



## DESARROLLO DE UN MODELO RACIONAL PARA EL CÁLCULO DE CAUDALES DE DISEÑO Y CURVAS DE PROBABILIDAD DE FRECUENCIA DE CAUDALES EN BOMBEO DIRECTOS

*Faci, E, Aliod R, Paño J, García Asín, S*

Área de Mecánica de Fluidos. Grupo I+D+I GESTAR Escuela Politécnica Superior Huesca. [efaci@unizar.es](mailto:efaci@unizar.es), [raliod@unizar.es](mailto:raliod@unizar.es), [jpano@unizar.es](mailto:jpano@unizar.es), [susanag@unizar.es](mailto:susanag@unizar.es)

### Resumen

Se describe un nuevo modelo conceptual para el cálculo de curvas de densidad de probabilidad de caudales, y de los caudales de diseño, en redes de riego a la demanda en que no se cumple una de las principales hipótesis de la formulación de Clément: la igualdad de probabilidad de inicio de riego para todas las horas de la Jornada de Riego (JR). En este modelo, se adapta la formulación de Clément para condiciones en que existen horas no hábiles en la JR para el riego y además el riego se ejecuta de forma ininterrumpida. En tales casos no existe equiprobabilidad de apertura de hidrante a lo largo de la JR. Este comportamiento es habitual en el riego presurizado con sistemas con bombeo directo, e induce caudales de diseño sensiblemente superiores a los dados por la formulación tradicional. Se realiza, para un caso teórico, una comparación los caudales de diseño obtenidos mediante la formulación de Clément, mediante un procedimiento heurístico de simulación de múltiples escenarios (RDDC) y mediante la propuesta en este artículo.

### Abstract

Description of a new model to calculate the probability density functions of flow and the design flow in pipes of irrigation networks in which the hydrant opening probability is not constant during the irrigation day. Clément formulation is adapted to the hypothesis of continuous irrigation and not allowed irrigation time period. These hypotheses cause a non equiprobable hydrant opening probability during the irrigation day. That behavior is quite common in direct pump pressurized irrigation networks and leads to high design flows compared to Clément formulation. Design flows calculated with three different models, proposed model, Clément formulation, and to RDDC, are compared in this paper.

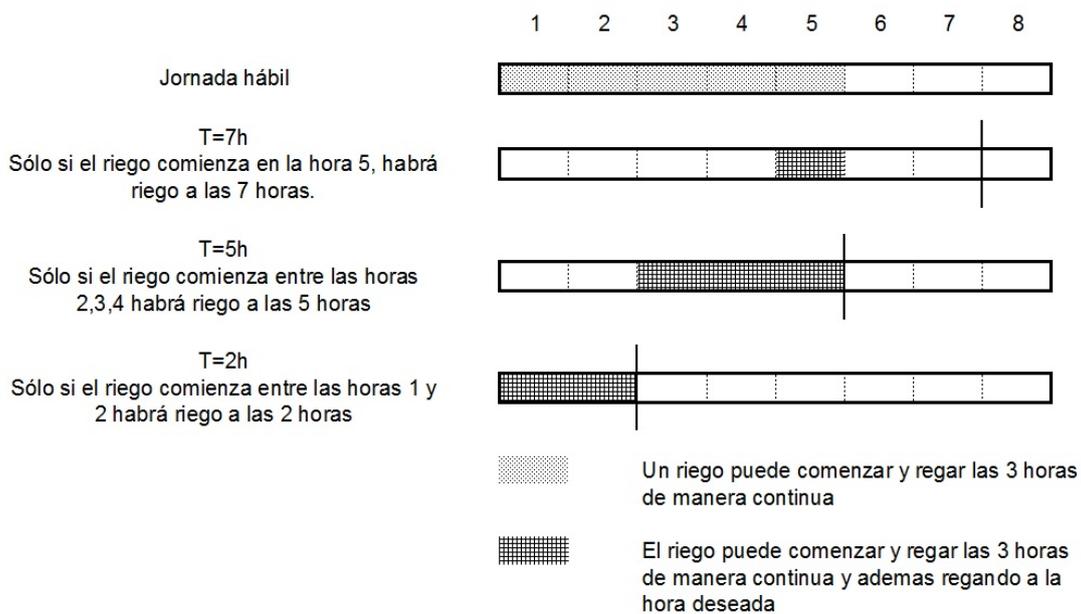
### 1.- Introducción, Objetivos

El objeto de la presente comunicación es describir un modelo conceptual que permite calcular la distribución probabilidad de frecuencia de caudales en cada una de las conducciones de una red de riego estrictamente ramificada, gestionada a la demanda, que se adapta mejor a las condiciones de alimentación por bombeo directo que la formulación tradicional de Clément (1966).

