DISEÑO Y ANALISIS DE MODELOS DE NEGOCIO PARA OPERADORES MOVILES VIRTUALES

Cyntia Carreres Camacho

Tutor: Luis A. Guijarro Coloma

Trabajo Fin de Grado presentado en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación de la Universitat Politècnica de València, para la obtención del Título de Graduado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Curso 2016-17

Valencia, 04 de diciembre de 2017

RESUMEN

El objetivo de este TRABAJO DE FIN DE GRADO (en adelante TFG) es el diseño y análisis de modelos de negocio para operadores móviles, tanto en el caso de los MNO: *Mobile Network Operator* (Operador Móvil) y los MVNO: *Mobile Virtual Network Operator* (Operador Móvil Virtual).

Este objetivo se basa en el análisis de un modelo simple de competencia entre dos operadores teniendo en cuenta los beneficios y los costes, llegando a deducir de forma elemental, el número de usuarios o clientes que se suscriben a cada operador.

El análisis se ha desarrollado en dos escenarios:

1. Escenario 1: Monopolio, dónde sólo existe la opción del MNO.
2. Escenario 2: Duopolio, en este caso existen dos opciones, MNO y MVNO.

Para este análisis se ha considerado el ***Equilibrio de Nash****.*

RESUM

El objectiu d'aquest TREBALL DE FI DE GRAU (en avant TFG) es el disseny i anàlisi de models de negoci per a operadors mòbils, tant en el cas de MNO: *Mobile Network Operator* (Operador Mòbil) i els MVNO: *Mobile Virtual Network Operator* (Operador Mòbil Virtual).

Aquest objectiu es basa en l'anàlisi de un model simple de competència entre dos operadors tenint en compte els beneficis i els costs, aplegant a deduir de forma bàsica, el nombre de usuaris o clients que es subscriuen a cada operador.

L'anàlisi s'ha desenvolupat en dos escenaris:

1. Escenari 1: Monopoli, on soles existeix la opció de MNO.
2. Escenari 2: Duopoli, en aquest cas existeixen dos opcions, MNO y MVNO

Per a aquest anàlisis s'ha considerat el ***Equilibri de Nash.***

ABSTRACT

The purpose of this DEGREE FINAL THESIS (hereinafter DFT) is the design and analysis of business models for mobile operators, both for MNO: Mobile Network Operators and MVNO: Mobile Virtual Network Operators.

This work is based on the analysis of a simple competition model between two operators, taking into account both benefits and cost, in a way that it can be deduced in an elementary way the number of users or clients that subscribe to each operator.

The analysis has been developed in two stages:

1. Stage 1: Monopoly, where the only option available are MNOs.

2. Stage 2: Duopoly, where two options exists: MNOs and MVNOs.

For this analysis the Nash equilibrium was considered.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Los operadores de red que ofrecen sus servicios actualmente se dividen en dos grandes grupos, dependiendo de la infraestructura que utilicen para ofertar estos servicios a su base de clientes. Si bien sus diferencias se extienden más allá de que compañía sea propietaria de la infraestructura, para este TFG consideraremos que estos operadores se pueden dividir de la siguiente forma:

- MNO:

Un MNO se puede definir como un operador de red que ofrece servicios móviles a usuarios finales y que dispone de su propia infraestructura para ofrecer dichos servicios. Los MNO disponen, además, de un rango asignado de frecuencias del espectro en el que poder trabajar.

- MVNO:

Los MNVO, al igual que los MNO, ofrecen servicios móviles a usuarios finales, diferenciándose de los MNO, en que los MVNO no disponen de infraestructura para ofrecer dichos servicios, sino que trabajan sobre la infraestructura de los MNO pagando a éstos por la utilización de la misma. Los MVNO tampoco disponen de un rango de frecuencias asignado para ofertar sus servicios, sino que utilizan las frecuencias del MNO al que alquilen la red.

Hasta 2006, en España las compañías telefónicas eran, Telefónica, Vodafone y Orange, que a día de hoy, siguen siendo las grandes compañías, si bien hay que añadir a Yoigo como cuarto operador.

A partir de la aprobación para la regulación por parte de la CMT (Comisión del Mercado de Telecomunicaciones) para la apertura del mercado a los MVNO, en España han aparecido más de 20 operadores móviles virtuales [7]. Además, la CNMC (Comisión Nacional de los Mercados y la Competencia) aplicó una regulación en la que imponía una serie de condiciones a los tres grandes operadores con tal de que los MVNO pudieran acceder a sus infraestructuras. El principal objetivo de la CNMC era mover el mercado y que dejara de ser un mercado estático [8].

La aparición de los MVNO se produjo en plena crisis económica, por lo que parte de su éxito se debió a que, al ofrecer precios más competitivos, los usuarios se fueron buscando los mismos servicios que ofrecían los MNO, pero a precios más bajos.

Además, los MVNO empezaron a eliminar el concepto de *permanencia*, es decir, los usuarios podían ir y venir de las compañías como quisieran, sin tener que pagar penalizaciones por ello.

A raíz de esto, los grandes operadores se lanzaron para obtener MVNO, creando así compañías "*Low Cost*" con las que paliar las pérdidas que estaban sufriendo y poder competir en un mercado que se les escapaba cada vez más.

En un mercado saturado como es el español, la innovación es el punto de partida hacia la nueva telefonía.

2. <u>OBJETIVOS</u>

Este TFG es una continuación del artículo de Erwin Sacoto, [1] "*Análisis de Caso de Competencia entre dos operadores MNO y MVNO, basado en la Teoría de Colas."*, supervisado por Luis Guijarro, tutor de este trabajo.

Hemos realizado un análisis de competencia entre dos operadores introduciendo el concepto de costes. Estos costes son de carácter general, es decir, engloban todo aquello que supone para los operadores ofertar los servicios finales a usuarios, pero sin entrar en detalle de los mismos.

Para este TFG hemos considerado un problema de optimización en el que, recurriendo a los conceptos de Equilibrio de NASH y al teorema de Karush-Kuhn-Tucker, hemos obtenido los precios óptimos que deben ofertar los operadores para que sus beneficios sean máximos.

En todo momento hemos considerado que los costes de los operadores son diferentes, con el objetivo de que este análisis se adecúe los máximo posible y en la medida de lo posible a dos operadores reales.

Estas consideraciones para poder ajustar el análisis a operadores que oferten sus servicios en la actualidad pretenden conseguir que este trabajo sea aplicable en escenarios de competencia vigentes.

3. METODOLOGÍA

3.1 MNO y MVNO:

En este TFG consideramos una cola M/M/1. Con la cola modelaremos de la forma más sencilla posible, las prestaciones de un operador móvil. Las llegadas que denotaremos por λ_i $(i = 0,1,2)$ que siguen una distribución de Poisson, corresponden a los datos que envían/reciben los abonados de cada operador. El tiempo de transmisión tiene una distribución exponencial $(\bar{x} = {}^{1}/_{\mu})$ y considerando una disciplina FIFO (First In, First Out).

La denotación M/M/1, está escrito en la *notación de Kendall*, y viene de la Teoría de Colas, disciplina que se enmarca dentro de la teoría matemática de la probabilidad.

Se establece que la longitud de la cola tiene una longitud infinita, por lo que no existirán problemas de capacidad para ofrecer el servicio. Los modelos a estudiar son los descritos en las figuras 1 (monopolio) y 2 (duopolio).

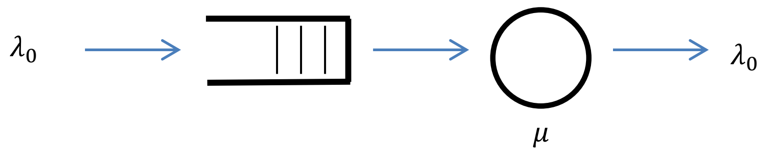

Figura 1. Monopolio

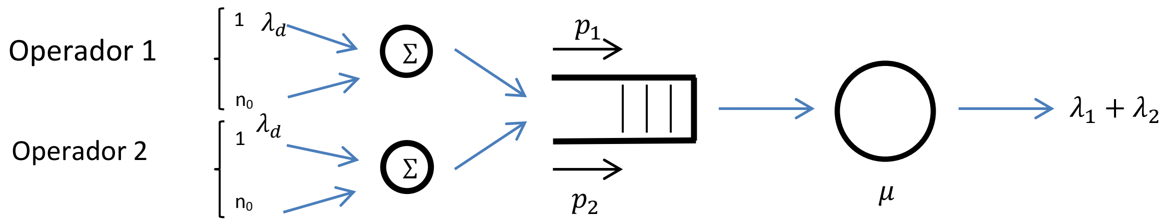

Figura 2. Duopolio

La utilidad del servicio dada por la expresión:

$$U_i = c \cdot (\mu - n_i \cdot \lambda)^{\alpha} - p_i \tag{1}$$

Los beneficios de MNO y MVNO dependen de:

$$\prod_i = \lambda_i \cdot (p_i - k_i) = n_i \cdot \lambda_d \cdot (p_i - k_i) \tag{2}$$

Siendo:

c : coste por cada uno de los paquetes

n_i : número de usuarios

α: sensibilidad al retraso

λ_d : envío de datos de cada usuario

p_i : precio

k_i: costes de cada operador

La utilidad será cero cuando la cantidad de paquetes sea muy grande, por lo que:

$$U_i = c \cdot (\mu - n_i \cdot \lambda)^{\alpha} - p_i = 0$$

$$p_i = c \cdot (\mu - n_i \cdot \lambda)^{\alpha}$$

$$\frac{p_i}{c} = (\mu - n_i \cdot \lambda)^{\alpha}$$

$$\left(\frac{p_i}{c}\right)^{1/\alpha} = \mu - n_i \cdot \lambda$$

$$n_i \cdot \lambda = \mu - \left(\frac{p_i}{c}\right)^{1/\alpha}$$

$$n_i = \left(\mu - \left(\frac{p_i}{c}\right)^{1/\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$\prod_i = \lambda_i \cdot p_i = n_i \cdot \lambda_d \cdot (p_i - k_i)$$

$$\prod_i = \left[\left(\mu - \left(\frac{p_i}{c}\right)^{1/\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\lambda}\right] \cdot \lambda_d \cdot (p_i - k_i)$$

Resultando:

$$\prod_i = \left[\left(\mu - \left(\frac{p_i}{c}\right)^{1/\alpha}\right)\right] \cdot (p_i - k_i) \qquad (4)$$

$$0 < \alpha < 1$$

La expresión (4) es la que hemos utilizado para realizar el análisis en este TFG.

