_{r\phi}^{\theta\phi} = \mu \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \right) \quad (327)$$

Por último, las expresiones (307-315) en coordenadas esféricas se pueden discretizar en espacio y tiempo según el siguiente esquema:

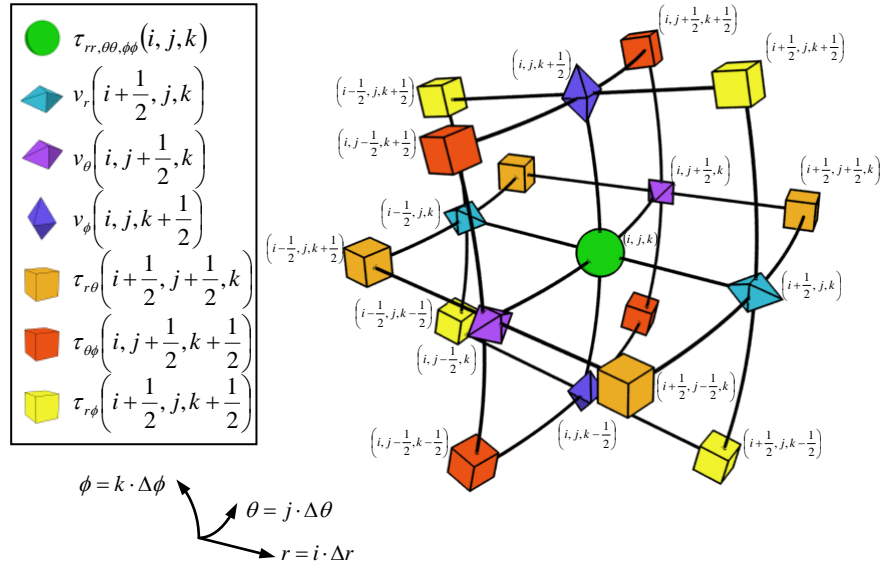


Fig. 37. Mallado del espacio 3D del modelo de sólidos; sistema de coordenadas esférico

Lo que implica que las ecuaciones constitutivas las podamos escribir de manera discreta para las componentes ( $i = r, \theta, \phi$ ) de velocidad de partícula  $v_i$  como:

$$\rho \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - v_r^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \frac{\tau_{rr}^n(i+1, j, k) - \tau_{rr}^n(i, j, k)}{\Delta r} + \frac{1}{r(i+\frac{1}{2})} \frac{\tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - \tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta \theta} + \dots$$

$$+ \frac{1}{r(i+\frac{1}{2}) \sin(j)} \frac{\tau_{r\phi}^n(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - \tau_{r\phi}^n(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta \phi} + \dots$$

$$+ \frac{1}{r(i+\frac{1}{2})} \left( \frac{\tau_{\theta\theta}^n(i+1, j, k) + \tau_{\theta\theta}^n(i, j, k) - \tau_{\theta\theta}^n(i+1, j, k) + \tau_{\theta\theta}^n(i, j, k)}{2} - \frac{\tau_{\theta\theta}^n(i+1, j, k) + \tau_{\theta\theta}^n(i, j, k)}{2} + \cot(j) \frac{\tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - \tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{2} \right) \quad (328)$$

$$\rho \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{1}{r(i)} \frac{\tau_{\theta\theta}^n(i, j+1, k) - \tau_{\theta\theta}^n(i, j, k)}{\Delta \theta} + \frac{\tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - \tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta r} + \dots$$

$$+ \frac{1}{r(i) \sin(j+\frac{1}{2})} \frac{\tau_{\theta\phi}^n(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - \tau_{\theta\phi}^n(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta \phi} + \dots$$

$$+ \frac{1}{r(i)} \left( 3 \frac{\tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - \tau_{r\theta}^n(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{2} + \cot(j+\frac{1}{2}) \frac{\tau_{\theta\theta}^n(i, j+1, k) + \tau_{\theta\theta}^n(i, j, k)}{2} - \cot(j+\frac{1}{2}) \frac{\tau_{\theta\theta}^n(i, j+1, k) + \tau_{\theta\theta}^n(i, j, k)}{2} \right) \quad (329)$$