El hecho de que sean habituales las tarifas de precios de la energía en que se penalizan ciertas horas del día induce a los regantes a la exclusión de las mismas

como horas hábiles para el uso de la red. Además, generalmente, el riego de una parcela se desea realizar de forma continua, es decir sin interrupciones debidas a entrar en las horas de exclusión de riego, lo que provoca la no equiprobabilidad de apertura de los hidrantes durante la Jornada de Riego. Efectivamente, cuando las horas restantes para el comienzo del intervalo temporal de riego inhibido sea inferior al tiempo necesario de apertura del hidrante para efectuar el riego total de la parcela, el regante excluirá esas horas de su programación de riegos. En consecuencia, los riegos tendrán mayor probabilidad en la parte central del día, y menor probabilidad cuanto más nos acerquemos a la hora de inhibición del riego (hora de comienzo de la tarifa punta).

En la figura 1 se muestra un ejemplo para un riego de 3 horas en un periodo hábil de riego de 8 horas. Como se observa, la probabilidad de que un hidrante este abierto a la hora 2 es el doble que a la hora 7 y el triple en la hora 5 respectivamente.



**Figura 1.** Representación de no equiprobabilidad de apertura de hidrante

Por tanto, una de las condiciones de la formulación de Clément no se cumple: que la probabilidad de apertura del hidrante sea constante durante la Jornada de Riego.

Este efecto induce una acumulación de los riegos en las horas centrales del Jornada de Riego, y una frecuencia de caudales punta más elevada que lo que predice la formulación de Clément y Galand (1986), que se basa en la formulación original propuesta en Clément (1966).

Moreno et al (2007) usando un procedimiento heurístico (RDDC) de determinación de caudales de diseño a la demanda, basado en la simulación repetida de múltiples escenarios aleatorios de riego en que todo el tiempo de apertura de hidrante cae en la misma JER, detectaron los que los caudales máximos así estimados, para cada garantía de suministro, eran superiores a los caudales evaluados por la formulación de Clément, pero no se identificó el origen de la discrepancia ni se estudió analíticamente el problema.

En este trabajo se propone una extensión teórica de la formulación de Clément que es capaz de adaptarse a las condiciones indicadas, generando expresiones matemáticas directa y fácilmente computables.

Como ejemplo, se muestra los resultados de los caudales de diseño en un caso de bombeo directo, obtenidos usando tres diferentes métodos: formulación de Clément y Galand (1986), RDDC (generación aleatoria de curvas de demanda) propuesta por Moreno et al (2007) y finalmente la nueva formulación introducida.

## 2.- Materiales y Métodos

Se definen el tiempo reducido y la duración reducida en Eq 1, siendo JER la duración temporal en que la red esta efectivamente disponible para el riego (Jornada Efectiva de Riego),  $Q_{fc}$ , el caudal ficticio continuo,  $A$  la superficie regada y  $\dot{D}$  la dotación del hidrante respectivo. Ambas variables son adimensionales y tienen un valor comprendido entre 0 y 1. De esa manera se facilita el estudio al manejar variables acotadas y normalizadas respecto a la JER.

$$\hat{T} = \frac{\text{tiempo transcurrido}}{JER} \quad \hat{D} = \frac{Q_{fc} \cdot A}{JER \cdot \dot{D}}$$

Eq 1. Definición de tiempo reducido y duración reducida.

Se considera que el riego es ejecutado en las horas hábiles, que suman un tiempo JER; y de manera continua. Por eso, la única variable de decisión es la hora de apertura de cada hidrante. Se supone la existencia de una función que establece la relación entre la hora de apertura del hidrante con la duración reducida  $\hat{D}$  y el tiempo reducido  $\hat{T}$  del hidrante, que se denomina función frecuencia de comienzo de riego  $f_{cr}$ .