Para poder explicar de forma clara el trabajo realizado, diferenciamos dos escenarios:

- Escenario 1: MONOPOLIO

En este escenario en la que sólo existe el MNO, vamos a estudiar cuál es el precio óptimo que hace que los beneficios del MNO sean máximos, considerando unos costes *k* y teniendo en cuenta que los usuarios pueden suscribirse a él o no.

- Escenario 2: DUOPOLIO

En este escenario tenemos dos operadores, a los que llamamos OPERADOR 1 y OPERADOR 2. Al igual que en el *MONOPOLIO,* vamos a considerar unos costes, a los que llamaremos k_1 y k_2.

3.1.1 ESCENARIO 1: MONOPOLIO

Para este escenario, como hemos dicho, existen dos posibilidades, que los usuarios se suscriban al MNO o no.

Que opción tomen los usuarios depende, básicamente, de la calidad del servicio ($c\mu^{\alpha}$) que ofrezca el MNO. A su vez, la calidad del servicio depende tanto del precio (p_m) ofertado por el operador, como de los costes (k) que le supone al mismo ofertar dicho precio.

El análisis se ha realizado utilizando el Teorema de ***Karush-Kuhn-Tucker***.

Este Teorema establece una serie de condiciones para la resolución de problemas de optimización.

Como hemos dicho, en este caso, existen dos posibilidades. Esto se refleja en las expresiones que analizamos para el MNO:

$$\prod_m(p_m) = \begin{cases} \left[\mu - \left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_m - k), & if\ 0 \leq p_m \leq c\mu^{\alpha} \\ 0, & if\ p_m > c\mu^{\alpha} \end{cases}$$

Como se puede observar, los usuarios se suscribirán al servicio cuándo la calidad del servicio esté por encima del precio del mismo.

En el análisis realizado, desarrollado en el punto 4.1, se obtiene que el precio que maximiza los beneficios depende de los costes que suponen para el operador ofrecer ese servicio y de la calidad del mismo, ya que, como se ha visto en la expresión anterior, si el precio es mayor que la calidad del servicio, ningún usuario se suscribirá al mismo.

3.1.2 ESCENARIO 2: DUOPOLIO

En este escenario, existen dos operadores, MNO y MVNO, por lo que el abanico de posibilidades aumenta. Al igual que en el ESCENARIO 1, se han considerado de forma sencilla los costes, que supone a los operadores ofrecer este servicio. Para que el análisis sea más real, se ha pensado que en ningún momento los costes k_1 y k_2 sean iguales, para acercarnos lo máximo posible a una situación real.

En el modelo descrito en la Figura 2. y teniendo en cuenta que los MVNO operan bajo la infraestructura de los MNO, entra en juego la disciplina considerada, FIFO, dónde los usuarios que contraten los servicios del MNO serán usuarios prioritarios de la red, aun teniendo en cuenta que la longitud de la cola es infinita, por lo que el servicio ofrecido a los usuarios de los MVNO no se verá afectado en gran medida.

Como se verá en el desarrollo del punto 4.2, la mejor respuesta de cada operador vendrá dada cuando el precio óptimo sea mayor que los costes pero menor que el precio del otro operador.

Es decir, los usuarios se suscribirán a un operador en vez de al otro cuando:

$$p_1 < p_2$$

ó

$$p_1 > p_2$$

Si los precios ofertados por ambos operadores son iguales, los usuarios se podrán suscribir tanto a uno como a otro, lo que provoca un decremento los beneficios de ambos operadores.

3.2 EQUILIBRIO DE NASH

El equilibrio de Cournot (más conocido después como Equilibrio de NASH) fue desarrollado por Antonie Augustin Cournot (Gray, 1801 - París, 1877), matemático, economista y filósofo francés, en su análisis denominado *"Oligopolios"* (1838). El análisis consistía en plantear un modelo competitivo de varias empresas que luchan por un mismo servicio y en el que cada empresa quiere alcanzar la producción óptima para obtener unos beneficios máximos.

Dentro del análisis estaba el desarrollo en estrategias puras, estrategias mixtas y el denominado Equilibrio de Nash para juegos extensivos.

El desarrollo en estrategias puras fue estudiado por Cournot. Se definió partiendo de la base de que todo lo que un individuo ganaba/perdía equivalía a todo lo que otro individuo ganaba/perdía.

Para el desarrollo de las estrategias mixtas, se tuvo en cuenta el análisis que John Von Neuman y Oskar Morgenstein realizaron en su obra "The Theory of Games and Economic Behavior" (1944). En ella, se daba la coexistencia simultánea de estrategias por parte de cada uno de los individuos que formaban parte del juego.

En 1951, el matemático John Forbes Nash (Bluefield, Virginia Occidental, 13 de junio de 1928 - Monroe, Nueva Jersey, 23 de mayo de 2015), consiguió demostrar en su tesis doctoral que, en todo juego en el que los participantes pueden elegir un numero finito de estrategias, siempre existirá al menos, un Equilibrio de Nash. Este trabajo le llevó, en 1994 a ganar el Premio Nobel de Economía.

Los supuestos que determinan el poder alcanzar un equilibrio de Nash son:

- Todos los jugadores quieren maximizar sus ganancias respecto de las condiciones descritas en el juego.
- Todos los jugadores eligen su estrategia premeditadamente, en función de sus deseos, considerando que no hay errores.

- Los jugadores son inteligentes. Esto les ayuda a deducir los equilibrios propios y los de la competencia.
- Los jugadores dan por sentado que un cambio en su estrategia no provoca un cambio en las estrategias de los demás.
- Los jugadores conocen las reglas y asumen los supuestos de racionalidad.

El incumplimiento de alguna de las condiciones anteriores puede provocar que no se alcance el Equilibrio de Nash.

El ejemplo más conocido de Equilibrio de Nash es el que se describe en el *"Juego del Prisionero"*.

3.3 Teorema de Karush-Kuhn-Tucker

El teorema de Karush-Kuhn-Tucker, fue desarrollado por William Karush (1 de Marzo de 1917- 22 de Febrero de 1997), Harold W. Kuhn (29 de Junio de 1925 – 2 de Julio de 2014) y Albert W. Tucker (28 de Noviembre de 1905 – 25 de Enero de 1995) en 1951.

Este teorema describe una serie de condiciones necesarias y suficientes para la resolución de problemas de optimización. Se considera que este teorema es una generalización del método de multiplicadores de Lagrange.

Las condiciones del Teorema establecen que, teniendo el problema de optimización:

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

Sujeto a:

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad i = 1, \dots, l$$

Dónde:

$f(x)$: es la función objetivo

$h(x)$: son las restricciones igualdad

$g(x)$: son las restricciones desigualdad

n, l: número de restricciones

Las condiciones de Teorema establecen que tanto la función objetivo como las funciones de tipo restricción, deben ser continuamente diferenciables, es decir, sus derivadas parciales deben ser distintas de cero.

Las condiciones suficientes establecen que, la función objetivo y la restricción de desigualdad deben ser convexas, eso es, la curva que describe queda por debajo de la tangente.

Sea x^*un punto. La condición estacionaria (o condición de punto crítico) tiene la forma:

$$\nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^* \nabla f_i(x^*) + \sum_{i=1}^{l} \nu_i{}^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

Siendo las condiciones de margen complementario:

$$\lambda_i{}^* \geq 0 \qquad\qquad i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i{}^* f_i(x^*) = 0 \qquad i = 1, \dots, l$$

Resolviendo las condiciones, obtendremos que x^* es un punto óptimo.

4. DESARROLLO y RESULTADOS

4.1 ANÁLISIS DEL MONOPOLIO

En este apartado se introducen los resultados del análisis, teniendo en cuenta las condiciones en las que el operador MNO maximiza sus beneficios, además de los costes que supone ofrecer el servicio. Los casos que se han analizado son los siguientes:

$$\prod_m(p_m) = \begin{cases} \left[\mu - \left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_m - k), & if\ 0 \leq p_m \leq c\mu^\alpha \\ 0, & if\ p_m > c\mu^\alpha \end{cases} \qquad (5)$$

Estamos tratando de resolver un problema de optimización. Para ello, vamos a hacer uso del Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (en adelante KKT).

Nuestro problema, en este caso de maximización, tiene restricciones de tipo desigualdad que deben ser continuamente diferenciables, es decir, derivadas parciales deben ser continuas.

$$\underset{p_m}{max.} \left[\mu - \left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_m - k)$$

$$sujeto\ a \quad 0 \leq p_m \leq c\mu^\alpha$$

Tenemos dos condiciones:

$$p_m \geq 0$$

$$c\mu^\alpha - p_m \geq 0$$

Las funciones son para el análisis de KKT son:

$$f_0 = \left[\mu - \left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_m - k) \tag{6}$$

$$f_1 = p_m \tag{7}$$

$$f_2 = c\mu^{\alpha} - p_m \tag{8}$$

Tal y como hemos indicado anteriormente, las funciones f_0,f_1 y f_2 deben ser continuamente diferenciables:

$$f_0' = \frac{\partial f_0}{\partial p_m} = -\frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \big((\alpha+1) \cdot p_m - k\big) - \mu\alpha p_m}{\alpha p_m}$$

$$f_1' = \frac{\partial f_1}{\partial p_m} = 1$$

$$f_2' = \frac{\partial f_2}{\partial p_m} = -1$$

Efectivamente (6), (7) y (8) son continuamente diferenciables, ya que como hemos explicado anteriormente, sus derivadas parciales son distintas de cero.

Las condiciones de margen complementario:

$$\lambda_i^* \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0 \qquad i = 1, \dots, l$$

La condición del punto crítico de KKT es:

$$\nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) + \sum_{i=1}^{l} \nu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

Nosotros sólo vamos a considerar las restricciones tipo desigualdad, por lo que nuestra condición de punto crítico es:

$$\nabla f_0(p_m) + \lambda_1 \nabla f_1(p_m) + \lambda_2 \nabla f_2(p_m) = 0 \qquad (9)$$

Los casos a analizar para obtener ${p_m}^*$ son $2^2 = 4$, ya que tenemos λ_1 y λ_2.

1. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 p_m = 0$$

$$\lambda_2 [c\mu^\alpha - p_m] = 0$$

$$-\frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1) \cdot p_m - k\right) - \mu\alpha p_m}{\alpha p_m} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Dado que $\lambda_1 = 0 \; y \; \lambda_2 = 0$, las ecuaciones anteriores quedan:

$$p_m > 0$$

$$[c\mu^\alpha - p_m] > 0$$

$$-\frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1) \cdot p_m - k\right)}{\alpha p_m} + \mu = 0$$

Despejando μ:

$$\mu = \frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1) \cdot p_m - k\right)}{\alpha p_m}$$

Fijamos $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\mu = \frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1)\cdot p_m - k\right)}{\alpha p_m} = \left[\alpha = \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot p_m - k\right)}{\frac{1}{2} p_m}$$

$$\mu \frac{1}{2} p_m = \left(\frac{p_m}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\cdot p_m - k\right) = \frac{3}{2}\frac{{p_m}^3}{c^2} - \frac{{p_m}^2}{c^2}k$$

$$\frac{\mu}{2} = \frac{3}{2}\frac{{p_m}^2}{c^2} - \frac{p_m}{c^2}k$$

$$c^2\mu = 3{p_m}^2 - 2p_m k$$

$$3{p_m}^2 - 2p_m k - c^2\mu = 0 \qquad (10)$$

Resultando una ecuación de 2º grado. Resolviendo (10) obtenemos:

$${p_m}^* = \frac{-(-2k) \pm \sqrt{(-2k)^2 - \left(4\cdot 3\cdot (c^2\mu)\right)}}{2\cdot 3}$$

$${p_m}^* = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 + 12c^2\mu}}{6} = \frac{2k \pm \sqrt{4(k^2+3c^2\mu)}}{6} =$$

$$= \frac{2k \pm 2\sqrt{(k^2+3c^2\mu)}}{6} = \frac{k \pm \sqrt{(k^2+3c^2\mu)}}{3}$$

Cuyas soluciones son:

$$p_{m_1}{}^* = \frac{k + \sqrt{(k^2 + 3c^2\mu)}}{3}$$

$$p_{m_2}{}^* = \frac{k - \sqrt{(k^2 + 3c^2\mu)}}{3}$$

Viendo los resultados, $p_{m_2}{}^*$ no es válido ya que nos daría un valor de $p_{m_2}{}^*$ negativo, puesto que:

$$k < \sqrt{(k^2 + 3c^2\mu)}$$

Por lo tanto, en este caso:

$$p_{m_1}{}^* = p_m$$

2. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 p_m = 0$$

$$\lambda_2[c\mu^\alpha - p_m] = 0$$

$$-\frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha + 1) \cdot p_m - k\right) - \mu\alpha p_m}{\alpha p_m} + \lambda_1 = 0$$

Dado que $\lambda_1 > 0$, obligatoriamente:

$$p_m = 0$$

y el resto de ecuaciones quedan:

$$[c\mu^{\alpha} - \ p_m\ ] \ > 0$$

$$-\ \frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha + 1) \cdot p_m \ - k\right) - \mu\alpha p_m}{\alpha p_m} + \ \lambda_1 = 0$$

Operando:

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1) \cdot p_m \ -k\right) - \mu\alpha p_m}{\alpha p_m} \tag{11}$$

Dado que $p_m = 0$, sustituyendo este valor en (11), obtenemos:

$$\lambda_1 = 0$$

Solución no válida.

3. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

$$\lambda_1 p_m \ = 0 \tag{12}$$

$$\lambda_2[c\mu^{\alpha} - \ p_m\ ] = 0$$

$$-\ \frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha + 1) \cdot p_m \ - k\right) - \mu\alpha p_m}{\alpha p_m} + \ \lambda_1 - \ \lambda_2 = 0$$

En este caso, dado que $\lambda_2 > 0$, obligatoriamente:

$$[c\mu^{\alpha} - \ p_m\ ] = 0$$

Siendo el resto de ecuaciones:

$$\lambda_1 p_m = 0$$

$$-\frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1)\cdot p_m - k\right) - \mu\alpha p_m}{\alpha p_m} - \lambda_2 = 0$$

De (12) podemos obtener p_m :

$$p_m = c\mu^\alpha$$

Despejando λ_2 obtenemos:

$$\lambda_2 = -\frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1)\cdot p_m - k\right) - \mu\alpha p_m}{\alpha p_m} > 0$$

Sustituyendo el valor de p_m :

$$\lambda_2 = -\frac{\left(\frac{c\mu^\alpha}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1)\cdot c\mu^\alpha - k\right) - \mu\alpha c\mu^\alpha}{\alpha c\mu^\alpha} > 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{\mu\cdot(\alpha+1)\cdot c\mu^\alpha - \mu k - \mu\alpha c\mu^\alpha}{\alpha c\mu^\alpha} = -\frac{\mu\alpha c\mu^\alpha + \mu c\mu^\alpha - \mu k - \mu\alpha c\mu^\alpha}{\alpha c\mu^\alpha} > 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{\mu c\mu^\alpha - \mu k}{\alpha c\mu^\alpha} > 0$$

$$-\mu c\mu^\alpha + \mu k > 0$$

$$k > c\mu^\alpha$$

Solución que no es válida ya que:

$$p_m > k$$

Y

$$c\mu^{\alpha} \ \geq \ p_m$$

4. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

$$\lambda_1 p_m \ = 0$$

$$\lambda_2[c\mu^{\alpha} - \ p_m\,] = 0$$

$$-\ \frac{\left(\frac{p_m}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1) \cdot p_m \ - k\right) - \mu\alpha p_m}{\alpha p_m} + \ \lambda_1 - \ \lambda_2 = 0$$

Al igual que en los casos anteriores, teniendo en cuenta que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$:

$$p_m \ = 0$$

$$[c\mu^{\alpha} - \ p_m\,] = 0$$

Obtenemos:

$$\lambda_1 - \ \lambda_2 = 0$$

Por lo que:

$$\lambda_1 = \ \lambda_2$$

$$p_m \ = c\mu^{\alpha} - \ p_m$$

$$2p_m = c\mu^\alpha$$

$$p_m = \frac{c\mu^\alpha}{2} \neq 0$$

Por lo que tampoco es una solución válida.

En el monopolio, el valor óptimo de $p_m{}^*$ es la solución del caso 1.

4.2 ANÁLISIS DEL DUOPOLIO

En este apartado se va a analizar las condiciones en las dos operadores maximizan sus beneficios teniendo en cuenta los costes que supone para cada uno ofrecer el servicio. En este caso tenemos:

1. Operador 1:

$$\prod_1 = \lambda_1 \cdot (p_1 - k_1)$$

2. Operador 2:

$$\prod_2 = \lambda_2 \cdot (p_2 - k_2)$$

Y las expresiones a analizar:

$$\prod_1(p_1, p_2) = \begin{cases} \prod_1^1(p_1, p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_1 - k_1) & si, 0 \leq p_2 \leq c\mu^\alpha \quad p_1 < p_2 \\ \prod_1^2(p_1, p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_1 - k_1) = 0 & si, 0 \leq p_2 \leq c\mu^\alpha \quad p_1 > p_2 \\ \prod_1^3(p_1, p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot \left(\frac{p_1}{2} - k_1\right) & si, 0 \leq p_2 \leq c\mu^\alpha \quad p_1 = p_2 \\ \prod_1^4(p_1, p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_1 - k_1) = 0 & si, \quad p_1 > c\mu^\alpha \quad \forall\, p_2 \end{cases}$$

$$\prod_2(p_1, p_2) = \begin{cases} \prod_2^1(p_1, p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_2 - k_2) = 0 & si, 0 \leq p_1 \leq c\mu^\alpha \quad p_2 > p_1 \\ \prod_2^2(p_1, p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_2 - k_2) & si, 0 \leq p_1 \leq c\mu^\alpha \quad p_2 < p_1 \\ \prod_2^3(p_1, p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot \left(\frac{p_2}{2} - k_2\right) & si, 0 \leq p_1 \leq c\mu^\alpha \quad p_2 = p_1 \\ \prod_2^4(p_1, p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_2 - k_2) = 0 & si, \quad p_2 > c\mu^\alpha \quad \forall\, p_1 \end{cases}$$

Calculamos la mejor respuesta para BR_1 (p_2):

$$BR_1(p_2) = \ arg_{p_1} \max \prod_1 (p_1, p_2)$$

Se puede observar una representación gráfica de los resultados en la figura 3.

