

Contraste numérico-experimental de un modelo matemático que simula el movimiento del flujo en condiciones de aguas someras incluyendo las pérdidas de energía
Numerical-experimental contrast of a mathematical model that simulates the movement of a fluid under shallow water conditions including energy losses.

A. Balaguer-Beser, F. J. Rodríguez-Benlloch, B. Nácher-Rodríguez, F. J. Vallés-Morán
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
abalague@mat.upv.es, frarodb1@mat.upv.es, beanacro@cam.upv.es, fvalmo@hma.upv.es

Abstract

En este trabajo se efectúa una comparación entre los resultados obtenidos en experimentos de laboratorio y aquellos calculados mediante una simulación numérica del movimiento de aguas someras en un canal abierto, considerando las pérdidas de energía que tienen lugar a su paso por un estrechamiento localizado. El modelo matemático que simula dicho fenómeno físico se rige mediante un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuya solución proporciona el calado (profundidad del agua) y el caudal por unidad de ancho, el cual está relacionado con la velocidad del agua. Dicho movimiento, está controlado básicamente por la fuerza de la gravedad siendo fundamental la relación entre ésta y las fuerzas inerciales. En el presente estudio se han tenido también en cuenta las pérdidas de energía originadas por la fricción del agua con los contornos así como las pérdidas locales por obstáculos o cambios de ancho. Para obtener las soluciones de dicho modelo se ha usado un esquema numérico basado en el método de volúmenes finitos de alta resolución. Se han efectuado dos tipos de ensayos en un canal de laboratorio. Los del primer tipo representan una transición en régimen lento, aguas arriba y aguas abajo de un estrechamiento en el canal. Los del segundo tipo representan un régimen lento aguas arriba, un estrechamiento que funciona como control (cambio de régimen) y un régimen rápido aguas abajo. La comparativa numérico-experimental demuestra la importancia de modelizar adecuadamente los distintos fenómenos físicos que intervienen en el proceso, así como la correcta imposición de las condiciones de contorno del problema.

In this paper, a comparison between the results obtained in laboratory experiments and those calculated by a numerical simulation of shallow water equations in an open channel is performed, considering the energy losses that occur as it passes through a local narrowing of the cross section. The mathematical model that simulates this physical phenomenon is governed by a partial differential equations system whose solution provides the water depth and the flow rate per unit of width, which is related to the velocity of the water. Such movement is controlled primarily by the force of gravity, being fundamental the relationship between it and the inertial forces. In the present study we have also taken into account energy losses caused by friction of the water with the contours and local losses caused by obstacles or changes in the width of the channel. A numerical scheme based on a high-order finite volume method has been used for obtaining the solutions of such model. Two type of laboratory tests have been simulated. The first type represents a slow transition regime, upstream and downstream of a narrowing in the channel. The second type represents a subcritical flow upstream, a narrowing that works as a control (regime change) and a downstream supercritical flow. Numerical-experimental comparison demonstrates the importance of adequately modeling of the different physical phenomena involved in the process, and the proper imposition of the boundary conditions of the problem.

Palabras clave: Modelo matemático, contraste numérico-experimental, ecuaciones de aguas someras, pérdidas de energía.

Keywords: Mathematical model, numerical-experimental contrast, shallow water equations, energy losses.

1. Introducción

Uno de los modelos de hidrodinámica más estudiados para simular el movimiento del agua en ríos y canales abiertos es el que usa las ecuaciones de aguas someras. Toro (Toro, 2001) expone las propiedades del sistema formado por dichas ecuaciones en derivadas parciales así como ejemplos de soluciones de las mismas. Sin embargo, sólo se han encontrado soluciones analíticas para los casos con condiciones físicas ideales, las cuales no se suelen dar en la práctica. De esta forma, es necesario el desarrollo de métodos numéricos eficientes que resuelvan este problema con precisión como los descritos en (Caleffi et al., 2006) o (Balaguer-Beser et al., 2013). También se hace necesaria la incorporación de nuevos términos a dicho sistema de ecuaciones en derivadas parciales para modelizar los distintos fenómenos físicos que aparecen en la realidad. Es el caso de la rugosidad que caracteriza el rozamiento del agua sobre los contornos (lecho y márgenes), así como las condiciones de contorno que caracterizan las entradas y salidas del flujo.

La realización de ensayos de laboratorio en un canal experimental, bajo condiciones de contorno controladas por el usuario, es de gran utilidad para calibrar el modelo matemático creado tras la incorporación de nuevos términos al sistema de ecuaciones de aguas someras. Además, los ensayos realizados en canales donde la longitud del mismo es muy superior a su anchura pueden ser modelizados considerando una única dimensión espacial, la cual representa el movimiento del agua en sentido longitudinal, despreciando los efectos transversales. De esta forma, la comparación entre las soluciones numéricas obtenidas y aquellas medidas sobre un canal experimental permite entender el comportamiento de los términos que aparecen en el modelo matemático considerado, aunque éste sea de tipo unidimensional.