$$\rho \frac{v_\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) - v_\phi^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{1}{r(i)\sin(j)} \frac{\tau_{\theta\phi}^n(i, j, k+1) - \tau_{\theta\phi}^n(i, j, k)}{\Delta\phi} + \frac{\tau_{r\phi}^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - \tau_{r\phi}^n\left(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta r} + \dots$$

$$+ \frac{1}{r(i)} \frac{\tau_{\theta\phi}^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - \tau_{\theta\phi}^n\left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta\theta} + \dots$$

$$+ \frac{1}{r(i)} \left( 3 \frac{\tau_{r\phi}^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - \tau_{r\phi}^n\left(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{2} + 2\cot(j) \frac{\tau_{\theta\phi}^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) + \tau_{\theta\phi}^n\left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}{2} \right)$$

Para la componente  $(i = r, \theta, \phi)$  de esfuerzo normal  $\tau_{ii}$ ;

$$\frac{\tau_{rr}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - \tau_{rr}^n(i, j, k)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta r} \right) + \dots$$

$$+ \lambda \frac{1}{r(i)} \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) + v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{2} + \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta\theta} + \dots \right)$$

$$+ \cot(j) \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right)}{2} + \frac{1}{\sin(j)} \frac{v_\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) + v_\phi^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta\phi}$$

$$\frac{\tau_{\theta\theta}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - \tau_{\theta\theta}^n(i, j, k)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{1}{r(i)} \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta\theta} \right) + \dots$$

$$+ \lambda \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta r} + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{r(i)} \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) + v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{2} + \cot(j) \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right)}{2} + \frac{1}{\sin(j)} \frac{v_\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) + v_\phi^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta\phi} \right) + \dots$$

$$+ 2\mu \frac{1}{r(i)} \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) + v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{2}$$

$$\frac{\tau_{\phi\phi}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - \tau_{\phi\phi}^n(i, j, k)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r(i)} \left( \frac{1}{\sin(j)} \frac{v_\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) + v_\phi^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta\phi} + \cot(j) \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right)}{2} \right) + \dots$$

$$+ \lambda \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta r} + \frac{1}{r(i)} \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) + v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{2} + \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta\theta} \right) \right) + \dots$$

$$+ 2\mu \frac{1}{r(i)} \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) + v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{2}$$

Para la componente  $(i = r, \theta, \phi; j = r, \theta, \phi; i \neq j)$  de esfuerzo de cizalla  $\tau_{ij}$ ;

$$\frac{\tau_{r\theta}^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) - \tau_{r\theta}^n\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta t} = \mu \left( \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i + 1, j + \frac{1}{2}, k\right) - v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta r} + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{r\left(i + \frac{1}{2}\right)} \left( \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + 1, k\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta\theta} - \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i + 1, j + \frac{1}{2}, k\right)}{2} \right)$$

$$\frac{\tau_{r\phi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - \tau_{r\phi}^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = \mu \left( \frac{v_\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(i + 1, j, k + \frac{1}{2}\right) - v_\phi^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta r} + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{r\left(i + \frac{1}{2}\right)} \left( \frac{1}{\sin(j)} \frac{v_r^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + 1\right) - v_r^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta\phi} - \frac{v_\theta^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) + v_\theta^{n-\frac{1}{2}}\left(i + 1, j, k + \frac{1}{2}\right)}{2} \right)$$

$$\frac{\tau_{\theta\theta}^{n+1}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - \tau_{\theta\theta}^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = \mu \frac{1}{r(i)} \left( \frac{v_{\phi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+1, k+\frac{1}{2}\right) - v_{\phi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta\theta} + \dots \right) \quad (336)$$

$$+ \frac{1}{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)} \frac{v_{\theta}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+1\right) - v_{\theta}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta\phi} - \cot\left(j+\frac{1}{2}\right) \frac{v_{\phi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) + v_{\phi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+1, k+\frac{1}{2}\right)}{2}$$

Las condiciones de estabilidad y dispersión se calculará de la misma manera que para el método de fluidos, pero teniendo en cuenta que las velocidades máximas están gobernadas por las ondas longitudinales y las velocidades mínimas por las transversales.