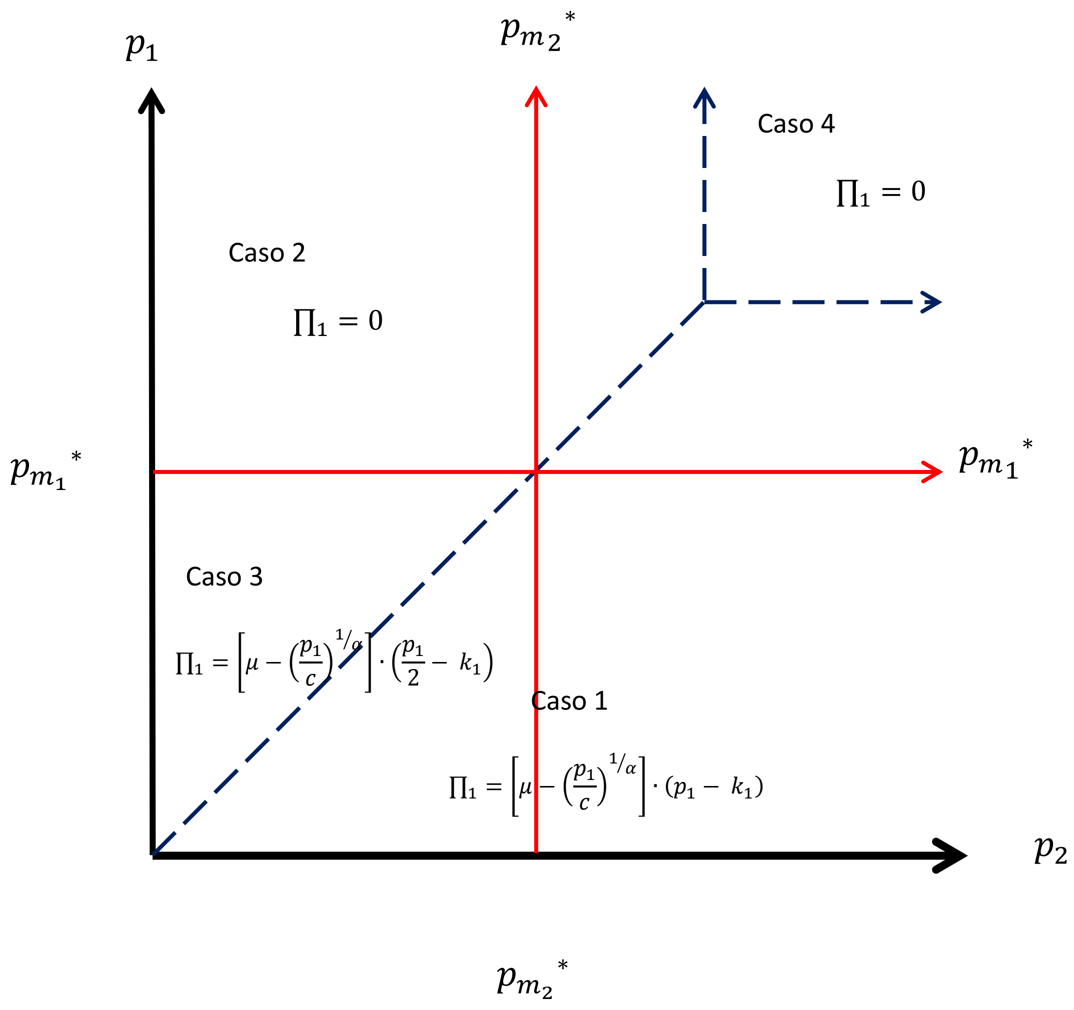

Figura 3. Resultados Operador 1

Si analizamos cuando:

- $p_2 \leq p_m{}^*$

- $p_2 \leq k$

- $p_2 > p_m{}^*$

Tenemos:

1. $p_1 < p_2$

$$\max_{p_1} \prod_1^1 (p_1, p_2) = \mu p_1 - \mu k_1 - p_1 \left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha} + k_1 \left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha}$$
$$st. p_1 \geq 0$$
$$p_1 < p_2$$

Calculamos la primera derivada e igualamos a cero para obtener el máximo:

$$-\frac{\left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha + 1) \cdot p_1 - k_1\right) - \mu\alpha p_1}{\alpha p_1} = 0$$

Desarrollando:

$$-\frac{\left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot (\alpha p_1 + p_1 - k_1) - \mu\alpha p_1}{\alpha p_1} = 0$$

$$\mu = \frac{\left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot (\alpha p_1 \ + p_1 \ - k_1)}{\alpha p_1}$$

Al igual que en el caso del monopolio, fijamos $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\mu = \frac{\left(\frac{p_1}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{p_1}{2} + p_1 \ - k_1\right)}{\frac{p_1}{2}}$$

$$\mu \frac{p_1}{2} = \left(\frac{p_1}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{3p_1}{2} - k_1\right) = \frac{3}{2}\frac{{p_1}^3}{c^2} - \frac{{p_1}^2}{c^2} k_1$$

$$\frac{\mu}{2} = \frac{3}{2}\frac{{p_1}^2}{c^2} - \frac{p_1}{c^2} k_1$$

$$\tfrac{3}{2}{p_1}^2 - p_1 k_1 - \tfrac{\mu}{2}c^2 = 0$$

$$3{p_1}^2 - 2p_1 k_1 - \mu c^2 = 0 \qquad (13)$$

Que al igual que en el caso del monopolio, (13) resulta una ecuación de 2º grado:

$${p_1}^* = \frac{-(-2k_1) \pm \sqrt{(-2k_1)^2 - \left(4 \cdot 3 \cdot (c^2\mu)\right)}}{2 \cdot 3}$$

$${p_1}^* = \frac{2k_1 \pm \sqrt{4{k_1}^2 + 12c^2\mu}}{6} = \frac{2k_1 \pm \sqrt{4\left({k_1}^2 + 3c^2\mu\right)}}{6} =$$

$$= \frac{2k_1 \pm 2\sqrt{\left({k_1}^2 + 3c^2\mu\right)}}{6} = \frac{k_1 \pm \sqrt{\left({k_1}^2 + 3c^2\mu\right)}}{3}$$

Cuyas soluciones son:

$$p_{1_1}{}^{*} = \frac{k_1 + \sqrt{\left({k_1}^2 + 3c^2\mu\right)}}{3}$$

$$p_{1_2}{}^{*} = \frac{k_1 - \sqrt{\left({k_1}^2 + 3c^2\mu\right)}}{3}$$

El resultado $p_{1_2}{}^{*}$, nos daría valor de $p_1{}^{*}$ negativo, ya que:

$$k_1 < \sqrt{\left({k_1}^2 + 3c^2\mu\right)}$$

Por lo que, obtenemos el mismo resultado que en el monopolio:

$$p_1{}^{*} = p_m{}^{*}$$

Teniendo en cuenta que en este caso: $p_2 \leq p_m{}^{*}$, $p_2 \leq k_1$ y $p_1 < p_2$. La mejor respuesta para el Operador 1 es:

$$BR_1{}^{1}(p_2) = p_2 + \epsilon \ \text{ si } \quad p_2 < k_1$$

$$BR_1{}^{1'}(p_2) = p_2 - \epsilon \ \text{ si } \quad k_1 \leq p_2 \leq p_{m_2}{}^{*}$$

Los beneficios en este caso serían:

$$\prod\nolimits_1^1(p_1) = \left[\mu - \left(\frac{p_2 - \epsilon}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_2 - \epsilon - k_1)$$

$$\prod\nolimits_1{}^{1'}(p_1) = 0 \qquad si \ \ p_2 < k_1$$

2. $p_1 > p_2$

$$\prod_1^1(p_1) = 0$$

Y en este caso:

$$BR_1{}^2(p_2) = p_2 + \epsilon \qquad \vee \ p_1 \ \in \ ]p_2, +\infty[$$

3. $p_1 = p_2$

$$\prod_1^3(p_1) = \left[\mu - \left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot \left(\frac{p_2}{2} - \ k_1\right)$$

Resultando:

$$BR_1{}^3(p_2) = p_2$$

Teniendo en cuenta los beneficios:

$$\prod_1^1(p_1) > \prod_1^3(p_1) > \prod_1^2(p_1) \tag{14}$$

Y la mejor respuesta:

$$BR_1{}^1(p_2) = p_2 + \epsilon \ \text{ si } \quad p_2 < k_1$$

$$BR_1{}^{1'}(p_2) = p_2 - \epsilon \ \text{ si } \quad k_1 \leq p_2 \leq p_{m_2}{}^*$$

$$BR_1{}^3(p_2) = p_2 \qquad \text{si} \qquad p_1 = p_2$$

Los resultados, son los representados gráficamente en la Figura 4.

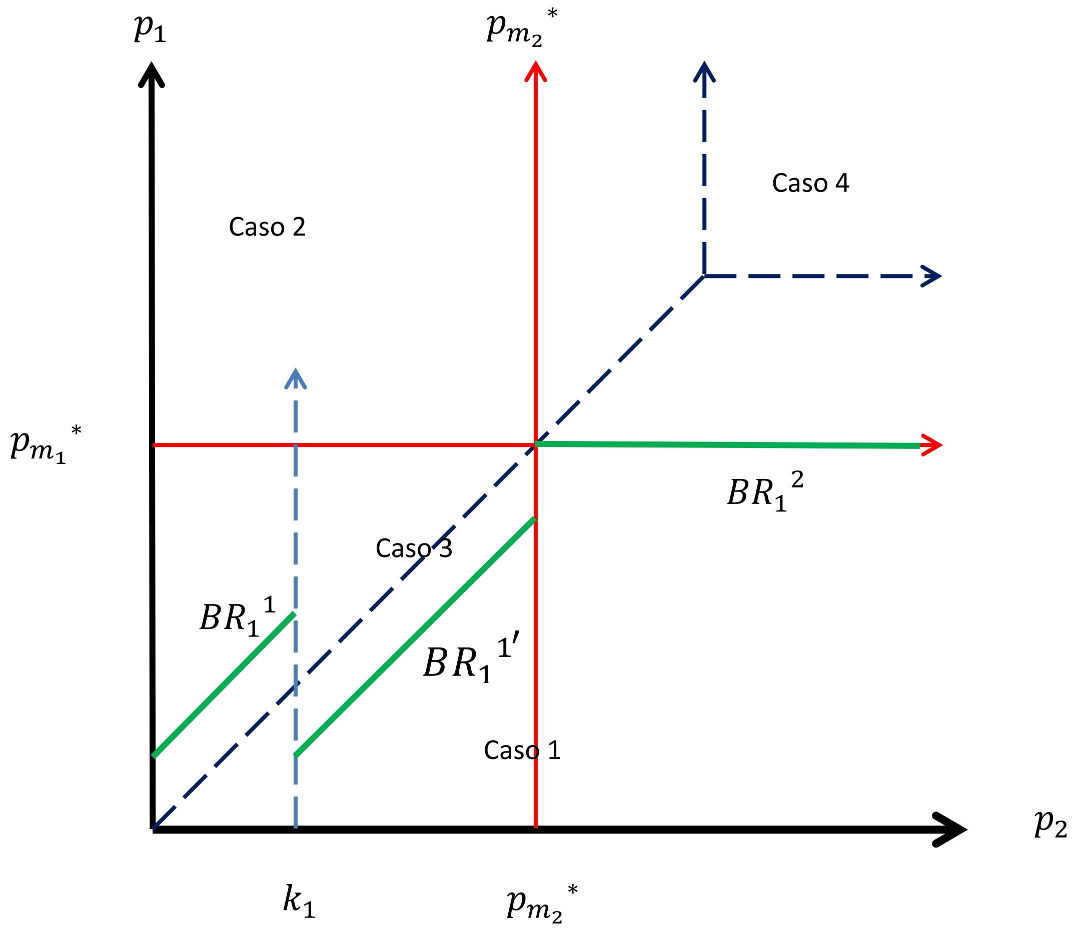

Figura 4. Mejor respuesta del Operador 1.