En este trabajo centraremos la atención en dos aspectos determinados del modelo matemático para observar su influencia en las soluciones obtenidas. El primero tiene que ver con las condiciones iniciales y de contorno del problema, las cuales pueden conducir a situaciones con resalto hidráulico y con diferentes regímenes de flujo (véase (Te Chow, 1959)). El segundo tiene que ver con la geometría del canal, cuyo ancho no tiene que ser constante a pesar de considerar el problema en una dimensión espacial. Al pasar el agua a través de una zona donde el canal reduce su anchura el flujo se contrae y se acelera al reducirse la sección útil. Y cuando el canal se ensancha, recuperando su amplitud inicial, se produce una expansión del flujo y una disminución de la velocidad del mismo.

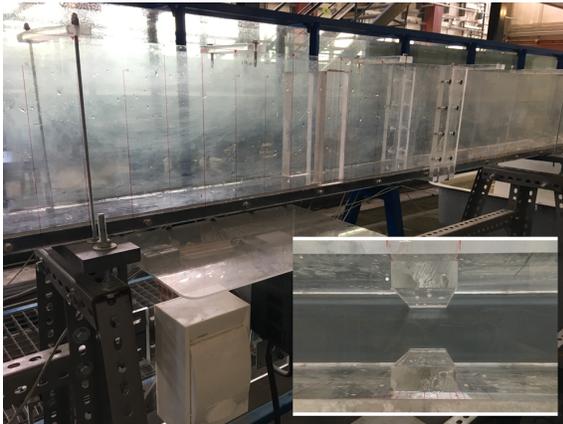
El presente trabajo se ha organizado de esta forma. La Sección 2 muestra el tipo de experimentos de laboratorio que se han efectuado para validar el modelo matemático, el cual se describe posteriormente en la Sección 1. La comparativa entre los resultados numéricos y los experimentales se efectúa en la Sección 4. Ello da paso a unas conclusiones (Sección 5) que muestran la importancia de la adecuada modelización de los fenómenos físicos considerados.

2. Experimentos de laboratorio

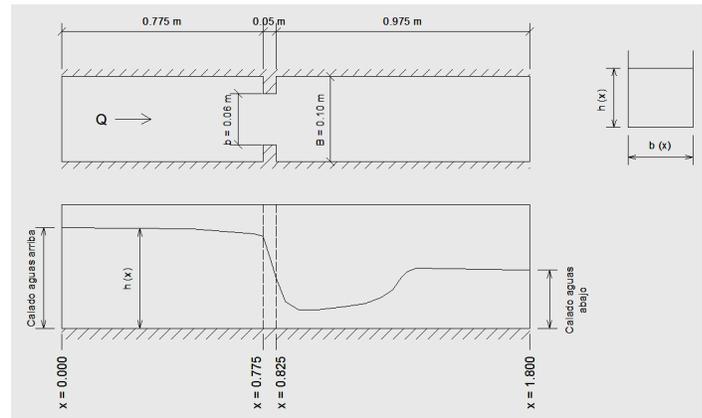
El Instituto de Ingeniería del Agua y Medio Ambiente (IIAMA) de la Universitat Politècnica de València dispone de un canal abierto con sección rectangular de 2.5 m de largo y 0.10 m de ancho, con un circuito hidráulico propio y capacidad para representar un amplio rango de condiciones del flujo de aproximación. La Figura 1(a) muestra una imagen del mismo. La zona de ensayo ha ocupado un total de 1.8 m y en los contornos de la misma se han establecido las condiciones de contorno medidas.

Para comprobar la precisión del modelo numérico que se describe posteriormente en la Sección 1, se han efectuado varios ensayos experimentales sobre dicho canal. Además se han colocado unas placas de 0.02 m de grosor para conseguir un estrechamiento en el canal como

muestra la Figura 1(b). Dichas placas se han puesto de modo que el inicio del estrechamiento está a una distancia igual a 0.775 m del inicio de la zona de ensayos y finaliza a la distancia de 0.825 m. El fondo del canal es rígido y se considera que está a una elevación $Z(x) = 0$, $\forall x$ (pendiente horizontal). De esta forma, el objetivo de estos experimentos es observar el efecto que sobre el movimiento del agua tiene un estrechamiento en el canal, considerando un lecho formado por un material que no se erosiona con el paso del tiempo.



(a) Imagen del canal.



(b) Esquema del canal.

Figura 1: Fotografía del canal usado en los experimentos del laboratorio junto con un esquema del estrechamiento colocado en el mismo.