La probabilidad de que un hidrante de duración reducida  $\hat{D}$ , esté abierto en un instante reducido  $\hat{T}$  vendrá dada por la suma de las probabilidades de que dicho riego comience en un instante que riegue en  $\hat{T}$ , por tanto se restringe al intervalo  $[\hat{T} - \hat{D}, \hat{T}]$ . Dado que se desea un valor de probabilidad, se normaliza respecto a la suma total de la frecuencia de riego diaria, obteniendo la expresión de la Eq 2.

$$P(\hat{T}, \hat{D}) = \frac{\int_{\hat{T}-\hat{D}}^{\hat{T}} f_{cr}(\hat{t}, \hat{D}) d\hat{t}}{\int_0^1 f_{cr}(\hat{t}, \hat{D}) d\hat{t}}$$

Eq 2. Cálculo de la probabilidad de apertura de un hidrante dada una función de comienzo de riego genérica.

Se considera que la frecuencia de comienzo de riego es uniforme para aquellos instantes de tiempo que permitan ejecutar el riego de forma completa sin interrupciones. Por tanto, no se podrá comenzar a regar en instantes de superiores a  $1 - \hat{D}$  puesto que no podría completar el riego necesario para la jornada antes del comienzo de la interrupción, ni obviamente en instantes menores que 0. De modo que la función de frecuencia de comienzo de riego propuesta queda definida en la Eq 3.

$$f_{cr}(\hat{T}, \hat{D}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{T} < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < \hat{T} < 1 - \hat{D} \\ 0 & \text{si } \hat{T} > 1 - \hat{D} \end{cases}$$

Eq 3. Función de frecuencia de comienzo de riego

Para la función de frecuencia de comienzo de riego propuesta Eq 3, existe una solución analítica a las integrales de Eq 2, obteniéndose la función de probabilidad de apertura indicada en Eq 4. En el caso de que para otras definiciones de  $f_{cr}$  no se obtenga la una función integrable analíticamente, habrá que utilizar métodos numéricos para obtener su valor.

$$P(\hat{T}, \hat{D}) = \frac{\text{Min}(1 - \hat{D}, \hat{T}) - \text{Max}(0, \hat{T} - \hat{D})}{1 - \hat{D}}$$

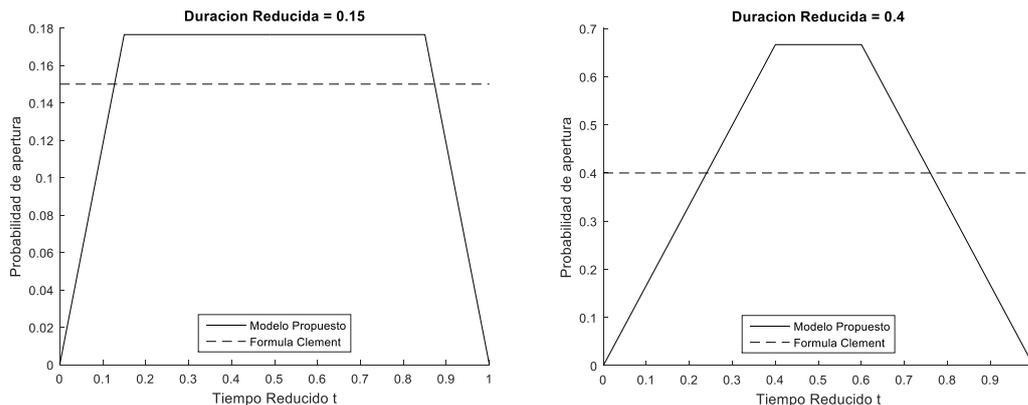
Eq 4. Probabilidad instantánea de apertura de hidrante.

En cambio, en la formulación de Clément original, la probabilidad de apertura se obtiene mediante la ecuación Eq. 5 donde se muestra que la duración reducida es equivalente a la definición de probabilidad de apertura de hidrante propuesta por Clément y utilizada tradicionalmente.

$$P_{\text{Clément}}(\hat{T}, \hat{D}) = \frac{Q_{fc} \cdot A}{\text{JER} \cdot \text{Dot}} = \hat{D}$$

Eq 5. Probabilidad de apertura de hidrante para la formulación de Clément

En la Figura 2 se muestra la probabilidad de apertura en la formulación de Clément tradicional (línea discontinua) y la propuesta (línea continua) correspondientes a la Eq 4. Tal y como se observa, la formulación propuesta predice en cualquier circunstancia una mayor probabilidad de apertura en la parte central de la jornada de riego.