Ahora analizamos el caso cuando $p_2 > p_m{}^*$. Hay que tener en cuenta los casos 1, 3 y 4 de la Figura 3.

1. $p_1 < p_2$

Maximizamos $\prod_1^{1'}$:

$$\max_{p_1} \prod\nolimits_1^{1'}(p_1) = \mu p_1 - \mu k_1 - p_1 \left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha} + k_1 \left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha} \qquad st.\, p_1 \geq 0$$

Calculamos, al igual que antes, la primera derivada e igualamos a cero:

$$-\frac{\left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1) \cdot p_1 - k_1\right) - \mu\alpha p_1}{\alpha p_1} = 0$$

$$\mu = \frac{\left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot (\alpha p_1 + p_1 - k_1)}{\alpha p_1}$$

Fijando $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\mu = \frac{\left(\frac{p_1}{c}\right)^{2} \cdot \left(\frac{p_1}{2} + p_1 - k_1\right)}{\frac{p_1}{2}}$$

$$\mu \frac{p_1}{2} = \left(\frac{p_1}{c}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3p_1}{2} - k_1\right) = \frac{3}{2}\frac{{p_1}^{3}}{c^2} - \frac{{p_1}^{2}}{c^2} k_1$$

$$\frac{\mu}{2} = \frac{3}{2}\frac{{p_1}^{2}}{c^2} - \frac{p_1}{c^2} k_1$$

$$3{p_1}^{2} - 2p_1 k_1 - \mu c^2 = 0$$

Resolviendo de nuevo la ecuación de 2º grado:

$${p_{1_1}}^{*} = \frac{k_1 + \sqrt{\left({k_1}^{2} + 3c^2\mu\right)}}{3}$$

$${p_{1_2}}^{*} = \frac{k_1 - \sqrt{\left({k_1}^{2} + 3c^2\mu\right)}}{3}$$

Teniendo en cuenta que:

$$k_1 < \sqrt{\left({k_1}^2 + 3c^2\mu\right)}$$

Podemos decir que el precio óptimo es:

$${p_{1_1}}^*$$

En este caso, dado que $p_2 > {p_m}^*$, la mejor respuesta del Operador 1 es:

$${BR_1}^2(p_2) = {p_1}^* = \ {p_m}^*$$

2. $p_1 = \ p_2$

$$\prod_1^{3'}(p_1) = \left[\mu - \left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot \left(\frac{p_2}{2} - \ k_1\right)$$

$${BR_1}^2(p_2) = p_2$$

3. $p_2 \ > c\mu^\alpha$

$$\prod_1^{4'}(p_1) = 0$$

Comparando los resultados:

$$\prod_1^{1'}(p_1) > \prod_1^{3'}(p_1) > \prod_1^{4'}(p_1) \qquad (15)$$

Y la mejor respuesta:

$${BR_1}^2(p_2) = {p_1}^* = \ {p_m}^*$$

Representamos los resultados obtenidos en la figura 5.

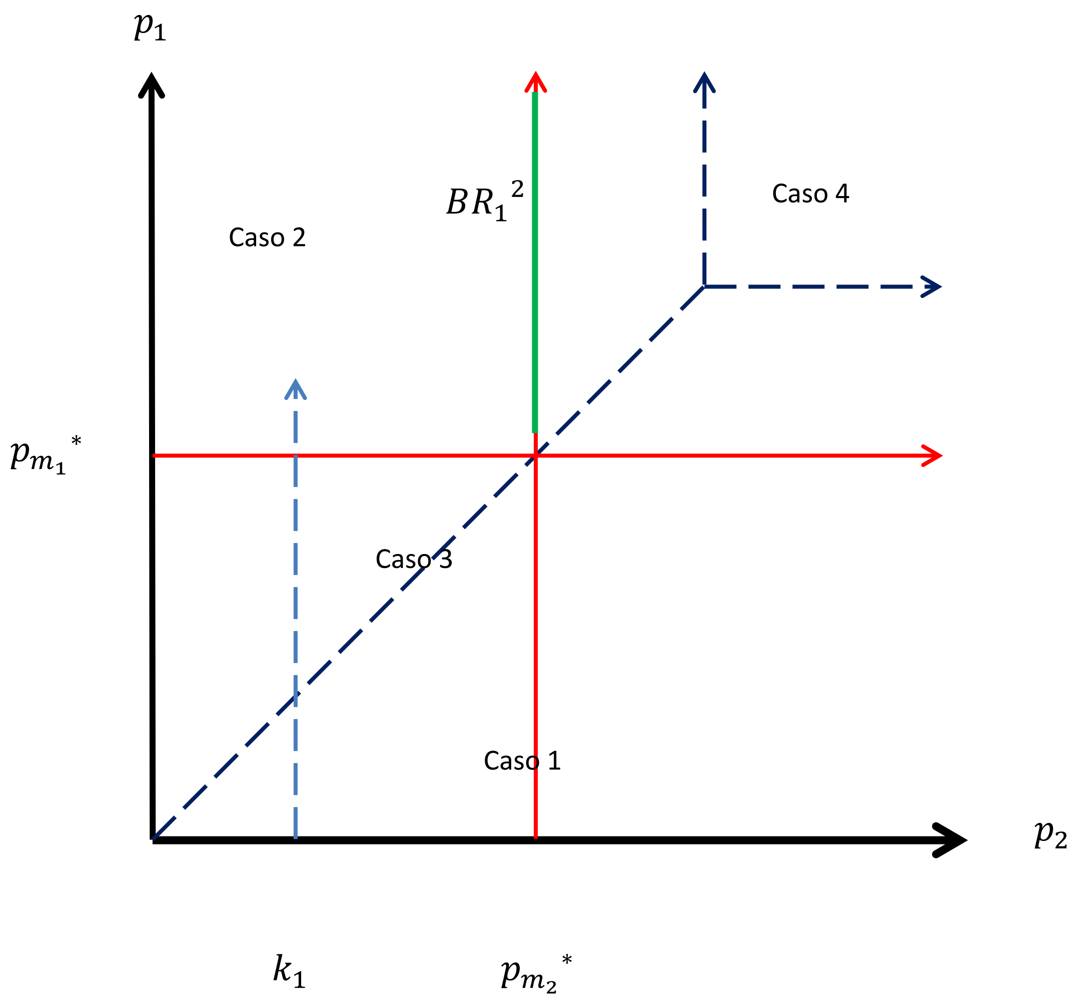

Figura 5.Mejor respuesta del Operador 1 si $p_2 > {p_m}^*$.

Ahora, calculamos la mejor respuesta para $BR_2\,(p_1)$:

$$BR_2(p_1) = \; arg_{p_2} \max \prod\nolimits_2 (p_1, p_2)$$

Representamos los casos a analizar en la figura 6.

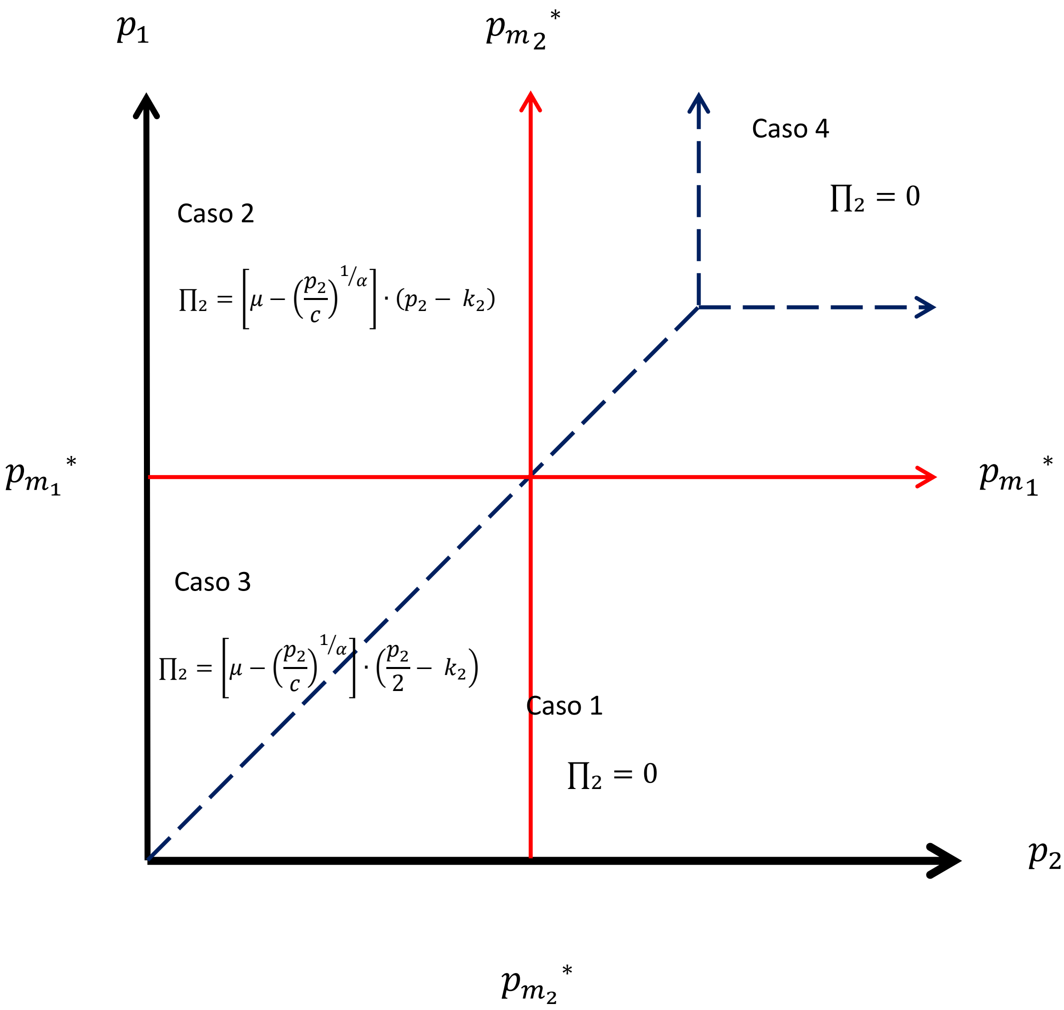

Figura 6.