En el código de simulación, alrededor de dichas placas se han considerado dos transiciones desde la pared del canal (cajeros) hasta el estrechamiento. Dichas transiciones son necesarias para que el ancho del canal sea una función derivable salvo en un número finito de puntos, en los cuales aproximaremos la derivada como el promedio de las derivadas por la derecha y por la izquierda. Ello servirá para poder aplicar el método numérico comentado posteriormente, en la Sección 1, para obtener las soluciones numéricas. La primera transición empieza a los 0.76 m (0.775 – 0.015) de la zona de ensayo y termina en el inicio del estrechamiento. La segunda comienza donde termina el estrechamiento y acaba en los 0.84 m (0.825 + 0.015). Este tipo de transición la llamaremos 4:3, pues dicha proporción coincide con la relación entre el grosor de la placa (0.02 m) y la longitud de la transición (0.015 m). Dado que en el canal experimental no existe dicha transición, efectuaremos la comparativa numérico-experimental considerando distintos tipos de transiciones en el modelo matemático en el que, sin embargo, sí se introducen en la formulación de las pérdidas locales de energía los coeficientes correspondientes a un estrechamiento y ensanchamiento brusco, como el que realmente se ensaya en laboratorio. De esta forma, también usaremos la transición 1:2 la cual tendrá una longitud a cada lado del estrechamiento igual a 0.04 m.

Los experimentos de laboratorio están caracterizados por dos valores. El primero es el caudal total aguas arriba, $Q(m^3/s)$, a través del cual puede obtenerse el caudal específico: $q = Q/0.1$, que es uno de los datos del modelo matemático, siendo 0.1 m el ancho del canal considerado en este trabajo. También es importante determinar el calado, h , aguas abajo (profundidad del agua en el otro extremo del canal), el cual también determina la profundidad del agua en instante de tiempo inicial, $t = 0$, que se ha adoptado a lo largo de todos los puntos del canal, debido a que inicialmente el agua se encuentra en reposo.

La Tabla 1 recopila las variables hidráulicas de los ensayos escogidos para su simulación matemática, así como las condiciones de contorno (calados y caudales) y condiciones iniciales impuestas al modelo matemático en cada uno de los casos. Veremos que el movimiento del agua

depende de los valores que alcanzan dichas variables en alguno de los dos extremos del dominio espacial considerado, aguas arriba y aguas abajo, para cualquier valor de tiempo, y también para cualquier valor de x en el instante de tiempo $t = 0$. Las condiciones de contorno establecidas se suponen constantes para todo instante de tiempo, y la condición inicial es constante en $t = 0$ para todo x . Puede observarse que el experimento dado en los casos C3 y C4 tiene mismo caudal y las mismas condiciones de contorno. Sólo cambian las condiciones de contorno establecidas en el modelo matemático.

Los números mostrados en la Tabla 1 han sido diseñados con el objetivo de tener estos dos tipos diferentes de comportamientos de flujo:

1. Transición en régimen lento, aguas arriba y aguas abajo del estrechamiento provocado por los estribos del puente (casos C1 y C2).
2. Cambio de régimen: régimen lento aguas arriba, estrechamiento que funciona como control (cambio de régimen) y régimen rápido aguas abajo (casos C3 y C4).

| Casos | Frontera aguas arriba | Fr. aguas abajo | Condición inicial en $t = 0$ |
|----------|--------------------------|-----------------|------------------------------|
| Caso C1: | $q=15.69E-03$ | $h=0.08412$ | $h=0.08412; q=15.69E-03$ |
| Caso C2: | $q=24.35E-03$ | $h=0.09522$ | $h=0.09522; q=24.35E-03$ |
| Caso C3: | $q=15.69E-03; h=0.06078$ | | $h=0.04236; q=15.69E-03$ |
| Caso C4: | $q=15.69E-03; h=0.06078$ | $h=0.023935$ | $h=0.04236; q=15.69E-03$ |

Tabla 1: Valores para el caudal específico, $q(m^3/s)$ y/o el calado (profundidad de agua), $h(m)$ en la frontera del dominio espacial considerado para cualquier valor de tiempo (columnas 2 y 3) y en cualquier valor de x cuando $t = 0$ (columna 4) que usa el modelo matemático en cada uno de los cuatro casos de simulación.

Los resultados experimentales se analizarán a lo largo de un perfil desde aguas arriba hasta aguas abajo. En los puntos donde había mucha variación transversal de la lámina libre (en el entorno del estrechamiento sobre todo), se han tomado varias medidas (centro y laterales del canal), y se ha empleado el valor medio para su comparación con los resultados de las simulaciones numéricas. Se tendrán en cuenta los resultados obtenidos en un periodo de tiempo lo suficientemente grande para que se alcance la solución estacionaria. Las soluciones numéricas mostradas en este trabajo se estabilizan a partir de un tiempo igual a 20 segundos.

