Maniobras orbitales impulsivas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Índice general

1 Introducción

Las maniobras orbitales permiten desplazar una nave o satélite de una órbita a otra. Estos cambios pueden ser drásticos como la transferencia desde una órbita baja de parking a una trayectoria interplanetaria o bastante pequeños como las etapas finales de un acercamiento o rendezvous. Las maniobras orbitales pueden ser **impulsivas** (empuje de muy corto periodo) o no impulsivas (empuje aplicado durante un largo periodo). Este artículo presenta una descripción de las maniobras orbitales impulsivas y el coste de combustible requerido para su ejecución.

Para la deducción y aplicación de las ecuaciones vamos a considerar conocidas ciertas constantes y algunos conceptos:

- Cualquier nave o satélite tiene una masa muy pequeña comparada con la del Sol o con la de un planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante $\mu = G(M+m) = GM$ que para el caso de la Tierra resulta ser

$$\mu_T = 398\,600.5\ km^3/s^2.$$

- La Tierra no es esférica, pero en ocasiones por aproximación si se considera que tiene esa forma, utilizando en este caso como radio terrestre el radio ecuatorial

$$R_T = 6378\ km.$$

- La aceleración de la gravedad en la Tierra varía con la altura pero en este artículo se considera la gravedad al nivel del mar

$$g_0 = 9.81 m/s^2 = 0.00981 km/s^2$$

- Es necesario recordar que en cualquier órbita kepleriana el momento angular específico, h es constante y que en cualquier posición se verifica que $h = r\, v_\perp$, siendo r la distancia al foco y $v_\perp$ la velocidad transversal en esa posición. Si aplicamos esa propiedad a las posiciones del **apogeo** y del **perigeo**, en las que $v = v_\perp$, se obtiene:

$$v_a = \frac{h}{r_a} \qquad \text{y} \qquad v_p = \frac{h}{r_p} \tag{1}$$

- Conviene acordarse que el **impulso específico** de un motor es el período en **segundos** durante el cual 1 kg de masa de propergol (combustible y oxidante juntos) producirá un empuje de 1 kg de fuerza:

$$I_{sp} = \frac{\text{Empuje}}{\text{Tasa de peso de consumo de fuel a nivel del mar}} \tag{2}$$

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Saber calcular la cantidad de propelente necesaria para ejecutar un determinado impulso conociendo el impulso específico de un propulsor.
- Calcular qué impulso es necesario para aumentar o disminuir el radio del perigeo o el del apogeo de una órbita elíptica, dónde aplicarlo y en qué dirección.

3 Maniobras impulsivas

Hacer maniobras requiere del encendido de motores abordo del vehículo espacial. Estas maniobras se consideran **impulsivas** cuando el motor se enciende en una ráfaga corta para obtener el cambio en la magnitud y/o en la dirección del vector velocidad de forma instantánea. Durante una maniobra impulsiva la posición de la nave es fija, solo cambia el vector velocidad. Considerar un impulso instantáneo permite evitar la resolución de las ecuaciones del movimiento incluyendo el empuje del motor. Estas idealizaciones son válidas para encendido de cohetes con un elevado empuje durante periodos muy cortos de tiempo.

Cada maniobra impulsiva resulta de un cambio, Δv, en la velocidad de la nave o satélite. Ese Δv puede representar un cambio en la magnitud (pumping) o en la dirección (cranking) del vector velocidad o en ambos.

La magnitud Δv está relacionada con la cantidad de propelente consumido Δm en la maniobra. En el espacio libre, despreciando las fuerzas del drag y de la gravedad la ecuación del motor cohete de Tsiolkovski tiene la aproximación.

$$\Delta v = I_{sp} g_0 \ln \frac{m}{m_f}$$

donde m es la masa de la nave antes del encendido [1] de motores, g_0 es la aceleración de la gravedad a nivel del mar, m_f es la masa al apagar[2] el motor e I_{sp} es el impulso específico del propulsor.