Si analizamos cuando:

- $p_1 \leq p_m{}^*$
- $p_1 < k_2$
- $p_1 > p_m{}^*$

Tenemos:

1. $p_2 < p_1$

$$\max_{p_2} \prod_2^2(p_1, p_2) = \mu p_2 - \mu k_2 - p_2\left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha} + k_2\left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha}$$

$$st. p_2 \geq 0$$

$$p_2 < p_1$$

Como en los casos anteriores, calculamos la primera derivada e igualamos a cero para obtener el máximo:

$$-\frac{\left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1)\cdot p_2 - k_2\right) - \mu\alpha p_2}{\alpha p_2} = 0$$

Desarrollando:

$$-\frac{\left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot (\alpha p_2 + p_2 - k_2) - \mu\alpha p_2}{\alpha p_2} = 0$$

$$\mu = \frac{\left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot (\alpha p_2 + p_2 - k_2)}{\alpha p_2}$$

Fijamos $\alpha = \frac{1}{2}$, como hemos hecho para el estudio del Operador 1:

$$\mu = \frac{\left(\frac{p_2}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}p_2 + p_2 - k_2\right)}{\frac{1}{2}p_2} = \frac{\left(\frac{p_2}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}p_2 - k_2\right)}{\frac{1}{2}p_2}$$

$$\mu\frac{p_2}{2} = \left(\frac{p_2}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{3p_2}{2} - k_2\right) = \frac{3}{2}\frac{{p_2}^3}{c^2} - \frac{{p_2}^2}{c^2}k_2$$

$$\frac{\mu}{2} = \frac{3}{2}\frac{{p_2}^2}{c^2} - \frac{p_2}{c^2}k_2$$

$$\frac{3}{2}{p_2}^2 - p_2 k_2 - \frac{\mu}{2}c^2 = 0$$

Quedando, al igual que para el Operador 1, una ecuación de segundo grado:

$${p_2}^* = \frac{-(-2k_2) \pm \sqrt{(-2k_2)^2 - \left(4 \cdot 3 \cdot (c^2\mu)\right)}}{2 \cdot 3}$$

$${p_2}^* = \frac{2k_2 \pm \sqrt{4{k_2}^2 + 12c^2\mu}}{6} = \frac{2k_2 \pm \sqrt{4\left({k_2}^2 + 3c^2\mu\right)}}{6} =$$

$$= \frac{2k_2 \pm 2\sqrt{\left({k_2}^2 + 3c^2\mu\right)}}{6} = \frac{k_2 \pm \sqrt{\left({k_2}^2 + 3c^2\mu\right)}}{3}$$

Y cuyas soluciones son:

$${p_{2_1}}^* = \frac{k_2 + \sqrt{\left({k_2}^2 + 3c^2\mu\right)}}{3}$$

$${p_{2_2}}^* = \frac{k_2 + \sqrt{\left({k_2}^2 + 3c^2\mu\right)}}{3}$$

Teniendo en cuenta que: $p_2 < p_1, p_1 \leq {p_m}^*$ y $p_1 \leq {p_m}^*$, la mejor respuesta de Operador 2 es:

$${BR_2}^2 = p_1 + \epsilon \qquad\qquad si\, p_1 < k_2$$

$${BR_2}^{2'} = p_1 - \epsilon \qquad si\, k_1 \leq p_1 \leq {p_m}^*$$

Y los beneficios:

$$\prod_2^2(p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_1 - \epsilon}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_1 - \epsilon - \ k_2)$$

$$\prod_2^{2'}(p_2) = 0 \qquad si \quad p_1 < k_2$$

2. $p_2 > p_1$

$$\prod_2^1(p_2) = 0$$

En este caso:

$$BR_2{}^1 = p_1 + \epsilon \quad \forall p_2 \ \in \ ]p_1, +\infty[$$

3. $p_1 = p_2$:

$$\prod_2^3(p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_2 - \epsilon}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot \left(\frac{p_2}{2} - \ k_2\right)$$

Siendo la mejor respuesta:

$$BR_2{}^3 = p_1$$

Teniendo en cuenta los beneficios:

$$\prod_2{}^2 > \prod_2{}^3 > \prod_2{}^1$$

Y la mejor respuesta:

$$BR_2{}^2 = p_1 + \epsilon \qquad si\ p_1 < k_2$$

$$BR_2{}^{2'} = p_1 - \epsilon \qquad k_2 \leq p_1 \leq p_m{}^*$$

$$BR_2{}^2 = p_1 \qquad si\ p_1 = p_2$$

La mejor respuesta para el Operador 2 se representa en la figura 7.

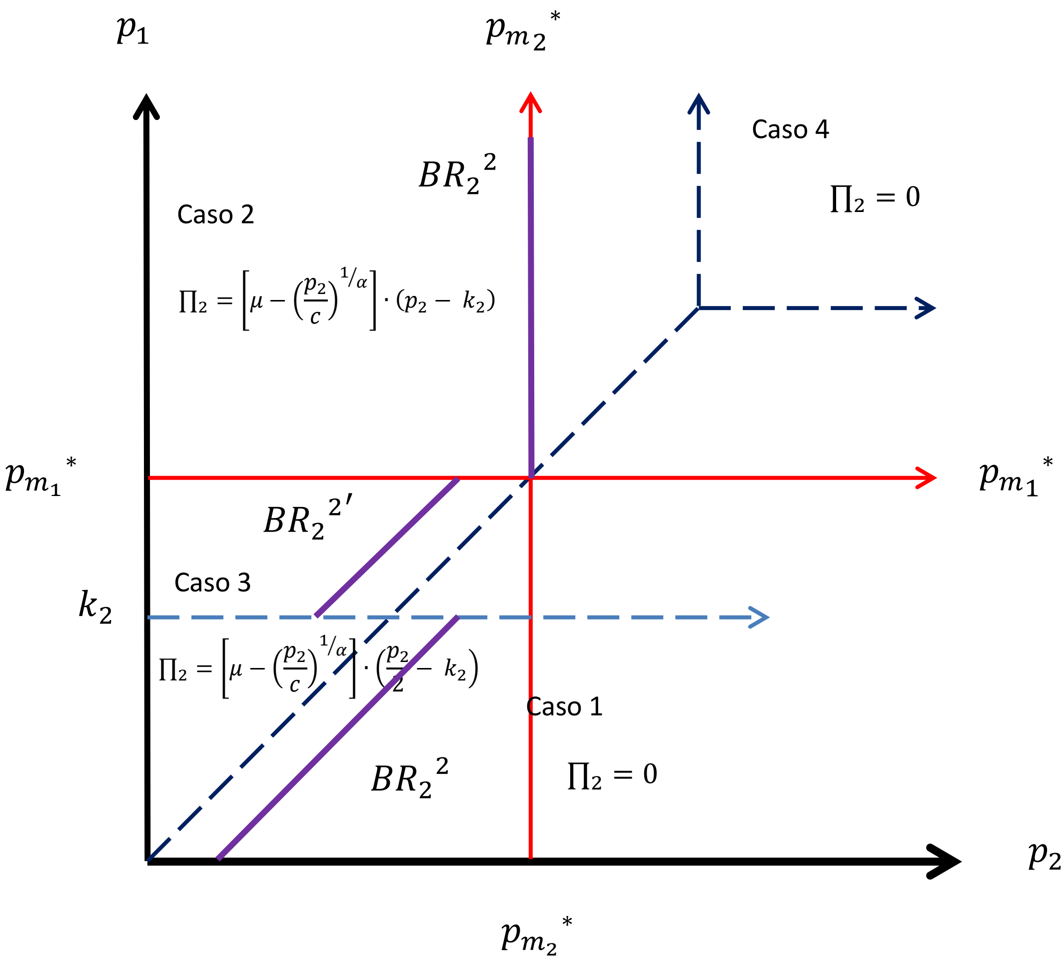

Figura 7.Mejor respuesta del Operador 2.

Al igual que con el Operador 1, hay que analizar el caso cuando $p_1 > {p_m}^*$. Debemos tener en cuenta los casos 2,3 y 4.

1. $p_2 < p_1$

Maximizamos $\prod_1^{1'}$:

$$\max_{p_2} \prod_2^{2'}(p_2) = \mu p_2 - \mu k_2 - p_2 \left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha} + k_2 \left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha} \quad st. p_2 \geq 0$$

Calculamos, al igual que antes, la primera derivada e igualamos a cero:

$$-\frac{\left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot \left((\alpha+1) \cdot p_2 - k_2\right) - \mu\alpha p_2}{\alpha p_2} = 0$$

$$\mu = \frac{\left(\frac{p_2}{c}\right)^{1/\alpha} \cdot (\alpha p_2 + p_2 - k_2)}{\alpha p_2}$$

Fijando $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\mu = \frac{\left(\frac{p_2}{c}\right)^{2} \cdot \left(\frac{p_2}{2} + p_2 - k_2\right)}{\frac{p_1}{2}}$$

$$\mu \frac{p_2}{2} = \left(\frac{p_2}{c}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3p_2}{2} - k_2\right) = \frac{3}{2}\frac{{p_2}^3}{c^2} - \frac{{p_2}^2}{c^2} k_2$$

$$\frac{\mu}{2} = \frac{3}{2}\frac{{p_2}^2}{c^2} - \frac{p_2}{c^2} k_2$$

$$3{p_2}^2 - 2p_2 k_2 - \mu c^2 = 0$$

Quedando de nuevo una ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son:

$$p_{2_1}{}^{*} = \frac{k_2 + \sqrt{\left({k_2}^2 + 3c^2\mu\right)}}{3}$$

$$p_{2_1}{}^{*} = \frac{k_2 + \sqrt{\left({k_2}^2 + 3c^2\mu\right)}}{3}$$

En este caso, dado que $p_1 > {p_m}^{*}$, la mejor respuesta del Operador 2 es:

$${BR_2}^{2'}(p_1) = {p_2}^{*} = {p_m}^{*}$$

2. $p_1 = p_2$:

$$\prod_2^{3'}(p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_1}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot \left(\frac{p_1}{2} - k_2\right)$$

$${BR_2}^{2'}(p_1) = p_1$$

3. $p_2 > c\mu^{\alpha}$:

$$\prod_2^{4'}(p_2) = 0$$

Comparando los resultados:

$$\prod_2^{2'}(p_2) > \prod_2^{3'}(p_2) > \prod_2^{4'}(p_2)$$

Y la mejor respuesta:

$$BR_2{}^2(p_1) = p_2{}^* = \ p_m{}^*$$

Se puede observar una representación gráfica de los resultados en la figura 8.