3. Modelo Matemático

El movimiento de aguas someras en un canal abierto con una sección localmente rectangular y ancho variable se puede modelizar a través del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales (véase (Vázquez-Cendón, 1999)):

$$\begin{cases} h_t + (q)_x &= -q \frac{B'(x)}{B(x)} \\ (q)_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x &= -ghZ'(x) - \frac{q^2}{h} \frac{B'(x)}{B(x)} - gn^2 q \left| \frac{q}{h} \right| R_h^{-4/3} - h \frac{\lambda}{2} \left| \frac{\partial(v^2)}{\partial x} \right| \end{cases} \quad (1)$$

donde $h(x, t)$ es el calado (profundidad del agua); $q(x, t)$ es el caudal específico (caudal por unidad de ancho), el cual está relacionado con la velocidad del fluido $v(x, t)$ por la expresión $q(x, t) = h(x, t) \cdot v(x, t)$; $Z(x)$ es la función que describe la cota del lecho, la cual consideraremos que es la misma para cualquier valor de tiempo; $B(x)$ representa el ancho del canal en cada punto x y g es la aceleración de la gravedad ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$). Se han considerado las pérdidas de

energía originadas por la fricción del agua con los contornos a través de la ecuación de Manning:

$$-gn^2q \left| \frac{q}{h} \right| R_h^{-4/3} \quad (2)$$

siendo n el coeficiente de rugosidad de Manning, el cual tendrá un valor igual a 0.008 en los resultados que se muestran en este trabajo, y $R_h(x, t)$ representa el radio hidráulico. Para este último, consideramos la expresión:

$$R_h(x, t) = \frac{h(x, t)B(x)}{B(x) + 2h(x, t)} \quad (3)$$

Las pérdidas locales de energía, cuando existan por cambios de ancho, se pueden modelizar a través del siguiente término (Te Chow, 1959):

$$-h(x, t) \frac{\lambda(x)}{2} \left| \frac{\partial(v^2(x, t))}{\partial x} \right| \quad (4)$$

siendo $v(x, t)$ la velocidad del fluido y $\lambda(x)$ una función que sólo toma valores distintos de cero cuando se produce una contracción o una expansión del flujo de agua. Dicha función representa los coeficientes de pérdidas de energía por contracción y expansión, de manera que las pérdidas de contracción sólo se aplican cuando el canal se estrecha y las pérdidas por expansión, cuando el canal vuelve a ensancharse.

$\lambda(x)$ toma los valores siguientes cuando se usa la transición de tipo 4:3, en el caso del canal usado en los experimentos de laboratorio de este trabajo:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0.1 & 0.76 \leq x \leq 0.775 \\ 0.3 & 0.825 \leq x \leq 0.84 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5)$$

Si se cambia el tipo de transición (por ejemplo a la del tipo 1:2) $\lambda(x)$ seguirá siendo una función no nula que toma un valor constante (igual a 0.1 salvo que se indique lo contrario) en la zona donde el flujo se contrae y otro valor constante (igual a 0.3 si no se especifica otra cosa) en la zona donde el flujo se expande. Ambas zonas coinciden con las transiciones usadas en el modelo matemático del canal, al inicio y al final del estrechamiento respectivamente, según lo visto en la Sección 2. Los valores del coeficiente de pérdidas adoptados en (5) son los correspondientes a transiciones graduales. Se trata de valores típicos recomendados en la literatura técnica, como por ejemplo en una de las principales referencias para el cálculo de flujo en lámina libre (Te Chow, 1959).

La derivada parcial del cuadrado de la velocidad del fluido, $\frac{\partial(v^2(x, t))}{\partial x}$, que aparece en (4), se aproxima de manera puntual en cada punto de una malla uniforme de puntos, $x = x_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, separados a una distancia $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $\forall i$, usando los valores de dicha velocidad en los mismos puntos en cada instante de tiempo t , $v_i(t) \equiv v(x_i, t) = \frac{q(x_i, t)}{h(x_i, t)}$, de modo que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(v^2(x_i, t))}{\partial x} \right| &\approx \frac{1}{\Delta x} \left| \left(\frac{v_{i+1}(t) + v_i(t)}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_i(t) + v_{i-1}(t)}{2} \right)^2 \right| \\ &= \frac{1}{4\Delta x} |v_{i+1}^2(t) - v_{i-1}^2(t) + 2v_i(t)(v_{i+1}(t) - v_{i-1}(t))| \end{aligned} \quad (6)$$