**Figura 2.** Distribución de probabilidad de apertura de hidrantes. Para diferentes valores de Duración reducida: 0.15, 0.4 respectivamente

Como se puede observar, cuanto mayor es el valor de  $\hat{D}$ , mayor es la diferencia existente entre la formulación propuesta y la original de Clément. También se puede comprobar en la Eq 6 que bajo la hipótesis de baja duración reducida (tiempo de apertura de hidrante muy bajo)  $1 - \hat{D} \approx 1$ , ambas formulaciones coinciden:

$$P(\hat{T}, \hat{D}) = \frac{\text{Min}(1 - \hat{D}, \hat{T}) - \text{Max}(0, \hat{T} - \hat{D})}{1 - \hat{D}} \approx \frac{(\hat{T}) - (\hat{T} - \hat{D})}{1} \approx \hat{D}$$

Eq 6. Probabilidad de apertura bajo hipótesis de riego de baja duración

Una vez conocida la probabilidad de apertura de los hidrantes según el modelo propuesto, el siguiente paso es análogo al que se realiza en la formulación de Clément. Se realiza una aproximación de la distribución binomial de caudales a una distribución normal para cada instante de la jornada de riego. Aunque la probabilidad de apertura de hidrante varía ahora a lo largo de la jornada de riego, habrá una distribución normal de caudales para cada instante  $\hat{T}$ , tal y como se representa en la Eq 7.

$$Q(\hat{T}) \sim N[\mu(\hat{T}), \sigma(\hat{T})]$$

$$\mu(\hat{T}) = \sum_{i=1}^{nHydr} p_i(\hat{T}) \cdot Dot_i \quad \sigma(\hat{T}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{nHydr} p_i(\hat{T}) \cdot [1 - p_i(\hat{T})] \cdot Dot_i^2}$$

Eq 7. Estadísticos (media y desviación típica) de la distribución de caudales en un tiempo T de la jornada de riego.

La función de distribución de caudales se obtiene utilizando la función de distribución de la Eq 8, que corresponde a la de la normal estándar  $N(0,1)$  por lo que será preciso utilizar la expresión de caudal tipificado de la Eq 9.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Eq 8. Función de distribución de la distribución normal estándar,  $N(0,1)$

$$\frac{Q - \mu(\hat{T})}{\sigma(\hat{T})}$$

Eq 9. Expresión del caudal tipificado.

Conocida la función de distribución de caudales instantánea, es fácil hallar el caudal de diseño. Basta con encontrar el valor de  $Q_{DIS}$  para el que la probabilidad de que el caudal sea inferior iguale a la garantía de suministro deseada. Esto requiere resolver Eq 10 en la variable  $Q_{DIS}$  utilizando para ello la función de distribución de la distribución normal mostrada en la Eq 9.

$$GS = \int_0^1 \Phi\left(\frac{Q_{DIS} - \eta(\hat{t})}{\sigma(\hat{t})}\right) d\hat{t}$$

Eq 10. Cálculo del caudal de diseño  $Q_{DIS}$  de una tubería conocida su distribución de caudales  $N(\eta(\hat{t}), \sigma(\hat{t}))$

Puesto que no existe solución analítica a la Eq 10, se recurre a métodos numéricos para su resolución que se pueden consultar en Chapra y Canale (2007);

Se utiliza el *Método de la Falsa Regla* que combina el *Método de la Secante* y el de la *Bisección*. La ventaja de este método es que combina la velocidad de convergencia del método de la secante con la convergencia asegurada del método de la bisección. Los valores de inicialización escogidos se muestran en la Eq 11 y

corresponden a caudal nulo y caudal acumulado de la red, que se corresponden a los valores mínimo y máximo de caudal admisible.