Despejando en esta igualdad el cociente de masas se obtiene

$$\frac{m}{m_f} = e^{\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \tag{3}$$

y denotando por $\Delta m = m - m_f$ a la cantidad de propelente gastado para conseguir Δv se deduce que

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{m - m_f}{m} = 1 - \frac{m_f}{m} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \tag{4}$$

[1] $m = m_E + m_P + m_{PL}$, E: Estructura, P: Propelente y PL: Carga de pago o Payload
[2] $m_f = m - m_P = m_E + m_{PL}$

Ejemplo 3.1 *Supongamos una nave orbitando alrededor de la Tierra utilizada para llevar Payloads desde una órbita LEO a una GEO. Antes de cada vuelo la nave es reabastecida en la órbita LEO con el propelente necesario para el vuelo de ida y el de regreso. El ΔV necesario para transferir de LEO a GEO es $4.1\,km/s$ y el impulso específico del sistema de propulsión es $I_s = 380\,s$. Si para transportar una Payload de $2600\,kg$ el viaje de ida requiere 5 veces más propelente que el viaje de vuelta, ¿cuál es la masa en vacío del vehículo y el propelente necesario?*

Solución: Considerando m_P la masa de propelente necesaria para hacer el **viaje de vuelta** la expresión (3) para ese trayecto quedará

$$\frac{m}{m_f} = \frac{m_E + m_P}{m_E} = e^{\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \rightarrow m_P = m_E \left(e^{\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} - 1 \right)$$

Como en el **viaje de ascenso** de LEO a GEO el propelente es cinco veces más, la expresión $\frac{m}{m_f}$ para ese trayecto será

$$\frac{m}{m_f} = \frac{m_E + 5m_P + m_P + m_{PL}}{m_E + m_P + m_{PL}} = e^{\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \rightarrow$$

$$\frac{m_E + 6m_E \left(e^{\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} - 1 \right) + m_{PL}}{m_E + m_E \left(e^{\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} - 1 \right) + m_{PL}} = e^{\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \rightarrow$$

$$\cdots$$

$$m_E = \frac{m_{PL}}{\left(5 - e^{\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \right)} = \frac{2600}{\left(5 - e^{\frac{4.1}{380\dot{0}.00981}} \right)} = \boxed{1302.41\,kg}$$

sustituyendo ahora en la expresión del propelente obtenida antes resulta

$$m_P = m_E (e^{\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} - 1) = 1302.41 \left(e^{\frac{4.1}{380 \cdot 0.000981}} - 1 \right) = 2609.63\,kg$$

La cantidad total de propelente es

$$5m_P + m_P = 6 \cdot 2609.63 = \boxed{15657.8\,kg}$$

EJERCICIO 3.1 *Considerando las características de la nave del ejemplo anterior ¿cuál será el consumo de propelente necesario para llevar una carga de $3467.2\,kg$ de órbita LEO a GEO? y ¿qué porcentaje de combustible se quema en el viaje de ida?*

Sol.: $m_{P_1} + m_{P_2} = 17392.1\,kg$ y $\frac{m_{P_1}}{m_{P_1} + m_{P_2}} = 0.85 = 85\,\%$

4 Ejemplos

Las maniobras orbitales impulsivas constan de uno o más impulsos para hacer cambios en la órbita. Ejemplos de maniobras monoimpulsivas pueden ser las que permiten aumentar o disminuir la altura del apogeo o del perigeo. En estos casos se aprovecha una propiedad interesante del periapsis y apoapsis: si se aumenta o disminuye la velocidad al pasar por uno de estos puntos, la posición del periapsis o apoapsis se mantiene en la nueva órbita.

4.1 Maniobra de cambio de altura del perigeo

Una de las maniobras más utilizadas en Mecánica orbital es el aumento (disminución) de la altura del perigeo de una órbita elíptica. Esta maniobra es utilizada frecuentemente para reducir la fricción con la atmósfera de satélites en órbitas LEO como la ISS.

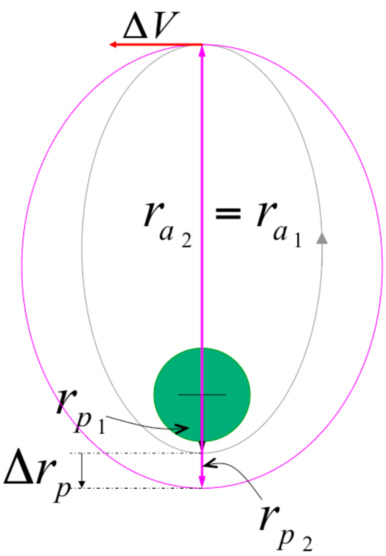


Figura 1: Para subir el perigeo hay que aplicar un impulso tangencial en el apogeo.

Supongamos una órbita de la que conocemos sus elementos de tamaño y forma, a y e en la que queremos aumentar la altura del perigeo en una distancia Δr_p (ver figura 1).