Para la resolución del sistema (1) usaremos el esquema numérico descrito en (Balaguer-Beser et al., 2013), el cual está basado en un método de volúmenes finitos de tipo centrado junto con

un algoritmo de reconstrucción de alto orden de tipo no oscilatorio. La discretización temporal se efectúa mediante un esquema de tipo Runge-Kutta con una extensión natural continua. El modelo matemático usado en (Balaguer-Beser et al., 2013) considera los mismos términos que en (1) salvo el definido mediante (4), el cual ha sido introducido para simular las pérdidas locales de energía. De todas formas, dicho término se puede discretizar del mismo modo que el modelo de pérdida de energía por fricción (2). El uso de un esquema de tipo centrado facilita la incorporación de nuevos términos al modelo matemático, obteniendo la solución numérica sin la necesidad de tener que diagonalizar la matriz asociada al sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Para mas detalles se puede consultar la referencia (Balaguer-Beser et al., 2014).

El método numérico necesita conocer el valor de las funciones incógnita en el instante de tiempo inicial ($t = 0$), para cualquier valor de x , así como el tipo de condiciones de contorno en la frontera del dominio espacial considerado, para cualquier instante de tiempo. En la simulación del canal de laboratorio descrito en la Sección 2 dichos contornos coinciden con $x = 0$ m (aguas arriba) y $x = 1.8$ m (aguas abajo). En el caso de no conocer el valor numérico de alguna de las dos funciones incógnita, h o q , en alguno de los dos puntos frontera, se usará como condición de contorno la condición de derivada nula a través de la misma. Ello ocurre por ejemplo, con el caudal, q , en la frontera aguas abajo o en el calado, h , aguas arriba o aguas abajo en alguno de los tres primeros casos considerados en la Tabla 1. Los casos de transición en régimen lento (casos C1 y C2) están caracterizados por conocer el valor del caudal específico en la frontera aguas arriba y el valor del calado en la frontera aguas abajo. El método numérico usará la condición de contorno de derivada nula en los puntos de frontera donde no se conozcan dichos valores. Por su parte, en los casos con cambio de régimen lento a régimen rápido, (caso C3), es suficiente con conocer el caudal específico y el calado aguas arriba, imponiendo la condición de contorno con derivada nula aguas abajo para ambas funciones. Sin embargo, veremos el efecto que tiene en los resultados numéricos el imponer también un valor fijo para el calado aguas abajo como ocurre en el caso C4.

4. Comparativa numérico-experimental

En esta sección se muestran los resultados obtenidos en los experimentos de laboratorio y mediante la simulación con el modelo matemático, en los casos descritos anteriormente en la Tabla 1. En las gráficas que se muestran en esta sección, la solución experimental representa una media entre los resultados medidos en el eje del canal, y los resultados en los laterales, para cada distancia recorrida desde aguas arriba. La medición del calado en el canal se ha realizado cuando se ha alcanzado una situación de equilibrio en el ensayo (es decir, los valores de calados y velocidades no cambian con el tiempo). Para realizar esta medición se ha utilizado un limnómetro digital, con precisión de 10^{-2} mm. No se han medido puntos a intervalos de distancia fijos; en general, la distancia entre puntos es de unos 5 cm, pero se ha ampliado en caso de no observar una variación significativa de la lámina libre, y se ha disminuido, hasta 1 cm, en las zonas donde existe una variación importante.

El método numérico que calcula la solución aproximada del sistema (1) ha usado una malla formada por 1080 puntos. Con dicha malla se obtienen resultados precisos para la simulación de los 1.8 m del canal de laboratorio. Los resultados numéricos se muestran en el instante de tiempo $t = 20$ s, en el cual la solución numérica de dichos casos se ha estabilizado. Para alcanzar la solución, el intervalo de tiempo $[0$ s, 20 s] se ha discretizado en una serie de valores de tiempo: $t^0 = 0$, $t^1 = t^0 + \Delta t^0$, \dots , $t^k = t^{k-1} + \Delta t^{k-1}$ tal que:

$$\Delta t^n = 0.3 \frac{\Delta x}{\max_j (\sqrt{gh_j^n} + |v_j^n|)} \quad (7)$$

donde h_j^n es el valor del calado, v_j^n la velocidad del fluido en el punto $x = x_j$ y en el tiempo $t = t^n$ y, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $\forall i$ es la separación entre los puntos de la malla. La igualdad (7) viene determinada por la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (condición CFL), de forma que el valor 0.3 que aparece en (7) (número de Courant) ha sido elegido como el máximo posible que asegurar la convergencia del esquema numérico. De esta forma, el esquema numérico utiliza un paso de tiempo variable que se adapta al calado y velocidad del fluido obtenidos en cada paso de tiempo. Cuando existe un valor: $t^N = t^{N-1} + \Delta t^{N-1} > 20$ entonces se define $\Delta t^{N-1} = 20 - t^{N-1}$ para que $t^N = 20$ s y el programa se detenga.