$$Q_{Dis} = 0 \quad Q_{Dis} = \sum_{i=1}^{nHydr} Dot_i$$

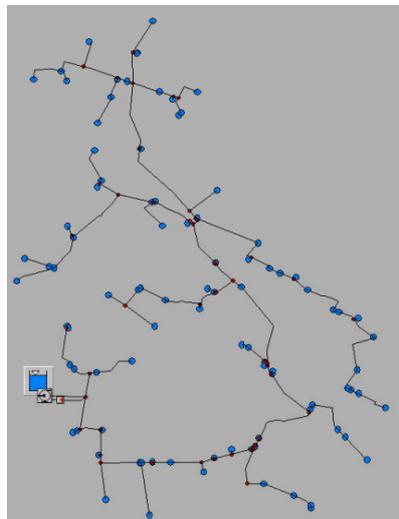
Eq 11. Inicialización de caudales

Será preciso evaluar sucesivas veces la integral de la Eq 10. Para ello, se ha utilizado el *Método de Simpson Adaptativo* que garantiza un error acotado. Para el cálculo de  $\Phi$  se han utilizado valores tabulados, si bien se podría obtener mediante integración numérica de la Eq 8.

Por último, hay que tener en cuenta que la aproximación, de la distribución binomial a la normal, es válida cuando el número de hidrantes aguas abajo suficientemente elevado y el valor de la probabilidad de apertura instantánea no está excesivamente próximo a 0 ni a 1. Según se observa en la Figura 1, tanto al comienzo como al final de la jornada de riego, la probabilidad de apertura es muy baja, independientemente de la duración reducida del hidrante, lo que puede provocar un cierto sesgo en la estimación de los caudales. Sin embargo, a la hora de establecer caudal de diseño se puede considerarse este factor despreciable porque su contribución a la integral de la Eq 10. es muy baja comparada con la del resto de la jornada.

### 3- Resultados y Discusión

Se presentan los resultados de la aplicación del modelo expuesto en el apartado anterior a un caso ejemplo, basado en una red tipo que el paquete informático para diseño y gestión de riegos presurizados, GESTAR2014 ([www.gestarcad.com](http://www.gestarcad.com)), utiliza en sus tutoriales. En la Figura 3 dicha red se muestra esquemáticamente.

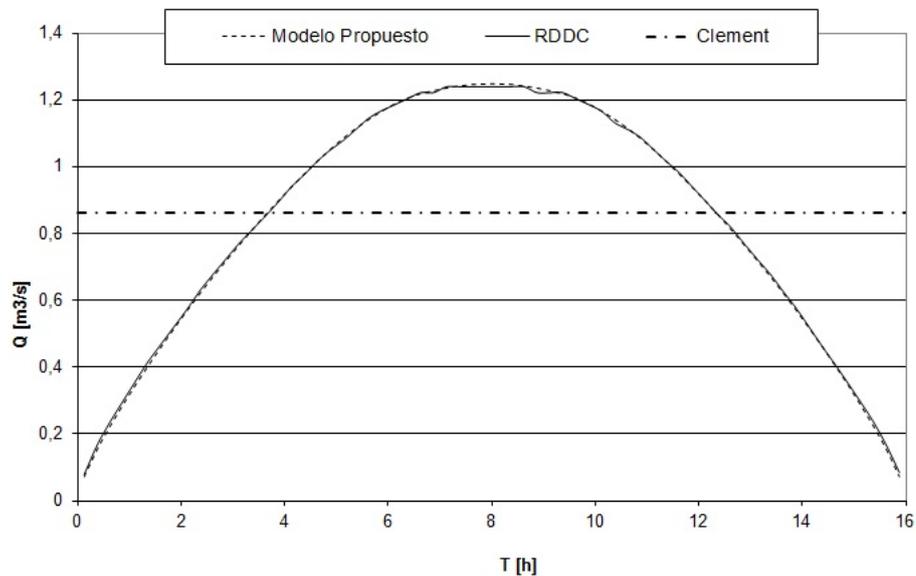


**Figura 3.** Esquema de la red utilizada para la comparación entre modelos.

La red es estrictamente ramificada y consta de 94 hidrantes con un caudal total instalado de 1.54 m<sup>3</sup>/s. Se utilizarán también los modelos de Clément tradicional y el