A partir de a y e podemos determinar los radios del perigeo y apogeo mediante:

$$r_a = a + c = a + ae = a(1+e)$$
$$r_p = a - c = a - ae = a(1-e)$$

de donde se puede comprobar que

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

Además en cualquier órbita

$$r_p = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e} = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}} = \frac{\frac{h^2}{\mu}(r_a + r_p)}{2r_a} \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_a\, r_p}{r_a + r_p}}} \tag{5}$$

que en el caso de una órbita circular de radio r, ($r_a = r_p = r$) queda reducida a:

$$h = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r\,r}{r+r}} = h = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r^2}{2r}} \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \sqrt{\mu\, r}}$$

Para aumentar r_p mediante un impulso Δv deberemos dar este impulso en el único punto en común de la órbita inicial y final, es decir, en el apogeo. Además para mantener la misma línea de ápsides el impulso deberá ser en la dirección del movimiento o lo que es lo mismo, tangencial (ver figura 1).

La magnitud del impulso se determina con la expresión de la velocidad en el apogeo, (1):

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{h_2}{r_{a_2}} - \frac{h_1}{r_{a_1}} = \boxed{\frac{h_2}{r_a} - \frac{h_1}{r_a}} \tag{6}$$

Se puede obtener una expresión en función de r_a, r_p y Δr_p utilizando la epresión (5):

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{\sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_{a_2} r_{p_2}}{r_{a_2}+r_{p_2}}}}{r_a} - \frac{\sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_{a_1} r_{p_1}}{r_{a_1}+r_{p_1}}}}{r_a} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_a}}\left(\sqrt{\frac{r_p + \Delta r_p}{r_a + r_p + \Delta r_p}} - \sqrt{\frac{r_p}{r_a + r_p}}\right)$$

Notemos que para reducir el radio del perigeo se pueden utilizar estas expresiones resultando un Δv negativo lo que indica que el impulso es en sentido contrario al movimiento.

Ejemplo 4.1 *Un satélite con una masa de $2000\,kg$ se encuentra orbitando alrededor de la Tierra siendo el semieje mayor $a = 8778\,km$, la excentricidad $e = 0.3$ y la anomalía verdadera en ese instate $\theta = 30^o$.*
Se pretende elevar el perigeo una distancia $\Delta r_p = 90\,km$. Calcula:
a) *La maniobra necesaria para conseguir esa elevación*
b) *¿Cuánto tiempo hay que esperar para dar el impulso?*
c) *Si el impulso específico es $I_{sp} = 300\,s$, ¿cuánto propelente será necesario?*

Solución:

a) En primer lugar calculamos los radios del apogeo y perigeo de la órbita inicial:

$$r_a = a(1+e) = 8778\,(1+0.3) = 11411.4\,km$$
$$r_p = a(1-e) = 8778\,(1-0.3) = 6144.6\,km$$

Con estos valores y la expresión (5) se pueden hallar los momentos específicos de las órbitas inicial y final:

$$h_1 = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_a\, r_p}{r_a + r_p}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5}\sqrt{\frac{11411.4 \cdot 6144.6}{11411.4 + 6144.6}} = 56427.0\,km^2/s^2$$

$$h_2 = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_a\,(r_p + \Delta r_p)}{r_a + r_p + \Delta r_p}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5}\sqrt{\frac{11411.4\,(6144.6 + 90)}{11411.4 + 6144.6 + 90}} = 56693.6\,km^2/s^2$$

Por tanto

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{h_2}{r_a} - \frac{h_1}{r_a} = \frac{56693.6}{11411.4} - \frac{56427.0}{11411.4} = 4.96816 - 4.94479 = \boxed{0.02336\,km/s}$$

b) Para calcular el tiempo de espera t_w, es necesario conocer el periodo orbital

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{8778^3}{398600.5}} = 8184.73\,s,$$

y utilizar la relación entre el tiempo orbital y la anomalía verdadera (ecuación de Kepler).

$$\text{Si } \theta = 30^\circ \rightarrow E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 0.388289\,rad = 22.2473^\circ \rightarrow$$
$$M = E - e\sin E = 0.274707\,rad = 15.7396^\circ \rightarrow$$
$$t - t_p = \frac{M\cdot T}{2\pi} = \frac{0.274707\cdot 8184.73}{2\pi} = 357.845\,s$$

Como el tiempo entre apogeo y perigeo es la mitad del periodo orbital, $t_a - t_p = \frac{T}{2}$, el tiempo de espera hasta el apogeo es:

$$t_w = \frac{T}{2} - (t - t_p) = \frac{8184.73}{2} - 357.845 = \boxed{3734.52\,s}$$

c) Conocido el impulso se puede calcular la proporción de masa necesaria para su ejecución mediante la expresión (4):

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp}g_0}} = 1 - e^{-\frac{0.02336}{300\cdot 0.00981}} = 0.79\,\%$$

que teniendo en cuenta la masa del satélite, se obtiene la cantidad de propelente

$$\Delta m = 0.79\,\%\cdot 2000 = \boxed{15.81\,kg}$$

EJERCICIO 4.1 *En el ejemplo anterior, ¿cuál sería la maniobra necesaria para **reducir** la altura del perigeo en 90 km?*

Sol.: $\Delta V = -0.02373\,km/s$

4.2 Maniobra de cambio de altura del apogeo

Otra maniobra monoimpulsiva es el aumento/disminución de la **altitud del apogeo**.