La Figura 1 muestra los resultados obtenidos para el caso C1, usando las condiciones iniciales y de contorno que se muestran en la Tabla 1. En dicha figura se comparan los resultados numéricos obtenidos (denominados mediante Num. C1) en dos tipos de transiciones: 4:3 y 1:2. Recordemos que la transición 4:3 tiene una menor longitud y por tanto una mayor pendiente que la del tipo 1:2. Ello se traduce en que en la transición 4:3, de los 1080 puntos de la malla sólo 18 puntos pertenecen a la zonas de contracción y expansión en las cuales la función $\lambda(x)$, definida mediante (5), toma valores distintos de cero. En cambio, con la transición 1:2 existen 48 puntos que cumplen dicha condición.

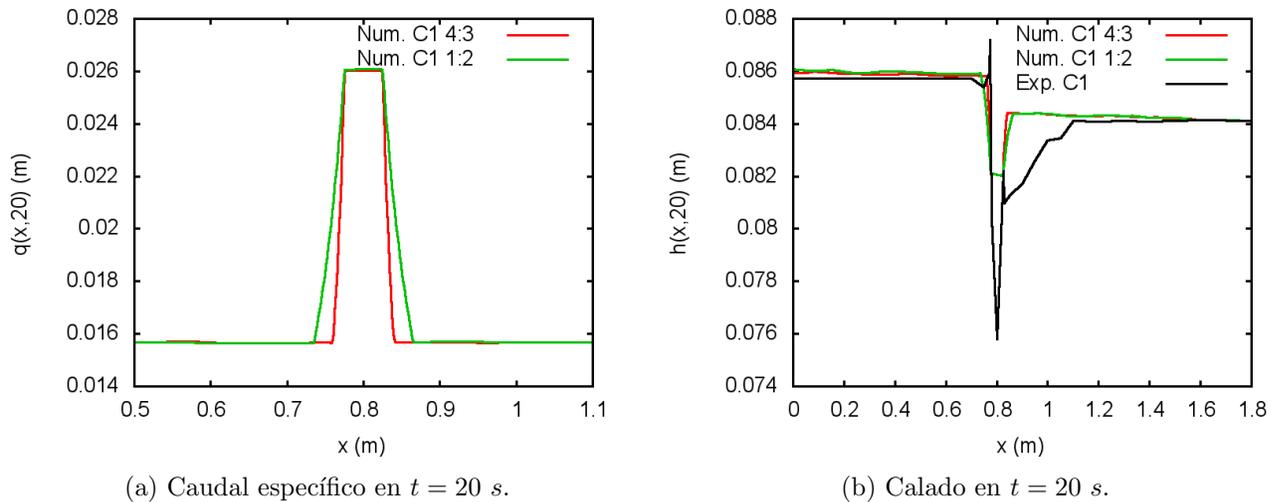


Figura 2: Comparativa numérico-experimental para el caso C1, usando las condiciones iniciales y de contorno dadas en la Tabla 1. En el esquema numérico se han usado dos tipos de transiciones: “Num. C1 4:3”, en el cual la longitud de cada transición es de 0.015 m y “Num. C1 1:2”, que tiene una longitud a cada lado del estrechamiento de 0.04 m. Exp. C1 es la solución experimental.

A su paso por dicho estrechamiento se produce un aumento en la velocidad del fluido que se traduce en un aumento del caudal específico (Figura 1(a)), el cual vuelve a tomar los valores previos al volver al ancho inicial del canal. El cambio de transición en el algoritmo de simulación (de 4:3 a 1:2) provoca que dicho cambio sea más o menos rápido en las zonas cercanas al inicio y final del estrechamiento. Sin embargo, no tiene influencia en el caudal que se alcanza dentro del mismo, ni tampoco aguas arriba ni aguas abajo.

El calado (profundidad del agua) también se ve afectado por dicho estrechamiento (Figura 1(b)). Nuevamente, el tipo de transición sólo afecta a la suavidad de la solución en las zonas de cambio. El tipo de condiciones inicial y de contorno considerados para el caso C1 provoca que el mismo represente una transición en régimen lento, aguas arriba y aguas abajo del estrechamiento. Los resultados experimentales muestran un aumento del calado antes del estrechamiento junto con un descenso importante del mismo justo aguas abajo de la contracción, que no es capaz de representar el algoritmo matemático de simulación, ya que hay involucrados

efectos 3D locales en este tramo. Además, el esquema numérico tampoco es capaz de reproducir con exactitud el calado aguas arriba.