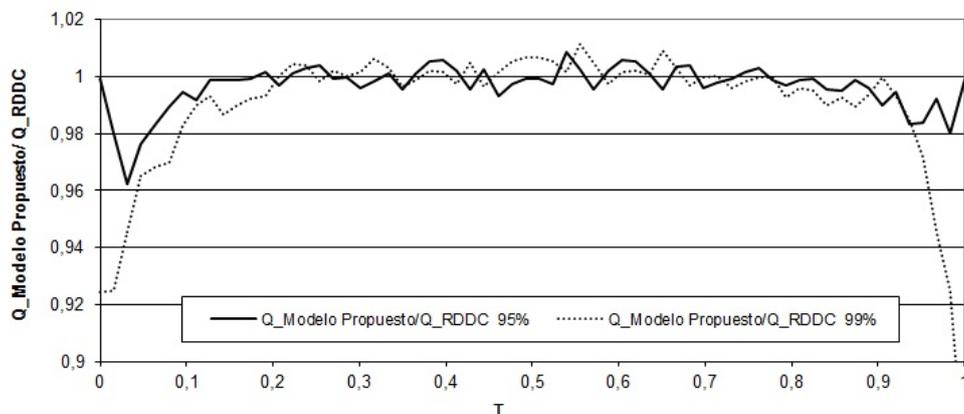
procedimiento RDDC, que se ha reproducido mediante la herramienta de generación de programaciones de riego aleatorias del paquete GESTAR 2014, con 100 simulaciones por hidrante, que hacen un total de 9.400.

En primer lugar, en la Figura 4, se muestra una comparativa entre el caudal de diseño de la conducción de cabecera según el tiempo de la JR, para cada uno de los modelos considerando una garantía de suministro del 99%. No se ha incluido la gráfica para una Garantía de Suministro del 95% porque eran incluso más parejas si cabe.



**Figura 4.** Distribución diaria de caudales de diseño en la cabecera para una Garantía de Suministro del 99%.

Se observa una gran similitud entre el resultado obtenido utilizando el procedimiento de simulaciones repetidas RDDC y el modelo conceptual planteado. Para observar mejor la equivalencia entre ambos, se adjunta en la Figura 4 la relación entre ambas predicciones para una garantía de suministro del 95% y 99%.



**Figura 5.** Ratio entre el caudal de diseño de la cabecera de la red calculado con de modelo conceptual propuesto y con el método RDDC para el caso ejemplo, a lo largo del tiempo reducido.



Se observa que son muy parejos en toda la parte central de la jornada de riego. Mientras que en la parte inicial  $\hat{T} < 0.1$  y final  $\hat{T} > 0.9$  se aprecian los efectos de la frontera temporal.

El modelo propuesto conduce a funciones de probabilidad de caudal que generan mayores caudales de diseño que los encontrados con la formulación tradicional de Clément para las mismas condiciones, siendo los primeros presumiblemente más realistas, y equivalentes a los encontrados por el procedimiento RDDC.

Además, la formulación propuesta aporta ventajas adicionales:

Establece un modelo teórico conceptual, que se explica bajo hipótesis sencillas y plausibles, y que conduce racionalmente a resultados demostrados rigurosamente.

Se obtienen expresiones analíticas y computables directamente que evitan incurrir en una compleja simulación de cientos o miles de escenarios y la reducción simultánea de datos.

El modelo permite su extensión y generalización para reproducir diferentes sesgos en el uso de la red mediante funciones de frecuencia de comienzo de riego adecuadas y más sofisticadas.

#### **4.- Bibliografía**

Chapra S., Canale R. (2007) Métodos Numéricos para Ingenieros 5ª Edición, Mc Graw Hill. Capítulos 5, 6, 22. Epílogo parte 6.

Clement, R. (1966) Calcul des débits dans les réseaux d'irrigation fonctionnant a la demande. La Houille Blanche, 5.

Clément, R., Galand, A., (1986). El riego por aspersión y las redes colectivas de distribución a presión. Editores Técnicos Asociados.

Moreno, M., Planells, P., Ortega, J., Tarjuelo, J. (2007). New Methodology to Evaluate Flow Rates in On-Demand Irrigation Networks. J. Irrig. Drain Eng., 133(4), 298–306.