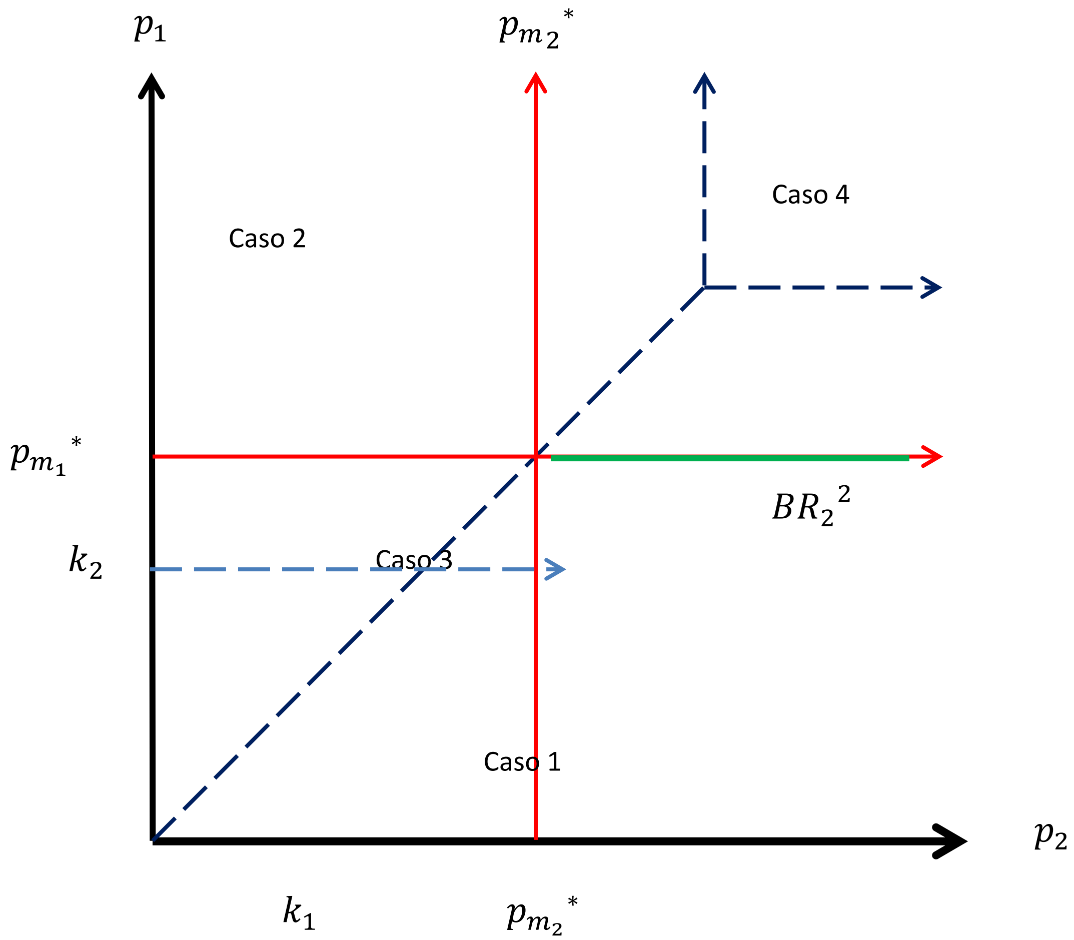

Figura 8.Mejor respuesta del Operador 2 si $p_1 > p_m{}^*$

Superponiendo las figuras y separando los casos cuando:

- $k_1 < k_2$

- $k_1 > k_2$

1. $k_1 < k_2$

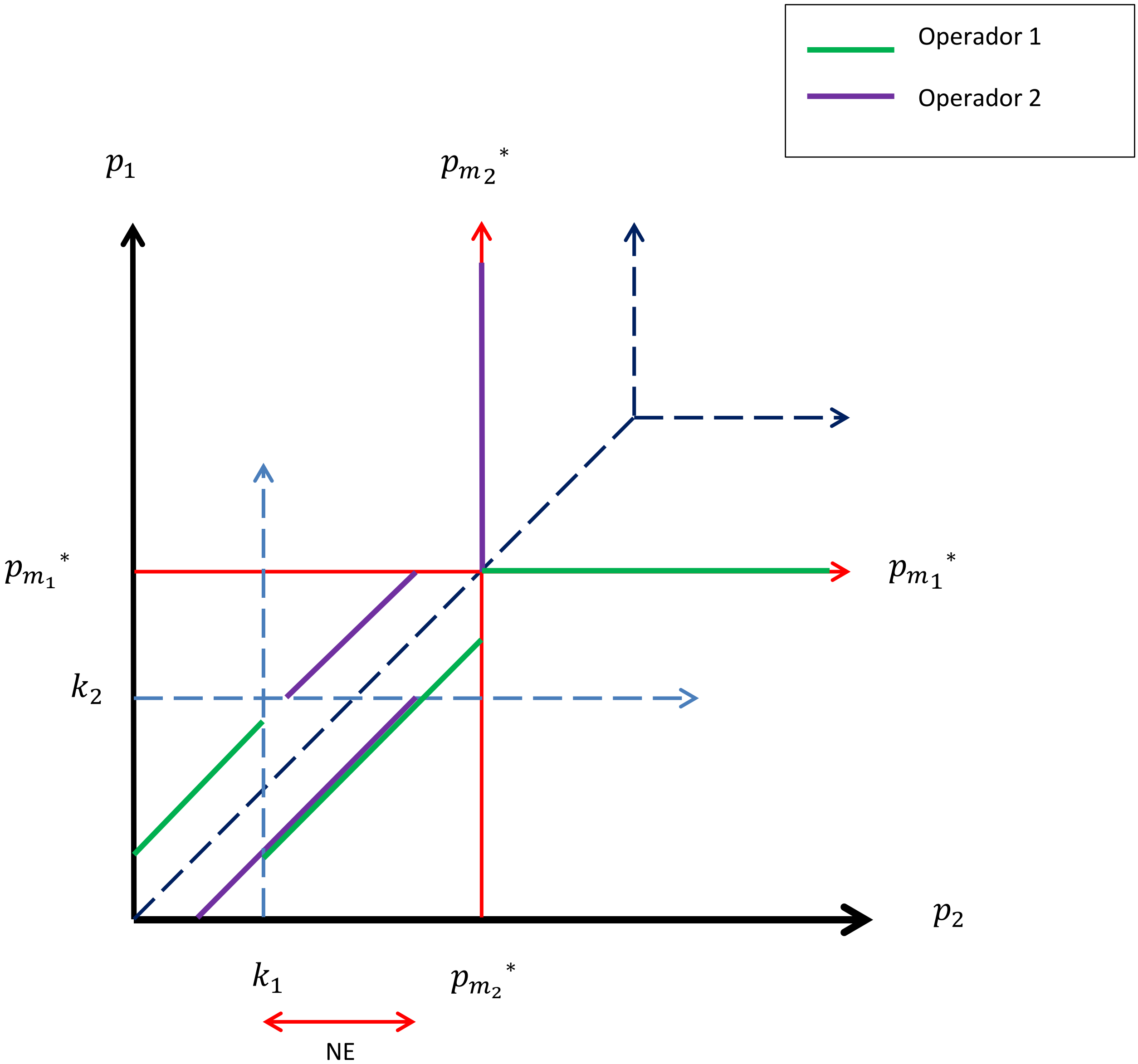

Figura 9. Mejor respuesta para Operador 1 y Operador 2 cuando $k_1 < k_2$

2. $k_1 > k_2$

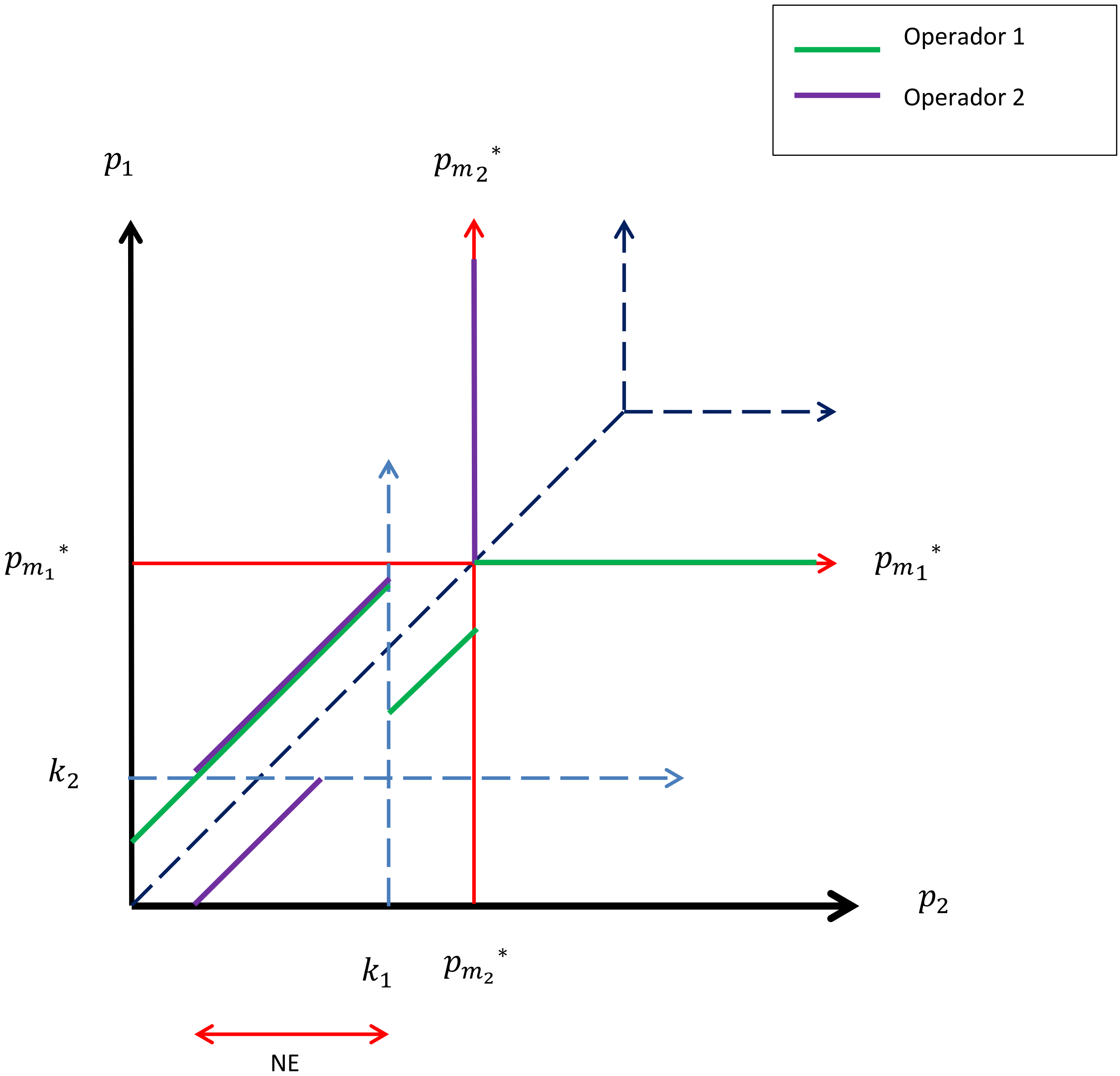

Figura 10. Mejor respuesta para Operador 1 y Operador 2 cuando $k_1 > k_2$

5. CONCLUSIONES

En un escenario monopolista, dado que el MNO es el único actor, éste obtendrá beneficios siempre y cuando su calidad del servicio supere siempre el precio ofertado.