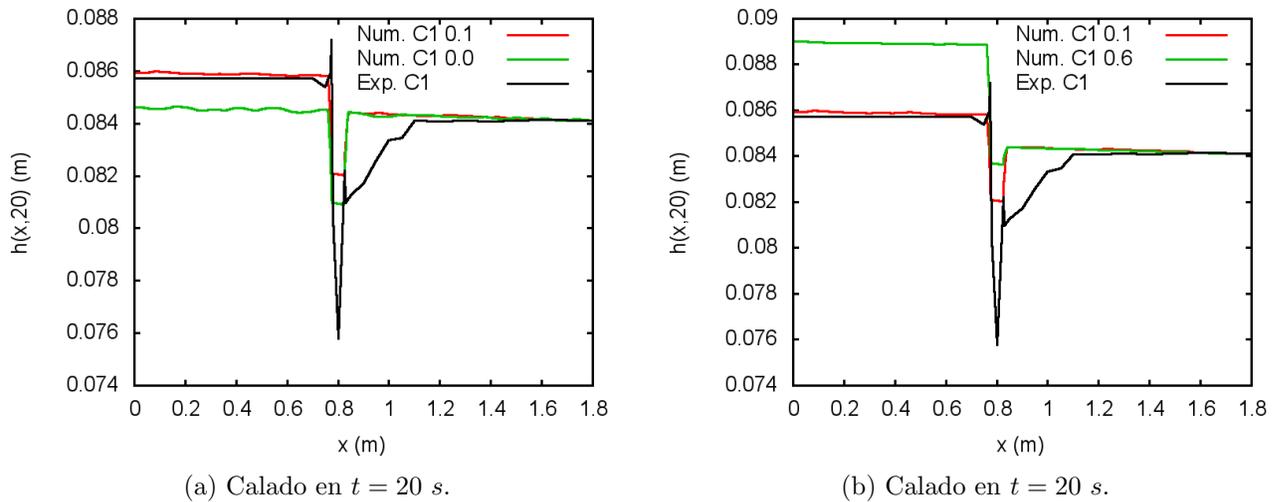


Figura 3: Igual que en la Figura 1 usando el tipo de transición 4:3 y variando la función $\lambda(x)$. “Num. C1 0.1” representa dicha función definida mediante (5). “Num. C1 0.0” indica que la función $\lambda(x)$ es igual a cero en todos los puntos y “Num. C1 0.6” implica sustituir en (5) el valor 0.1 por 0.6 y el valor 0.3 por 0.8.

La Figura 2 muestra la variación en las soluciones numéricas obtenidas en función de los valores tomados para la función $\lambda(x)$. El caso en el cual $\lambda(x) = 0, \forall x$, implica el no tener en cuenta en el modelo matemático las pérdidas locales, quitando el término definido mediante (4). Y en dicho caso, la solución numérica es incapaz de recoger el aumento de calado que se produce antes del estrechamiento (Figura 2(a)). En cambio, la consideración de que la función $\lambda(x)$ toma valores superiores a 0.6 en las transiciones incide en un aumento excesivo del calado antes de llegar al estrechamiento, el cual se prolonga hasta aguas arriba en la solución numérica obtenida (Figura 2(b)).

Los calados aguas arriba y aguas abajo se simulan de manera más precisa para el caso C2, según se aprecia en la Figura 3(a). Dicha figura muestra la disminución del error que se produce al considerar la función $\lambda(x)$ definida mediante (5), teniendo en cuenta el término definido por medio de (4) en el modelo matemático. En caso de no considerar dicho término, el calado aguas arriba no alcanza el mismo nivel que el obtenido en el ensayo experimental. De todas formas, los dos resultados numéricos dados en la Figura 3(a) se muestran incapaces de reproducir el descenso del calado aguas abajo de la contracción que se observa en el experimento.

En los casos de combinación de régimen lento con régimen rápido el modelo numérico es capaz de proporcionar la solución correcta imponiendo condiciones de contorno de “calado = valor dado experimentalmente” en los dos extremos del canal, unido al valor del caudal específico aguas arriba (véase el resultado numérico del caso C4 en la Figura 3(b)). En caso de no considerar el valor del calado aguas abajo como condición de contorno, como ocurre en el caso C3, el resultado numérico no reproduce adecuadamente el descenso del calado que se produce después del estrechamiento, el cual continua hasta el final del canal. Conviene hacer notar que los resultados experimentales coinciden para los casos C3 y C4.