Esta maniobra se utiliza para variar la excentricidad de una órbita o combinada con otras para efectuar transferencias interorbitales.

El impulso necesario para hacer esta maniobra es similar al cambio de altura del perigeo. Del mismo modo que se dedujo en la subsección anterior, el impulso debe aplicarse en el único punto en común entre la órbita inicial y final, en este caso, el perigeo. La dirección también debe ser tangencial, en la dirección de $\vec{v}$ y la magnitud se calcula con la misma expresión (6) pero aplicada en el perigeo:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{h_2}{r_{p_2}} - \frac{h_1}{r_{p_1}} = \boxed{\frac{h_2}{r_p} - \frac{h_1}{r_p}}$$

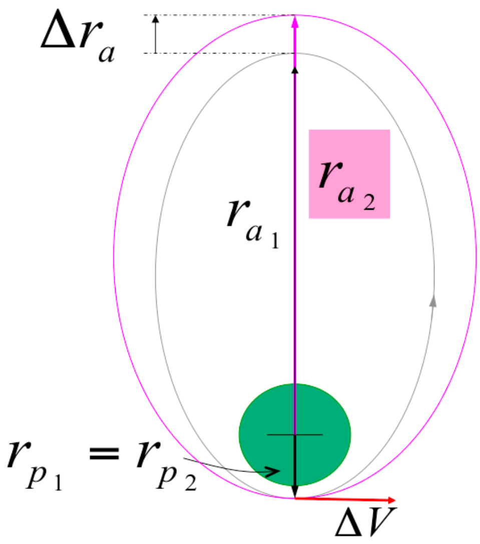


Figura 2: Para subir el apogeo el impulso se aplica en el perigeo

Ejemplo 4.2 *Calcula la maniobra necesaria para conseguir elevar el apogeo de la órbita del satélite del ejemplo anterior una distancia $\Delta r_a = 90\,km$. Halla también el tiempo de espera y el propelente necesario para la maniobra.*

Solución:

El valor de $h_1 = 56427.0\,km^2/s^2$ ya ha sido calculado en el ejemplo anterior pero h_2 ahora es diferente:

$$h_2 = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{(r_a + \Delta r_a)\,r_p}{r_a + \Delta r_a + r_p}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5}\sqrt{\frac{(11411.4 + 90)\,6144.6}{11411.4 + 90 + 6144.6}} = 56504.5\,km^2/s^2$$

Por tanto

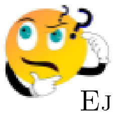
$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{h_2}{r_p} - \frac{h_1}{r_p} = \frac{56504.5}{6144.6} - \frac{56427.0}{6144.6} = 9.19579 - 9.18319 = \boxed{0.01260\,km/s}$$

Para obtener el tiempo de espera hay que tener en cuenta que entre dos pasos por el perigeo el tiempo transcurrido es igual al periodo $T = 8184.73\,s$ y que $t - t_p = 357.845\,s$ para $\theta = 30°$ habiendo sido calculados ambos valores en el ejemplo anterior. Así

$$t_w = T - (t - t_p) = 8184.73 - 357.845 = \boxed{7826.9\,s}$$

Para estimar la cantidad de propelente volvemos a usar (4):

$$\Delta m = m\left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}}\right) = 2000\left(1 - e^{-\frac{0.0126}{300 \cdot 0.00981}}\right) = 2000 \cdot 0.43\,\% = \boxed{8.545\,kg}$$



EJERCICIO 4.2 *En el ejemplo anterior, ¿cuál sería la maniobra necesaria para* ***reducir*** *la altura del apogeo en $90\,km$?*

Sol.: $\Delta V = -0.01275\ km/s$

5 Cierre

En este artículo se ha definido el concepto de maniobra impulsiva y se ha presentado el método de obtención de la cantidad de propelente necesaria para conseguir un determinado ΔV. Se ha presentado una sección con dos ejemplos de maniobras impulsivas: Variación de la altura del perigeo y Variación de la altura del apogeo.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales y reforzados con la proposición de ciertos ejercicios.

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, 3ª edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] Brown, Charles D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[4] Prussing, John E. and Conway, Bruce A.,*Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[5] Chobotov, Vladimir A.,*Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.