Este precio, nunca deberá estar por debajo de los costes, ya que no solo no daría beneficios, sino que provocaría que el MNO tuviera resultados negativos.

Como se observa en la expresión obtenida de:

$$p_{m_1}{}^{*} = \frac{k + \sqrt{(k^2 + 3c^2\mu)}}{3}$$

Además de los costes y de la calidad del servicio, el precio óptimo también ser verá afectado por el valor de α, la sensibilidad al retraso, dado que cuanto mayor sea este parámetro, mayor será el retraso con el que se transmiten los paquetes.

En conclusión, los beneficios de un MNO dependen tanto de los precios como de los costes que les suponga ofrecer ese servicio, pero se debe tener otros factores en cuenta como la calidad del servicio, que viene dada por $c\mu^{\alpha}$ y el número de usuarios n_i , tal y como se describió en la ecuación (3).

En el caso de duopolio, tras el análisis realizado, y tal y como se observa en las figuras 9 y 10. Para que los operadores obtengan beneficios, los costes de cada uno no pueden ser mayores que los precios. Si esto ocurre, la mejor respuesta para el operador sería:

$$BR_1{}^1(p_2) = p_2 + \epsilon \quad si\, p_2 < k_1$$

$$BR_2{}^2 = p_1 + \epsilon \qquad si\, p_1 < k_2$$

Con lo que a los operadores no les interesaría que ningún usuario se suscribiera a su servicio, debido a que no obtendrían ningún tipo de beneficio.

Cuando los precios ofertados por un operador son mayores que el precio óptimo del monopolio, el otro operador podrá ofertar los servicios al precio monopolista, ya que, en ese caso, será su precio óptimo.

Cuando los precios de los operadores son iguales, los beneficios de éstos dependen, únicamente, de los costes de cada operador. Es decir, a precios iguales, que un operador tenga mayor o menor beneficio dependerá, de los costes que le supongan al operador ofrecer ese servicio, suponiendo que la calidad del servicio es la misma para los dos.

En las figuras 9 y 10, se ha representado la mejor respuesta de los operadores en los casos en los que:

$$k_1 < k_2$$

$$k_1 > k_2$$

Como se puede observar, el Equilibrio de Nash es diferente en cada caso. Para $k_1 < k_2$, el Equilibrio de Nash se obtiene cuando:

$$k_1 < p_2 < {p_{m_2}}^*$$

$$p_1 < k_2$$

Lo que en beneficios se refleja como:

$$\prod\nolimits_1^1(p_1) = \left[\mu - \left(\frac{p_2 - \epsilon}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_2 - \epsilon - \ k_1)$$

$$\prod\nolimits_2^1(p_2) = 0$$

Es decir, al operador 2, no le interesaría que ningún usuario se suscribiera a su servicio.

En el caso contrario, en el que $k_1 > k_2$, el Equilibrio de Nash viene dado cuando:

$$k_2 < p_1 < {p_{m_1}}^*$$

$$p_2 < k_1$$

Que, en lo que respecta a beneficios es:

$$\prod_2^2(p_2) = \left[\mu - \left(\frac{p_1 - \epsilon}{c}\right)^{1/\alpha}\right] \cdot (p_1 - \epsilon - k_2)$$

$$\prod_1^1(p_1) = 0$$

En este supuesto, sería el operador 1 al que no le interesaría que ningún usuario se suscribiera a su servicio.

El mantenimiento e instalación de nuevas infraestructuras y la obtención de licencias de uso del espectro supone un coste elevado para los MNO. Los MVNO palian una parte de estos costes debido a los pagos que deben hacer por el uso de las mismas, pero los costes a los que se enfrentan los MNO siguen siendo más altos, ya que el precio que pagan los MVNO está regulado por la CNMC. Podemos asumir que $k_1 > k_2$ y el Equilibrio de Nash es el que se representa en la gráfica 10, siendo el Operador 1 el MNo y el Operador 2 el MVNO.

6. LINEAS FUTURAS

Este análisis se puede ampliar teniendo en cuenta un nuevo jugador: las compañías "*Low Cost*" y el nuevo mercado que ha provocado su aparición.

Estas compañías no son MVNO puras, sino que aparecen de la necesidad de los MNO de recuperar un mercado que llevan perdiendo desde la aparición, a partir de 2006 de los MVNO.

Se podría analizar qué impacto tiene su aparición en el mercado y que supone su existencia.

Otro punto de estudio podría ser el mercado que están abriendo tanto los MVNE (Mobile Virtual Network Enable) y los MVNA (Mobile Virtual Network Aggregator). Tal y como se describe en [9], los MVNE y los MVNA no ofrecen servicios a los usuarios finales, sino que están orientados a ofrecer servicios a los MNO y MVNO. Es decir, estos nuevos tipos de operadores ofrecen todas las funcionalidades de las redes virtuales, como sucede con los MVNE, tanto directamente como haciendo de intermediario, (un MVNA se podría conectar a un MNO a través de él). Sin embrago, la función de un MVNA es agrupar de varios MNVO de pequeño tamaño con el fin de suscribirse a un MNO como un único MVNO.

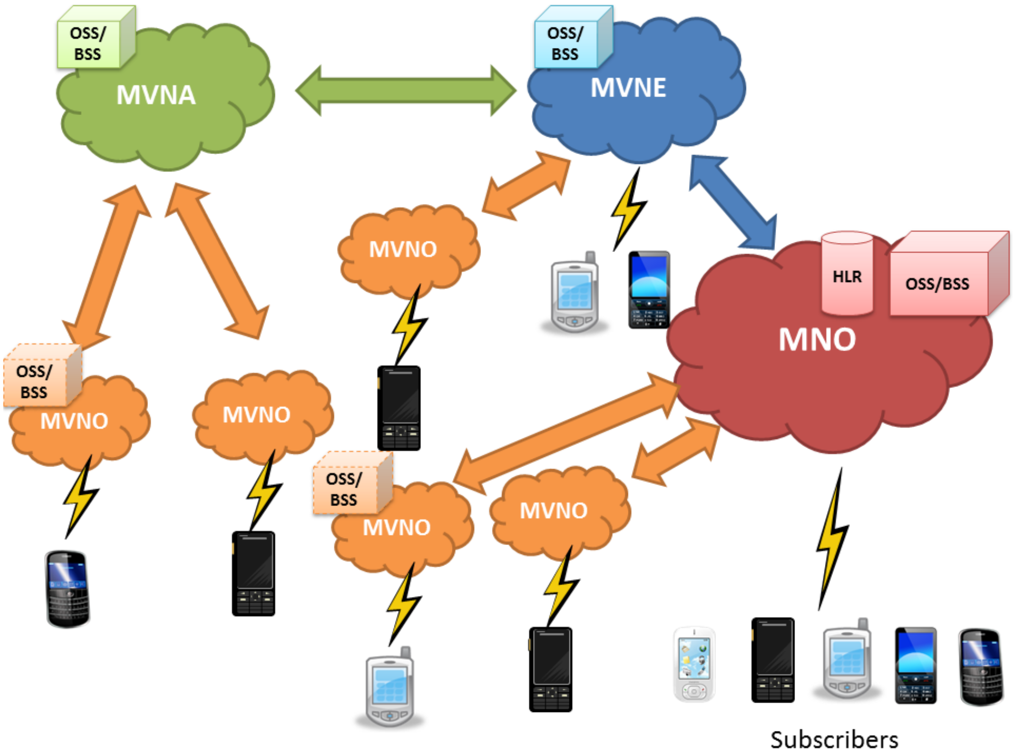

Figura 11. Relación entre MNO, MVNO, MVNE y MVNA

Como se observa en la figura 11. [10], los MNVE y MVNA están orientados a los operadores móviles y no a los usuarios finales.

7. REFERENCIAS y BIBLIOGRAFIA

[1]Erwin Soto Cabrera. “Análisis del Caso de Competencia entre dos operadores MNO y MVNO, basado en la Teoría de Colas”.

[2]Luis Guijarro, Vicent Pla y Bruno Tuffin. “Entry game under opportunistic access in cognitive radio networks: a priority queue model”.

[3]Marc Balon y Bernard Liau. “Mobile Virtual Network Operator”.

[4]Economía y Regulación de las Telecomunicaciones. Asignatura impartida por Luis Guijarro.

[5] http://economipedia.com/definiciones/equilibrio-de-nash.html

[6]https://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia/que-es-el-equilibrio-de-nash

[7]http://omicrono.elespanol.com/2012/05/las-23-omv-operadores-moviles-virtuales-que-hay-en-espana-los-causantes-del-desplome-de-precios/

[8]http://www.telesemana.com/blog/2017/04/17/desregularizar-el-mercado-mvno-un-logro-en-espana-un-ensueno-en-latinoamerica/

[9] https://www.linkedin.com/pulse/difference-between-mno-mvno-mvna-mvne-s-s-bhowmick/

[10] http://blog.3g4g.co.uk/2014/04/mno-mvno-mvna-mvne-different-types-of.html