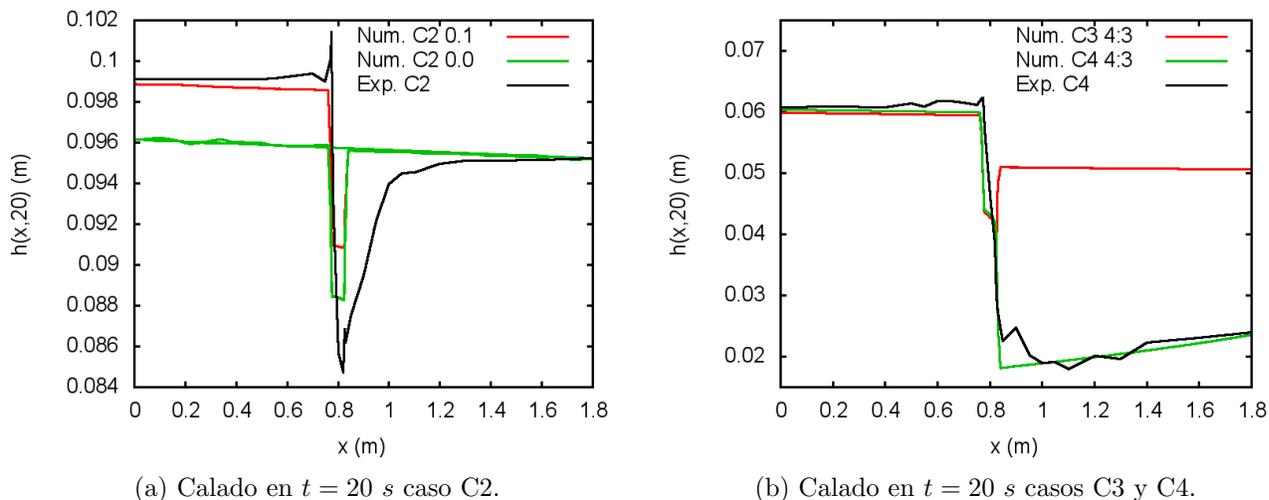


Figura 4: Comparativa numérico-experimental para los casos C2, C3 y C4, usando las condiciones iniciales y de contorno dadas en la Tabla 1. En el esquema numérico se ha usado la transición 4:3. La notación para los resultados numéricos es la misma que la de las Figuras 1 y 2. Exp. C2 y Exp. C4 representan la solución de experimental obtenida para los casos C2 y C4 respectivamente.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un modelo matemático capaz de simular el movimiento de aguas someras y su paso por un estrechamiento. La formulación matemática se ha calibrado comparando las simulaciones numéricas con los resultados obtenidos en experimentos de laboratorio analizando un total de cuatro casos con dos tipos de comportamiento del flujo, manteniendo el régimen lento después del estrechamiento y cambiando de régimen lento a régimen rápido (control y transición, respectivamente). Los resultados obtenidos muestran la importancia de la adecuada elección de los términos que intervienen en el modelo matemático y las ventajas de la comparación con ensayos de laboratorio para controlar el grado de precisión del mismo en casos prácticos.

Los comparativa efectuada permite concluir que el modelo matemático representa mejor la transición del régimen lento al rápido alrededor del estrechamiento, indicando la disminución de calado desde el estrechamiento hacia aguas abajo que se observa a nivel experimental, aunque para ello es necesario imponer condiciones de contorno fijas para el calado en los dos extremos del canal, lo que no tendría que ser necesario, teóricamente, en este caso. Además en dicho caso, el calado aguas arriba también se reproduce de forma precisa.

Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación por parte de la Generalitat Valenciana en el marco del proyecto AICO/2015/098. Beatriz Nacher-Rodríguez agradece la ayuda Val-I+D Predoctoral que le ha sido concedida (ACIF/2015/074) por parte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

-  Balaguer-Beser A., Capilla M. T., Nácher-Rodríguez B., Vallés-Morán F. J., Andrés-Doménech I. (2013). *Un esquema centrado de alto orden que resuelve el problema del transporte de sedimentos en canales con geometría irregular*. Actas XXIII CEDYA, XIII CMA, pp. 479–487.
-  Balaguer-Beser A., Capilla M. T., Nácher-Rodríguez B., Vallés-Morán F. J., Andrés-Doménech I. (2014). *A high-order well-balanced central scheme for the shallow water equations in channels with irregular geometry*. In Advances in Differential Equations and Applications, F. Casas, V. Martinez (eds.). SEMA SIMAI Springer Series Vol. 4, 229-237, DOI 10.1007/978-3-319-06953-1.
-  Caleffi V., Valiani A., Bernini A. (2006). *Fourth-order balanced source term treatment in central WENO schemes for shallow water equations*. J Comput. Phys., Vol. 218, pp. 228–245.
-  Gallardo J. M., Parés C., Castro M. (2007). *On a well-balanced high-order finite volume scheme for shallow water equations with topography and dry areas*. J Comput. Phys., Vol. 227, 574–601.
-  Te Chow V. (1959). *Open channel hydraulics*. McGraw-Hill Book Company. New York.
-  Toro E. F. (2001). *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. John Wiley & Sons.
-  Vázquez-Cendón M. E. (1999). *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry*. J. Comp. Phys., Vol. 148, 497–526.